

Аделна форма на Теоремата на Riemann-Roch

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1. Нека F е функционално поле на една променлива, а $\mathcal{P}$ е множеството на класовете дискретни нормирания на F . Тогава множеството

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_F = \left\{ \alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}} \in \prod_{v \in \mathcal{P}} F \mid \alpha_v \in \mathcal{O}_v \text{ с изключение на краен брой } v \in \mathcal{P} \right\}$$

се нарича аделно пространство на F .

Аделното пространство $\mathcal{A}$ е линейно пространство над полето от константи k на F , защото за произволни $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ имаме $\alpha_v, \beta_v \in \mathcal{O}_v$ за всички $v \in \mathcal{P}$ с изключение на краен брой. В резултат, $\alpha_v + \beta_v \in \mathcal{O}_v$ и $\alpha + \beta \in \mathcal{A}$. Аналогично, за $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\lambda \in k$ с $\alpha_v \in \mathcal{O}_v$ следва $\lambda \alpha_v \in \mathcal{O}_v$, откъдето $\lambda \alpha \in \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. Аделната система на дивизор $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v \in \text{Div}(F)$ е множеството

$$\mathcal{A}(D) = \{ \alpha \in \mathcal{A} \mid v(\alpha_v) + n_v \geq 0 \text{ за } \forall v \in \mathcal{P} \}.$$

Аделната система на дивизор $D \in \text{Div}(F)$ е линейно пространство над полето от константи k на F . Наистина, за произволни $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(D)$ е изпълнено

$$v(\alpha_v + \beta_v) + n_v \geq \min(v(\alpha_v), v(\beta_v)) + n_v \geq 0,$$

съгласно $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$, $v(\beta_v) + n_v \geq 0$. Следователно $\alpha + \beta \in \mathcal{A}(D)$. От $v(0) = \infty$ следва $0 \in \mathcal{A}(D)$. От $v(\lambda \alpha_v) = v(\alpha_v)$ за $\lambda \in k^*$ получаваме $\lambda \alpha \in \mathcal{A}(D)$ за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(D)$, $\forall \lambda \in k^*$.

Функционалното поле F има диагонално влагане

$$\Delta : F \longrightarrow \mathcal{A},$$

$$\Delta(x) = (x)_{v \in \mathcal{P}} \in \prod_{v \in \mathcal{P}} F.$$

Твърдим, че $\mathcal{A}(D) \cap \Delta(F) = \Delta(\mathcal{L}(D))$. Наистина, ако $x \in \mathcal{L}(D)$ за $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$, то $\text{div}(x) + D \geq 0$, откъдето $v(x) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$ и $\Delta(x) \in \mathcal{A}(D)$. Обратно, ако $\Delta(x) \in \mathcal{A}(D)$, то $v(x) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$, откъдето $\text{div}(x) + D \geq 0$ и $x \in \mathcal{L}(D)$.

ТВЪРДЕНИЕ 14.3. Нека F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k , а $G \geq D$ са дивизори на F . Тогава аделното пространство $\mathcal{A}(D)$ на D е подпространство на аделното пространство $\mathcal{A}(G)$ на G и

$$\dim_k (\mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D)) = \deg(G) - \deg(D). \quad (14.1)$$

Доказателство: Ако $G = \sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v$, $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$, то $G \geq D$ е еквивалентно на $m_v \geq n_v$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Оттук следва включването $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(G)$, защото от $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$ получаваме $v(\alpha_v) + m_v = v(\alpha_v) + n_v + (m_v - n_v) \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$.

Достатъчно е да докажем 14.1 за $G = D + w$ с $w \in \mathcal{P}$, защото тогава с индукция по броя на събираемите w на $G - D \geq 0$, от

$$\dim_k (\mathcal{A}(G')/\mathcal{A}(D)) = \deg(G') - \deg(D) \quad \text{и} \quad \dim_k (\mathcal{A}(G' + w)/\mathcal{A}(G')) = \deg(w)$$

следва

$$\begin{aligned} \dim_k (\mathcal{A}(G' + w)/\mathcal{A}(D)) &= \\ &= \dim_k (\mathcal{A}(G' + w)/\mathcal{A}(G')) + \dim_k (\mathcal{A}(G')/\mathcal{A}(D)) = \deg(G' + w) - \deg(D). \end{aligned}$$

За да проверим $\dim_k (\mathcal{A}(D + w)/\mathcal{A}(D)) = \deg(w)$ за $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ избираме $u \in F$ с $w(u) = n_w + 1$. Тогава за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(D + w)$ произведението $\alpha_w u \in \mathcal{O}_w$, защото $w(\alpha_w u) = w(\alpha_w) + w(u) = w(\alpha_w) + n_w + 1 \geq 0$. Това дава възможност да разгледаме изображението

$$\psi : \mathcal{A}(D + w) \longrightarrow \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w,$$

$$\psi(\alpha) = \alpha_w u + \mathfrak{M}_w.$$

Непосредствено се проверява, че ψ е k -линейно и ядрото

$$\ker(\psi) = \{\alpha \in \mathcal{A}(D) \mid w(\alpha_w u) \geq 1\} =$$

$$= \{\alpha \in \mathcal{A}(D + w) \mid w(\alpha_w) + n_w \geq 0, \quad v(\alpha_v) + n_v \geq 0 \quad \text{за} \quad \forall v \in \mathcal{P} \setminus \{w\}\} = \mathcal{A}(D).$$

Твърдим, че образът $\text{im}(\psi) = \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w$. По-точно, за $\forall x + \mathfrak{M}_w \in \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w$ трябва да докажем, че съществува $\alpha \in \mathcal{A}(D + w)$ с $\alpha_w u - x \in \mathfrak{M}_w$. За целта избираме $\alpha_w = \frac{x}{u} \in F$ и проверяваме, че $w(\alpha_w) + n_w + 1 = w(x) - w(u) + n_w + 1 = w(x) \geq 0$. За $\forall v \in \mathcal{P} \setminus \{w\}$ вземаме такова $\alpha_v \in F$, че $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$. В резултат, получаваме $\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}} \in \mathcal{A}(D + w)$ с $\alpha_w u - x = 0 \in \mathfrak{M}_w$. Изоморфизмът

$$\mathcal{A}(D + w)/\mathcal{A}(D) \simeq \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w$$

на k -линейни пространства доказва, че

$$\dim_k (\mathcal{A}(D + w)/\mathcal{A}(D)) = \dim_k (\mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w) = \deg(w),$$

Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 14.4. За произволни дивизори $G \geq D$ на функционално поле F на една променлива със свършено поле от константи k е в сила точната редица

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F) \longrightarrow 0$$

от k -линейни пространства.

Оттук,

$$\dim_k (\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = (\deg(G) - \deg(D)) - (l(G) - l(D)).$$

Доказателство: Диагоналното влагане $\Delta : F \rightarrow \mathcal{A}$ се ограничава до k -линейно влагане $\Delta : \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{A}(G)$ и индуцира k -линейно изображение

$$\varphi' : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D),$$

$$\varphi'(x) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathcal{L}(G).$$

Ядрото

$$\ker(\varphi') = \{x \in \mathcal{L}(G) \mid \Delta(x) \in \mathcal{A}(D) \cap \Delta(F) = \Delta(\mathcal{L}(D))\} = \mathcal{L}(D),$$

така че φ' индуцира k -линейно влагане

$$\varphi : \mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D),$$

$$\varphi(x + \mathcal{L}(D)) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathcal{L}(G).$$

Разглеждаме изображението

$$\psi' : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F),$$

$$\psi'(\alpha) = \alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) \quad \text{за } \forall \alpha \in \mathcal{A}(G).$$

Понеже ядрото $\ker(\psi') \supseteq \mathcal{A}(D)$ съдържа аделната система $\mathcal{A}(D)$ на D , можем да индуцираме k -линейно изображение

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D) &\longrightarrow \mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F), \\ \psi(\alpha + \mathcal{A}(D)) &= \alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) \quad \text{за } \forall \alpha \in \mathcal{A}(D), \end{aligned}$$

което не винаги е влягане.

Твърдим, че $\text{im}(\psi) \subseteq \ker(\psi)$, защото

$$\psi\varphi(x + \mathcal{L}(D)) = \psi(\Delta(x) + \mathcal{A}(D)) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$$

за $\forall x \in \mathcal{L}(G)$. За включването $\ker(\psi) \subseteq \text{im}(\varphi)$ забелязваме, че ядрото $\ker(\psi)$ на ψ се състои от $\alpha + \mathcal{A}(D)$ с $\alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$. Това изисква $\alpha \in \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$ или съществуване на $\beta \in \mathcal{A}(D)$ и $x \in F$ с $\alpha = \beta + \Delta(x)$. Тогава

$$\varphi(x + \mathcal{L}(D)) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) = \alpha - \beta + \mathcal{A}(D) = \alpha + \mathcal{A}(D)$$

е от образа на φ . Това доказва $\ker(\psi) \subseteq \text{im}(\varphi)$ и $\text{im}(\varphi) = \ker(\psi)$.

Изображението ψ е върху $\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)$, защото за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(G)$ имаме $\alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \psi(\alpha + \mathcal{A}(D))$, Q.E.D.

ЛЕМА 14.5. *Нека F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k , а r е такова естествено число, че Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство $l(D) = \deg(D) - g + 1$ за всеки дивизор $D \in \text{Div}(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$. Тогава*

$$\mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A} \quad \text{за } \forall D \in \text{Div}(F), \quad \deg(D) \geq r.$$

Доказателство: Твърдим, че за $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ съществува дивизор $G \geq D$ с $\alpha \in \mathcal{A}(G)$. По-точно, ако $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ и $\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}}$, то за всеки клас $v \in \mathcal{P}$ от дискретни

нормирания твърдим съществуването на цяло число $m_v \geq n_v$ с $v(\alpha_v) + m_v \geq 0$. За целта е достатъчно да изберем $m_v \geq \max(-v(\alpha_v), n_v)$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Съгласно Твърдение 14.4,

$$\dim_k (\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = (\deg(G) - \deg(D)) - (l(G) - l(D)). \quad (14.2)$$

По предположение, Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство за D , т.е. $l(D) = \deg(D) - g + 1$. Следователно за всички $G \geq D$ е изпълнено $l(G) = \deg(G) - g + 1$. Оттук $l(D) - \deg(D) = l(G) - \deg(G)$ и (14.2) приема вида

$$\dim_k (\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = 0.$$

В резултат, $\mathcal{A}(G) + \Delta(F) = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$ и $\alpha \in \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$. Това доказва включването $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$. Комбинирайки с $\mathcal{A}(D) + \Delta(F) \subseteq \mathcal{A}$ получаваме $\mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A}$ за всеки дивизор $D \in \text{Div}(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 21. (Теорема на Riemann-Roch в аделна форма) *Ако $D \in \text{Div}(F)$ е дивизор на функционално поле F на една променлива със свършено поле от константи k , то*

$$l(D) = \deg(D) - g + 1 + \dim_k (\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)).$$

Доказателство: Избираме дивизор $D_0 \geq D$ от степен $\deg(D_0) \geq r$. Тогава Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство за D_0 , $l(D_0) = \deg(D_0) - g + 1$ и $\mathcal{A}(D_0) + \Delta(F) = \mathcal{A}$ по Лема 14.5. Съгласно Твърдение 14.4 имаме

$$\dim_k (\mathcal{A}(D_0) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = [\deg(D_0) - l(D_0)] - [\deg(D) - l(D)].$$

Следователно

$$\dim_k (\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = l(D) - \deg(D) + g - 1,$$

Q.E.D.