

Дивизори. Теорема на Riemann. Род на крива.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Нека F е функционално поле на една променлива, а $\mathcal{P}$ е множеството на класовете на еквивалентност на дискретните нормирания на F . Тогава $\mathbb{Z}$ -линейните комбинации

$$D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v, \quad n_v \in \mathbb{Z}$$

с краен носител се наричат дивизори на F .

Множеството $\text{Div}(F)$ на дивизорите на F е $\mathbb{Z}$ -модул или абелева група.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. Дивизорът $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ е ефективен, ако $n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Степената на дивизор $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ е

$$\deg(D) = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v \deg(v),$$

където $\deg(v) = [\mathcal{O}_v / \mathfrak{M}_v : k]$ са степените на класовете дискретни нормирания v на F .

Степената на дивизор е хомоморфизъм на $\mathbb{Z}$ -модули, защото

$$\begin{aligned} \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v + \sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v\right) &= \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} (n_v + m_v) v\right) = \sum_{v \in \mathcal{P}} (n_v + m_v) \deg(v) = \\ &= \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v \deg(v) + \sum_{v \in \mathcal{P}} m_v \deg(v) = \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v\right) + \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v\right). \end{aligned}$$

Множеството $\text{Div}^0(F) = \ker(\deg)$ на дивизорите от степен 0 е $\mathbb{Z}$ -подмодул на $\text{Div}(F)$.

Дивизорът на нулите на $x \in F$ е

$$(x)_0 = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x) v,$$

а дивизорът на полюсите е

$$(x)_\infty = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) < 0} [-v(x)] v.$$

ЛЕМА 13.4. Ако F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k и $x \in F \setminus k$, то

$$\deg(x)_0 \leq [F : k(x)].$$

Доказателство: Елементът $x \in F \setminus k$ е трансцендентен над k , съгласно алгебричната затвореност на k в F . Следователно разширението $F \supseteq k(x)$ е крайно и можем да означим с $n = [F : k(x)]$ степента му. Да допуснем, че

$$n < \deg(x)_0 = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x)v.$$

Тогава съществува крайна сума

$$\sum_{j=1}^r v_j(x) \deg(v_j) > n, \quad (13.1)$$

защото ако всички крайни суми са $\leq n$, то и границата им е $\leq n$. Съгласно Апроксимационната Теорема 8, за $\forall 1 \leq j \leq r$ съществува $y_j \in F$, така че

$$v_j(y_j) = -1, \quad v_i(y_j) = 0 \quad \text{за } \forall i \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j\}.$$

Тогава $t_j = y_j^{-1}$ са локални параметри на пръстените $\mathcal{O}_{v_j}$ на класовете дискретни нормирания v_j и $v_i(t_j) = 0$ за $\forall i \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j\}$. Избираме базиси

$$\{\alpha_{js} + \mathfrak{M}_{v_j} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j) = \dim_k \mathcal{O}_{v_j}/\mathfrak{M}_{v_j}\}$$

на полетата от остатъци $\mathcal{O}_{v_j}/\mathfrak{M}_{v_j}$ над k с $\alpha_{js} \in \mathcal{O}$ за сечението $\mathcal{O} = \cap_{j=1}^r \mathcal{O}_{v_j}$. За целта трябва да проверим, че за всяко $\beta \in \mathcal{O}_{v_j}$ съществува $\alpha \in \mathcal{O}$ с $\beta - \alpha \in \mathfrak{M}_{v_j}$. Това следва от Апроксимационната Теорема 8, съгласно която за произволен елемент $\beta \in \mathcal{O}_{v_j}$ съществува $\alpha \in F$ с

$$v_j(\alpha - \beta) \geq 1 \quad \text{и} \quad v_i(\alpha) \geq 0 \quad \text{за } \forall 1 \leq i \leq r, \quad i \neq j.$$

Достатъчно е да докажем линейната независимост на

$$\{\alpha_{js} t_j^{-i} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j), \quad 1 \leq i \leq v_j(x), \quad 1 \leq j \leq r\}$$

над $k(x)$, за да получим $\sum_{j=1}^r v_j(x) \deg(v_j) \leq [F : k(x)]$, противно на (13.1). Да допуснем, че съществуват $h_{j,i,s}(x) \in k(x)$ с

$$\sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} \sum_{i=1}^{v_j(x)} h_{j,i,s}(x) \alpha_{js} t_j^{-i} = 0 \quad (13.2)$$

и поне едно $h_{j_0,i_0,s_0}(x) \neq 0$. След почленно умножение с най-малкия общ знаменател на рационалните функции $h_{j,i,s}(x)$ на x можем да считаме, че $h_{j,i,s}(x) \in k[x]$ са полиноми на x . Представяме полиномите

$$h_{j,i,s}(x) = k_{j,i,s} + x g_{j,i,s}(x)$$

като суми на свободните им членове $k_{j,i,s} = h_{j,i,s}(0)$ и полиноми с частни $g_{j,i,s}(x)$ при деление с x . Разбиваме (13.2) в две суми

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} k_{j,i,s} \alpha_{js} t_j^{-i} + x \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} g_{j,i,s}(x) \alpha_{js} t_j^{-i} = 0. \quad (13.3)$$

От $\alpha_{j,s} \in \mathcal{O}_{v_j} \setminus \mathfrak{M}_{v_j} = \mathcal{O}_{v_j}^*$ следва

$$A_{j,i} = \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} k_{j,i,s} \alpha_{js} \in \mathcal{O}_{v_j}.$$

Съгласно линейната независимост на $\{\alpha_{js} + \mathfrak{M}_{v_j} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j)\}$ над k , допускането $A_{j,i} \in \mathfrak{M}_{v_j}$ води до $k_{j,i,s} = 0$ за $\forall 1 \leq s \leq \deg(v_j)$ и фиксираните

$1 \leq j \leq r$, $1 \leq i \leq v_j(x)$. От друга страна,

$$B_{j,i} = \sum_{s=1}^{\deg(v_i)} g_{j,i,s}(x) \alpha_{js} \in \mathcal{O}_{v_j},$$

защото $\alpha_{js} \in \mathcal{O}_{v_j}$ и $g_{j,i,s}(x) \in k[x] \subseteq \mathcal{O}_{v_j}$ за $v_j(x) > 0$. По този начин получаваме

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i} t_j^{-i} + x \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i} t_j^{-i} = 0. \quad (13.4)$$

Ако всички $A_{j,i} = 0$, то делим на подходяща степен на x и получаваме (13.4) с поне едно $A_{j_o,i_o} \neq 0$ и $A_{j,i} \in \mathcal{O}_{v_j}^*$ за $\forall A_{j,i} \neq 0$. Тогава $v_j(A_{j,i} t_j^{-i}) = -i$ за $\forall A_{j,i} \neq 0$ и прилагайки неравенството на триъгълника с равенство за ненулевите събираеми на $\sum_{i=1}^{v_{j_o}(x)} A_{j_o,i} t_{j_o}^{-i}$ получаваме $v_{j_o} \left(\sum_{i=1}^{v_{j_o}(x)} A_{j_o,i} t_{j_o}^{-i} \right) = -i_1 < 0$ за максималното естествено i_1 с $A_{j_o,i_1} \neq 0$. Неравенството на триъгълника за останалите събираеми в лявата сума от (13.4) дава

$$v_{j_o} \left(\sum_{j \neq j_o} \sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i} t_j^{-i} \right) \geq 0,$$

съгласно $A_{j,i} \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{v_{j_o}}$ и $v_{j_o}(t_j) = 0$ за $\forall j \neq j_o$. Общо, стойността на v_{j_o} върху лявата сума от (13.4) е

$$v_{j_o} \left(\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i} t_j^{-i} \right) = -i_1 < 0,$$

съгласно неравенството на триъгълника с равенство. По-нататък, за всички $1 \leq i \leq v_{j_o}(x)$ имаме $v_{j_o}(x t_{j_o}^{-i}) = v_{j_o}(x) - i \geq 0$ и $v_{j_o}(B_{j_o,i}) \geq 0$, откъдето

$$v_{j_o} \left(x \sum_{i=1}^{v_{j_o}(x)} B_{j_o,i} t_{j_o}^{-i} \right) \geq 0.$$

За произволно $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j_o\}$ е в сила $v_{j_o}(t_j^{-i}) = 0$, откъдето

$$v_{j_o}(x B_{j,i} t_j^{-i}) = v_{j_o}(x) + v_{j_o}(B_{j,i}) > 0,$$

съгласно $v_{j_o}(x) > 0$ и $v_{j_o}(B_{j,i}) \geq 0$. Прилагайки неравенството на триъгълника получаваме

$$v_{j_o} \left(x \sum_{j \neq j_o} \sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i} t_j^{-i} \right) > 0 \quad \text{и} \quad v_{j_o} \left(x \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i} t_j^{-i} \right) \geq 0.$$

Сега

$$\begin{aligned} 0 > -i_1 &= v_{j_o} \left(\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i} t_j^{-i} \right) = v_{j_o} \left(- \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i} t_j^{-i} \right) = \\ &= v_{j_o} \left(x \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i} t_j^{-i} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

е противоречие, доказващо линейната независимост на

$$\{\alpha_{js} t_j^{-i} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j), \quad 1 \leq i \leq v_j(x), \quad 1 \leq j \leq r\},$$

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.5. Ако F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k , то всеки елемент $x \in F \setminus k$ има най-много краен брой нули $v \in \mathcal{P}$, $v(x) > 0$ и най-много краен брой полюси $v \in \mathcal{P}$, $v(x) < 0$.

Доказателство: От

$$\sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x) \deg(v) = \deg(x)_0 \leq [F : k(x)] = n$$

следва, че класовете дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$ с $v(x) > 0$ са не повече от n , защото степените $\deg(v)$ са естествени числа. Вземайки предвид, че $v\left(\frac{1}{x}\right) = -v(x) > 0$ точно когато $v(x) < 0$, стигаме до извода, че полюсите $v \in \mathcal{P}$ на x са точно нулите на $\frac{1}{x}$. От

$$\sum_{v \in \mathcal{P}, v\left(\frac{1}{x}\right) > 0} v\left(\frac{1}{x}\right) \deg(v) = \deg\left(\frac{1}{x}\right)_0 \leq \left[F : k\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

получаваме, че $v \in \mathcal{P}$ с $v(x) < 0$ са краен брой или полюсите на x са краен брой, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.6. Ако F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k , то всеки елемент $x \in F \setminus k$ има поне един полюс и поне една нула.

Затова изображението

$$\begin{aligned} \text{div} : F^* &\longrightarrow \text{Div}(F), \\ \text{div}(x) &= \sum_{v \in \mathcal{P}} v(x)v = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x)v - \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) < 0} (-v(x))v = (x)_0 - (x)_\infty \end{aligned}$$

е хомоморфизъм на групи с ядро $\ker(\text{div}) = k^*$.

Доказателство: Достатъчно е да проверим, че всеки елемент $x \in F \setminus k$ има поне един полюс, защото тогава $\frac{1}{x} \in F \setminus k$ ще има поне един полюс и $x \in F \setminus k$ ще има поне една нула. Да допуснем, че $x \in F \setminus k$ няма полюси, т.е. $v(x) \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Тогава за всички класове дискретни нормирания w на $F * \bar{k}$ е в сила $w(x) \geq 0$, защото $w|_F = v$. Класовете дискретни нормирания w на $F * \bar{k}$ са във взаимно еднозначно съответствие с точките p на гладка проективна крива C с функционално поле F . Следователно $x \in \cap_{p \in C} \mathcal{O}_p(C) = \mathcal{O}_C(C)$. Разглеждаме проективния морфизъм

$$\begin{aligned} \Phi_x : C &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\bar{k}), \\ \Phi_x(p) &= [x(p) : 1]. \end{aligned}$$

Съгласно Теорема 13, образът $\Phi_x(C)$ е затворено подмножество на $\mathbb{P}^1(\bar{k})$. Вземайки предвид неприводимостта на $\Phi_x(C)$, получаваме, че $\Phi_x(C) = \mathbb{P}^1(\bar{k})$ или $\Phi_x(C)$ е точка. От $[1 : 0] \notin \Phi_x(C)$ става ясно, че $\Phi_x(C) = \{[c : 1]\}$ е точка и $x \equiv c \in k$. Противоречието доказва, че всеки елемент $x \in F \setminus k$ има поне един полюс.

Изображението $\text{div} : F^* \rightarrow \text{Div}(F)$ е хомоморфизъм на групи, защото

$$\text{div}(xy) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(xy)v = \sum_{v \in \mathcal{P}} (v(x)+v(y))v = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(x)v + \sum_{v \in \mathcal{P}} v(y)v = \text{div}(x) + \text{div}(y).$$

Елементите на k^* нямат нито нули, нито полюси, така че $k^* \subseteq \ker(\text{div})$. Ако допуснем, че съществува $x \in \ker(\text{div}) \setminus k^*$, то $x \in F \setminus k$ и x има както нула $v \in \mathcal{P}$, $v(x) > 0$, така и полюс $w \in \mathcal{P}$, $w(x) < 0$. В резултат, $\text{div}(x) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(x)v \neq 0$,

противно на $x \in \ker(\text{div})$. Това доказва, че $\ker(\text{div}) = k^*$, Q.E.D.

Дивизорите върху проективни многообразия са асоциирани с линейни разслоения. Преди да опишем това съответствие да напомним, че векторно разслоение E над многообразие M е фамилия $E = \cup_{x \in M} E_x$ от линейни пространства

$E_x \simeq \bar{k}^r$, параметризирана от точките x на M . Тази фамилия има регулярна проекция $\pi : E \rightarrow M$, изобразяваща E_x в x и за всяка точка $x_o \in M$ съществуват отворена околност U на x_o върху M и тривиализация $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \bar{k}^r$ на E върху U с $\varphi_U(E_x) = \{x\} \times \bar{k}^r$. Векторното разслоение $E \rightarrow M$ е от ранг r , ако $E_x \simeq \bar{k}^r$ за $\forall x \in M$. Векторните разслоения от ранг 1 се наричат линейни. Ако φ_U и φ_V са тривиализации на векторното разслоение E над пресичащи се отворени подмножества U и V на M , то изображението $g_{UV} = \varphi_U \varphi_V^{-1} : U \cap V \rightarrow GL(r, \bar{k})$ се нарича функция на прехода на от V към U . Функциите на прехода изпълняват тъждествата

$$g_{UV}(x)g_{VU}(x) = E_r \quad \text{за } \forall x \in U \cap V \quad \text{и} \quad (13.5)$$

$$g_{UV}(x)g_{VW}(x)g_{WU}(x) = E_r \quad \text{за } \forall x \in U \cap V \cap W, \quad (13.6)$$

където E_r е единичната матрица от ред r . Обратно, нека $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено покритие на M с изображения $g_{\alpha, \beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \bar{k})$, изпълняващи равенствата (13.5) и (13.6). Твърдим, че съществува единствено векторно разслоение $E \rightarrow M$ то ранг r с функции на прехода $\{g_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$. За целта разглеждаме обединението $\cup_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \bar{k}^r)$. Отъждествяваме $(x, v) \in U_\beta \times \bar{k}^r$ с $(x, g_{\alpha, \beta}(x)v) \in U_\alpha \times \bar{k}^r$ за $\forall \alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и означаваме полученото пространство с E . Непосредствено се проверява, че E е векторно разслоение от ранг r върху M с функции на прехода $g_{\alpha, \beta}$.

Нека $\pi : L \rightarrow M$ е линейно разслоение с тривиализации $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \bar{k}$ за $\alpha \in A$. Произволни неанулиращи се регулярни функции $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ задават тривиализации $\varphi'_\alpha = f_\alpha \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \bar{k}$ с функции на прехода $g'_{\alpha, \beta} = \left(\frac{f_\alpha}{f_\beta}\right) g_{\alpha, \beta}$. Обратно, произволни тривиализации $\varphi''_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \bar{k}$ на $\pi : L \rightarrow M$ имат частни $\frac{\varphi''_\alpha}{\varphi_\alpha} \in \bar{k}^*$, така че функциите на прехода $\{g_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ и $\{g'_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ определят едно и също линейно разслоение тогава и само тогава, когато съществуват функции $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ с $g'_{\alpha, \beta} = \left(\frac{f_\alpha}{f_\beta}\right) g_{\alpha, \beta}$.

Нека C е крива, определена над крайно поле $\mathbb{F}_q$. Съгласно Теорема 19, класовете дискретни нормирания v на функционалното поле $F = \mathbb{F}_q(C)$ на C над $\mathbb{F}_q$ са във взаимно еднозначно съответствие с $\mathbb{F}_q$ -затворените точки $Orb(p) = Orb_{Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}(p)$, $p \in C$. Произволен дивизор $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ върху C може да се интерпретира като $\mathbb{Z}$ -линейна комбинация на $\mathbb{F}_q$ -затворени точки

$$D = \sum_{p \in C} n_p Orb(p),$$

където сумирането е по краен брой представители на $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ -орбити върху C . В резултат, съществува отворено покритие $C = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, така че $U_\alpha \cap D = div(f_\alpha)$ са главни дивизори. Локалните уравнения f_α на D върху U_α имат неанулиращи се регулярни частни

$$g_{\alpha, \beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Непосредствено се проверява, че $g_{\alpha, \beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ изпълняват тъждествата (13.5) и (13.6), така че $\{g_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ са функции на прехода на линейно разслоение над C . Това линейно разслоение се бележи с L_D и се нарича асоциирано с дивизора D . Ако $\pi : L_D \rightarrow C$ е проекцията на линейното разслоение, асоциирано с дивизора D , то изображенията $s : C \rightarrow L_D$ с $\pi s = Id_C$ се наричат глобални сечения на L_D . Нека $s_o : C \rightarrow L_D$ е глобално рационално сечение с дивизор

$\text{div}(s_o) = D$, а $\Gamma(C, L_D)$ е множеството на глобалните регуларни сечения на L_D . Тогава

$$\Gamma(C, L_D) = s_o \mathcal{L}(D) \quad \text{за} \quad \mathcal{L}(D) = \{f \in k(C)^* \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Множеството $\mathcal{L}(D)$ от рационални функции върху C е линейно пространство над k . Наистина, условието $\alpha f \in \mathcal{L}(D)$ за $\forall f \in \mathcal{L}(D)$ и $\forall \alpha \in k$ е ясно. Нека $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ с $n_v \in \mathbb{Z}$, а $f, g \in \mathcal{L}(D)$. Условието

$$\text{div}(f) + D = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(f)v + \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v = \sum_{v \in \mathcal{P}} (v(f) + n_v)v \geq 0$$

е еквивалентно на $v(f) + n_v \geq 0$ за всички класове дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$. Аналогично, $v(g) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$, съгласно $\text{div}(g) + D \geq 0$. За да установим, че $f + g \in \mathcal{L}(D)$ за произволни $f, g \in \mathcal{L}(D)$, оценяваме

$$\begin{aligned} \text{div}(f + g) + D &= \sum_{v \in \mathcal{P}} v(f + g)v + \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v = \\ &= \sum_{v \in \mathcal{P}} (v(f + g) + n_v)v \geq \sum_{v \in \mathcal{P}} [\min(v(f), v(g)) + n_v]v \geq 0 \end{aligned}$$

с помощта на неравенството на триъгълника $v(f + g) \geq \min(v(f), v(g))$ за произволен клас дискретни нормирания v .

С известна неточност ще отъждествяваме множеството $\Gamma(C, L_D) = s_o \mathcal{L}(D)$ на глобалните регуларни сечения на L_D с k -линейното пространство $\mathcal{L}(D)$, което го параметризира.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.7. *Линейната система $|D|$ на дивизор D върху крива C , определена над свършено поле k е множеството*

$$|D| = \{E \in \text{Div}(C) \mid E = \text{div}(f) + D \geq 0, \quad f \in k(C)^*\}$$

на ефективните дивизори върху C , които са линейно еквивалентни с D .

Ефективните дивизори $E = \text{div}(f) + D \geq 0$ върху C , които са линейно еквивалентни с D са във взаимно еднозначно съответствие с дивизорите $E - D = \text{div}(f)$ на рационалните функции $f \in \mathcal{L}(D)$. Затова имаме изоморфизъм на множества

$$|D| \simeq \{\text{div}(f) \mid f \in k(C)^*, \quad \text{div}(f) + D \geq 0\}.$$

Рационалните функции $f, g \in k(C)^*$ имат един и същи дивизор $\text{div}(f) = \text{div}(g)$ точно когато

$$\begin{aligned} \text{div}\left(\frac{f}{g}\right) &= \sum_{v \in \mathcal{P}} v\left(\frac{f}{g}\right)v = \sum_{v \in \mathcal{P}} [v(f) - v(g)]v = \\ &= \sum_{v \in \mathcal{P}} v(f)v - \sum_{v \in \mathcal{P}} v(g)v = \text{div}(f) - \text{div}(g) = 0. \end{aligned}$$

Последното е еквивалентно на $\frac{f}{g} \in k^*$, съгласно Следствие 13.6. Следователно линейната система

$$|D| \simeq \{\text{div}(f) \mid f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}\} = \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}/k^* = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$$

на дивизор D върху C е изоморфна на проективизацията на пространството $\mathcal{L}(D)$, параметризиращо глобалните регуларни сечения на асоциираното линейно разслоение L_D на D .

В следващата лема са събрани някои свойства на линейните пространства $\mathcal{L}(D)$.

ЛЕМА 13.8. (i) За произволни дивизори $G \geq D$ върху крива C , $\mathcal{L}(D)$ е подпространство на $\mathcal{L}(G)$.

(ii) За произволни дивизори $G \geq D$ е в сила

$$\dim_k (\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)) \leq \deg(G) - \deg(D).$$

(iii) $\mathcal{L}(0) = k$.

(iv) За произволен ефективен дивизор $D \geq 0$, размерността

$$l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) \geq 1.$$

(v) За произволен дивизор D размерността $l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) < \infty$ е крайна.

(vi) За произволен дивизор D и произволна рационална функция $x \in F = k(C)$ е в сила $l(D) = l(D + \operatorname{div}(x))$.

Доказателство: (i) По определение, ако $x \in \mathcal{L}(D)$, то $\operatorname{div}(x) + D \geq 0$, откъдето $\operatorname{div}(x) + G = \operatorname{div}(x) + D + (G - D) \geq 0$, защото дивизорът $G - D \geq 0$ е ефективен.

(ii) Достатъчно е да докажем, че

$$\dim_k (\mathcal{L}(D + v)/\mathcal{L}(D)) \leq \deg(v) \quad \text{за} \quad \forall v \in \mathcal{P}. \quad (13.7)$$

Тогава с индукция по броя на събираемите в $G - D \geq 0$, ако $G = G' + v$ и допуснем, че

$$\dim_k (\mathcal{L}(G')/\mathcal{L}(D)) \leq \deg(G') - \deg(D) \quad \text{за} \quad G' \geq D, \quad \text{то}$$

$$\dim_k (\mathcal{L}(G' + v)/\mathcal{L}(G')) \leq \deg(v) \quad \text{дава}$$

$$\dim_k (\mathcal{L}(G' + v)/\mathcal{L}(D)) \leq [\deg(G') + \deg(v)] - \deg(D).$$

Тук използваме, че ако $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ са крайномерни линейни пространства над поле k , то $\dim_k(A_3/A_1) = \dim_k(A_3/A_2) + \dim_k(A_2/A_1)$. За да проверим (13.7) за $D = \sum_{w \in \mathcal{P}} n_w w$ избираме $u \in F$ с $v(u) = n_v + 1$. Тогава всяко $x \in \mathcal{L}(D + v)$

има регулярно във v произведение $xu \in \mathcal{O}_v$, защото $v(xu) = v(x) + v(u) = v(x) + n_v + 1 \geq 0$. Това ни дава възможност да разгледаме изображението

$$\psi : \mathcal{L}(D + v) \longrightarrow \mathcal{O}_v/\mathfrak{M}_v,$$

$$\psi(x) = xu + \mathfrak{M}_v.$$

Съгласно $\psi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)u + \mathfrak{M}_v = (x_1u + \mathfrak{M}_v) + (x_2u + \mathfrak{M}_v) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$ за $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}(D + v)$ и $\psi(\lambda x) = \lambda xu + \mathfrak{M}_v = \lambda(xu + \mathfrak{M}_v) = \lambda\psi(x)$ за $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in \mathcal{L}(D + v)$, изображението ψ е k -линейно. Ядрото

$$\begin{aligned} \ker(\psi) &= \{x \in \mathcal{L}(D + v) \mid xu \in \mathfrak{M}_v\} = \\ &= \{x \in \mathcal{L}(D + v) \mid v(x) + v(u) = v(x) + n_v + 1 \geq 1\} = \\ &= \{x \in \mathcal{L}(D + v) \mid v(x) + n_v \geq 0\} = \mathcal{L}(D). \end{aligned}$$

Следователно образът $\mathcal{L}(D + v)/\mathcal{L}(D) \simeq \operatorname{im}(\psi)$ има размерност

$$\dim_k (\mathcal{L}(D + v)/\mathcal{L}(D)) = \dim_k \operatorname{im}(\psi) \leq \dim_k (\mathcal{O}_v/\mathfrak{M}_v) = \deg(v).$$

(iii) По определение,

$$\mathcal{L}(0) = \{x \in k(C)^* \mid \operatorname{div}(x) \geq 0\} \cup \{0\} = k^* \cup \{0\} = k,$$

защото единствените рационални функции $x \in k(C)^*$ без полюси са константите от k^* .

(iv) Ако $D \geq 0$, то съгласно (i) и (iii) имаме $\mathcal{L}(D) \supseteq \mathcal{L}(0) = k$, токъдето $l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) \geq 1$.

(v) Ако дивизорът $D \geq 0$ е ефективен, то съгласно (ii) имаме

$$\dim_k (\mathcal{L}(D)/\mathcal{L}(0)) = \dim_k (\mathcal{L}(D)/k) \leq \deg(D),$$

откъдето $l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) \leq \deg(D) + 1 < \infty$.

В общия случай избираме ефективен дивизор $G \geq 0$, който доминира D , т.е. $G \geq 0$, $G \geq D$. Тогава $l(G) < \infty$. Прилагайки (i) получаваме, че $l(D) \leq l(G) < \infty$.

(vi) За произволен дивизор D и произволна рационална функция $x \in k(C)$ твърдим, че $x\mathcal{L}(D + \text{div}(x)) = \mathcal{L}(D)$. Наистина, ако $y \in \mathcal{L}(D + \text{div}(x))$, то $\text{div}(y) + \text{div}(x) + D = \text{div}(xy) + D \geq 0$ и $xy \in \mathcal{L}(D)$. Обратно, ако $z \in \mathcal{L}(D)$, то $y = \frac{z}{x} \in \mathcal{L}(D + \text{div}(x))$, защото $\text{div}(\frac{z}{x}) + \text{div}(x) + D = \text{div}(z) + D \geq 0$. Оттук

$$l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) = \dim_k \mathcal{L}(D + \text{div}(x)) = l(D + \text{div}(x)),$$

Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 13.9. Нека F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k и $x \in F \setminus k$. Тогава броят на нулите

$$\deg(x)_0 = [F : k(x)]$$

на x съвпада със степента на функционалното поле F над чисто трансцендентното разширение $k(x)$ на k чрез x .

Доказателство: Вече доказахме, че $n = [F : k(x)] \geq \deg(x)_0$. За $n \leq \deg(x)_0$ избираме базис $y_1, \dots, y_n$ на F над $k(x)$ и разглеждаме ефективния дивизор $E = \sum_{j=1}^n (y_j)_\infty$. За $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leq i \leq m$ и $\forall 1 \leq j \leq n$, рационалните функции $x^{-i}y_j \in \mathcal{L}(m(x)_0 + E)$, защото

$$\text{div}(x^{-i}y_j) + m(x)_0 + E = -i(x)_0 + i(x)_\infty + (y_j)_0 - (y_j)_\infty + m(x)_0 + \sum_{j=1}^n (y_j)_\infty \geq 0,$$

съгласно $(m-i)(x)_0 \geq 0$, $E - (y_j)_\infty = \sum_{i \neq j} (y_i)_\infty$, $i(x)_\infty \geq 0$ и $(y_i)_0 \geq 0$. Освен

това, $\{x^{-i}y_j \mid 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ са линейно независими над k , защото $y_1, \dots, y_n$ са линейно независими над чисто трансцендентното разширение $k(x)$ на k чрез x . Следователно броят на тези рационални функции

$$(m+1)n \leq l(m(x)_0 + E) \quad (13.8)$$

не надминава размерността на $\mathcal{L}(m(x)_0 + E)$ над k . Прилагаме Лема 13.8(ii) към дивизорите $m(x)_0 + E \geq 0$ и получаваме

$$l(m(x)_0 + E) - 1 = \dim_k(\mathcal{L}(m(x)_0 + E)/\mathcal{L}(0)) \leq m \deg(x)_0 + \deg(E).$$

Комбинирането с 13.8 дава

$$mn + n \leq m \deg(x)_0 + \deg(E) + 1.$$

Оттук $m[\deg(x)_0 - n] \geq n - \deg(E) - 1$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. Следователно коефициентът $\deg(x)_0 - n \geq 0$ на m е неотрицателен и $\deg(x)_0 = n$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.10. Ако F е функционално поле на една променлива със свършено поле от константи k и $x \in F \setminus k$, то

$$\deg(x)_\infty = \deg(x)_0 = [F : k(x)].$$

В частност, $\deg(\text{div}(x)) = 0$ за $\forall x \in F$.

Доказателство: Съгласно $k(x) = k(\frac{1}{x})$,

$$\deg(x)_0 = [F : k(x)] = \left[F : k\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \deg\left(\frac{1}{x}\right)_0 = \deg(x)_\infty,$$

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.11. Ако D е дивизор от степен $\deg(D) < 0$, то $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

Доказателство: При допускане на противното съществува $x \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$ с $\text{div}(x) + D \geq 0$. Оттук $\deg(D) = \deg(\text{div}(x)) + \deg(D) \geq 0$, противно на предположението $\deg(D) < 0$. Това доказва $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ за $\deg(D) < 0$, Q.E.D. Дивизорите $\text{div}(x)$ на рационални функции $x \in F = k(C)$ се наричат главин дивизори и образуват подгрупа на свободната абелева група $\text{Div}(F)$ на всички дивизори на функционалното поле F на една променлива. Групата $\text{div}(F)$ на главните дивизори е подгрупа на дивизорите $\text{Div}^0(F)$ от степен 0. Факторгрупата $\text{Div}(F)/\text{div}(F)$ се нарича група на класовете дивизори.

ТЕОРЕМА 20. (Теорема на Riemann) *За произволно функционално поле F на една променлива съществува цяла константа $g \geq 0$, наречена род на F , така че*

$$l(D) \geq \deg(D) - g + 1$$

за всички дивизори $D \in \text{Div}(F)$.

Доказателство: Разглеждаме функцията

$$s : \text{Div}(F) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$s(D) = \deg(D) - l(D) + 1.$$

Твърдим съществуването на цяла константа $g \geq 0$, така че $s(D) \leq g$ за всички дивизори $D \in \text{Div}(F)$. Избираме $x \in F \setminus k$ и базис $y_1, \dots, y_n$ на F над $k(x)$. По аналогия с доказателството на $[F : k(x)] \leq \deg(x)_0$ фиксираме ефективния дивизор $E = \sum_{j=1}^n (y_j)_\infty$. За произволно естествено $m \in \mathbb{N}$ рационалните функции $\{x^{-i}y_j \mid 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ образуват линейно независимо над k подмножество на $\mathcal{L}(m(x)_0 + E)$. Оттук следва (13.8). Прилагаме 13.8(ii) към $m(x)_0 + E \geq m(x)_0$ и получаваме, че

$$l(m(x)_0 + E) - l(m(x)_0) \leq \deg(E).$$

Комбинирайки последното неравенство с (13.8) извеждаме

$$mn + n \leq l(m(x)_0) + \deg(E).$$

В резултат,

$$s(m(x)_0) = \deg(m(x)_0) - l(m(x)_0) + 1 = mn - l(m(x)_0) + 1 \leq \deg(E) - n + 1,$$

съгласно $\deg(x)_0 = n$. Следователно редицата $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^\infty$ е ограничена отгоре и можем да изберем

$$g := \sup_{m \in \mathbb{N}} s(m(x)_0).$$

Супремумът g на редицата $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^\infty$ се достига, защото $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathbb{Z}$ е дискретна редица.

За произволен дивизор $D \in \text{Div}(F)$ съществува ефективен дивизор $H \in \text{Div}(F)$, $H \geq 0$, който доминира $D \leq H$. Прилагаме Лема 13.8(ii) към $m(x)_0 \geq m(x)_0 - H$ и получаваме

$$l(m(x)_0) - l(m(x)_0 - H) \leq \deg(H). \quad (13.9)$$

От $s(m(x)_0) = \deg(m(x)_0) - l(m(x)_0) + 1 \leq g$ следва $l(m(x)_0) \geq m \deg((x)_0) - g + 1$. Комбинирайки с (13.9) получаваме

$$l(m(x)_0 - H) \geq l(m(x)_0) - \deg(H) \geq m \deg((x)_0) - g + 1 - \deg(H) = mn - g + 1 - \deg(H).$$

За достатъчно големи $n = \deg(x)_0 \in \mathbb{N}$ имаме $mn - g + 1 - \deg(H) > 0$, откъдето $l(m(x)_0 - H) > 0$. За такива $n \in \mathbb{N}$ съществува $z \in \mathcal{L}(m(x)_0 - H) \setminus \{0\}$ с $\text{div}(z) + m(x)_0 - H \geq 0$. Оттук

$$m(x)_0 \geq H - \text{div}(z).$$

Ако $D_1 \leq D_2$ за дивизори $D_1, D_2 \in \text{Div}(F)$, то

$$s(D_2) - s(D_1) = [\deg(D_2) - \deg(D_1)] - [l(D_2) - l(D_1)] \geq 0$$

съгласно Лема 13.8(ii). Освен това,

$$s(D + \text{div}(y)) = \deg(D) - l(D) + 1 = s(D),$$

защото $\deg(\text{div}(y)) = 0$ и $l(D + \text{div}(y)) = l(D)$ по Лема 13.8(vi). В резултат,

$$g \geq s(m(x)_0) \geq s(H - \text{div}(z)) = s(H) \geq s(D),$$

поради $m(x)_0 \geq H - \text{div}(z)$ и $H \geq D$. За $D = 0$, доказаната Теорема на Riemann дава

$$1 = l(0) \geq \deg(0) - g + 1 = 1 - g,$$

откъдето $g \geq 0$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.12. Ако дивизорът $D \in \text{Div}(F)$ изпълнява Теоремата на Riemann с равенство $l(D) = \deg(D) - g + 1$, то всеки дивизор $G \geq D$ изпълнява Теоремата на Riemann с равенство, $l(G) = \deg(G) - g + 1$.

Доказателство: Прилагаме Лема 13.8(ii) към $G \geq D$ и получаваме

$$l(G) - l(D) \leq \deg(G) - \deg(D).$$

Съгласно Теоремата на Riemann $l(D) = \deg(D) - g + 1$ за D с равенство, оттук следва $l(G) \leq \deg(G) - g + 1$. Заедно с Теоремата на Riemann $l(G) \geq \deg(G) - g + 1$ за G , това дава $l(G) = \deg(G) - g + 1$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.13. За произволно функционално поле F на една променлива със свършено поле от константи k съществува цяло число r , така че Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство за всички дивизори $D \in \text{Div}(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$.

Доказателство: Както в доказателството на Теоремата на Riemann 20 избираме $x \in F \setminus k$ и такова $\mu \in \mathbb{N}$, че $s(\mu(x)_0) = \deg(\mu(x)_0) - l(\mu(x)_0) + 1 = g$ достига точната горна граница g на $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^{\infty}$. Полагаме

$$r := g + \deg(\mu(x)_0).$$

Тогава за всеки дивизор $D \in \text{Div}(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$ дивизорът $D - \mu(x)_0 \in \text{Div}(F)$ е от степен $\deg(D - \mu(x)_0) \geq g$. По Теоремата на Riemann за $D - \mu(x)_0$ имаме

$$l(D - \mu(x)_0) \geq \deg(D - \mu(x)_0) - g + 1 \geq 1.$$

Следователно съществува $z \in \mathcal{L}(D - \mu(x)_0) \setminus \{0\}$ с $\text{div}(z) + D - \mu(x)_0 \geq 0$. С други думи, $D + \text{div}(z) \geq \mu(x)_0$ и съгласно Следствие 13.12, дивизорът $D + \text{div}(z)$ изпълнява Теоремата на Riemann с равенство $s(D + \text{div}(z)) = g$. Комбинирайки с $s(D + \text{div}(z)) = s(D)$ получаваме Теоремата на Riemann с равенство $s(D) = g$ за всеки дивизор $D \in \text{Div}(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 13.14. Функционалното поле F на една променлива е полето $k(x)$ на рационалните функции на проективната права $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ тогава и само тогава, когато родът на F е $g = 0$ и съществува клас от дискретни нормирания v от степен $\deg(v) = 1$.

Доказателство: Ако $F = k(x) = k(\mathbb{P}^1(\bar{k}))$ е функционалното поле на $\mathbb{P}^1(\bar{k})$, то $F = k(x)$ е чисто трансцендентно разширение на k от степен 1. Твърдим, че ако v_{∞} е нормирането, отговарящо на безкрайната точка, то

$$\mathcal{L}(nv_{\infty}) = k^{(n+1)}[x]$$

се състои от полиномите на x от степен $\leq n$. По-точно, всеки елемент на $F = k(x)$ е от вида $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ с $f_1(x), f_2(x) \in k[x]$. По определение, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \in \mathcal{L}(nv_\infty)$ тогава и само тогава, когато

$$\operatorname{div}(f_1) - \operatorname{div}(f_2) + nv_\infty \geq 0. \quad (13.10)$$

Дискретните нормирания на $F = k(x)$ са v_∞ и $v_{p(x)}$ за неразложимите над k полиноми $p(x) \in k[x]$. От (13.10) следва $v_{p(x)}(f_1) - v_{p(x)}(f_2) \geq 0$ за произволен неразложим над k полином $p(x) \in k[x]$. Да напомним, че в пръстена $k[x]$ на полиномите на x с коефициенти от поле k имаме разлагане в произведение на неразложими над k множители, което е еднозначно с точност до мултипликативни константи от полето на коефициентите. Без ограничение на общността можем да считаме, че дробта $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \in k(x) = F$ е несъкратима. Ако съществува неразложим над k делител $p(x) \in k[x]$ на $f_2(x)$, то $p(x)$ не дели $f_1(x)$, така че $v_{p(x)}(f_1) = 0$ и

$$v_{p(x)}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = v_{p(x)}(f_1) - v_{p(x)}(f_2) = -v_{p(x)}(f_2) < 0.$$

Това противоречи на (13.10) и доказва, че $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \in k[x]$ е полином на x с коефициенти от k . Условието (13.10) дава

$$v_\infty(f_1) + n = -\deg(f) + n \geq 0,$$

т.е. $\deg(f_1) \leq n$. В резултат, Теоремата на Riemann за $D = nv_\infty$ приема вида

$$n + 1 = l(nv_\infty) \geq n - g + 1.$$

За достатъчно големи $\deg(nv_\infty) = n \geq r$, Теоремата на Riemann е изгълнена с равенство, така че родът на F е $g = 0$.

Обратно, ако родът на функционалното поле F на една променлива е $g = 0$ и съществува клас дискретни нормирания v от степен 1, то Теоремата на Riemann за $D = v$ дава

$$l(v) \geq \deg(v) - g + 1 = 2.$$

Прилагаме Лема 13.8(ii) към $v \geq 0$ и полечяваме

$$l(v) - 1 \leq \deg(v) - 0 = 1,$$

откъдето $l(v) \leq 2$ и $l(v) = 2$. Избираме $x \in \mathcal{L}(v) \setminus k$. Тогава $\operatorname{div}(x) + v = (x)_0 - (x)_\infty + v \geq 0$ изисква $v \geq (x)_\infty \neq 0$, откъдето $(x)_\infty = v$. Следователно

$$[F : k(x)] = \deg(x)_0 = \deg(x)_\infty = \deg(v) = 1$$

и $F = k(x) = k(\mathbb{P}^1(\bar{k}))$, Q.E.D.