

Лема на Noether за нормализация. Връзка между степента на трансцендентност на функционалното поле и размерността на афинно многообразие

В настоящата тема ще разгледаме Лемата на Noether за нормализация, която представя произволно афинно многообразие като крайно покритие от специален тип на афинното пространство от същата размерност. Ще докажем, че размерността на афинно многообразие, определена като размерността относно топологията на Зариски съвпада със степента на трансцендентност на функционалното поле над полето от константи. За целта трябва да се запознаем с някои свойства на понятието цяла зависимост.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Нека R е подпръстен с единица на комутативен пръстен с единица S . Елементът $s \in S$ е цял над R , ако съществува полином

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in R[x]$$

с коефициенти от R и старши коефициент 1, така че s е корен на $f(x)$.

ЛЕМА 10.2. Нека R е подпръстен с единица на комутативен пръстен с единица S . Елементът $s \in S$ е цял над R тогава и само тогава, когато R -алгебрата $R[s]$, породена от s е крайно породен R -модул.

Доказателство: Ако

$$s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

за някакви $a_1, \dots, a_n \in R$, то

$$s^n = -a_1s^{n-1} - \dots - a_{n-1}s - a_n \in R + Rs + \dots + Rs^{n-1}$$

принадлежи на R -подмодула на S , породен от $1, s, \dots, s^{n-1}$. С индукция по $m \geq n$ проверяваме, че $s^m \in R + Rs + \dots + Rs^{n-1}$. Сега от

$$R[s] = \sum_{i=0}^{\infty} Rs^i \subseteq R + Rs + \dots + Rs^{n-1} \subseteq \sum_{i=0}^{\infty} Rs^i = R[s]$$

следва $R[s] = R + Rs + \dots + Rs^{n-1}$ и $R[s]$ е крайно породен R -модул.

Нека $R[s]$ е крайно породен R -модул. Фиксираме порождащи $e_1, \dots, e_n$ на $R[s]$ като R -модул и разглеждаме умножението

$$\mu_s : R[s] \longrightarrow R[s],$$

$$\mu_s \left(\sum_{i=0}^l a_i s^i \right) = s \left(\sum_{i=0}^l a_i s^i \right) = \sum_{i=0}^l a_i s^{i+1}$$

с s като хомоморфизъм на R -модули. Съществуват $a_{ij} \in R$, така че $\mu_s(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Матрицата $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ е точно матрицата на μ_s относно порождащата система $e = (e_1, \dots, e_n)$, т.е. $\mu_s(e) = (\mu_s(e_1), \dots, \mu_s(e_n)) = eA$.

По Теоремата на Hamilton-Cayley, матрицата A е корен на характеристичния си полином $f_A(x) = \det(A - xE_n) \in R[x]$, който има старши коефициент $(-1)^n$. Същото може да се получи и непосредствено. Формално имаме $\mu_s(e) = [(\mu_s E_n)e^t]^t$, откъдето $(\mu_s E_n - A^t)e^t = 0_{n \times 1}$. Умножавайки отляво с транспонираната на матрицата от съответните адюнгирани количества получаваме, че $\det(\mu_s E_n - A^t)E_n e^t = \det(\mu_s E_n - A^t)e^t = 0_{n \times 1}$. Следователно $\det(\mu_s E_n - A^t) = 0$ и

$$\mu_s^n + c_1 \mu_s^{n-1} + \dots + c_{n-1} \mu_s + c_n \text{Id}_{R[s]} = 0.$$

Прилагаме горното равенство към $1 \in R$ и получаваме, че

$$s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n = 0.$$

Това означава, че s е цял над R , Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. *Комутативният пръстен с единица S е цял над своя подпръстен с единица R , ако всеки елемент s на S е цял над R .*

ЛЕМА 10.4. *Нека $R \subset S \subset T$ е редица от комутативни пръстени с единица, S е цял над R , T е цял над S . Тогава T е цял над R .*

Доказателство: За произволен елемент $t \in T$ разглеждаме цялата зависимост

$$t^n + s_1 t^{n-1} + \dots + s_{n-1} t + s_n = 0$$

на t над $S \ni s_1, \dots, s_{n-1}$. Тя може да се разглежда като цяла зависимост на t

над $R[s_1, \dots, s_n]$. В резултат, $R[s_1, \dots, s_n, t] = \sum_{i=0}^{n-1} R[s_1, \dots, s_n] t^i$ е крайно породен

$R[s_1, \dots, s_n]$ -модул. Но $R[s_1, \dots, s_n] = \sum_{j=1}^N R \mu_j$ е крайно породен R -модул,

така че $R[s_1, \dots, s_n, t] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^N R \mu_j t^i$ е крайно породен R -модул. Тук използваме,

че ако $R[s_1, \dots, s_{m-1}] = \sum_{j=1}^M R \nu_j$ е крайно породен R -модул и $R[s_m] =$

$\sum_{i=0}^l R s_m^i$, то $R[s_1, \dots, s_{m-1}, s_m] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^l R \nu_j s_m^i$ е крайно породен R -модул. При-

лагайки разсъжденията от доказателството на втората част на Лема 10.2 към умножението μ_t с t върху $R[s_1, \dots, s_n, t]$ олучаваме, че t е цял над R , Q.E.D.

Слабата форма на Теоремата на Hilbert за нулите (Лема 4.27) гласи, че ако идеал $I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ определя празното афинно затворено подмножество $Z(I) = \emptyset$, то $I = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ съвпада с целия полиномиален пръстен $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Следващата лема използва този резултат, за да характеризира хомогенните идеали $I \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ с празно проективно затворено подмножество $Z_h(I) = \emptyset$.

ЛЕМА 10.5. *Хомогенният идеал $I \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ задава празното проективно затворено подмножество*

$$Z_h(I) = \{x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0, \forall \text{ хомогенен } f \in I\} = \emptyset$$

тогава и само тогава, когато съществува естествено число l , така че $I \supseteq \mathfrak{M}^l$ съдържа l -тата степен на максималния идеал $\mathfrak{M} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$, отговарящ на началото $(0, \dots, 0) \in \bar{k}^{n+1}$ в $\bar{k}^{n+1}$.

Доказателство: Ако $I \supseteq \mathfrak{M}^l$ за някое $l \in \mathbb{N}$, то от $x_0^l, \dots, x_n^l \in \mathfrak{M}^l \subseteq I$ следва, че

$$Z_h(I) \subseteq Z_h(x_0^l, \dots, x_n^l) = \emptyset$$

и $Z_h(I) = \emptyset$.

Обратно, нека $Z_h(I) = \emptyset$. Избираме хомогенни пораждащи

$$F_1(x_0, \dots, x_n), \dots, F_r(x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$$

на I със степени $\deg(F_i) = d_i \in \mathbb{N}$ и разглеждаме дехомогенизациите им относно x_0 ,

$$f_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) := x_0^{-d_i} F_i(x_0, \dots, x_n).$$

Ако $U_0 = \{x \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}$, то

$$\emptyset = Z_h(S) \cap U_0 = Z(f_1, \dots, f_r) \subset U_0$$

е празното афинно затворено подмножество на $U_0 \simeq \bar{k}^n$. Съгласно Лема 4.27 - Слаба форма на Теоремата на Hilbert за нулите, идеалът

$$\langle f_1, \dots, f_r \rangle = \bar{k} \left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right]$$

съвпада с полиномиалния пръстен на $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$. Следователно съществуват полиноми $g_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in \bar{k} \left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right]$, $1 \leq i \leq r$ с общи степени $\deg(g_i) = \delta_i \in \mathbb{N}$, така че

$$\sum_{i=1}^r f_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) g_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 1_{\bar{k}} = 1.$$

Привеждаме под общ знаменател $x_0^{m_0}$ за някое $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq d_i$ за всички $1 \leq i \leq r$ и умножаваме почленно с $x_0^{m_0}$, за да получим $x_0^{m_0} \in \langle F_1, \dots, F_r \rangle = I$. Извършваме същите разсъждения за останалите стандартни афинни отворени подмножества $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_i \neq 0\}$, $1 \leq i \leq n$ и получаваме $m_i \in \mathbb{N}$ с $x_i^{m_i} \in I$. Ако $\mu = \max(m_0, \dots, m_n)$, то $x_0^\mu, \dots, x_n^\mu \in I$ и $\mathfrak{M}^\mu \subseteq I$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 13. Ако $f : X \rightarrow Y$ е регулярно изображение на проективни многообразия X, Y , то образът $f(X)$ на X е затворен в Y .

Доказателство: Разглеждаме графика

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

на f с канонични проекции $\text{pr}_1 : \Gamma_f \rightarrow X$, $\text{pr}_1(x, y) = x$ и $\text{pr}_2 : \Gamma_f \rightarrow Y$, $\text{pr}_2(x, y) = y$. Твърдим, че Γ_f е затворено подмножество на $X \times Y$. За $Y \subseteq \mathbb{P}^m(\bar{k})$ разглеждаме $f : X \rightarrow \mathbb{P}^m(\bar{k})$ като регулярно изображение в $\mathbb{P}^m(\bar{k})$ и проверяваме, че Γ_f е затворено подмножество на $X \times \mathbb{P}^m(\bar{k})$. Понеже $X \times Y$ е затворено в $X \times \mathbb{P}^m(\bar{k})$, оттук следва, че $\Gamma_f = \Gamma_f \cap (X \times Y)$ е затворено в $X \times Y$. Регулярното изображение

$$\varphi = (f, \text{Id}_{\mathbb{P}^m(\bar{k})}) : X \times \mathbb{P}^m(\bar{k}) \longrightarrow \mathbb{P}^m(\bar{k}) \times \mathbb{P}^m(\bar{k})$$

издърпва диагонала

$$\Delta = \{(y, z) \in \mathbb{P}^m(\bar{k}) \times \mathbb{P}^m(\bar{k}) \mid y = z\}$$

в $\varphi^{-1}(\Delta) = \Gamma_f$. Понеже Δ е затворено в $\mathbb{P}^m(\bar{k}) \times \mathbb{P}^m(\bar{k})$ и регулярното изображение φ е непрекъснато, графикът $\Gamma_f \subset X \times \mathbb{P}^m(\bar{k})$ е затворен.

Съгласно $\text{pr}_2(\Gamma_f) = f(X)$, остава да докажем, че проекцията $\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$, $\text{pr}_2(x, y) = y$ е затворено изображение, т.е. pr_2 трансформира затворено подмножество $Z \subseteq X \times Y$ в затворено подмножество $\text{pr}_2(Z) \subseteq Y$. Ще проверим, че

$$\begin{aligned} \text{pr}_2 : \mathbb{P}^n(\bar{k}) \times \bar{k}^m &\longrightarrow \bar{k}^m, \\ \text{pr}_2(x, y) &= y \end{aligned}$$

е затворено изображение. Това е достатъчно, защото всяко затворено подмножество $Z \subseteq X \times Y$ е затворено в $\mathbb{P}^n(\bar{k})$, поради затвореността на $X \times Y$ в

$\mathbb{P}^n(\bar{k}) \times Y$. Затова можем да считаме, че $X = \mathbb{P}^n(\bar{k})$. Покриваме Y с афинни отворени подмножества $U_i \cap Y$ за $0 \leq i \leq m$. Ако проекциите

$$\text{pr}_2 : \mathbb{P}^n(\bar{k}) \times (U_i \cap Y) \rightarrow U_i \cap Y$$

са затворени, то и $\text{pr}_2 : \mathbb{P}^n(\bar{k}) \times Y \rightarrow Y$ е затворено, защото крайно обединение на затворени подмножества е затворено. Афинните многообразия $U_i \cap Y$ са затворени в U_i , така че затворените им подмножества са затворени в U_i и е достатъчно да проверим, че $\text{pr}_2 : \mathbb{P}^n(\bar{k}) \times \bar{k}^m \rightarrow \bar{k}^m$ е затворено.

Ако

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \times \bar{k}^m \mid g(x_0, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0, \quad g \in S\}$$

за някакво крайно множество от полиноми $S \subset \bar{k}[x_0, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m]$, които са хомогенни относно $x_0, \dots, x_n$, то $\text{pr}_2(Z)$ се състои от онези $b \in \bar{k}^m$, за които системата полиномиални уравнения $g(x_0, \dots, x_n; b_1, \dots, b_m) = 0, \quad \forall g \in S$ има ненулево решение. Съгласно Лема 10.5, $b \in \text{pr}_2(Z)$ тогава и само тогава, когато идеалът $I(b) = \langle g(x_0, \dots, x_n; b) \mid g \in S \rangle$ не съдържа $\mathfrak{M}^l$ за $\mathfrak{M} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ и $\forall l \in \mathbb{N}$. За произволно естествено l разглеждаме

$$T_l = \{b \in \bar{k}^m \mid I(b) \not\supseteq \mathfrak{M}^l\}$$

и забелязваме, че $\text{pr}_2(Z) = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} T_l$. Достатъчно е да докажем, че T_l са затворени в $\bar{k}^m$, за да получим, че $\text{pr}_2(Z)$ е затворено в $\bar{k}^m$. Да означим с $d(g)$ степента на $g(x; y) \in S$ относно $x_0, \dots, x_n$. Идеалът $\mathfrak{M}^l$ се поражда от множеството M_l на мономите $x_0^{s_0} \dots x_n^{s_n}$ на $x_0, \dots, x_n$ от степен $\sum_{i=1}^n s_i = l$. Условието $I(b) \supseteq \mathfrak{M}^l$ е равносилно на $\mu = \sum_{g \in S} g(x; b) f_{g, \mu}(x; b)$ за $\forall \mu \in M_l$ и някакви полиноми $f_{g, \mu}(x; b) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n; b_1, \dots, b_m]$. Сравнявайки хомогенните компоненти от степен l в двете страни получаваме

$$\mu = \sum_{g \in S} g(x; b) f_{g, \mu}(x; b)^{(l-d(g))}$$

за хомогенните компоненти $f_{g, \mu}(x; b)^{(l-d(g))}$ на $f_{g, \mu}(x; b)$ от степен $l - d(g)$. Да забележим, че хомогенната компонента $I(b)^{(l)}$ на $I(b)$ от степен l се поражда като $\bar{k}$ -линейно пространство от множествата $g(x; b) M_{l-d(g)}$, които се съдържат в $\mathfrak{M}^l$. С други думи, линейната обвивка $l_{\bar{k}}(g(x; b) M_{l-d(g)} \mid g \in S) = I(b)^{(l)}$ е винаги $\bar{k}$ -линейно подпространство на пространството $l_{\bar{k}}(M_l)$ на хомогените полиноми на $x_0, \dots, x_n$ от степен l . Условието $I(b)^{(l)} \supseteq \mathfrak{M}^l$ е в сила точно когато

$$\mathfrak{M}^l \subseteq I(b)^{(l)} = l_{\bar{k}}(g(x; b) M_{l-d(g)} \mid g \in S)$$

за хомогенната компонента $I(b)^{(l)}$ на $I(b)$ от степен l . Следователно $b \in \bar{k}^m \setminus T_l$ тогава и само тогава, когато $l_{\bar{k}}(g(x; b) M_{l-d(g)} \mid g \in S) = I(b)^{(l)}$ съвпада с $l_{\bar{k}}(M_l)$. Оттук, условието $b \in T_l$ е еквивалентно на

$$l_{\bar{k}}(g(x; b) M_{l-d(g)} \mid g \in S) = I(b)^{(l)} \subsetneq l_{\bar{k}}(M_l).$$

Множеството M_l на мономите μ на $x_0, \dots, x_n$ от степен l образува базис на $l_{\bar{k}}(M_l)$. Нека $\delta = |M_l| = \dim_{\bar{k}}(\mathfrak{M}^l)$ и $\{g(x; b) M_{l-d(g)} \mid g \in S\} = \{G_\beta \mid \beta \in B\}$ е $\bar{k}$ -линейно пространство с $|B| = \lambda$ пораждащи. Изразяваме G_β като линейни комбинации на $\mu_i \in M_l$, $1 \leq i \leq \delta$ с коефициенти $c_{\beta, i} \in \bar{k}$ и разглеждаме $\lambda \times \delta$ -матрицата $C = (c_{\beta, i})_{\beta=1, i=1}^{\lambda, \delta} \in M_{\lambda, \delta}(\bar{k})$. Условието $l_{\bar{k}}(B) \subsetneq l_{\bar{k}}(M_l)$ е еквивалентно на $\text{rk}(C) \leq \delta - 1$ и се изразява с анулиране на всички минори на C от ред δ . Последното е затворено условие, така че $T_l \subset \bar{k}^m$ са затворени и pr_2 е затворено изображение, Q.E.D.

ЛЕМА 10.6. *Нека $V \subsetneq U_0$ е собствено афинно алгебрично подмножество на $U_0 = \{x \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}$, чиято проективна затворена обвивка $\bar{V}$ не съдържа точката $p = [0 : \dots : 0 : 1]$. Тогава афинният координатен пръстен $\bar{k}[V]$ е цял над своя подпръстен $D = \bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0} + I(V), \dots, \frac{x_{n-1}}{x_0} + I(V)\right]$.*

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че полиномиалният пръстен

$$\bar{k}[U_0] = \bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$$

е цял над своя подпръстен

$$\bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_0}\right],$$

защото всяка цяла зависимост на $z \in \bar{k}[U_0]$ над $\bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_0}\right]$ индуцира цяла зависимост на $z + I(V) \in \bar{k}[V]$ над D . За целта представяме z като дехомогенизация на хомогенен полином $G(x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ от степен $d \in \mathbb{N}$, т.е.

$$z = \frac{G(x_0, \dots, x_n)}{x_0^d}.$$

Изображението

$$\begin{aligned} \varphi_G : \bar{V} &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\bar{k}), \\ \varphi_G([x_0 : \dots : x_{n-1} : x_n]) &= [x_0^d : \dots : x_{n-1}^d : G] \end{aligned}$$

е регулярно, защото $\mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus \{p\}$ се съдържа в областта на регулярност на φ_G и $\bar{V} \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus \{p\}$. Съгласно Теорема 13, образът $\varphi_G(\bar{V})$ е затворен в $\mathbb{P}^n(\bar{k})$. Нека $\varphi_G(\bar{V}) \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ се задава с хомогенни полиноми $F_i(y_0, \dots, y_n) \in \bar{k}[y_0, \dots, y_n]$ от степен $\deg(F_i) = d_i \in \mathbb{N}$ за $1 \leq i \leq r$. Проективното затворено множество

$$Z = \{y \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid y_0 = \dots = y_{n-1} = 0, F_1(y) = \dots = F_r(y) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$$

е празно, защото уравненията $y_0 = \dots = y_{n-1} = 0$ нямат решение върху $\varphi_G(\bar{V})$ при $p \notin \bar{V}$. Съгласно Лема 10.5, хомогенният идеал

$$I = \langle y_0, \dots, y_{n-1}, F_1, \dots, F_r \rangle \triangleleft \bar{k}[y_0, \dots, y_n]$$

съдържа $\mathfrak{M}^l$ за някое $l \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{M} = \langle y_0, \dots, y_n \rangle$. Оттук

$$y_n^l = \sum_{i=0}^{n-1} y_i H_i(y) + \sum_{j=1}^r F_j(y) P_j(y) \quad (10.1)$$

за някакви полиноми $H_i(y), P_j(y) \in \bar{k}[y_0, \dots, y_n]$. Ограничаваме хомогенната компонента на (10.1) от степен l върху $\varphi_G(\bar{V})$ и получаваме, че

$$\left[y_n^l - \sum_{i=0}^{n-1} y_i H_i(y)^{(l-1)} \right] \Big|_{\varphi_G(\bar{V})} = 0$$

или хомогенният полином

$$\Phi(y_0, \dots, y_n) = y_n^l - \sum_{i=0}^{n-1} y_i H_i(y)^{(l-1)}$$

от степен l принадлежи на идеала на $\varphi_G(\bar{V})$. Оттук следва, че

$$\Phi(x_0^d, \dots, x_{n-1}^d, G) = G^l - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^d H_i(\varphi_G(x))^{(l-1)}$$

е от хомогенния идеал на $\bar{V}$. Разделяйки на x_0^{dl} получаваме, че $z = \frac{G}{x_0^d}$ е цял над $\bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_0}\right]$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 14. (Лема на Noether за нормализация) *За произволно афинно многообразие $V \subseteq \bar{k}^n$ съществува базис на трансцендентност $y_1, \dots, y_d$ на функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V над $\bar{k}$, който се съдържа в афинния координатен пръстен $\bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ на V и $\bar{k}[V]$ е цял над $\bar{k}[y_1, \dots, y_d]$.*

Доказателство: Отъждествяваме $\bar{k}^n$ със стандартното афинно отворено подмножество

$$U_0 = \{x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n(\bar{k})$$

и разглеждаме проективната обвивка $\bar{V} \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ на V . Ако $V = U_0$, то $\bar{k}(V) = \bar{k}\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ е чисто трансцендентно разширение на $\bar{k}$ с базис на трансцендентност $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \in \bar{k}[V]$. При $V \subsetneq U_0$ имаме $\bar{V} \subsetneq \bar{U}_0 = \mathbb{P}^n(\bar{k})$ и можем да изберем точка $p \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus (U_0 \cup \bar{V})$. Без ограничение на общостта ще считаме, че $p = [0 : \dots : 0 : 1]$ Съгласно Лема 10.6, афинният координатен пръстен $\bar{k}[V]$ е цял над своя подпръстен $D = \bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0} + I(V), \dots, \frac{x_{n-1}}{x_0} + I(V)\right]$. Проекцията

$$\Pi : \mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\bar{k}),$$

$$\Pi([x_0 : \dots : x_{n-1} : x_n]) = [x_0 : \dots : x_{n-1}]$$

с център p е регулярна върху $\bar{V}$ и $V' = \Pi(V)$ е афинно подмногообразие на $U'_0 = \{y \in \mathbb{P}^{n-1}(\bar{k}) \mid y_0 \neq 0\}$, защото $\Pi(\bar{V}) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(\bar{k})$ е затворено по Теорема 13. Ако $V' = U'_0$, то $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_0}$ са трансцендентни над $\bar{k}$ и теоремата е доказана. В случая $V' \subsetneq U'_0$ продължаваме да проектираме по същия начин, докато получим афинно пространство. Прилагайки Лема 10.4 завършваме доказателството на теоремата, Q.E.D.

ЛЕМА 10.7. *Нека комутативния пръстен с единица S е цял над своя подпръстен с единица R . Тогава:*

- (i) *всеки прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$ задава прост идеал $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ в R ;*
- (ii) *идеалът $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е максимален тогава и само тогава, когато идеалът $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R \triangleleft R$ е максимален;*
- (iii) *ако $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ са различни прости идеали в S , то $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R \subsetneq \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$ са различни прости идеали в R .*

Доказателство: (i) Фактор-пръстенът

$$R/\mathfrak{p} = R/(\mathfrak{q} \cap R) \simeq (R + \mathfrak{q})/\mathfrak{q}$$

е област на цялост като подпръстен на областта на цялост $S/\mathfrak{q}$. Следователно идеалът $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R \triangleleft R$ е прост.

(ii) Ще докажем, че $R/\mathfrak{p}$ е поле тогава и само тогава, когато $S/\mathfrak{q}$ е поле. За целта да забележим, че фактор-пръстенът $S/\mathfrak{q}$ е цял над фактор-пръстена $R/\mathfrak{p}$. По-точно, за $\forall s \in S$ с цяла зависимост

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

над $R \ni a_1, \dots, a_n$ имаме $s + \mathfrak{q} \in S/\mathfrak{q}$ с цяла зависимост

$$(s + \mathfrak{q})^n + (a_1 + \mathfrak{p})(s + \mathfrak{q})^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + \mathfrak{p})(s + \mathfrak{q}) + (a_n + \mathfrak{p}) = 0$$

над $R/\mathfrak{p} \ni a_1 + \mathfrak{p}, \dots, a_n + \mathfrak{p}$.

Да допуснем, че $R/\mathfrak{p}$ е поле и да разгледаме произволен ненулев елемент $y \in (S/\mathfrak{q}) \setminus \{\mathfrak{q}\}$. Ако

$$y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} y + \alpha_n = 0$$

е цялата зависимост на y над $R/\mathfrak{p} \ni \alpha_1, \dots, \alpha_n$ от минимална степен, то почленно умножение с $\alpha_n^{-1} y^{-1}$ за $\alpha_n^{-1} \in R/\mathfrak{p}$ дава

$$y^{-1} = -\alpha_n^{-1}(y^{n-1} + \alpha_1 y^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}) \in S/\mathfrak{q}.$$

Следователно $S/\mathfrak{q}$ е поле.

Обратно, ако $S/\mathfrak{q}$ е поле и $x \in (R/\mathfrak{p}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ е произволен ненулев елемент, то съществува $x^{-1} \in S/\mathfrak{q}$. Нека

$$x^{-m} + c_1 x^{-m+1} + \dots + c_{m-1} x^{-1} + c_m = 0$$

е цяла зависимост на x^{-1} над $R/\mathfrak{p} \ni c_1, \dots, c_m$. Умножавайки почленно с x^{m-1} получаваме

$$x^{-1} = -(c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}) \in R/\mathfrak{p}.$$

Това доказва, че $R/\mathfrak{p}$ е поле.

(iii) Да допуснем, че $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}$ за различни прости идеали $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ в S . Локализацията

$$S_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{s}{r} \mid s \in S, r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

относно $\mathfrak{p}$ или $R \setminus \mathfrak{p}$ е цяла над локализацията

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \mid r_1 \in R, r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\},$$

защото произволна цяла зависимост

$$s^m + r_1 s^{m-1} + \dots + r_{m-1} s + r_m = 0$$

на $s \in S$ над $R \ni r_1, \dots, r_m$ индуцира цяла зависимост

$$\left(\frac{s}{r}\right)^m + \rho_1 \left(\frac{s}{r}\right)^{m-1} + \dots + \rho_{m-1} \left(\frac{s}{r}\right) + \rho_m = 0$$

на $\frac{s}{r}$ над $R_{\mathfrak{p}} \ni \rho_1, \dots, \rho_m$ след почленно умножение с r^{-m} за $r \in R \setminus \mathfrak{p}$. Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ е локален с максимален идеал $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}}$ за $1 \leq j \leq 2$. По-точно, от $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_j \cap R \subseteq \mathfrak{q}_j$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_j \cap R \subseteq R$ следва $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}}$. Обратно, ако $\frac{s}{r} = \frac{r_1}{r_2} \in (\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}}$ с $s \in \mathfrak{q}_j$, $r_1 \in R$, $r, r_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$, то $x := sr_2 = rr_1 \in \mathfrak{q}_j \cap R = \mathfrak{p}$. В резултат, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{x}{rr_2} \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$, защото $rr_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$, благодарение на простотата на идеала $\mathfrak{p} \triangleleft R$. Съгласно (ii), оттук следва, че $(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}} \subsetneq (\mathfrak{q}_2)_{\mathfrak{p}}$ са два различни максимални идеала на $S_{\mathfrak{p}}$, вложени един в друг. Противоречието доказва $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ за $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 10.8. Нека комутативният пръстен с единица S е цял над своя подпръстен с единица R , а $\mathfrak{p}$ е прост идеал в R . Тогава съществува прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$ над $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.

Доказателство: Локализацията $S_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{s}{r} \mid s \in S, r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$ на S относно $\mathfrak{p}$ е цяла над локализацията $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \mid r_1 \in R, r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$ на R , съгласно доказателството на Лема 10.7 (iii). Разглеждаме комутативната диаграма

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ R_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & S_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Произволен максимален идеал $\mathfrak{N} \triangleleft S_{\mathfrak{p}}$ дава максимален идеал $\mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} \triangleleft R_{\mathfrak{p}}$, съгласно Лема 10.7(ii). Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ е локален, така че

$$\mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \mid r_1 \in \mathfrak{p}, r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

е единственият максимален идеал на $R_{\mathfrak{p}}$. Праобразът

$$\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{N}) = \left\{ s \in S \mid \exists r \in R \setminus \mathfrak{p}, \frac{s}{r} \in \mathfrak{N} \right\}$$

е прост идеал в S , защото фактор-пръстенът $s/\mathfrak{q}$ е подпръстен на полето $S_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{N}$. Сега от $\mathfrak{N} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ следва, че $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$. По-точно, ако $s \in \mathfrak{q} \cap R$, то за $\forall r \in R \setminus \mathfrak{p}$ е в сила $\frac{s}{r} \in \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Следователно съществуват $r_1 \in \mathfrak{p}$ и $r_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$, така че $\frac{s}{r} = \frac{r_1}{r_2}$. Сега от $sr_2 = rr_1 \in \mathfrak{p}$ и $r_2 \notin \mathfrak{p}$ следва $s \in \mathfrak{p}$, съгласно простотата на идеала $\mathfrak{p} \triangleleft R$. Това доказва $\mathfrak{q} \cap R \subseteq \mathfrak{p}$. Обратно, от $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap R = (\mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}}) \cap R = \mathfrak{N} \cap R = \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \cap R$ следва, че всеки елемент на $\mathfrak{p}$ е от вида $\alpha = \frac{s}{r}$ за подходящи $s \in \mathfrak{q}$ и $r \in R \setminus \mathfrak{p}$. Ако допуснем, че $r \in \mathfrak{q}$, то $r \in R \cap \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, което е противоречие. Следователно $s = \alpha r \in \mathfrak{q}$ и $r \notin \mathfrak{q}$ дават $\alpha \in \mathfrak{q}$, а оттам и $\alpha \in \mathfrak{q} \cap R$. Това доказва $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \cap R$ и $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 10.9. Нека комутативният пръстен с единица S е цял над своя подпръстен с единица R и $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ е редица от прости идеали в R . Тогава съществува редица от прости идеали $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ в S , така че $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$.

Доказателство: Твърдение 10.8 дава съществуването на $\mathfrak{q}_1$. В доказателството на Лема 10.7 проверихме, че в такъв случай областта $S/\mathfrak{q}_1$ е цяла над областта $R/\mathfrak{p}_1$. Идеалът $\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \triangleleft R/\mathfrak{p}_1$ е прост и се повдига до прост идеал $\bar{\mathfrak{q}} \triangleleft S/\mathfrak{q}_1$. Непосредствено се проверява, че $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1$ за прост идеал $\mathfrak{q}_2 \triangleleft S$, съдържащ $\mathfrak{q}_1$. От $\bar{\mathfrak{q}} \cap (R/\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$ получаваме, че $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Продължавайки по този начин след краен брой стъпки доказваме следствието, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 15. Размерността $\dim(V)$ на афинно многообразие $V \subseteq \bar{k}^n$ съвпада със степента на трансцендентност $d = \text{tr deg}_{\bar{k}} \bar{k}(V)$ на функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V над $\bar{k}$.

Доказателство: По Лема 14 на Noether за нормализация, съществува базис на трансцендентност $y_1, \dots, y_d$ на $\bar{k}(V)$ над $\bar{k}$, който се съдържа в афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ и $\bar{k}[V]$ е цял над $D = \bar{k}[y_1, \dots, y_d]$. Влагането $D \subseteq \bar{k}[V]$ индуцира влагане $\bar{k}(y_1, \dots, y_d) \subseteq \bar{k}(V)$ на съответните полета от частни и доминантно рационално изображение

$$f : V \dashrightarrow \bar{k}^d.$$

Степента на трансцендентност $d = \text{tr deg}_{\bar{k}} \bar{k}(\bar{k}^d) = \text{tr deg}_{\bar{k}} \bar{k}(y_1, \dots, y_d)$ на функционалното поле на $\bar{k}^d$ съвпада с размерността $d = \dim(\bar{k}^d)$, защото

$$(0) \subsetneq \langle y_1 \rangle \subsetneq \langle y_1, y_2 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle y_1, \dots, y_d \rangle \subsetneq \bar{k}[y_1, \dots, y_d]$$

е неуплътняема редица от $d+1$ прости идеала в $\bar{k}[\bar{k}^d] = \bar{k}[y_1, \dots, y_d]$. Произволна редица

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d \subsetneq \bar{k}[y_1, \dots, y_d]$$

от $d+1$ различни прости идеала в $D = \bar{k}[y_1, \dots, y_d]$ се повдига до редица

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_d \subsetneq \bar{k}[V]$$

от $d+1$ прости идеала в $\bar{k}[V]$ по Следствие 10.9. Следователно $\dim(V) \geq d = \text{tr deg}_{\bar{k}} \bar{k}(V)$.

За обратното неравенство използваме Лема 10.7 (iii), съгласно която произволна редица

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m \subsetneq \bar{k}[V]$$

от $m+1 = \dim(V) + 1$ различни прости идеала в $\bar{k}[V]$ индуцира редица

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0 \cap D \subsetneq \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap D \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{q}_m \cap D \subsetneq D$$

от $m + 1$ различни прости идеала в $D = \bar{k}[y_1, \dots, y_d]$. Следователно $m = \dim(V) \leq d = \dim(\bar{k}^d) = \text{tr-deg}_{\bar{k}}(\bar{k}^d) = \text{tr-deg}_{\bar{k}}(V)$ и $\dim(V) = \text{tr-deg}_{\bar{k}}(V)$, Q.E.D.