Диференциални уравнения и приложения с Mathematika, Maple и MatLab

Материали към курса
(първоначален вариант)

2010

Увод

При изучаване на реалността или решаване на практически проблеми, често стигаме до математически модели съдържащи диференциални уравнения. Обикновено описваме най-съществените характеристики на интересуващите ни явления чрез краен брой величини, свързани с отношения, които се изписват чрез диференциални уравнения.

Диференциалните уравнения дават локално описание на законите, които управляват поведението на величините или развитието на процеса. Ограничеността на човешките способности, включително пространствено и във времето, правят именно локалните описания на законите естествен и предпочитан начин за формулиране на закономерностите в обкръжаващата ни реалност. По необходимост математическите модели са локални описания, а локално описание на поведението на величините означава описание с диференциални уравнения.

Огромният брой задачи от всички области на познанието и технологиите, водещи до задачи за диференциални уравнения, правят задължително получаването на познания по диференциални уравнения при подготовката на специалисти за почти всички области. Става дума не за абстрактни теоретични знания, а за разбиране на същината на задачите и придобиване на възможност за практическото им решаване. В много от случаите отдавна има готови решения, които могат да се адаптират към още по-широк кръг проблеми. Същевременно, добре подготвеният човек трябва да е в състояние да формулира действително новите проблеми и да потърси правилно необходимата помощ за решаването им.

Именно към такъв тип обучение е ориентиран този курс. Постигането на целите на такова обучение днес е възможно благодарение на огромните възможности на съвременните компютърни системи. Те ни осигуряват възможност да извършваме бързо огромен брой изчисления, богатите им графични възможности ни позволяват да визуализираме свойствата на получените решения, да правим компютърна симулация на явления и процеси в реално време, и благодарение на това да създаваме по-бързо и по добри технологични решения, продукти и практически разработки. Това особено важи за хора, които не познават в дълбочина математическия апарат, но чрез визуализацията на резултата достигат до разбиране на същността на процеса или явлението.

Възможностите на съвременните системи за научни изчисления като Mathematika, Maple, MatLab или Scilab (последната се разпространява свободно) са съпоставими. Студент, който умее да работи с една от тях, лесно ще решава проблеми и с коя да е друга. Интерфейсът с ползвателя използва най-доброто от съвременните компютърни системи. За определеност и краткост на текста в курса се се говори главно за MatLab. Не на последно място тя е избрана, и защото в нея е вложено много от най-доброто в съвременните компютърни системи и особено от света на UNIX системите - интерфейсът между човек и машина да бъде текстов, еднакво добре разбираем и за човека, и за машината, човекът да поставя задачата и да дава указания, а компютърът да работи вместо него. Разбира се системата притежава и богат графичен интерфейс, който позволява да се реализират повечето от опциите на командите чрез падащи менюта и клавишни комбинации. Друго предимство на системата е използването на векторни и матрични променливи, което съкращава голяма част от стандартната програмистка работа и дава удобен и кратък, лесен за разбиране и използване команден език.

Курсът дава основни сведения за задачите описвани с обикновени и частни диференциални уравнения и системи. Чрез изучаване на сравнително несложни математически модели на процеси от различни области като механика, физика, химия, астрономия, математическа биология, медицина, финанси и др., се цели студентът да придобие способност самостоятелно да анализира практически проблеми в своята област, да може да направи адекватен математически модел, чрез изследването му да може да го подобри, да визуализира получените резултати и да извърши компютърна симулация. По такъв начин той ще разполага с мощен, удобен и съвременен апарат за решаване на задачите в своята конкретна област.

За да е ефективна, визуализацията трябва да се основава на някакво вече усвоено знание. Наблюдателят трябва да има необходимия усет, за да разпознае в образа правилно характеристиките на процеса и връзките помежду им. В този смисъл, е необходимо разбиране на същината на моделираното явление.

Визуализацията представя данните във физически естествена форма удобна за работа с тях. Дава възможност за по-дълбоко разбиране чрез използване на различни информационни канали за възприемане. Една от целите на визуализацията е да подпомогне връзката между придобиване на ново познание и това което наблюдателя вече притежава. Може да се използва за откриване на нови взаимовръзки и ефекти, както и да се прилага за вече известна информация. В сложни системи помага да се насочи вниманието към най-важните характеристики на модела.

Използването на визуализацията в обучението ще позволи на студента да прави аналогии с други познати процеси, за които има вече изградено разбиране и развита интуиция. По този начин, едновременно се илюстрира многофункционалността на моделите. Това подпомага свързването на отделни фрагментирани данни или познания в обща картина или мрежа от знания.

В първата част на курса се разглеждат модели и задачи за обикновени диференциални уравнения. Дават се само най-основни свойства на решенията, без излишно теоретизиране и математически формализъм. Още тук студентът се запознава с най-необходимите сведения за използването на MatLab като средство за изчисления, визуализация и компютърна симулация. Чрез многобройните фигури, листинги на програмния код, чрез които се визуализират изучаваните функции и се прави компютърна симулация на изучавания процес, студентът постепенно увеличава познанията си за системата и добива увереност при използването на компютъра, разбира огромната мощ която притежава дори всяка вече на поне 10 години машина и е готов да търси решаване на сериозните проблеми опирайки се на познанията си.

Дават се първоначални сведения за числените методи, което от една страна трябва да доближи студента до разбирането на използвания локален математически модел, а от друга страна да създаде разбиране за естеството и проблемите на изчислителния процес. И тук ударението е върху разбирането, а не простото заучаване на готови изчислителни схеми и методи. Същевременно студентът започва да разбира духа на съвременната математика, придобива усет за математика по един ненатрапчив начин, осъзнава, че силата ѝ е не в простото трупане на факти, а в разбирането на същината на проблемите - математически, изчислителни, компютърни или просто на тези, с които ни среща реалността.

Втората част на курса е посветена на моделите описвани с частни диференциални уравнения и типичните задачи които възникват. Решенията са функции на много променливи и това увеличава на порядък трудностите в смятането, формулите и представянето на решенията, численото им намиране и визуализация. Разгледани са само задачи за трите основни уравнения – вълновото, уравнението на Лаплас и уравнението на топлопроводимостта, чието изследване е образец за голяма част от теорията на частните диференциални уравнения. И тук ударението е върху разбирането на модела, създаването на усет за очакваните свойства на решението и намирането на адекватното числено изследване. Графичните и изчислителни възможности на компютъра улесняват това разбиране, а обилието от програмен код и компютърни симулации създават увереност в разбирането на математическата същност на проблемите и изследването им с тези съвременни средства.

Съдържание

Глава 1

Задачи за диференциални уравнения

1.1 Модели и диференциални уравнения. Решаване на диференциални уравнения

1.1.1 Диференциални уравнения

Математическото описание на явления и процеси обикновено се дава чрез няколко величини, за които се предполага, че характеризират неговите най-съществени страни. За част от величините се предполага, че могат да се променят свободно, а останалите зависят от тях и помежду си. Например, топлинният режим в едно помещение определяме, като измерваме температурата T в различни моменти от време t. Тук времето t е независима величина, а температурата T е зависима от него, т.е. е функция от температурата. Пишем $T = T(t)$ следвайки традицията, отстъпвайки от математическия формализъм, който изисква функцията и стойността й да са означени с различни символи, например като $T = g(t)$.

Да разгледаме изменението на температурата в по-голямо помещение. Сега температурата ще се променя и в зависимост от координатите x, y, z на точката, в която я измерваме. Независимите променливи са вече четири, а зависимата променлива $T = T(t, x, y, z)$ е функция от тях. Предполага се, че можем да установим температурата във всяка точка и във всеки момент от време.

В зависимост от конкретния процес, една величина може да бъде както независима, така и зависима. Например координатите x, y, z на движеща се точка, са функции на времето $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. При слизане на космическа совалка към земната повърхност времето

t, за което температурата на корпуса на совалката може да достигне критично висока стойност и тя да изгори е функция на скоростта ѝ и параметрите на орбитата.

При изучаване на конкретните явления, закономерностите, по които се развиват, често са зададени като съотношения, между описващите ги величини и техните производни. Тези съотношения наричаме диференциални уравнения.

Нека $y = y(x)$ е функция на една променлива, за която знаем, че удовлетворява съотношението

$$y''(x) - (1 + x^2)y(x) = 0.$$

Обикновено го записваме кратко като

$$y'' - (1 + x^2)y = 0.$$

и пропускаме аргумента (независимата променлива) x. Казваме, че това е обикновено диференциално уравнение от втори ред, защото в него най-високият ред на производна е втори. Уравненията за функции на една променлива ще наричаме обикновени диференциални уравнения. Ето още няколко примера за такива уравнения.

$$y'+xy = x^2+1, \quad y'''+2y''-2y'+y = e^{-x}, \quad y' = x^2+y^2, \quad (y'+1)^2-4x^2 = 0.$$

Първото от тях е от първи ред, второто от трети ред, а последните две пак от първи ред. Ясно е, че в общия случай ще бъде по-трудно да намерим решение на уравнение от по-висок ред.

В първите три уравнения търсените функции и техните производни се появяват в събираеми, в които са умножени по функция на x или число. Такива уравнения наричеме линейни. В последните две уравнения търсената функция y и нейната производна y' участват на втора степен и те са нелинейни. По-нататък ще видим, че линейните уравнения притежават свойства, които подпомагат изследването им, така че като правило очакваме нелинейните уравнения да са по-сложни.

Многобразието от уравнения е твърде голямо. Дори има диференциални уравнения като $1 = -e^{y'+x^2y}$, които нямат решения и очевидно не представляват интерес.

Най-общо едно уравнение от първи ред можем да запишем във вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

Първите две от разгледаните уравнения от първи ред дори имат вида

$$y' = f(x, y),$$

т.е. те са решени относно производната.

Последното уравнение не е решено относно производната и е по-сложно. Поради очевидното разлагане на множители в лявата му страна

$$(y' + 1)^2 - 4x^2 = (y' + 1 + 2x)(y' + 1 - 2x) = 0$$

ще намерим негово решение, ако намерим решение на някое от уравненията

$$y' + 1 + 2x = 0 \text{ или } y' + 1 - 2x = 0.$$

Казано другояче, ако решим първоначалното уравнение относно производната, свеждаме го до две диференциални уравнения решени относно производната.

Едно обикновено диференциално уравнение от ред n има вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Често се случва да търсим няколко функции на една и съща променлива удовлетворяващи система от диференциални уравнения. Линейната система

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

е за намирането на функциите $x = x(t), y = y(t)$. Тя е от втори ред, защото най-високият ред на производна е втори и очевидно е линейна система с постоянни коефициенти от две уравнения за две неизвестни функции. По традиция, когато t е независимата променлива, наричаме я време и производните означаваме с точки, т.е. вместо x', x'' и y', y'' пишем $\dot{x}, \ddot{x}$ и $\dot{y}, \ddot{y}$.

Диференциалните уравнения за функции на една променлива наричаме обикновени диференциални уравнения, а диференциалните уравнения за функции на много променливи наричаме частни диференциални уравнения, защото производните в тях са частни производни.

Нека $u = u(t, x, y, z)$ е температурата в момент t в точка с координати x, y, z на еднородно топлопроводимо тяло. Тя удовлетворява линейното частното диференциално уравнение от втори ред

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

наричано обикновено уравнение на топлопроводността. Тук a е положителна константа, наричана коефициент на топлопроводност.

В първата част на този курс ще се занимаваме с обикновени диференциални уравнения.

1.1.2 Решаване на диференциални уравнения

Да разгледаме следното просто диференциално уравнение от първи ред

$$y' = x^2.$$

Да намерим функция $y = y(x)$, която удовлетворява уравнението, означава да намерим примитивна на функцията x^2, добре позната задача от анализа. Следователно всички негови решения получаваме по формулата

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

където C е произволна реална константа. Получената формула наричаме общо решение. Отделните решения, т.е. решенията, които в случая получаваме за конкретни стойности на C, наричаме частни решения. Например функциите $\frac{1}{3}x^3$ и $\frac{1}{3}x^3 - 2$ са частни решения. Вижда се, че уравнението притежава безбройно много решения, толкова, колкото са реалните числа. Добра представа за поведението на едно решение дава неговата графика. По традиция графиката на решението на диференциално уравнение се нарича интегрална крива (Решението получихме с интегриране!).

Нека $f(x)$ е непрекъсната функция в някакъв интервал Δ (отворен, затворен, полуотворен, краен или безкраен), което по-нататък ще записваме като $f \in C(\Delta)$. С уравнението

$$y' = f(x) \tag{1.1.1}$$

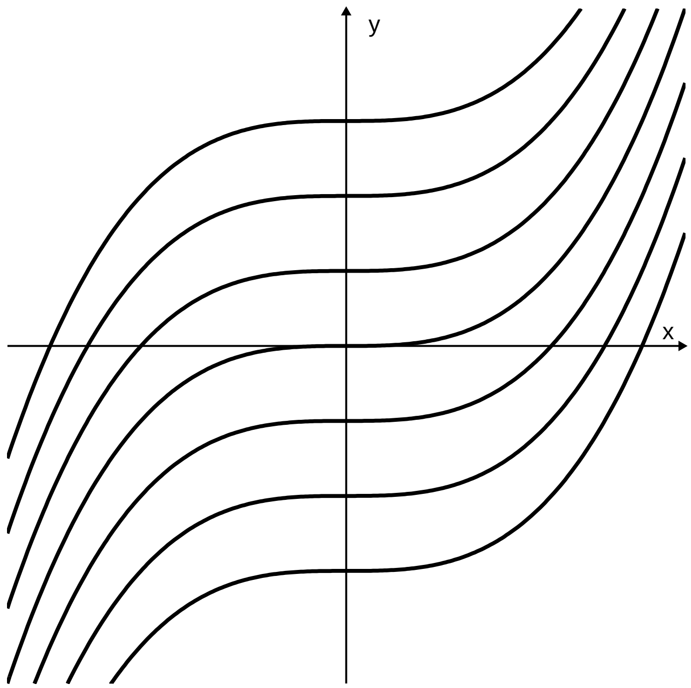
се справяме както в горния случай. Ако $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то общото решение на това диференциално уравнение има вида

$$y(x) = F(x) + C,$$

където C е произволна реална константа. Една примитивна на $f(x)$ обикновено наричаме неопределен интеграл и използваме означението $F(x) = \int f(x)dx$. Намирането на неопределен интеграл наричаме просто интегриране. Формулата за общото решение обикновено записваме във вида

$$y(x) = \int f(x)dx + C,$$

а процеса на решаване на уравнението 1.1.1 можем да опишем така. Интегрираме двете страни на уравнението за да премахнем диференцирането и получаваме общото решение.



Фигура 1.1: Картина на интегралните криви за уравнението $y' = x^2$.

Да разгледаме следното просто уравнение от втори ред

$$y'' = x^2. \tag{1.1.2}$$

Като използваме, че $y'' = (y')'$, получаваме за намирането на производната y' уравнението

$$(y')' = x^2$$

от вида 1.1.1. Сега с едно интегриране премахваме едно диференциране и получаваме

$$y' = \frac{1}{3}x^3 + C_1,$$

където C_1 е произволна реална константа. Отново стигнахме до основния случай 1.1.1 и с едно интегриране премахваме последното диференциране, при което се появява нова произволна константа C_2, и стигаме до формулата за общото решение

$$y(x) = \frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2.$$

Като следващ пример разглеждаме уравнението

$$y' + y = 0.$$

Умножаваме го с $e^x = (e^x)'$ и получаваме еквивалентното уравнение

$$(ye^x)' = y'e^x + y(e^x)' = 0,$$

което като уравнение за функцията ye^x е от основния вид 1.1.1, след което с едно интегриране премахваме диференцирането и получаваме

$$ye^x = C,$$

откъдето намираме, че общият вид на решението е .

$$y(x) = Ce^{-x}.$$

Всъщност по описаная начин показахме само, че ако $y(x)$ е решение на уравнението, то има горния вид. Това, че функциите получавани по тази формула действително са решения на уравнението се проверява, като заместим в уравнението. В това можем да се убедим и като забележим, че използваните преобразувания са еквивалентни.

Процесът на решаване, който използвахме в разгледаните случаи можем да опишем по следния начин. Преобразуваме уравнението така, че с едно интегриране да премахнем едно диференциране. Ако уравнението е от по-висок ред прилагаме отново и отново тази процедура, докато премахнем всички диференцирания. От последното равенство изразяваме търсената функция и получаваме формулата за общото решение. При всяко интегриране се появява нова интеграционна константа. Очакваме, че ако уравнението е линейно, можем да използваме само линейни операции.

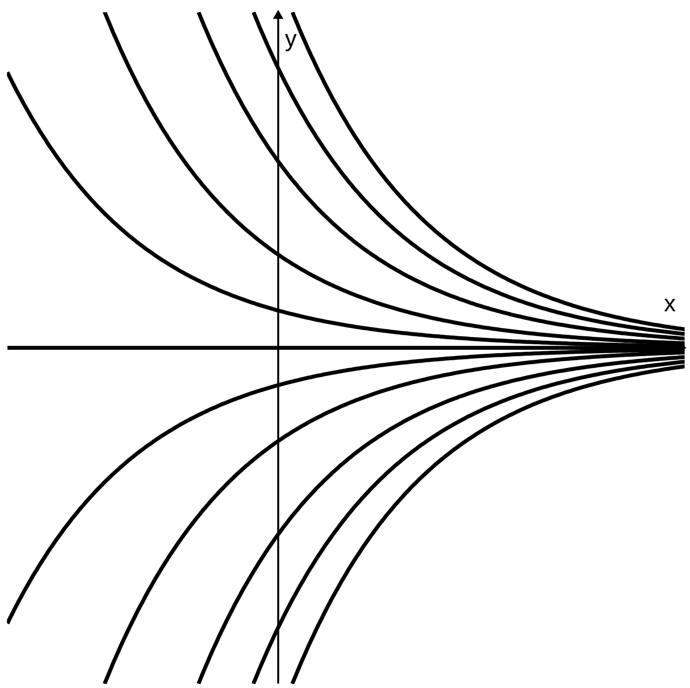
Ако допуснем, че описаната процедура за намиране на решенията е общоприложима, можем да формулираме следните закономерности:

- Решението на обикновено диференциално уравнение от ред n зависи от n произволни константи.

- Ако уравнението е линейно, произволните константи участват линейно.

Направените изводи са верни и по-нататък ще бъдат показани за конкретни класове обикновени диференциални уравнения.

Описания процес за решаване е приложим само в специални случаи, например той е приложим във всички стандартни елементарни случаи на уравнения от първи ред, които са описани по-нататък. Той е оставил печата си върху терминологията свързана с диференциалните уравнения. В много книги вместо за решаване на диференциално уравнение се говори за интегриране на диференциално уравнение. Понякога самите решения на диференциалното уравнение се наричат интеграли на диференциалното уравнение. Вече споменахме, че графикът на решението на едно диференциално уравнение е общоприето да се нарича интегрална крива.



Фигура 1.2: Картина на интегралните криви за уравнението $y' + y = 0$.

Да разгледаме уравнението от втори ред

$$y'' = y.$$

Веднага съобразяваме, че e^x и e^{-x} са решения. Понеже уравнението е линейно, тези функции умножени с константа са пак решения, сума от две решения отново е решение. Следователно по формулата

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

получаваме съвкупност от решения на уравнението, която зависи от две произволни константи, при това линейно. Съгласно формулираните погоре основни закономерности, това е формулата за общото решение. Понататък ще се убедим, че евристичният ни подход води до правилно заключение.

1.1.3 Моделиране на явления и процеси чрез диференциални уравнения

Радиоактивен разпад

Математическият модел описващ радиоактивния разпад на химични елементи с голяма атомна маса се основава на предположението, че скоростта на намаляване на веществото е пропорционален на количеството вещество. Коефициента на пропорционалност k зависи от свойствата на распадащото се вещество и не зависи от времето. Така, ако количеството в момента t_0 е y_0, получаваме задачата да намерим функция $y = y(t)$, която удовлетворява уравнението

$$y' = -ky, \qquad k = const > 0$$

и за която знаем, че в началния момент има стойност

$$y(t_0) = y_0$$

Задачата с начално условие наричаме задача на Коши.

Вече решихме това уравнение за $k = 1$. Веднага съобразяваме, че функциите от вида $y(t) = Ce^{-kt}$ са решения на диференциалното уравнение, и както постъпихме преди, можем да покажем, че това са всички решения на уравнението, т.е. тази формула ни дава неговото общо решение. В това можем да се убедим и по друг начин. За $y \neq 0$ записваме уравнението във вида

$$\int \frac{y'}{y}\, dt = -\int k\, dt + C$$

След като пресметнем интеграла в ляво, получаваме

$$\ln|y| = D - kt,$$

където D е интеграционната константа. Всички непрекъснати функции които удовлетворяват това равенство имат вида $y(t) = Ce^{-kt}$, което е общото решение на уравнението. Сега да вземем предвид началното условие, намираме че решението на задачата на Коши е $y(t) = y_0e^{-k(t-t_0)}$. От формулата се вижда, че периода на полуразпад, т.е. времето ΔT нужно за намаляване на веществото наполовина, не зависи от началното количество, а само от коефициента k. Наистина, ако $y(t_1) = y_1$ и $y(t_1 + \Delta T) = y_1/2$, можем да намерим ΔT от уравнението

$$\frac{y_1}{2} = y_1e^{-k\Delta T}.$$

Получаваме, че $\Delta T = \dfrac{\ln 2}{k}$.

1.2 Решаване на ОДУ от първи ред

Уравнения с разделящи се променливи

Когато променливите в дясната страна се отделят, т.е. $f(x,y) = g(x)h(y)$ имаме

$$y' = g(x)h(y)$$

което се нарича уравнение с разделящи се променливи. В частност, такова е уравнението от модела на Малтус, където можем да вземем например $g(x) = 1$ и $h(y) = ky$. Лесно се вижда, че ако y_0 е нула на $h(y)$, то $y(x) = y_0$ е решение на уравнението. От друга страна, при $h(y) \neq 0$ уравнението с разделящи се променливи може да се интегрира, като първо се раздели на $h(y)$променливата, по която се интегрира в ляво, – получаваме

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C.$$

В резултат намираме общото решение в неявен вид $H(y) = G(x) + C$.

Хомогенни уравнения

Хомогенни уравнения наричаме уравненията, при които дясната страна е хомогенна функция на x и y. Те могат да се запишат във вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ако означим $z = \dfrac{y}{x}$, то за функцията $z(x)$ получаваме $z'x + z = f(z)$ или

$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

което е уравнение с разделящи се променливи.

Инвестиционен модел с непрекъсната лихва и линейни диференциални уравнения от първи ред

Открили сте влог с начален капитал y_0 лева с лихва $a(t)$, която действа непрекъснато и може да се мени по времето, и теглите/влагате пари в сметката със скорост на инвестиране $b(t)$. Математическият модел е

$$\begin{aligned} &y' = a(t)y + b(t) \\ &y(0) = y_0 \end{aligned}$$

Това е задача на Коши за *линейно диференциално уравнение от първи ред* и решението се дава с формулата

$$y(t) = e^{\int\limits_0^t a(s)\,ds} \left(y_0 + \int\limits_0^t b(s) e^{-\int\limits_0^s a(u)\,du} ds \right).$$

Тази формулата може да се изведе, като умножим уравнението с подходящ интегриращ множител. Да забележим, че

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\int\limits_0^t a(s)\,ds} y(t) \right] = e^{-\int\limits_0^t a(s)\,ds} [y' - a(t)y(t)],$$

да умножим двете страни на уравнението с $e^{-\int\limits_0^t a(s)\,ds}$ и да интегрираме от 0 до t. Намираме

$$e^{-\int\limits_0^t a(s)\,ds} y(t) = y_0 + \int\limits_0^t b(s) e^{-\int\limits_0^s a(u)\,du} ds,$$

откъдето се получава исканата формула.

До линейни уравнения се свеждат и *уравненията на Бернули*. Те имат вида

$$y' = a(t)y + b(t)y^m,$$

където константата $m \neq 0$ или 1. Чрез полагането $z = y^{1-m}$, за новата неизвестна функция $z(t)$ получаваме линейното уравнение

$$z' = (1-m)\,a(t)\,z + (1-m)\,b(t).$$

1.3 Компютърна визуализация и симулация чрез MatLab

1.3.1 MatLab, кратки сведения

Основният ни интерес в математическите модели описвани с диференциални уравнения е към функциите, които са решения на разглежданите за тях задачи. От изчислителна гледна точка да познаваме една функция, да речем на една променлива, означава да ни е известна матрица, първият ред на която ни дава стойностите на аргумента на функцията, а вторият да ни дава съответните стойности на самата функция.

Едно от предимствата на MatLabe, че командният му език използва векторни и матрични променливи, векторни и матрични операции, което облегчава много ползвателя на системата.

Стойност на една векторна променлива задаваме, като напишем на командния ред например $x = [3\ 11\ 8]$ и след това изпълним тази команда за присвояване с натискането на клавиша Enter. Можем отново да видим стойността на въведената векторна променлива x, или на коя да е друга вече въведена променлива, като я напишем на командния ред и натиснем Enter. Елементите на въвеждания масив можем да разделяме и със запетаи, например $y = [3, 11, 8, 7]$.

Една векторна променлива x е едномерен масив, стойностите на който са индексиране от 1 до най-голямата стойност на индекса $length(x)$. Можем да получим третата стойност от масива y като напишем $y(3)$ и натиснем Enter.

Удобен начин за задаване на масив от равноотдалечени едно от друго числа е като напишем $x = 2.1 : 0.7 : 4.1$ това натиснем Enter. Така получаваме масива $x = [2.1000\ \ 2.8000\ \ 3.5000]$ със стъпка 0.7. Ако не сме посочили стъпка, по подразбиране се приема, че тя е равна на 1. Пробвайте с $x = 2.1 : 6$. Резултатът е [2.1000 3.1000 4.1000 5.1000].

Ако искаме да пресметнем всички стойности на функцията sin, просто пишем за стойности на аргумента от масива $x = 2.1 : 6$, просто пишем $y = \sin(x)$, натискаме Enter и получаваме масива

$$y = [0.8632\ 0.0416\ -0.8183\ -0.9258].$$

Ако не искаме да се показва резултатът от изпълнението на една командата, след нея пишем “;”. Пробвайте с командата $y = \sin(x);$.

Нека $x = [x(1), x(2), \dots x(k)]$ и $y = [y(1), y(2), \dots y(k)]$ са два масива с еднаква дължина k. Командата $\text{plot}(x, y)$ рисува начупена линия, съединяваща точките

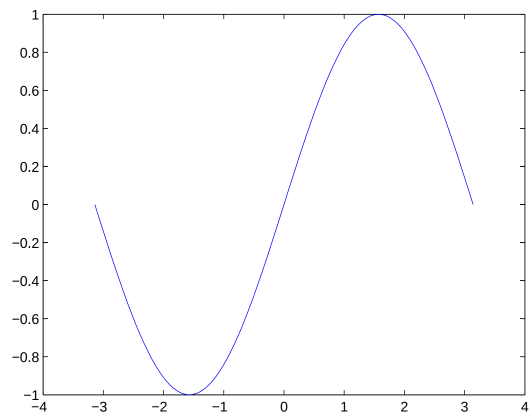
$$(x(1), y(1)), (x(2), y(2)), \dots (x(k), y(k)).$$

Тя се използва за рисуване на графика на една функция или на параметрично зададена крива.

Графикът на функцията $y = \sin(x)$, когато x се мени в интервала $(-\pi, \pi)$ получаваме като резултат от последователното изпълнение на командите

```
x=-pi:pi/50:pi;
y=sin(x);
plot(x,y)
```

Колкото по-малка стъпка изберем, толкова по добре изглежда графика на функцията.



Фигура 1.3: Графика на функцията $\sin(x)$.

1.3.2 Математически модели описвани с ОДУ от първи ред

Изучаването на реални процеси или явления често е свързано с предсказване на поведението на различни променящи се във времето количества. Както е известно от математическия анализ, скоростта на изменението на дадена функция се измерва с нейната производната. Така описанието им естествено води до създаване на модели базирани на диференциални уравнения.

Ще разгледаме някои конкретни модели, водещи до обикновени диференциални уравнения, които от своя страна ще изследваме с помощта на програмата MatLab.

Популационен модел (модел на Малтус)

През 1798 година Томас Роберт Малтус изследва нарастването на числеността на населението, като установява връзка между скоростта на растеж и размера на популацията. При предположение, че ръста не се възпрепятства от ограничени ресурси, Малтус предлага просто линейна зависимост. Да означим числеността на популацията в момента t с $y(t)$, тогава, според модела, скоростта на растеж y' е пропорционална на y с постоянен коефициент $k > 0$. Получаваме обикновеното диференциално уравнение от първи ред

$$y' = ky.$$

То има безбройно много решения – лесно се проверява, че се удовлетворява от всички функции от вида Ce^t, където C е някаква константа. Следователно, само уравнението не е достатъчно за прогнозиране на числеността на популацията. Необходима ни е информация още и за стойността на y в някакъв конкретен момент. Например, ако знаем, че първоначално имаме y_0 индивида, то получаваме задача на Коши за уравнението: заедно с

$$y' = ky,$$

имаме и начално условие

$$y(0) = y_0.$$

Решението на тази задача вече е единствено и се дава с формулата

$$y(t) = y_0 e^{kt},$$

която илюстрира заключението на Малтус, че при наличието на неограничени ресурси населението нараства експоненциално.

Ще обърнем внимание, че в действителност числеността на населението е дискретна величина – тя е естествено число, а тук сме приели че $y(t)$ е непрекъсната функция и следователно може да взима за стойности и нецели реални числа. Въпреки това, големите популации могат да се изменят във времето с относително малка стъпка спрямо общото количество и това позволява добре да се апроксимира с непрекъсната функция. От друга страна, непрекъснатият модел е по-удобен, тъй като разполагаме с разнообразен математически апарат за изследване поведението на непрекъснати функции, а понякога, както в конкретния случая, можем да получим и явна формула за решението.

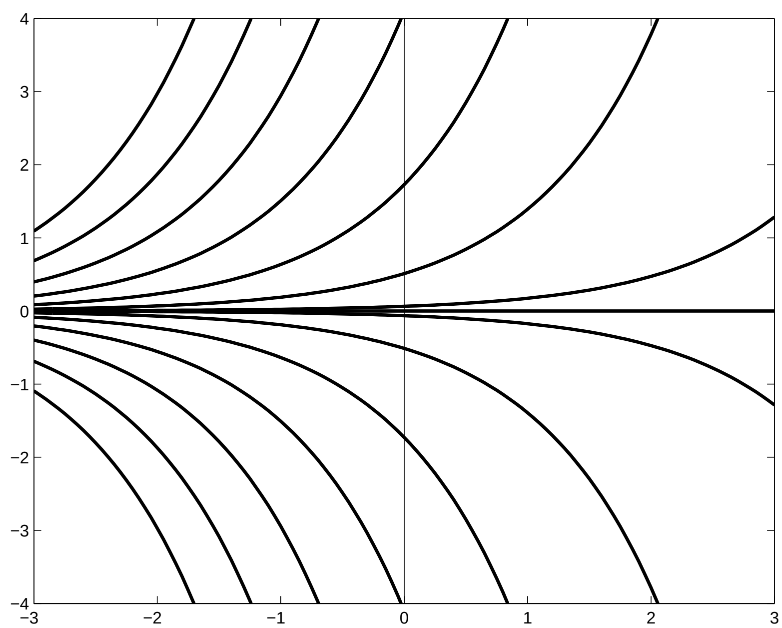
С помощта на MatLab могат да се решават аналитично определени типове обикновени диференциални уравнения. На практика това се осъществява не от самия MatLab, а от вграденото ядро на Maple (MuPAD в по-новите версии). За по-сложни представяния, във формулите за решението се използват специални функции.

Например, решение на задачата на Коши за уравнението $y' = y$ и начално условие $y(0) = 3$ може да се получи с функцията *dsolve*:

```
y = dsolve('Dy=y,y(0)=3')
```

Със същата функция *dsolve*, може да се намери и общото решение на уравнението $y' = y$, което след това да се използва за да се начертаят няколко интегрални криви на уравнението.

```
sol = dsolve('Dy=y')

% координатни оси
plot([0,0],[-4,4])
hold on

% чертеж интегрални криви
x = -3:0.05:3;
for k = -2.8 :0.4: 2.8
    sol1 = subs(sol, 'C1', k^3);
    sol2 = subs(sol1, 't', x);
    plot(x,sol2,'k','LineWidth',2)
    axis([-3 3 -4 4])
end
```



Фигура 1.4: Интегрални криви на уравнението $y' = y$.

Резултата за общото решение на уравнението ще бъде записан така: *C1*exp(t)*. По подразбиране t е аргумента на неизвестната функция y, а *C1* е произволната константа. Именно тези променливи се заместват в помощните променливи *sol1* и *sol2* с функциите *subs* по-надолу. Във версиите използващи MuPAD може да се използва друго означение за произволната константа, например *C3*, и се налага в горния код да се промени съответно в първата команда *subs*.

Закон на Нютон за топлообмен.

Законът на Нютон за охлаждане или затопляне на тяло поставено в среда с постоянна температура гласи, че скоростта на промяна на температурата на тялото е пропорционална на разликата между температурата T на околната среда и собствената му температура $y(t)$. С други думи, имаме

$$y' = k(T - y)$$

$$y(0) = y_0,$$

където y_0 е началната температура на тялото. Решението е $y(t) = T + (y_0 - T)e^{-kt}$.

Логистичен популационен модел.

Логистичният популационен модел описва изменението на числеността на населението при наличието на ограничени ресурси. Към уравнението от модела на Малтус е добавено събираемо пропорциално на y^2

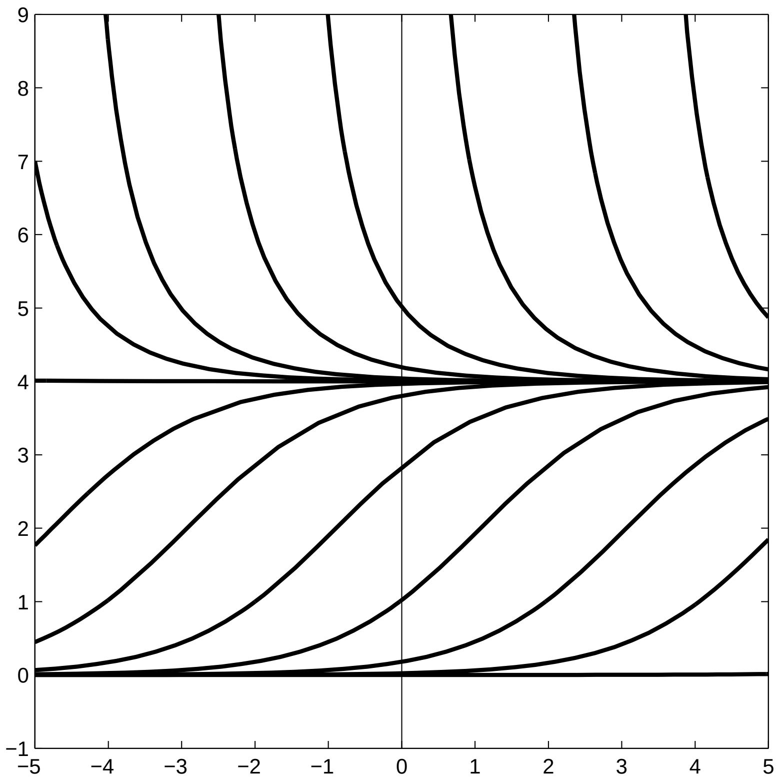
$$y' = ky - \frac{k}{N}y^2.$$

Така, когато y е малко прибавеното събираемо не оказва съществено влияние и популацията нараства експоненциално както в модела на Малтус, но вече при големи $y > N$ производната е отрицателна и числеността на населението намалява. Полученото уравнение е бернулиево и при начално условие

$$y(0) = y_0$$

решението на задачата на Коши е

$$y(t) = \frac{y_0 N e^{kt}}{N + y_0(e^{kt} - 1)}.$$



Фигура 1.5: Интегрални криви на уравнението $y' = y - \frac{y^2}{4}$.

1.4 Задача на Коши за обикновено диференциално уравнение от първи ред

Задачата на Коши за обикновено диференциално уравнение от първи ред, решено относно производната: при дадена функция f, непрекъсната в област D в $\mathbb{R}^2$ и фиксирана точка (x_0, y_0) от D се формулира така.

Да се намери решение $y(x)$ на уравнението

$$y' = f(x, y)$$

което удовлетворява условието

$$y(x_0) = y_0.$$

Както ще видим по-нататък, при известни предположения за гладкостта на функцията $f(x, y)$, задача на Коши има единствено решение.

1.4.1 Геометрична интерпретация на задачата на Коши

Да припомним, че стойността на производната на функцията $y(x)$ в конкретна точка x_1 е свързана с наклона на допирателната към графиката на $y(x)$ в x_1. По-точно, ако тази допирателната сключва ъгъл α с оста x, то имаме $y'(x_1) = \mathrm{tg}\alpha$. Да разгледаме диференциалното уравнение от първи ред, решено относно производната

$$y' = f(x, y).$$

За фиксирана точка в равнината с координати (x, y), веднага можем да пресметнем $y'(x)$ от известната функция $f(x, y)$. С други думи, уравнението задава предварително наклона на допирателната към интегралната крива преминаваща през точката (x, y). С дясната страна на уравнението $y' = f(x, y)$ да асоциираме векторно поле в равнината, което на всяка точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ от дефиниционната област на $f(x, y)$ съпоставя вектора $(1, f(x, y))$. Тогава решаването на задачата на Коши

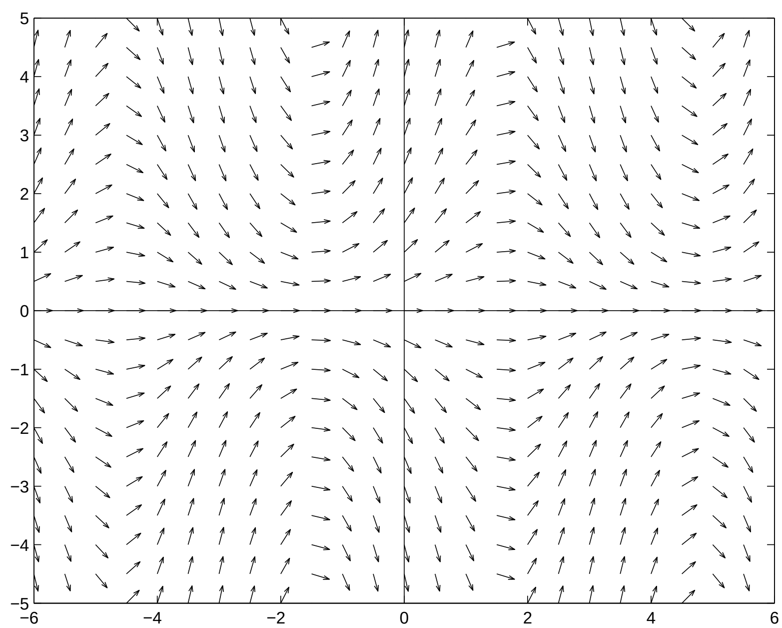
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

може да се опише по следния начин: като се започне от точката (x_0, y_0), да се построи крива, която във всяка точка се допира до съответния елемент на векторното поле $(x, y) \longrightarrow (1, f(x, y))$.

Пример 1.4.1 *Ще начертаем на MATLAB векторното поле отговарящо на уравнението $y' = y\cos x$.*

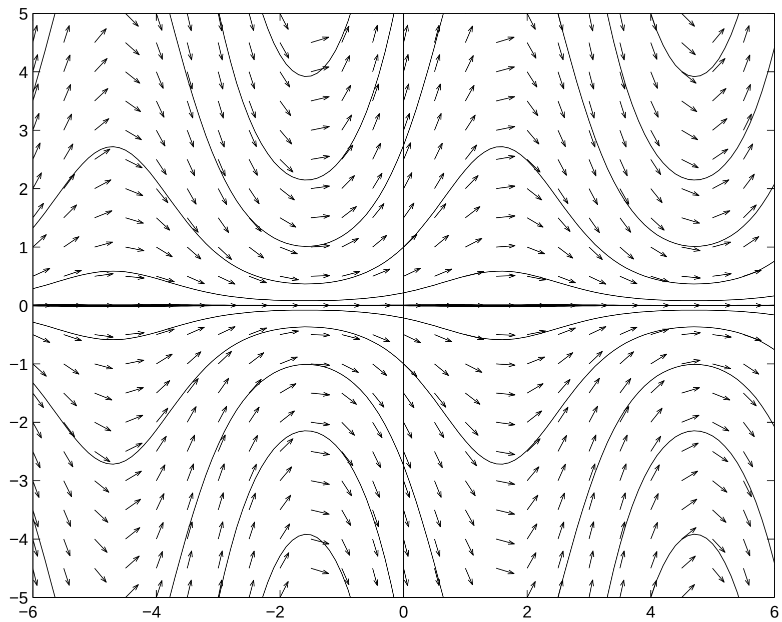
```
% генериране на мрежа от точки
[x,y] = meshgrid(-6:0.5:6, -5:.5:5);

% векторно поле (u,v)
u = ones(size(x));
v = y.*cos(x);

% нормиране на векторното поле
r  = sqrt(u.^2+v.^2);
u1 = u./r;
v1 = v./r;

% чертеж на координатните оси
```

```
plot([0,0],[-5,5])
hold on
plot([-6,6],[0,0])

% чертаене на векторното поле
quiver(x,y,u1,v1, 0.5,'g');
axis([-6 6 -5 5]);

% чертеж на интегрални криви
sol=dsolve('Dy=y*cos(t)')
x=-6:0.1:6;
for k= -2.6:0.4:2.6
    sol1 = subs(sol, 'C1', k^3);
    sol2 = subs(sol1, 't', x);
    plot(x,sol2)
end
```



Фигура 1.6: Векторно поле за уравнението $y' = y \cos x$.

Решаването на уравнението отговаря на построяване на криви по предварително зададени допирателни. В този смисъл, използването на функцията *quiver* не изглежда подходящо, защото тя чертае вектори. По-уместно е да се използват отсечки – части от съответната допирателна

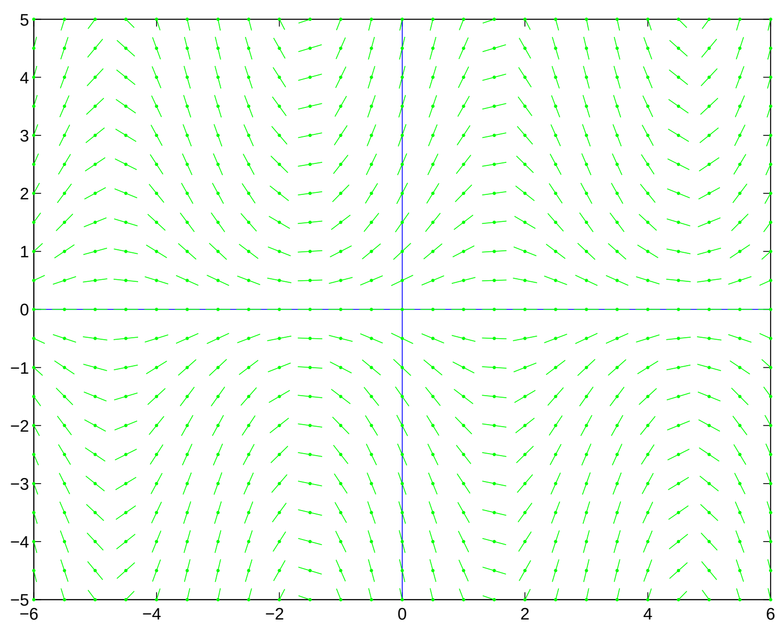


Фигура 1.7: Интегрални криви за уравнението $y' = y \cos x$.

през точката от мрежата. Няма вградена функция в MatLab подходяща за целта, която да използваме наготово. Налага се да се построят отсечките директно.

```
% Стъпка между възлите
h = 0.5;

% генериране на мрежа от точки
[x,y] = meshgrid(-6:h:6, -5:h:5);

[M,N] = size(x);

% чертеж на координатните оси
plot([0,0],[-5,5])
hold on
plot([-6,6],[0,0])

% чертеж на отсечка през всяка точките от мрежата
for m = 1 : M
    for n = 1 : N
        % координати на конкретната точка от мрежата
        x0 = x(m,n);
```

```
        y0 = y(m,n);
        % наклон на допирателната в точката
        f0 = y0*cos(x0);
        % r е дължината на вектора (1,f(x0,y0))
        r  = sqrt(1+f0^2);
        % координати на краищата на отсечката
        % с дължина 2*h/2.5, наклон f0 и среда в (x0,y0)
        x1 = x0-h/(2.5*r);
        y1 = y0-h*f0/(2.5*r);
        x2 = x0+h/(2.5*r);
        y2 = y0+h*f0/(2.5*r);
        % обозначаване на точката
        plot(x0,y0,'g.')
        % чертеж на отсечката
        plot([x1,x2],[y1,y2],'g')
    end
end

axis([-6 6 -5 5]);
```



Фигура 1.8: Фамилия от допирателни за уравнението $y' = y\cos x$.

1.4.2 Съществуване и единственост на решението

Въпреки че съществуват различни методи за интегриране на определени типове уравнения, като цяло диференциалните уравнения не могат да се решават в квадратури. От друга страна, за да са смислени моделите и да можем да търсим приближено решение с помощта на подходящи числени методи, е важно да знаем, че поставената на Коши има еднозначно определено решение. Оказва се, че това се осигурява например от достатъчно общо предположение за гладкост на дясната страна $f(x,y)$.

Преди да формулираме конкретните твърдения, ще имаме нужда от няколко означения и дефиниции.

Казваме, че решението на задачата на Коши за уравнението $y' = f(x,y)$ с начално условие $y(x_0) = y_0$ е *единствено*, ако кои да е две решения на задачата на Коши съвпадат в сечението на дефиниционните си интервали.

В равнината разглеждаме ограничения затворен правоъгълник

$$\Pi = \{(x,y):\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}.$$

Казваме, че $f(x,y)$ е *липшицова функция* по y (равномерно относно x) в правоъгълника Π, ако

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

за всеки две точки (x,y_1) и (x,y_2) от Π.

Лесно се вижда, че ако една функция f е липщицова по y то тя е непрекъсната спрямо y. От друга страна, условието на Липшиц е по-слабо от изискването f да има ограничена частна производна по y. Това следва директно теоремата за крайните нараствания – ако означим $K = \sup\limits_{\Pi} |\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)|$, то имаме

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y_1 - y_2)\right| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Теорема 1.4.1 (Теорема за съществуване и единственост) *Нека $f(x,y) \in C(\Pi)$ е липшицова функция в Π спрямо y. Задачата на Коши*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

притежава единствено решение, дефинирано поне при $|x - x_0| \leq h$, където $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$, а $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|$.

Ще скицираме доказателство на тази теорема. Най-напред да забележим, че задачата на Коши е еквивалентна на интегралното уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

Можем да построим следната редица $y_n(x)$ от приближения на решението: първата функция се дефинира чрез равенството

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds \ ,$$

а следващите се задават с рекурентната формула

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))\, ds \ .$$

Може да се докаже редицата от функции $y_k(x)$ е равномерно сходяща в интервала $[x_0 - h, x_0 + h]$ и като са направи граничен преход в рекурентната формула, се вижда че границата й е точно решението на задачата на Коши.

Обърнете внимание, че теоремата гарантира съществуването на решение локално – само в малка околност на началното условие и не може да се очаква то да е дефинирано в целия интервал $(x_0 - a, x_0 + a)$. Това може да се илюстрира със следния пример:

Пример 1.4.2 *Решението* $y(x) = \operatorname{tg} x$ *на задачата на Коши*

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

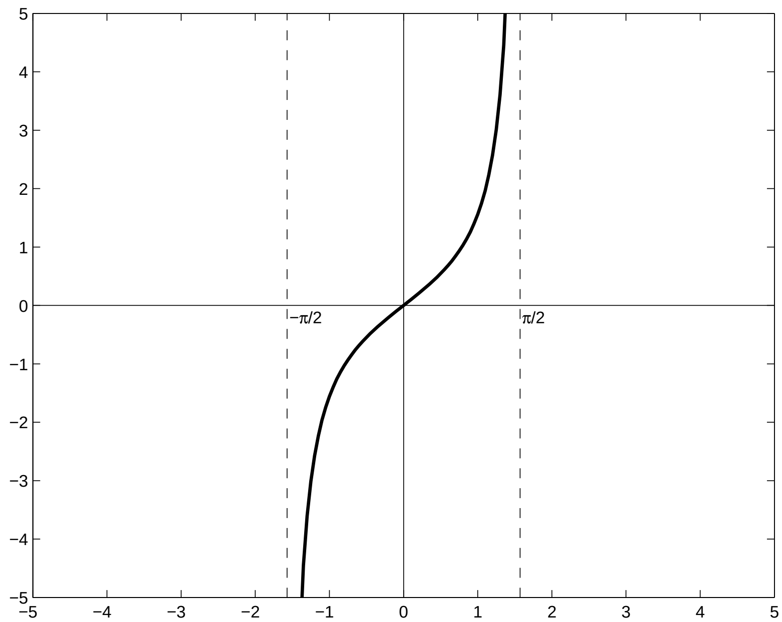
е дефинирано само в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, *въпреки че дясната страна на уравнението* $1 + y^2$ *е* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Всъщност, достатъчно условие за съществуване на решение на задачата на Коши е функцията $f(x, y)$ да е непрекъсната. Това е по-слабо от изискването за липшицовост, обаче не гарантира единственост на решението, както се вижда от следващия пример.

Пример 1.4.3 *Задачата на Коши*

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

има повече от едно решение.



Фигура 1.9: Решението $y(x) = \mathrm{tg}\, x$ на уравнението $y' = 1 + y^2$.

Със стандартните методи за интегриране се получава, че решения на уравнението са функциите от вида

$$y(x) = (x + C)^3,$$

както и $y = 0$. Веднага се вижда, че задачата на Коши има две решения $y = 0$ и $y = x^3$. На практика има и други решения. Например за всяко фиксирано $\varepsilon \geq 0$ функцията

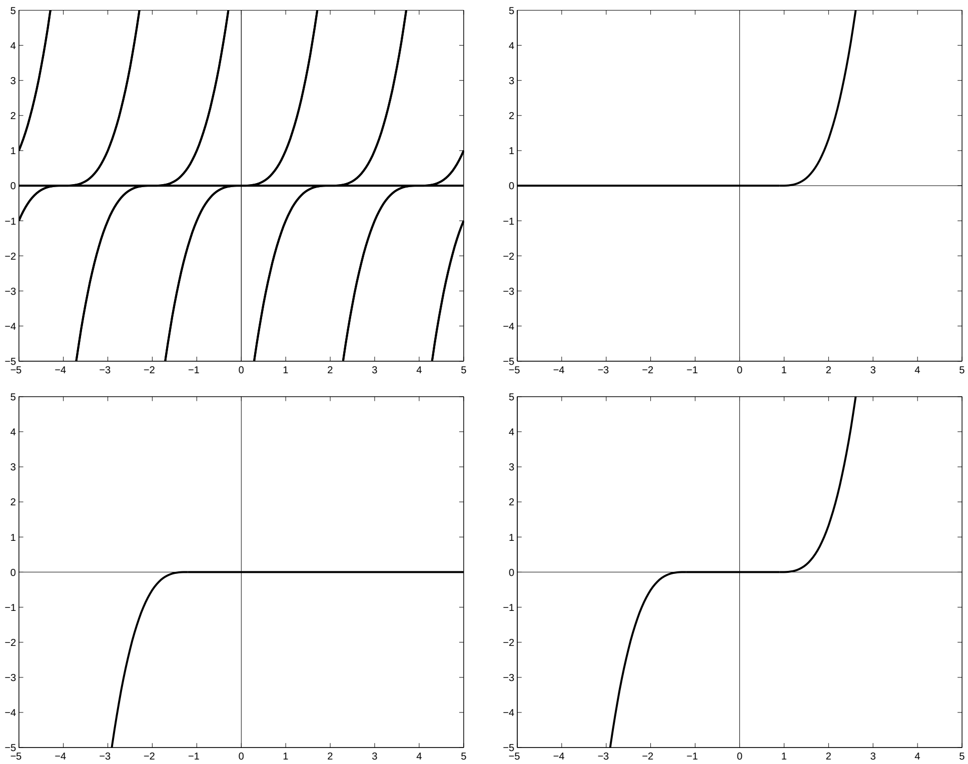
$$y(x) = \begin{cases} (x-\varepsilon)^3 & x \geq \varepsilon, \\ 0 & x < \varepsilon \end{cases}$$

е от $C^2(\mathbb{R})$ и очевидно удовлетворява уравненито. По подобен начин – със "залепяне" на криви $y = (x + C)^3$ и правата $y = 0$, могат да се построят още решения (виж Фигура 1.10). Така излиза, че задачата на Коши има безбройно много решения.

Може да се изведе и глобален вариант на теоремата за съществуване и единственост, но първо трябва да въведем някои дефиниции.

Нека G е област в равнината. Казваме, че G е *област на единственост* за уравнението $y' = f(x, y)$, ако за всяка точка (x_0, y_0) от G задачата на Коши

$$y' = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0$$



Фигура 1.10: Решения на уравнението $y' = 3y^{3/2}$.

има единствено решение.

Разбира се, G ще е област на единственост, ако около всяка точка от G може да се построи подходящ правоъгълник, в който да са изпълнени предположенията от теоремата за съществуване и единственост.

Функцията $f(x, y)$ ще наричаме *локално-липшицова* по y в G, ако за всяка точка от G съществува правоъгълник с център в нея, който се съдържа в G и в който функцията е липшицова.

Така, G е област на единственост за уравнението $y' = f(x, y)$, ако например $f(x, y) \in C(G)$ и е локално-липшицова по y в G.

Както и преди може да се види, че локалната липшицовост по y е по-слабо от изискването функцията да има непрекъсната частна производна спрямо y в областта.

Казваме, че решението $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_φ на уравнението $y' = f(x, y)$ е *продължение* на решението $\psi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_ψ на същото уравнение, ако $\Delta_\psi \subset \Delta_\varphi$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ в Δ_ψ.

Като "залепим" всевъзможните продължения на решението на задача на Коши, то ще получим решение с *максимален* дефиниционен интервал, което наричаме непродължимо.

Едно решение на уравнението наричаме *непродължимо решение*, ако съвпада с всяко свое продължение.

Теорема 1.4.2 (Глобална теорема за съществуване и единственост) *Нека $f \in C(G)$ и е локално-липшицова функция в G. За всяка точка $(x_0, y_0) \in G$ задачата на Коши*

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y), \\ &y(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

притежава единствено непродължимо решение.

При това, най-общо казано, графиката на решението достига до границата на областта G, както показва следващия резултат.

Теорема 1.4.3 (Теорема за напускане на компактите) *Нека $f \in C(G)$ е локално-липшицова функция в G и $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал (α, β) е непродължимо решение на уравнението $y' = f(x, y)$. Тогава за всяко компактно подмножество K на G съществува такова число $\varepsilon > 0$, че $(x, \varphi(x)) \notin K$ за $x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \cup (\beta - \varepsilon, \beta)$.*

Ако дясната страна е непрекъсната и локално липшицова в цялата равнина, то за непродължимото решение в $x > x_0$ има две възможности: или е дефинирано в целия интервал $[x_0, +\infty)$, или има вертикална асимптота.

За определяне коя от двете възможности имаме за конкретната задача ще е полезно да имаме на разположение механизъм за сравнение на различни решения.

Теорема 1.4.4 (Принцип за сравняване) *Нека (x_0, y_0) е точка от областта D, а функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са от $C(D)$ и са локално липшицови спрямо y в D, като*

$$f(x, y) > g(x, y) \text{ за } (x, y) \in D.$$

Ако $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_φ е решението на задачата на Коши

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y) \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned}$$

а $\psi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_ψ е решението на задачата на Коши

$$\begin{aligned} &y' = g(x, y) \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned}$$

то са изпълнени неравенствата

$$\varphi(x) > \psi(x)\ ,\ \text{за } x \in \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \{x > x_0\}$$

и

$$\varphi(x) < \psi(x)\ ,\ \text{за } x \in \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \{x < x_0\}.$$

С други думи, двете задачи имат едно и също начално условие, но решението на задачата на Коши с по-голяма дясна страна е “по-стръмно”.

Теорема 1.4.5 (Непрекъснатост спрямо началните условия) *Нека G е област в $\mathbb{R}^2$, точката (x_0, y_0) е от G и функцията $f(x,y) \in C(G)$ е локално липшицова в G по y. Нека $y(x)$, $x \in (m_1, m_2)$ е непродължимото решение на задачата на Коши*

$$\begin{aligned} &y' = f(x,y) \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned}$$

а $[\alpha, \beta]$ е компактен подинтервал на (m_1, m_2). Тогава съществува положително число ε, такова че за всяко $z \in \Delta_\varepsilon := [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \cap \{z : (x_0, z) \in G\}$, единственото решение $y(x,z)$ на задачата на Коши

$$\begin{aligned} &y' = f(x,y) \\ &y(x_0) = z, \end{aligned}$$

е дефинирано поне в интервала $x \in [\alpha, \beta]$ и $y(x,z)$ е непрекъсната функция за $(x,z) \in [\alpha, \beta] \times \Delta_\varepsilon$.

Този резултат показва, че интегралните криви на уравнението се “слоят” непрекъснато.

И така, ако функцията $f(x,y) \in C(G)$ е локално липшицова в G по y, то интегралните криви на уравнението $y' = f(x,y)$ запълват цялата област G, достигат до границата на областта, изменят се непрекъснато и не се пресичат една друга.

Пример 1.4.4 *Да разгледаме задачата на Коши*

$$\begin{aligned} &y' = x^2 + y^2 \\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

Функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$ е полином и цялата равнина $\mathbb{R}^2$ е област на единственост за уравнението, защото $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. От теоремата за съществуване и единственост следва, че задачата има единствено непродължимо решение $\varphi(x)$. Въпреки че изглежда просто, известно е, че уравнението не се решава в квадратури. Все пак, можем да установим свойства на $\varphi(x)$. Директно от вида на уравнението се вижда, че решението е монотонно растящо, тъй като $y' \geq 0$. При това, има хоризонтална допирателна само в точката $(0, 0)$. Нещо повече, можем да установим, че функцията $\varphi(x)$ е нечетна, т.е. $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. За целта, да положим $\psi(x) = -\varphi(-x)$. Като използваме, че $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението, намираме

$$\psi'(x) = \varphi'(-x) = x^2 + (\varphi(-x))^2 = x^2 + (\psi(x))^2.$$

Същевременно, от началното условие имаме $\psi(0) = -\varphi(0) = 0$. Излиза, че $\psi(x)$ също е решение на поставената задача на Коши. От друга страна знаем, че тя има единствено решение и следователно $\psi(x) \equiv \varphi(x)$. Геометричният смисъл на това свойство е, че графиката на функцията е централно симетрична относно началото на координатната система – точката $(0, 0)$.

Накрая ще покажем, че решението не е дефинирано върху цялата реална права, а има вертикална асимптота. Ще приложим принципа за сравняване. От локалното съществуване на решението следва, че то ще е дефинирано поне за малки положителни стойности на аргумента. Можем да вземем такова число $\varepsilon_1 \in (0, 1)$, че $\varphi(\varepsilon_1) = y_1$ (при това $y_1 > 0$, защото $\varphi(x)$ е растяща). Разбира се, $\varphi(x)$ е решение и на задачата на Коши

$$\begin{aligned} &y' = x^2 + y^2 \\ &y(\varepsilon_1) = y_1. \end{aligned}$$

Както вече споменахме, тази задача не може да се реши в квадратури. Вместо това да използваме, че $f(x, y) = x^2 + y^2 > \varepsilon_1^2 + y^2$ за $x > \varepsilon_1$ и да разгледаме друга задача на Коши

$$\begin{aligned} &y' = \varepsilon_1^2 + y^2 \\ &y(\varepsilon_1) = y_1. \end{aligned}$$

Тук вече уравнението е с разделящи се променливи и можем да го интегрираме. Непродължимото решение на задачата е функцията

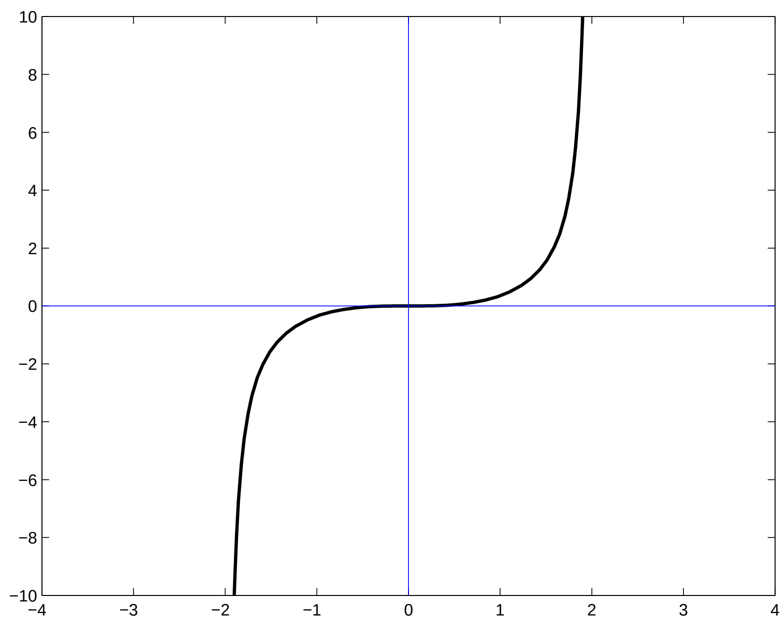
$$\psi(x) = \frac{1}{\varepsilon_1} \mathrm{tg} \left(\frac{x}{\varepsilon_1} + \mathrm{arctg}(\varepsilon_1 y_1) - 1 \right)$$

с дефиниционен интервал (x_1, x_2), където

$$x_1 = \varepsilon_1 \left[1 - \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\varepsilon_1 y_1) \right],$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \left[1 + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\varepsilon_1 y_1)\right].$$

От принципа за сравняване следва, че $\varphi(x) > \psi(x)$ за $x > \varepsilon_1$. Директно се установява, че $\lim\limits_{x\to x_2} \psi(x) = +\infty$, така че и $\varphi(x)$ не може да е дефинирана за $x = x_2$. Следователно функцията $\varphi(x)$ има вертикална асимптота, т.е. $\lim\limits_{x\to x_3} \psi(x) = +\infty$ за някакво $x_3 \le x_2$.



Фигура 1.11: Решения на задачата от Пример 1.4.4.

Важни за практиката и за числените пресмятания са решенията, които не се изменят много при малка промяна на началните данни.

Дефиниция 1.4.1 (Устойчиво решение) *Решението $\varphi(x)$ на задачата на Коши*

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

дефинирано в интервала $[0, +\infty)$ се нарича устойчиво, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такова че за всяко $z \in \Delta_\delta := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \{z : (x_0, z) \in G\}$ решението $\psi(x)$ на задачата на Коши

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= z, \end{aligned}$$

е дефинирано в интервала $[0, +\infty)$ *и за* $x \geq 0$ *е изпълнено*

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon.$$

Решението $\psi(x)$ *се нарича асимптотично устойчиво, ако допълнително имаме*

$$\lim_{x \to +\infty} |\varphi(x) - \psi(x)| = 0 \ .$$

Въпросът за устойчивост на решенията ще бъде дискутиран по-обстойно в следващите глави. Тук ще отбележим само няколко примера от моделите които разгледахме по-рано. Асимптотично устойчиви решения са:

$y = 0$ за модела на радиоактивен разпад;

$y = T$ при модела на Нютон за топлообмена;

$y = N$ от логистичният популационен модел.

1.5 Числени методи за решаване на ОДУ

Съществуват различни методи за интегриране на определени типове уравнения, но като цяло диференциалните уравнения не могат да се решават в квадратури. Въпреки че е невъзможно решението да се запише с явна формула, както видяхме по-рано, при достатъчно общи условия за дясната страна $f(x, y)$ може да се докаже съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Разполагаме с разнообразни методи за числено пресмятане на това решение.

1.5.1 Метод на Ойлер

Искаме да намерим приближение на решението на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

за x в интервала $[x_0, a]$. Идеята на метода на Ойлер е да се апроксимира графиката на решението с начупена линия свързващи точки (x_k, y_k), като във всеки интервал (x_k, x_{k+1}) линията има наклон $f(x_k, y_k)$.

Разделяме интервала $[x_0, a]$ на N равни части с дължина на стъпката $h = (a - x_0)/N$:

$$x_n = x_0 + nh, \qquad n = 0, 1, ..., N.$$

Приближените стойности на решението в точката x_n бележим с y_n. Започвайки от началното условие $y(x_0) = y_0$, последователно намираме останалите y_n от диференчното уравнение

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad n = 0, 1, ..., N - 1.$$

Разликата между получените стойности y_n с метода на Ойлер и стойностите на решението $y(x_n)$ (грешката на метода) е от порядъка на h.

Диференчното уравнение може да смятаме, че сме получили по следния начин: производната $y'(x_n)$ за малка стъпка h може да се апроксимира с диференчната разлика $\dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$. Стойностите на $y(x_{n+1})$ и $y(x_n)$ тук ще приближим съответно с y_{n+1} и y_n. Сега в диференциалното уравнение за $x = x_n$ да заместим производната $y'(x_n)$ в лявата страна с $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$, а $y(x_n)$ във дясната – с y_n и остава да решим спрямо y_{n+1}. Грешката на всяка стъпка е от порядъка на h^2, колкото е разликата между производната на функцията и диференчната разлика, с която е апроксимирана. Правим $N = (a - x_0)/h$ стъпки с точност по h^2 всяка, следователно общо грешката ще е от порядъка на h.

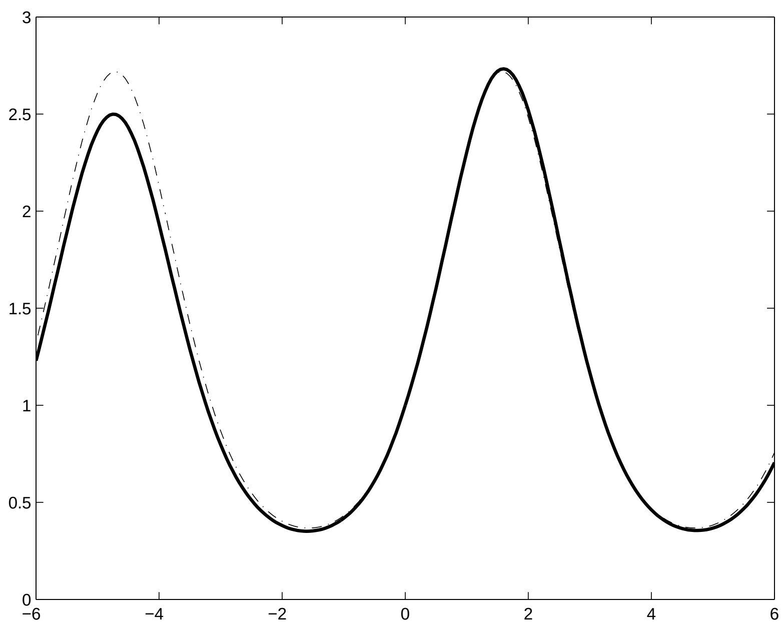
Пример 1.5.1 *Да реализираме на MatLab диференчна схема за задачата на Коши*

$$y' = y \cos x$$
$$y(0) = 1$$

със стъпка 0.05 *в интервала* $[-6, 6]$ *и да сравним резултата с точното решение.*

```
% Задаване на стъпката и разделяне на интервала [0,6]
h=0.05;
x=0:h:6;
N=length(x);

% пресмятане на y_n чрез диференчното уравнение
y(1)=1;
for n=1:N-1
    y(n+1)=y(n)+h*cos(x(n))*y(n);
end
% чертеж на резултата
plot(x,y,'LineWidth',2)
hold on

% диференчна схема в интервала [-6,0]
x1=0:-h:-6;
N=length(x);

y1(1)=1;
```

```
for n=1:N-1
    y1(n+1)=y1(n)-h*cos(x1(n))*y1(n);
end
plot(x1,y1,'LineWidth',2)

% чертеж на точното решение
yy=dsolve('Dy=cos(t)*y,y(0)=1');
t=-6:0.05:6;
yy1=subs(yy,'t',t);
plot(t,yy1,'r-.')
```



Фигура 1.12: Приближеното и точното решение (с пунктир).

1.5.2 Диференчна схема за уравнение от втори ред

По подобен начин можем да постъпим за намиране на приближено решението на задачата на Коши за уравнението от втори ред

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

за x в интервала $[x_0, a]$. Отново разделяме интервала $[x_0, a]$ на равни части с дължина на стъпката $h = (a - x_0)/N$: $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, ..., N$, а приближените стойности на решението в точката x_n бележим с y_n, като стойността на y_0 взимаме директно от началните условия. Първо, използваме формулата на Тейлър за да пресметнем y_1:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) = y_0 + hz_0 + \frac{h^2}{2}f(x_0, y_0, z_0)$$

Втората производна на $y''(x_n)$ апроксимираме с диференчно частно на първите производни, а тях от своя страна чрез $\frac{y_n - y_{n-1}}{h}$, както при метода на Ойлер:

$$y''(x_n) \approx \frac{y'(x_{n+1}) - y'(x_n)}{h} \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}.$$

Като заместим производните в диференциалното уравнение и решим спрямо y_{n+1}, получаваме диференчната схема

$$y_1 = y_0 + hz_0 + \frac{h^2}{2}f(x_0, y_0, z_0);$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f\left(x_n, y_n, \frac{y_n - y_{n-1}}{h}\right), \quad n = 1, 2, .., N-1,$$

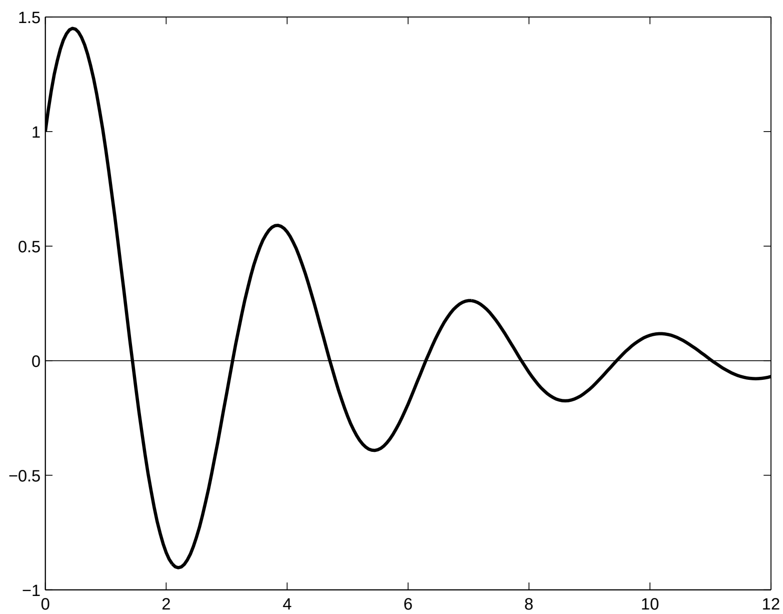
от която последователно намираме останалите y_n.

Пример 1.5.2 *Пример на MATLAB за диференчна схема със стъпка* 0.05 *в интервала* $[0, 6]$ *за задачата на Коши за уравнението на махалото с триене*

$$\begin{aligned} &y'' = -4\sin y - \frac{1}{2}y' \\ &y(0) = 1 \\ &y'(0) = 2. \end{aligned}$$

```
% Задаване на стъпката и разделяне на интервала [0,6]
h=0.05;
x=0:h:12;
N=length(x);

% пресмятане на y_n чрез диференчното уравнение
y(1)=1;
z0=2;
y(2)=y(1)+h*z0+ h^2/2*( -0.5*z0-4*sin(y(1)) );
for n=2:N-1
    y(n+1) = 2*y(n)-y(n-1) +
```

```
            h^2*(  -0.5*(y(n)-y(n-1))/h-4*sin(y(n))  );
end

% чертеж
plot(x,y,'k','LineWidth',2)
hold on
plot([0,12],[0,0])
```



Фигура 1.13: Диференчна схема за уравнение от втори ред.

1.5.3 Методи на Рунге-Кута

В методите на Рунге-Кута, с цел по-точно изчисление, се пресмятат стойностите на дясната страна в набор допълнителни точки за да се събере повече информация за поведението на функцията. Самият метод на Ойлер също може да се разглежда като такъв метод от първи ред. Ще опишем класически метод на Рунге-Кута от четвърти ред. Както и преди разделяме интервала на равни части

$$x_n = x_0 + nh, \qquad n = 0, 1, ..., N;$$

Сега пресмятаме y_{n+1} от предишната y_n чрез

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

където:

k_1 е наклона на векторното поле в точката (x_n, y_n), който се използва в метода на Ойлер

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

k_2 е наклона след половин стъпка по метода на Ойлер

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right);$$

k_3 е наклона отново след половин стъпка, но с нарастване k_2 по y вместо k_1

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right);$$

k_4 е наклона в следващата точка x_{n+1} с нарастване k_3 по y

$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3).$$

Стойността y_{n+1} се получава от y_n с нарастване, което е усреднено на k_1, k_2, k_3 и k_4 с подходящо избрани тегла, така че грешката на всяка стъпката де е от порядъка на h^5. Като се умножи по броя на всички стъпки $N = (a - x_0)/h$, получаваме, че общата грешка на метода от порядъка на h^4.

Често използваната функция *ode45* от MatLab реализира адаптивен метод на Рунге-Кута с променлива стъпка, която се избира подходящо за всеки възел, че грешката да не надвишава предварително зададен толеранс. За големината на грешката се съди като се сравняват резултатите за следващия възел от два метода от различен ред и порядък на точност (в случая от четвърти и от пети ред – оттам и цифрите в името на функцията).

Описаните до тук методи са явни – стойността на y_{n+1} се пресмята чрез директно заместване на вече намерените y_n. Съществуват и неявни методи на Рунге Кута, при които за y_{n+1} имаме неявна формула – участва и във дясната страна. За да се изчисли y_{n+1} се налага да се реши нелинейно уравнение, което от своя страна на практика се извършва с подходящ числен метод. Така обикновено, неявните методи водят до значително повече пресмятания за всяка отделна стъпка. Въпреки това, както ще видим след малко, за някои видове уравнения те може да са по-ефективни от явните методи.

Наличието на разнообразни числени методи за намиране приближено решение на задачи на Коши ни позволява за всяка конкретна задача да избираме най-подходящия метод, съобразно условията и нужните ни скорост на изпълнение и точност.

Пример 1.5.3 *Да намерим приближено решението на задачата на Коши*

$$y' = e^{x^2} \sin y$$
$$y(0) = 2$$

в интервала $[0, 3.5]$. *Забележете, че коефициента* e^{x^2} *в дясната страна расте много бързо с увеличаване на* x. *За по-големи стойности на* x, *функцията* $e^{x^2} \sin y$ *ще се мени значително дори за малки изменения на* y. *Подобни уравнения се наричат твърди (на английски – stiff).*

Най-напред, на базата на теоритичните резултати изложени по-рано, ще изясним какво трябва да очакваме за решението на задачата на Коши.

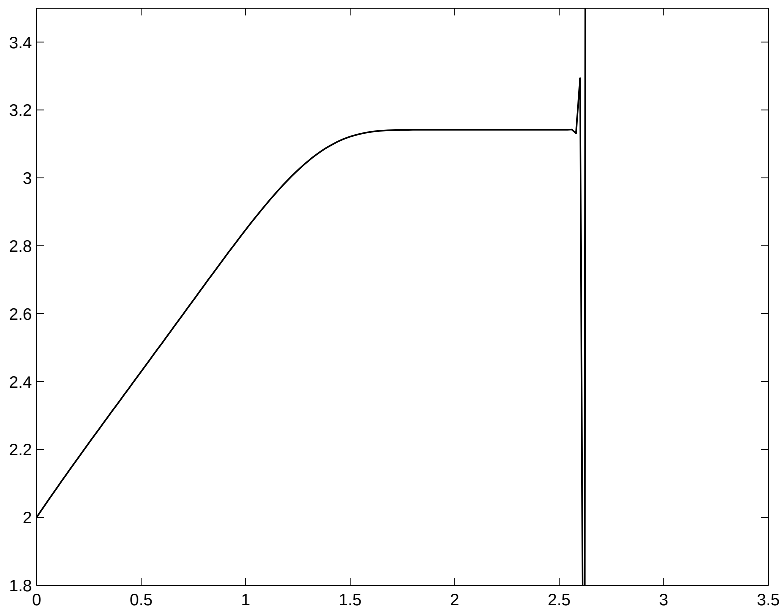
Дясната страна на уравнението е безкрайно гладка в цялата равнина $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и следователно задачата на Коши има единствено решение, което да означим с $\varphi(x)$. Лесно се вижда, че $y = 0$ и $y = \pi$ са решения на уравнението. От единствеността знаем, че графиката на $\varphi(x)$ не може да пресича правите $y = 0$ и $y = \pi$. Излиза, че $0 < \varphi(x) < \pi$ и от теоремата за напускане на компактите следва, че решението е дефинирано в целия интервал $[0, +\infty)$. От друга страна, при $0 < y < \pi$ дясната страна на уравнението е положителна, откъдето $\varphi'(x) > 0$ и следователно функцията $\varphi(x)$ е монотонно растяща.

И така, решението на задачата на Коши е дефинирано за всички $x > 0$, монотонно растящо и ограничено отгоре от π.

Първо ще се опитаме да използваме метода на Ойлер със стъпка 0.01. Както се вижда от Фигура 1.14, още при стойности x около 2.5 графиката се “разпада” – очевидно се отдалечава твърде много от истинското решение, за което знаем, че е растящо и не може да пресича правата $y = \pi$.

Численият метод от функцията *ode45* в MatLab се справя по-добре. Графиката на резултата е показана на Фигура 1.15. За да осигури добра точност метода използва значително по-малки стъпки – разделя интервала на цели 37700 части. Разбира се, пресмятанията за толкова много възли отнемат доста време. Но дори и сега получената графика е силно нагъната за стойности на аргумента x около и над 3 – получените данни осцилират значително около правата $y = \pi$ и не дават ясна представа за поведението на решението там.

По-ефективна за конкретната задача се оказва функцията *ode15s*. Тя реализира неявен метод, подходящ за твърди уравнения (буквата “s” в края на името идва от stiff). Нуждае се само от 35 възела и благодарение на това се справя значително по-бързо от *ode45*, въпреки че неявния метод прави повече изчисления на отделна стъпка. Графиката е изобразена на Фигура 1.16.



Фигура 1.14: Резултат от метода на Ойлер със стъпка 0,01.

Упражнения

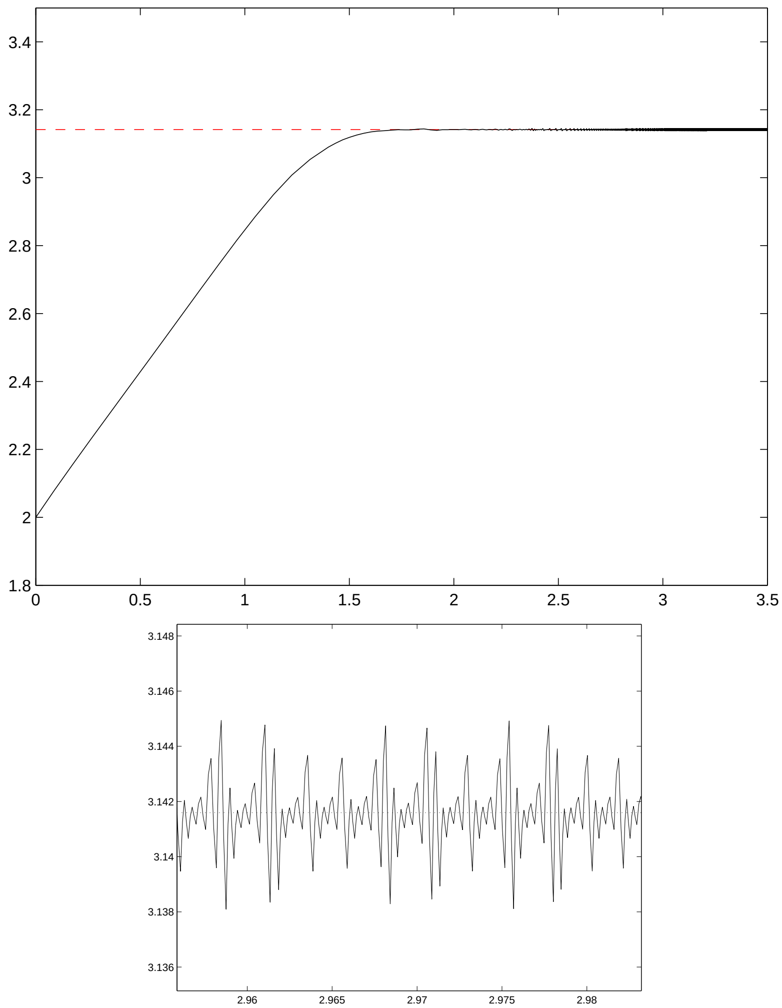
1.1. Намерете първите две (три) последователни приближения за решението на задачата на Коши:

$$\begin{aligned} a)\quad y' &= x - y^2,\ y(0) = 0,\\ b)\quad y' &= y^2 + 3x^2 - 1,\ y(1) = 1,\\ c)\quad y' &= y + e^{y-1},\ y(0) = 1,\\ d)\quad y' &= 1 + x\sin y,\ y(\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

1.2. Посочете интервал (възможно най-голям), в който съществува решение на задачата на Коши:

$$\begin{aligned} a)\quad y' &= x + y^3,\ y(0) = 0,\\ b)\quad y' &= 2y^2 - x,\ y(1) = 1,\\ c)\quad y' &= x^2 + y^2,\ y(1) = 0. \end{aligned}$$

1.3. За всяко от написаните по-долу уравнения докажете, че решението на задачата на Коши с произволно начално условие $y(x_0) = y_0$, $x_0, y_0 \geq 0$ (например $y(0) = 0$ или $y(1) = 0$) съществува за всяко

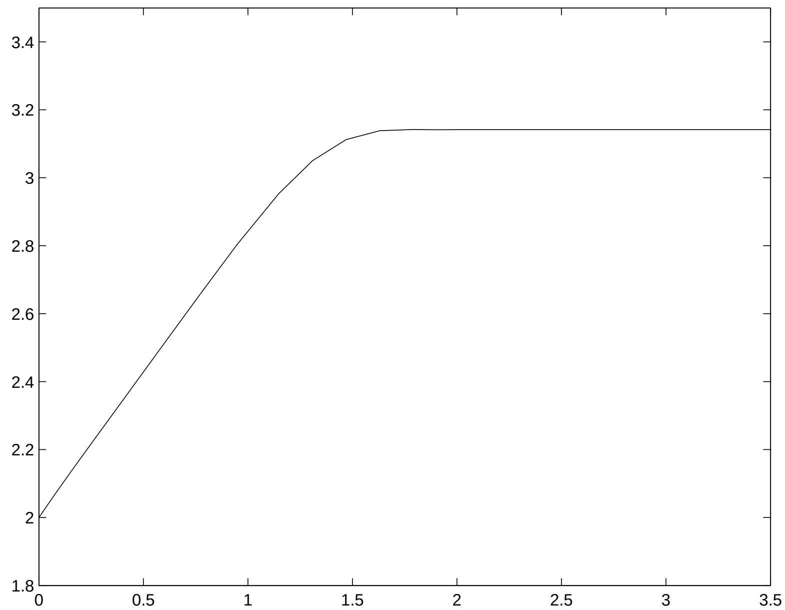


Фигура 1.15: Резултат от функцията *ode45* за твърдо уравнение.

$x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} a) \quad y' &= x^2 - y^2, \\ b) \quad y' &= x^3 - y^3, \\ c) \quad y' &= x^3 - xy^2. \end{aligned}$$

1.4. Докажете, че решението на задачата на Коши с произволно начално условие $y(x_0) = y_0$ не съществува за всички $x \geq x_0$ и има вертикал-



Фигура 1.16: Резултат от функцията *ode15s* за твърдо уравнение.

на асимптота, ако уравнението има вида

$$\begin{aligned} a)\quad y' &= x^2 + y^2, \\ b)\quad y' &= x^3 + y^3, \\ c)\quad y' &= x^3 + xy^2. \end{aligned}$$

1.5. За всяко едно от уравненията в задачи 3 и 4 направете пълно изследване на поведението на интегралните криви.

1.6. Докажете, че решението на задачата на Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ е нечетна функция, а решението на задачата на Коши $y' = x^3 - xy^2$, $y(0) = 0$ е четна функция.

1.6 Нормални системи обикновени диференциални уравнения

1.6.1 Векторен запис и постановка на задачата на Коши за нормални системи

Нормална система обикновени диференциални уравнения се нарича система от вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{array} \right.$$

където $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ са търсените функции. По традиция, във физиката със $\dot{x}$ се означава производната на x по времето, т.е. $\dot{x} = dx/dt$. За удобство, обикновено се използва по-краткия векторен запис на нормалната система:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

където

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

са n-мерни вектори.

В случая, когато дясната страна f не зависи от t, системата $\dot{x} = f(x)$ се нарича автономна.

Задача на Коши за нормална система: Да се намери решение на системата

$$\dot{x} = f(t, x)$$

което удовлетворява условието

$$x(t_0) = x_0.$$

В частност, уравнението от първи ред може да се разглежда като нормална система с размерност $n = 1$. От своя страна, уравнение решено относно старшата производна

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$$

може да се сведе до нормална система. С полагането

$$\begin{aligned}
&x_1 = x\\
&x_2 = x'\\
&\vdots\\
&x_n = x^{(n-1)}
\end{aligned}$$

получаваме нормалната система

$$\left|\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2\\
&\dot{x}_2 = x_3\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n-1} = x_n\\
&\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}\right.$$

а началните условия в задачата на Коши за уравнението

$$\begin{aligned}
&x(t_0) = a_0\\
&x'(t_0) = a_1\\
&\vdots\\
&x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}
\end{aligned}$$

се свеждат до начални условия за задачата на Коши за системата

$$\begin{aligned}
&x_1(t_0) = a_0\\
&x_2(t_0) = a_1\\
&\vdots\\
&x_n(t_0) = a_{n-1}
\end{aligned}$$

Много задачи във физиката свързани с движението на обекти в пространството водят до нормални системи, като $x(t)$ са координатите на обекта във фазовото пространство в момента t.

1.6.2 Закон на Нютон за движение на материална точка

Вторият закон на Нютон описващ движение на материална точка под действието на външна сила по същество е система диференциални уравнения от втори ред, защото ускорението е втора производна на пътя x спрямо времето.

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

Свободно падане (равноускорително движение)

Използвайки закона на Нютон да разгледаме движение на материална точка (тяло) с маса m под действието само на силата на земното привличане $G = mg$, където $g \approx 9,8m/s^2$ е земното ускорение. Когато началната скорост е вертикална, треакторията на движението ще лежи на една линия и можем използваме едномерен модел. Избираме за положителна посока посоката на силата G и получаваме

$$\ddot{x} = g$$

с начални условия:
начално положение $x(0) = x_0$ и начална скорост $\dot{x}(0) = v_0$.

Като запишем това уравнение спрямо скоростта $v = \dot{x}$ получаваме уравнение от първи ред за *скоростта на свободно падащо тежко тяло*:

$$v' = g$$

с начална скорост $v(0) = v_0$.

Решенията на тези задачи са съответно

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0;$$

$$v(t) = gt + v_0.$$

Когато началната скорост не е вертикална, треакторията на движението ще лежи в равнината на вектора на скоростта $\overrightarrow{v}$ и силата на земното привличане $\overrightarrow{G}$. Избираме началното положение за начало на координатната система и получаваме двумерен модел

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = -g \end{cases}$$

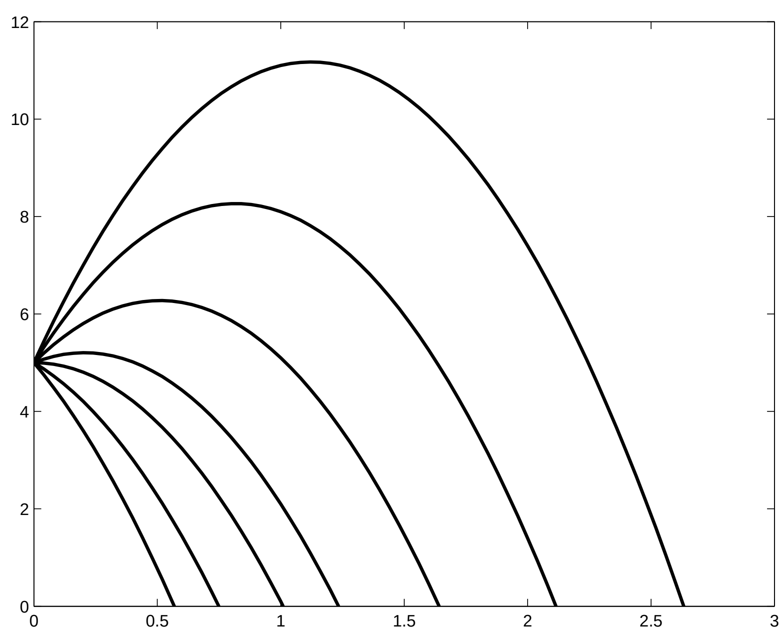
с начални условия: начално положение $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ и начална скорост $\dot{x}_1(0) = v_x$, $\dot{x}_2(0) = v_y$. Двете уравнения могат да се интегрират поотделно. Решението е

$$\begin{cases} x_1 = v_x t \\ x_2 = -\dfrac{gt^2}{2} + v_y t \end{cases}$$

и се вижда, че треакторията на движението е парабола.

Пример на MatLab за решаване на задачата и чертеж на няколко треактории.

```
% решаване на задачата на Коши за системата
[x,y]=dsolve('D2x=0,D2y=-9.8',
             'x(0)=0,Dx(0)=v,y(0)=5,Dy(0)=v2')

% избор на начални скорости
v1=[1,1,1,1,1,1,1];
v2=[-6,-3,0,2,5,8,11];

% чертеж на решенията с избраните начални скорости
t=0:0.04:3.5;
for n=1:length(v1)
    xxx=subs(x,'t',t);
    xxx=subs(xxx,'v',v1(n));
    yyy=subs(y,'v2',v2(n));
        yyy=subs(yyy,'t',t);
    plot(xxx,yyy,'k','LineWidth',2)
    hold on
end
axis([0,3,0,12])
```



Фигура 1.17: Траектории на тяло хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта.

Свободно падане на тежко тяло в съпротивителна среда

Да разгледаме движение на материална точка под действието на земното притегляне и съпротивителна сила (триене). Приема се, че силата на триене е пропорционална по големина и противоположна по посока на скоростта. В случай, че началната скорост е вертикална, плучаваме:

$$
\begin{aligned}
&v' = g - kv\,,\\
&v(0) = v_0,
\end{aligned}
$$

където k е константа, която зависи например от свойствата на средата, както и от формата и масата на тялото. Решението се дава с формулата

$$v(t) = \frac{g}{k} + \left(v_0 - \frac{g}{k}\right) e^{-kt}.$$

За разлика от случая на свободно падане без съпротивление, когато скоростта v расте неограничено с времето, тук се вижда от формулата, че когато $t \to +\infty$, v клони към пределната скорост g/k.

За двумерния модел имаме

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 = -k\dot{x}_1\\
\ddot{x}_2 = -g - k\dot{x}_2
\end{cases}
$$

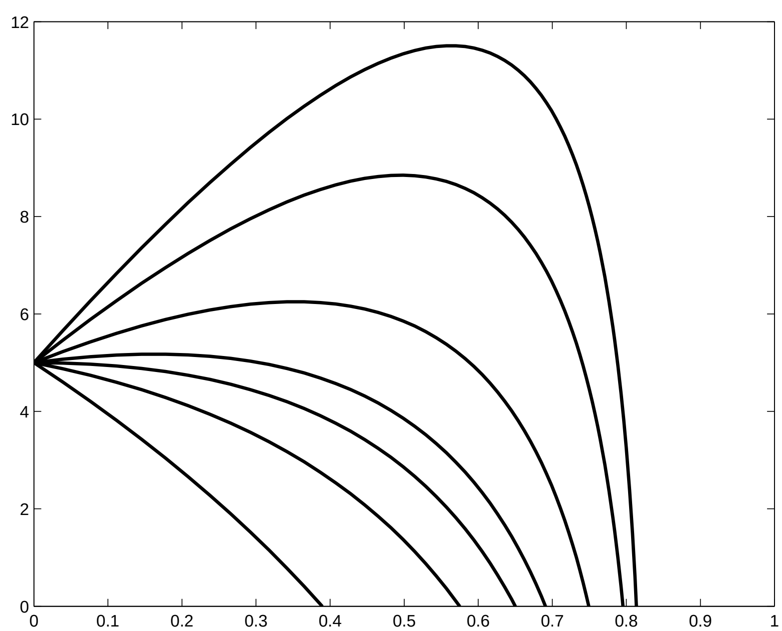
с начални условия $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_x$ и $\dot{x}_2(0) = v_y$. Отново двете уравнения могат да се интегрират поотделно и решението е

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{v_x}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\\
x_2 = -\dfrac{gt}{k} + \left(\dfrac{v_y}{k} + \dfrac{g}{k^2}\right)\left(1 - {}^{-kt}\right)
\end{cases}
$$

Разбира се, треакториите вече не са параболи.

```
% решаване на задачата на Коши за системата
[x,y]=dsolve('D2x=-k*Dx,D2y=-g-k*Dy',
             'x(0)=0,Dx(0)=v1,y(0)=h,Dy(0)=v2')

% заместване с конкретни стойности
g=9.8;
k=1.2;
h=5;

xx=subs(x,'g',g);
xx=subs(xx,'k',k);
```

```
yy=subs(y,'g',g);
yy=subs(yy,'k',k);
yy=subs(yy,'h',h);

% избор на начални скорости
v1=[1,1,1,1,1,1,1];
v2=[-10,-3,0,2,6,12,17];

% чертеж на решенията
t=0:0.04:3.5;
for n=1:length(v1)
    xxx=subs(xx,'v1',v1(n));
    yyy=subs(yy,'v2',v2(n));
    xxx=subs(xxx,'t',t);
    yyy=subs(yyy,'t',t);
    plot(xxx,yyy,'k','LineWidth',2)
    hold on
end
axis([0,1,0,12])
```



Фигура 1.18: Балистични криви в съпротивителна среда.

Задача за двете тела

Класическата задача за двете тела е да се определи движението на две материални точки, които взаимодействат само една с друга. Например планета обикаляща около звезда. Ако силата действаща на едното тяло е $F(x,y)$, то на другото действа $-F(x,y)$ и

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= F(x,y) \\ m_2\ddot{y} &= -F(x,y) \end{aligned}$$

Като съберем тези две уравнения получаваме, че инерциалният център на двете тела $z = \dfrac{m_1x+m_2y}{m_1+m_2}$ удовлетворява уравнението $\ddot{z} = 0$, т.е. движи се равномерно и праволинейно. В случая на движение на две планети по закона на Нютон за всеобщото привличане, силата зависи от разстоянието между тях

$$F(x,y) = Gm_1m_2\frac{y-x}{|x-y|^3},$$

където G е гравитационната константа. Като изберем z за център на координатната система проблема се свежда до две независими уравнения за двете материални точки. Например, чрез полагането $r = x - z$ получаваме уравнението само за едното тяло

$$\ddot{r} = -\mu\frac{r}{|r|^3}$$

където μ е константа зависеща само от G, m_1 и m_2. Разбира се, тук $r = (x_1, x_2, x_3)$ е вектор в тримерното пространство и на практика имаме система от уравнения:

$$\left|\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{\mu x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{\mu x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{\mu x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \end{aligned}\right.$$

Всъщност, може да се докаже, че движението е равнинно и задачата да се сведе до двумерна система.

Анимация за движението на две планети с различна маса, реализирана на MatLab.

```
function M = bod2
```

```
% числено решаване на задачата на Коши
% за системата с дясна страна функцията syst
[t,y]=ode45(@syst, [0,8.5], [-1,0,0,0.45,1,0,0,-0.3]);

% чертеж на кадрите за анимация по t
for k=1:length(y)
    plot(y(1:k,1),y(1:k,3),y(1:k,5),y(1:k,7));
    hold on;
    plot(y(k,1),y(k,3),'o',y(k,5),y(k,7),'o');
    hold off;
    axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5]);
    daspect([1 1 1])
    M(k)=getframe;
end;

function res=syst(t,y)
denom = (sqrt((y(5)-y(1)).^2+(y(7)-y(3))^2))^3;
res=[y(2);
    1.5*(y(5)-y(1))/denom;
    y(4);
    1.5*(y(7)-y(3))/denom;
    y(6);
    (y(1)-y(5))/denom;
    y(8);
    (y(3)-y(7))/denom];
```

Функцията *bod2* връща като резултат масив, в който са записани кадрите (масива M) и анимацията може да се с прожектира с командата *movie*. Например, най-напред се изпълнява *bod2* и резултата се записва в променливата *anim*, след което се генерира анимация от графиките в елементите на масива *anim*, която се изпълнява 3 пъти със скорост 5 кадъра в секунда:

```
anim = bod2;
movie(anim, 3, 5)
```

Модел на планер

Да разгледаме планер (крило) движещо се под действието на силите на земното привличане, на въздушно съпротивление и на тяга. Съпротивление е пропорционално на скоростта и със срещуположна посока. Посоката на тягата е перпендикулярна на тази на скоростта, а нормата й е пропорционална на скоростта. Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = -a\dot{x} - b\dot{y} \\ \ddot{y} = \quad b\dot{x} - a\dot{y} - g \end{array}\right.$$

където a и b са положителни константи. Спрямо компонентите на скоростта $v_x := \dot{x}$ и $v_y := \dot{y}$ това е линейна автономна система. Равновесната точка на системата е асимптотично устойчива и фазовия портрет е тип устойчив фокус.

```
function M=planer

y1=[8,7,-2,4];
y2=[-5,4,3,-6];

for k=1:length(y1)
      [t,y]=ode45(@syst, [0,5], [y1(k),y2(k)]);
      plot(y(:,1),y(:,2),'LineWidth',2);
      hold on;
      [t,y]=ode45(@syst, [0,-2], [y1(k),y2(k)]);
      plot(y(:,1),y(:,2),'LineWidth',2);
end;
axis([-3,7,-6,4]);

function res=syst(t,y)
a=1;
b=3;
g=9.8;
res=[-a*y(1)-b*y(2);
         b*y(1)-a*y(2)-g];
```

От друга страна, като интегрираме уравненията по t и като вземем предвид началната скорост (v_1, v_2), получаваме задача на Коши за нехомогенната линейната система

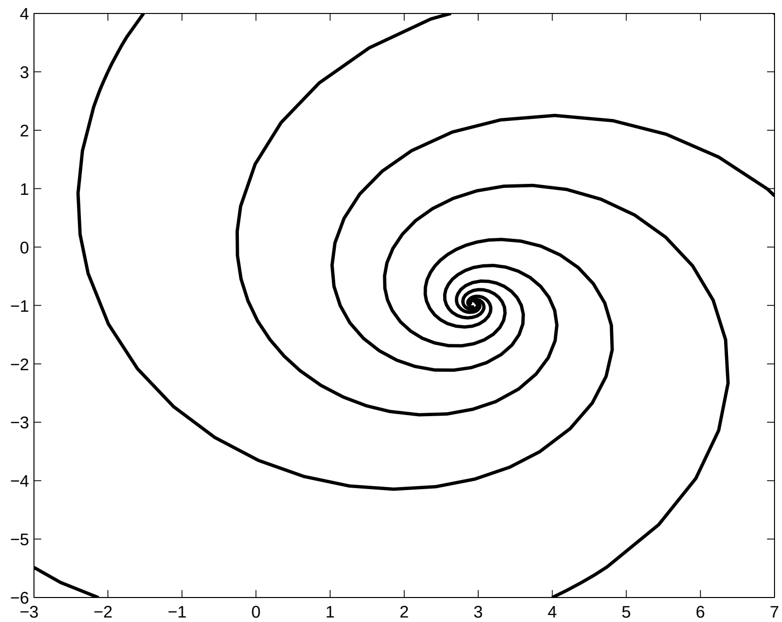
$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = -ax - by + v_1 \\ \dot{y} = \quad bx - ay + v_2 - gt \end{array}\right.$$

с начални условия

$$x(0) = x_0,$$
$$y(0) = y_0.$$

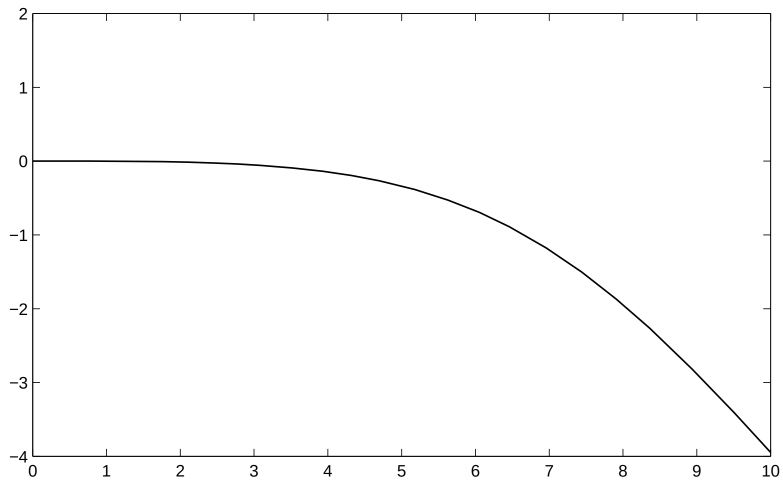
Тази система вече не е автономна и например различните фазови криви могат да се пресичат.

Пример за анимация за движението на планера при начална скорост $(v_1, v_2) = (10, 0)$.

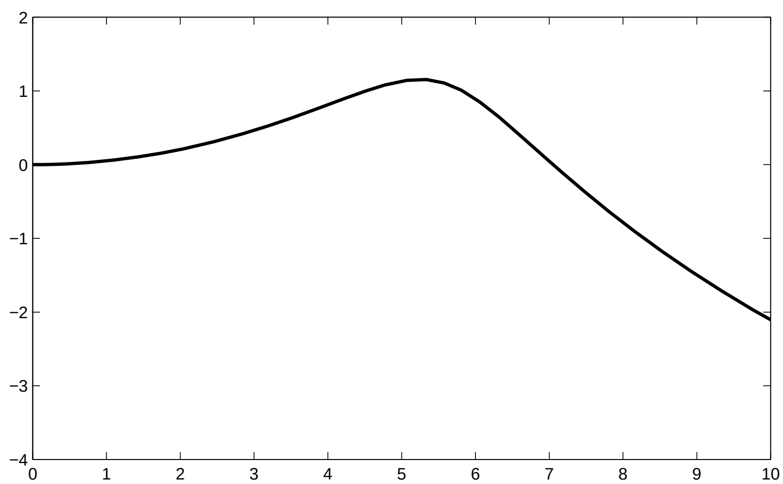


Фигура 1.19: Фазов портрет на системата за скоростта.

```
function M=planer
[t,y]=ode45(@syst, [0,10.5], [0,0]);
for k=10:length(y)
    plot(y(1:k,1),y(1:k,2),'LineWidth',2);
    hold on;
    plot(y(k,1),y(k,2),'o');
    hold off;
    axis([0,10,-4,2]);
    daspect([1 1 1])
   M(k)=getframe;
end;

function res=syst(t,y)
a=1;
b=1;
v1=10;
v2=0;
g=9.8;
res=[-a*y(1)-b*y(2)+v1;
       b*y(1)-a*y(2)+v2-g*t];
```



Фигура 1.20: При $a = 1$ и $b = 1$.

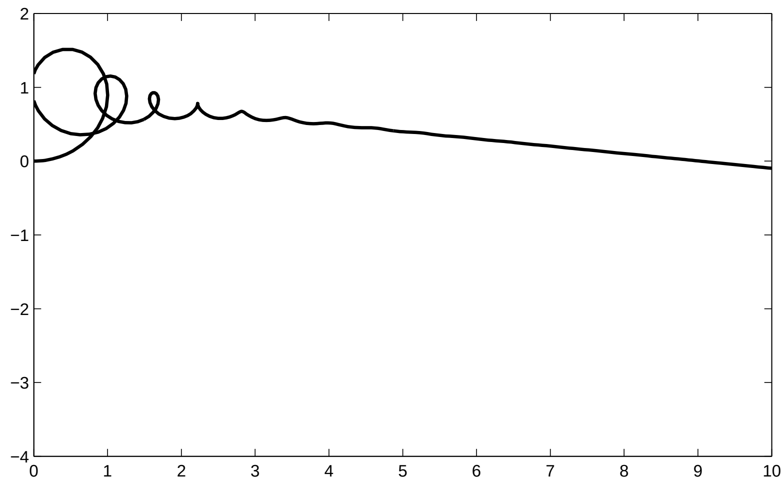


Фигура 1.21: При $a = 1$ и $b = 2$.

1.6.3 Съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за нормални системи

Можем да формулираме резултати свързани със съществуването и единствеността на решението на задачите на Коши за нормалните системи, аналогични на тези в едномерния случай за уравненията, които описахме по-рано.

Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Нека функцията $f(t, x)$ е непрекъсната в областта $G = \{|t - t_0| \leq a \;,\;\; |x - x_0| \leq b\}$ и е липшицова по x, т.е. съществува



Фигура 1.22: При $a = 1$ и $b = 10$.

константа K, такава че е изпълнено условието

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

за всеки две точки (t, y_1) и (t, y_2) от G. Тогава задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

има единствено решение $x(t)$ дефинирано в интервала $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, където $h = \min\{a, b/M\}$, $M = \max\limits_{(t,x)\in G} |f(t, x)|$.

Функцията $f(t, x)$ е локално липшицова спрямо x в областта $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ако за всяка точка (τ, ξ) от D съществува цилиндър $G_{(\tau,\xi)} \subset D$ с център (τ, ξ), такъв че f удовлетворява условието на Липшиц в $G_{(\tau,\xi)}$ с константа, която може да зависи от точката (τ, ξ).

Казваме, че решението на задачата Коши е единствено, ако всеки две решения на задачата съвпадат в сечението на дефиниционните си интервали.

Глобална теорема за единственост. Нека $f(t, x) \in C(D)$ е локално липшицова спрямо x в областта D и точката (t_0, x_0) е от D. Тогава решението на задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

е единствено.

Нека $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са две решения на едно и също уравнение и са дефиниционните им интервали са съответно Δ_φ и Δ_ψ. Казваме, че $\varphi(t)$ е продължение на $\psi(t)$, ако $\Delta_\varphi \supseteq \Delta_\psi$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ в Δ_ψ.

Едно решение ще наричаме непродължимо, ако съвпада с всяко свое продължение.

Глобална теорема за съществуване и единственост. Нека $f(t,x) \in C(D)$ е локално липшицова спрямо x в областта D и точката (t_0, x_0) е от D. Тогава задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

има единствено непродължимо решение.

При това, най-общо казано, графиката на решението достига до границата на областта D, както показва следващия резултат.

Теорема за напускане на компактите. Нека функцията $f(t,x) \in C(D)$ е локално липшицова спрямо x в областта D, а $\varphi(t)$ с дефиниционен интервал (α, β) е непродължимо решение на системата $\dot{x} = \mathrm{f}(t,x)$. Тогава за всяко компактно подмножество K на D, съществува положително число ε, такова че точката $(t, \varphi(t))$ е извън K за $t \in (\alpha, \alpha+\varepsilon) \cup (\beta - \varepsilon, \beta)$.

Теорема за непрекъснатост спрямо началните условия

Нека D е област в $\mathbb{R}^{n+1}$ с точки (t,x), където $t \in \mathbb{R}$ и $x \in D$, функцията $f(t,x) \in C(D)$ е локално липшицова в D по x. Нека $x(t)$, $t \in (m_1, m_2)$ е непродължимото решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

а $[\alpha, \beta]$ е компактен подинтервал на (m_1, m_2). Тогава съществува положително число ε, такова че за всяко y за което $|x_0 - \mathrm{y}| \leq \varepsilon$ и $(t_0, \mathrm{y}) \in D$, единственото решение $x(t, \mathrm{y})$ на задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = \mathrm{y} \end{cases}$$

е дефинирано поне в интервала $t \in [\alpha, \beta]$ и $x(t, \mathrm{y})$ е непрекъсната функция за $(t, \mathrm{y}) \in [\alpha, \beta] \times \{\mathrm{y} : \ |x_0 - \mathrm{y}| \leq \varepsilon, \ (t_0, \mathrm{y}) \in D\}$.

1.6.4 Задача на Коши за обикновено диференциално уравнение от ред n

Задачата на Коши за обикновеното диференциално уравнение от ред n

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

е да се намери решение на уравнението, което удовлетворява началните условия

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0\\
&y'(x_0) = y_1\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},
\end{aligned}$$

където x_0 и y_0,..., y_{n-1} са дадени константи. Разбира се, дефиниционния интервал на решението трябва да съдържа x_0, а дефиниционната област на F да съдържа точката $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Ако диференциалното уравнение е решено относно производната от най-висок ред имаме задачата на Коши

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})\\
&y(x_0) = y_0\\
&y'(x_0) = y_1\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},
\end{aligned}$$

Чрез стандартното полагане $z_1 = y, z_2 = y', \ldots z_n = y^{(n-1)}$, тя се свежда до задача на Коши за нормалната система от първи ред

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2\\
&z_2' = z_3\\
&\vdots\\
&z_{n-1}' = z_n\\
&z_n' = f(x, z_1, z_2, ..., z_n)\\
\\
&z_1(x_0) = y_0\\
&z_2(x_0) = y_1\\
&\vdots\\
&z_n(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}$$

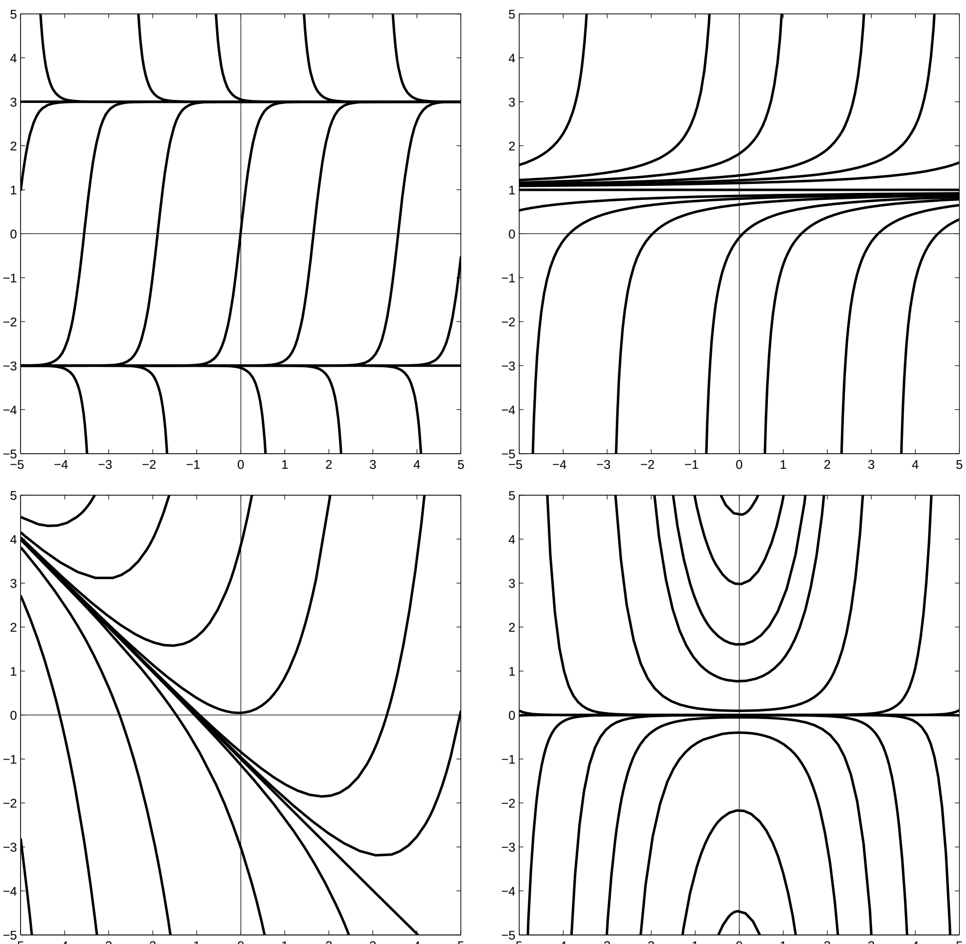
От резултатите за съществуване, единственост и непрекъсната зависимост от параметри за системи, веднага следват аналогични резултати и за едно уравнение от висок ред.

Упражнения

1.1. Пресметнете общото решение на уравненията. Начертайте полето от допирателни и няколко интегрални криви.

а) $y' = \dfrac{y}{x}$ б) $y' = -\dfrac{y}{x}$ в) $y' = \dfrac{2y}{x}$

г) $y' = -xy$ д) $y' = y \sin x$ е) $y' = y - x$



Фигура 1.23: Интегрални креви на уравненията от задачата.

1.2. Интегралните криви на кое от уравненията

а) $y' = xy$ б) $y' = (y-1)^2$
в) $y' = 9 - y^2$ г) $y' = x + y$

са изобразени на всяка от графиките на Фигура 1.23?

1.3. Използвайте метода на Ойлер за да намерите приближено решенията на задачите на Коши

$$\text{а)} \begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} y' = -y^2 - 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

в интервала $x \in [1, 2]$ с подходящи стъпки. Направете графика и сравнете резултата с точното решение на съответната задача. По-големи или по-малки от точното решение са получените приближени стойности? Защо?

1.4. Намерете приближено решенията на задачите на Коши

$$\text{а)} \begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

в интервала $x \in [0, 4]$ като използвате диференчна схема с подходяща стъпка. Сведете уравненията до системи и ги използвайте функцията *ode45* за да намерите по-добро приближение на решението. За всяка една от задачите направете графика и сравнете резултатите получени от диференчната схема и *ode45*. Увеличава ли се или намалява разликата с нарастване на аргумента x? Защо?

1.5. Да предположим, че сте открили влог в банка при непрекъсната постоянна годишна лихва 6 процента, като първоначално сте депозирали 1000 лева. Влагате пари в сметката си постоянно и равномерно във времето с общо 3000 лева в година. Колко време ще е необходимо сумата по влога ви да достигне 1 000 000 лева?

1.6. Ако за една година се е разпаднала половината от първоначалното количество радиоактивно вещество, то след колко време ще останат 2% от първоначалното количество?

1.7. Футболна топка с маса 0.4 кг. е хвърлена нагоре със скорост 20 метра в секунда. Ако приемем, че съпротивлението на въздуха е пропорционално на квадрата на скоростта с коефициент 0.48, то до каква височина ще се издигне топката? Какъв ще бъде резултата, ако пренебрегнем съпротивлението на въздуха?

Глава 2

Линейни диференциални уравнения и системи. Механични трептения.

2.1 Линейни уравнения от висок ред.

2.1.1 Уравнения с променливи коефициенти.

Линейното нехомогенно обикновено диференциално уравнение от ред n има вида

$$L(y) \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

където коефициентите a_ν, $\nu = 0, 1, \dots n$ и дясната страна f на уравнението са непрекъснати комплексни (комплекснозначни) функции в интервала $\Delta \subset \mathbf{R}$. Интервалът Δ може да бъде произволен, т. е. без значение е дали е краен, безкраен, отворен, затворен или полуотворен, може да бъде кой да е от интервалите $[\alpha, \beta]$, (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(-\infty, \beta]$, $(-\infty, \infty)$, ... Предполагаме, че $a_0(x) \neq 0$ за $x \in \Delta$. При $f(x) \equiv 0$ уравнението ще наричаме хомогенно.

Ако не е указано друго, по-нататък под функция ще разбираме комплексна функция. Напомняме, че една комплексна функция на реален аргумент $g(x) = u(x)+iv(x)$ притежава дадено свойство, например непрекъснатост или диференцируемост в Δ, ако нейните реална и имагинерна част $Re\, g(x) = u(x)$ и $Im\, g(x) = v(x)$ едновременно имат това свойство. В частност $g'(x) = u'(x) + iv'(x)$ и $\int g(x) = \int u(x) + i \int v(x)$.

Задача на Коши: Да се намери в Δ функция $y = y(x)$, за която

$$\begin{cases} L(y)(x) = f(x), \ x \in \Delta, \\ y(x_0) = \alpha_1, \\ y'(x_0) = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n, \end{cases}$$

където $x_0 \in \Delta$, $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$, $\nu = 1, 2, \dots n$.

Теорема 2.1.1 *(за съществуване и единственост, без доказателство). При горните предположения задачата на Коши притежава единствено решение в целия интервал Δ.*

Забележка 2.1.1 *Производните до ред $n-1$ на решението са диференцируеми, и следователно непрекъснати функции в Δ. Тогава от самото уравнение следва, че и n-тата производна на решението е непрекъсната в Δ.*

За краткост по-нататък с $C(\Delta)$ ще означаваме множеството от непрекъснатите в Δ функции, а с $C^k(\Delta)$ ще означаваме всички непрекъснати функции, които имат непрекъснати производни до ред k включително в Δ. Функциите, дефинирани в интервала Δ, с обичайните поточкови операции събиране на две функции и умножение на функция с число, т.е.

$$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) \equiv \lambda f(x), \ x \in \Delta, \ \lambda \in \mathbf{C},$$

образуват комплексно линейно пространство (безкрайномерно!). Очевидно $C(\Delta)$ също е линейно пространство и множеството $C^n(\Delta) \subset C(\Delta)$ е негово линейно подпространство. Диференциалният оператор в лявата страна на уравнението е линеен диференциален оператор $L : C^n(\Delta) \to C(\Delta)$ поради линейността на операциите диференциране, умножение с функция и събиране.

Лема 2.1.1 *Решенията на линейното хомогенно уравнение $L(y) = 0$ образуват линейно пространство.*

Доказателство. Нека $y_\nu \in C^k(\Delta), \ L(y_\nu) = 0, \ C_\nu \in \mathbf{C}, \ \nu = 1, \dots, k$. От линейността на L следва

$$L(C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k) = C_1 L(y_1) + \cdots + C_k L(y_k) = 0,$$

т.е. произволна линейна комбинация от решения на хомогенното уравнение също е решение на хомогенното уравнение, с което лемата е доказана.

Ще докажем, че пространството от решения на хомогенното уравнение е крайномерно и размерността му е точно n.

Дефиниция 2.1.1 *Казваме, че функциите $y_1, \dots, y_k$, дефинирани в интервала Δ, са линейно независими в Δ, ако от*

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0,\ x \in \Delta,$$

където $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$, следва, че $C_1 = \cdots = C_k = 0$.

Дефиниция 2.1.2 *Казваме, че функциите $y_1, \dots, y_k$, дефинирани в интервала Δ, са линейно зависими в Δ, ако можем да намерим такива константи $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$, $|C_1| + \cdots + |C_k| \neq 0$, че*

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0,\ x \in \Delta.$$

Дефиниция 2.1.3 *Казваме, че решенията $y_1, \dots, y_n$ на линейното хомогенно диференциално уравнение $L(y) = 0$ от ред n образуват фундаментална система (накратко ФС), ако са линейно независими в Δ.*

Ще получим удобни критерии за линейна независимост на диференцируеми функции чрез детерминантата на Вронски (или Вронскиан)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_k'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix},$$

където $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(\Delta)$.

Лема 2.1.2 *Нека функциите $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(\Delta)$ и да допуснем, че съществува такава точка $x_0 \in \Delta$, че $W(x_0) \neq 0$. Тогава функциите $y_1, \dots, y_k$ са линейно независими в Δ.*

Доказателство. Нека $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$ и да допуснем, че

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0,\ x \in \Delta.$$

Диференцирайки това равенство, получаваме че в Δ едновременно са изпълнени равенствата

$$\begin{array}{lcccll} C_1 y_1(x) & + & \cdots & + & C_k y_k(x) & \equiv 0, \\ C_1 y_1'(x) & + & \cdots & + & C_k y_k'(x) & \equiv 0, \\ \dots & & & & & \\ C_1 y_1^{(k-1)}(x) & + & \cdots & + & C_k y_k^{(k-1)}(x) & \equiv 0. \end{array}$$

За $x = x_0$ това е линейна хомогенна система за $C_1, \dots, C_k$ с детерминанта $W(x_0) \neq 0$. Следователно $C_1 = \cdots = C_k = 0$ и $y_1, \dots, y_k$ са линейно независими.

Лема 2.1.3 *Нека функциите $y_1, \dots, y_n \in C^n(\Delta)$ са решения на линейното хомогенно уравнение и да допуснем, че съществува такава точка $x_0 \in \Delta$, че $W(x_0) = 0$. Тогава решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими в Δ.*

Доказателство. Да определим константите $C_1, \dots, C_n$, поне една от които е различна от 0, като решения на линейната хомогенна система

$$\begin{array}{lcccccl} C_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n(x_0) & = & 0, \\ C_1 y_1'(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n'(x_0) & = & 0, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ C_1 y_1^{(k-1)}(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0. \end{array}$$

Това е възможно, защото нейната детерминанта $W(x_0) = 0$. След това да разгледаме функцията

$$\eta(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

която очевидно е решение на хомогенното уравнение $L(\eta) = 0$ и според горните равенства $\eta(x_0) = \eta'(x_0) = \cdots = \eta^{(n-1)}(x_0) = 0$, т. е. удовлетворява нулеви данни на Коши. Тъй като функцията $\varphi(x) \equiv 0$ е решение на същата задача на Коши, от теоремата за единственост следва, че $\eta(x) \equiv \varphi(x) \equiv 0$, т. е. решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими в Δ.

Лема 2.1.4 *(НДУ за ФС) Нека функциите $y_1, \dots, y_n \in C^n(\Delta)$ са решения на линейното хомогенно уравнение и $W(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Следните три твърдения са еквивалентни:*

а) $W(x_0) \neq 0$ за поне едно $x_0 \in \Delta$;

б) системата $y_1, \dots, y_n$ е фундаментална;

в) $W(x) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$.

Доказателство. Ще докажем еквивалентността на горните твърдения, като установим импликациите а) $\Longrightarrow$ б) $\Longrightarrow$ в) $\Longrightarrow$ а).

а) $\Longrightarrow$ б): Следва веднага от лема 2.

б) $\Longrightarrow$ в): Нека решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно независими, но в) не е изпълнено, т. е. съществува поне едно $x_0 \in \Delta$, за което $W(x_0) = 0$. Но тогава съгласно лема 3 решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими, противно на допускането. Полученото противоречие показва, че ако е вярно б), то в) обезателно трябва да бъде изпълнено.

в) $\Longrightarrow$ а): Твърдението е очевидно, с което Лема 4 е напълно доказана.

Теорема 2.1.2 *Линейното хомогенно диференциално уравнение от ред n притежава безбройно много фундаментални системи решения.*

Доказателство. Нека $A = (a_{ij})$ е произволна неособена матрица с комплексни елементи, т. е.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нека $x_0 \in \Delta$. Да определим функциите $y_1, \dots, y_n$ като решения на задачите на Коши

$$\begin{cases} L(y_1) = 0, \\ y_1(x_0) = a_{11}, \\ y_1'(x_0) = a_{21}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1}. \end{cases} \quad , \dots\dots\dots\dots , \quad \begin{cases} L(y_n) = 0, \\ y_n(x_0) = a_{1n}, \\ y_n'(x_0) = a_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) = a_{nn}. \end{cases}$$

които съгласно теоремата за съществуване имат решения в Δ. Тъй като детерминантата на Вронски за тези решения на хомогенното уравнение в точка x_0 е $W(x_0) = \det A \neq 0$, то съгласно лема 4 те образуват фундаментална система. Ясно е, че променяйки матрицата A, по такъв начин можем да получим безбройно много фундаментални системи.

Забележка. Явното намиране (изписване) на фундаментална система решения за уравнението с променливи коефициенти в общия случай не е възможно.

Следващата теорема показва структурата на множеството от всички решения на хомогенното уравнение, т. е. вида на "общото решение".

Теорема 2.1.3 *Линейното пространство от решения на хомогенното уравнение от ред n е с размерност точно n, и ако $y_1, \dots, y_n$ образуват фундаментална система в Δ, а y е произволно решение на хомогенното уравнение, то*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \ x \in \Delta,$$

където $C_1 \dots, C_n \in \mathbf{C}$ (формула за вида на общото решение на хомогенното уравнение).

Доказателство. Нека $x_0 \in \Delta$. Да определим константите $C_1, \dots, C_n$ като решения на линейната нехомогенна система

$$
\begin{array}{lcccccl}
C_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n(x_0) & = & y(x_0), \\
C_1 y_1'(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n'(x_0) & = & y'(x_0), \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
C_1 y_1^{(k-1)}(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y^{(n-1)}(x_0).
\end{array}
$$

Това е възможно, защото нейната детерминанта е $W(x_0) \neq 0$. След това да разгледаме функцията

$$\eta(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Функциите η и y са решения на хомогенното уравнение и от горните равенства имаме

$$\eta(x_0) = y(x_0),\ \eta'(x_0) = y'(x_0),\ \ldots\ ,\ \eta^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0),$$

т. е. η и y са решения на една и съща задача на Коши и по теоремата за единственост $\eta \equiv y$, т. е. функциите от фундаменталната система образуват базис в линейното пространство от решения на хомогенното уравнение, с което теоремата е доказана.

Да разгледаме в Δ нехомогенното уравнение $L(y) = f$, като функцията $y = y(x)$ е едно произволно решение. Да предположим, че ни е известно друго конкретно решение на същото уравнение (частно решение) $z = z(x)$, т. е. $L(z) = f$. Като извадим двете уравнения, поради линейността на L, разликата $y - z \equiv y_0$ е решение на хомогенното уравнение $L(y_0) = 0$. Следователно структурата на решенията на нехомогенното диференциално уравнение е

$$y = y_0 + z,$$

където z е едно фиксирано частно решение, а y_0 е подходящо решение на хомогенното уравнение, т. е.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) + z(x),\ x \in \Delta,$$

където $C_1 \ldots, C_n \in \mathbf{C}$ (формула за вида на общото решение на нехомогенното уравнение).

Ако познаваме една фундаментална система от решения на хомогенното уравнение, то едно частно решение на нехомогенното уравнение винаги можем да намерим по метода на Лагранж за вариране на произволните константи, при който частното решение се търси във вида на решението на хомогенното уравнение, в което произволните константи са заменени с произволни функции, т. е. константите са варирани. Това означава, че търсим частно решение от вида

$$z(x) = C_1(x)y_1(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)y_\nu(x),$$

където C_ν са диференцируеми функции в Δ. Едно диференциране ни дава

$$z'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)y'_\nu(x).$$

Нека функциите C_ν са такива, че

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y_\nu(x) = 0, \in \Delta.$$

Следователно

$$z'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)y'_\nu(x).$$

Да диференцираме отново и ще получим

$$z''(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y'_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)y''_\nu(x).$$

Нека функциите C_ν са такива, че

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y'_\nu(x) = 0, \in \Delta.$$

Тогава ще имаме

$$z''(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)y''_\nu(x).$$

Ако повторим същата процедура още $n-3$ пъти и на всяка стъпка поставяме условието за C_ν :

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y^{(k)}_\nu(x) = 0, \in \Delta, \ k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

то за $z^{(n)}$ ще получим

$$z^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y^{(n-1)}_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)y^{(n)}_\nu(x).$$

Вече пресметнахме всички необходими ни производни на $z(x)$ за да пресметнем

$$L(z(x)) = a_0(x)\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y_\nu^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x)L(y_\nu(x)) = f(x),$$

т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x)y_\nu^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)},$$

защото $L(y_\nu(x)) = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n$.

По този начин за $C'_\nu(x),\ \nu = 1, 2, \ldots, n$ получихме следната система от n уравнения

$$\begin{array}{ccccccccc}
y_1(x)C'_1(x) & + & y_2(x)C'_2(x) & + & \cdots & + & y_n(x)C'_n(x) & = & 0, \\
y'_1(x)C'_1(x) & + & y'_2(x)C'_2(x) & + & \cdots & + & y'_n(x)C'_n(x) & = & 0, \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
y_1^{(n-1)}(x)C'_1(x) & + & y_2^{(n-1)}(x)C'_2(x) & + & \cdots & + & y_n^{(n-1)}(x)C'_n(x) & = & \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{array}$$

Детерминантата на тази система е точно детерминантата на Вронски за $\{y_\nu\}_1^n$, която не се анулира. Решаваме системата, например по правилото на Крамер, и намираме функциите $C'_\nu(x)$, а оттам чрез интегриране получаваме

$$C_\nu(x) = \int C'_\nu(s)\,ds + \sigma_\nu$$

и търсените функции $C_\nu(x),\ \nu = 1, 2, \ldots, n$. Понеже търсим едно частно решение, то можем да изберем $\sigma_\nu = 0$. Ако оставим комплексните константи σ_ν да се менят, очевидно получаваме всички решения на нехомогенното уравнение $L(y) = f$.

С други думи, всички решения на нехомогенното уравнение можем да намерим, ако намерим поне една фундаментална система от решения на хомогенното уравнение. Ако коефициентите на уравнението и дясната страна са реални функции, то по описания начин получаваме по формулата $y(x) = \sum_{\nu=1}^n C_\nu y_\nu(x) + z(x)$ общо решение с реални $C_1, \ldots, C_n$ и реални функции $y_1, \ldots, y_n$ и z.

2.1.2 Уравнения с постоянни коефициенти.

За линейното хомогенно уравнение с постоянни коефициенти

$$L(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,$$

където $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ и $a_0 \neq 0$, за разлика от общия случай на променливи коефициенти, винаги можем да посочим фундаментална система от решения, следвайки проста алгебрична процедура.

Най-напред решаваме характеристичното уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

и намираме корените му $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. На всеки прост корен λ съответства функция $e^{\lambda x}$ от фундаменталната система. На всеки многократен корен с краткост k съответстват k функции

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\lambda x}$$

от фундаменталната система. Така получаваме общо n на брой линейно независими решения $y_1, \dots, y_n$ (ФС) на хомогенното уравнение с постоянни коефициенти, а общото решение на хомогенното уравнение има вида

$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x),\ x \in \Delta, \tag{$*$}$$

където $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{C}$.

Ако коефициентите на L са реални, т. е. $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, можем да посочим фундаментална система от реални функции. Ако λ е реален корен, функциите, които му съпоставяме имат описания no-горе вид. На всяка двойка комплексно спретнати прости корени $\lambda = \alpha \pm i\beta$ съпоставяме двойката реални функции $e^{\alpha x}cos\beta x,\ e^{\alpha x}sin\beta x$. На всяка двойка комплексно спрегнати корени $\lambda = \alpha \pm i\beta$ с кратност k съпоставяме $2k$ реални функции

$$e^{\alpha x}cos\beta x,\ xe^{\alpha x}cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}cos\beta x,\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}sin\beta x,\ xe^{\alpha x}sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}sin\beta x,\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\alpha x}sin\beta x$$

По такъв начин отново получаваме n на брой линейно независими решения, т.е. фундаментална система $y_1, \dots, y_n$ от реални функции. В такъв случай от формулата за общото решение $(*)$ всички комплексни решения получаваме при $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{C}$, а всички реални решения при $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{R}$.

Като имаме пред вид тези правила, обикновено след като намерим корените на характеристичния полином, веднага пишем формулата за общото решение.

С намерената фундаментална система от решения можем по метода на Лагранж да намерим частно решение на нехомогенното уравнение с постоянни коефициенти $L(y) = f$. В специалния случай, когато дясната страна на едно нехомогенно линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти е квазиполином, тоест произведение от полином с експонента, sin или cos, или сума от такива произведения, може да бъде намерено частно решение, което също е квазиполином. За целта използваме метода на неопределните коефициенти.

Ако дясната страна на уравнението има вида $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, където $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, то частно решение търсим от вида

$$z(x) = x^s Q_m(x) e^{\gamma x},$$

където $Q_m(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$ е полином от същата степен m. Числото $s = 0$, ако γ не е корен на характеристичния полином. Ако γ е корен на характеристичния полином, то s е равно на кратността му. Неопределените коефициенти $c_0, c_1, \ldots, c_m$ като заместим с формулата за z в диференциалното уравнение и приравним коефициентите пред подобните членове в лявата и дясната страна на полученото уравнение.

Ако в дясната страна на уравнението участват sin или cos, като ги изразим чрез експоненти по формулите на Ойлер

$$\cos\beta x = (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}),\ \sin\beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i,$$

свеждаме задачата за намиране на частно решение до вече разгледания случай.

Ако коефициентите на уравнението са реални, а дясната страна има вида

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x,)$$

с метода на неопределените коефициенти можем да намерим частно решение от вида

$$z(x) = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x,)$$

където $s = 0$, ако $\alpha + \beta i$ не е корен на характеристичния полином, а в противен случай s е равно на кратността на корена $\alpha + \beta i$. $R_m(x)$ и $T_m(x)$ са полиноми с неопределени коефициенти от степен (по-малка или равна на) m, където m е по-голямата от степените на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

Когато коефициентите на уравнението са реални, а в дясната страна освен $P(x)e^{\alpha x}$ има $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, често е по-удобно най-напред да решим уравнението с дясна страна $P(x)e^{\alpha+\beta i}x$. Реалната част на полученото решение ще бъде решение на уравнението с дясна страна $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, а имагинерната част ще бъде решение на уравнението с дясна страна $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 2.1.1 $y^{(5)} + 2^{(4)} - 16y' - 32y = 0.$

Характеристичното уравнение има вида

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 - 16\lambda - 32 = 0,$$

откъдето

$$(\lambda + 2)^2(\lambda - 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

т. е. корените му са

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = -2i,\ \lambda_5 = 2i,$$

а формулата за общото решение при реална ФС е

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + C_3e^{2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x.$$

От нея при $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{R}$ *получаваме всички реални решения, а при* $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{C}$ *— всички комплексни решения.*

Пример 2.1.2

$$y^{IV} + 4''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0,$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i,$$

а общото решение е

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x}\cos x + (C_3 + C_4x)e^{-x}\sin x,$$

откъдето при $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{R}$ *получаваме всички реални решения, а при* $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{C}$ *— всички комплексни решения.*

Пример 2.1.3 *Разглеждаме уравнението*

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$

Неговият характеристичен полином $\lambda^2 - 4\lambda + 8$ *има корени* $\lambda_1 = 2 - 2i,\ \lambda_2 = 2 + 2i$ *и следователно общото решение на хомогенното уравнение е*

$$y_0(x) = e^{2x}(c_1\cos 2x + \sin 2x).$$

Най-напред търсим частно решение на нехомогенното уравнение

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x}.$$

$\gamma = 2$ не е корен на характеристичния полином и търсим частно решение от вида

$$z_1(x) = ae^{2x}.$$

Заместваме в уравнението и получаваме

$$z_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x}.$$

След това търсим частно решение на нехомогенното уравнение

$$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$$

Понеже $\sin 2x = Im(e^{2ix})$, *ще намерим частно решение* $z_2(x)$ *на уравнението*

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2ix}.$$

Сега $\gamma = 2i$ не е корен на характеристичния полином търсим частно решение от вида

$$\tilde{z}(x) = be^{2ix}.$$

Заместваме в уравнението и получаваме

$$\tilde{z}(x) = \frac{1}{20}(1 + 2i)e^{2ix}.$$

Следователно

$$z_2(x) = Im(\tilde{z}(x)) = \frac{1}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x).$$

Окончателно получаваме общото решение на изходното уравнение

$$y(x) = y_0(x) + z_1(x) + z_2(x).$$

2.1.3 Уравнения на Ойлер.

Уравнения на Ойлер наричаме следното уравнение с променливи коефициенти

$$a_0(x-a)^n y^{(n)}(x) + a_1(x-a)^{n-a} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x-a)y^{(1)}(x) + a_n y = f(x),$$

където a, a_0, $a_1, \ldots, a_n$ са реални константи.

Уравнението на Ойлер се свежда до линейно уравнение с постоянни коефициенти чрез смяната $x = a + e^t$ при $x > 0$ и $x = a - e^t$ при $x < 0$.

Ще демонстрираме това на един прост пример.

Пример 2.1.4

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

При $x > 0$ полагаме $x = 2^t$. Последователно ще изразим производните по x чрез производните по t. Нека означим $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ и да пресметнем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(\dot{y}e^{-t})}{dt}e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}.$$

Заместваме в разглежданото уравнение и получаваме

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0.$$

Неговият характеристичен полином

$$\lambda^2 + \lambda - 6$$

има корени $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$. Това означава, че e^{-3t}, e^{2t} е фундаментална система и общото решение на последното уравнение е

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}.$$

Така окончателно намираме, че при $x > 0$ решението на изходното уравнение е

$$y(x) = c_1x^{-3} + c_2x^2.$$

Тази формула важи очевидно и при $x < 0$.

Упражнения

1.1.1 Намерете реалните решения на уравнението

1) $y'' - y' - 2y = 0,$
2) $y''' + 4y'' + 13y' = 0,$
3) $y^V - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0,$
4) $y''' - 4y'' + 3y' = \cos 3x + xe^{2x},$
5) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x,$
6) $x^2y'' + xy' + 9y = 10x.$

1.1.2. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} (x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x, \\ y(3) = 0,\ y'(3) = -2. \end{cases}$$

2.2 Системи линейни обикновени диференциални уравнения в нормален вид.

Да разгледаме следната система от $n,\ n \in \mathbf{N}$ линейни обикновени диференциални уравнения

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{array} \tag{2.2.1}$$

където $a_{ij}(t),\ f(t)$ са реални или комплексни функции дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал Δ. Дали този интервал е краен или безкраен, както и дали е отворен или затворен, няма значение.

Системите от вида (2.2.1) се наричат нормални системи. Ако въведем стандартните означения

$$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ \dot{x}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\ a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}(t)\ a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

системата (2.2.1) добива векторния вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in \Delta. \tag{2.2.2}$$

Ако към системата (2.2.2) добавим и n начални условия за n-те неизвестни функции $x_1(t),\ x_2(t), \ldots x_n(t)$ в нея

$$x(t_0) = x_0,\ t_0 \in \Delta,\ x_0 \in \mathbf{C}^n, \tag{2.2.3}$$

то получаваме задача на Коши.

Теорията на линейните системи е твърде близка до теорията на линейните диференциални уравнения от n-ти ред.

Ще започнем с основния резултат в тази теория, а именно теоремата за съществуване и единственост на задачата на Коши (2.2.2),(2.2.3).

Теорема 2.2.1 *Нека функциите $a_{ij}(t)$ и $f(t)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала Δ, а $t_0 \in \triangle$. Тогава задачата на Коши (2.2.2),(2.2.3) притежава единствено решение, дефинирано в целия интервал Δ.*

Когато $f(t) \equiv \vec{0}$, системата (2.2.2) се нарича хомогенна, в противен случай се нарича нехомогенна. Да разгледаме сега хомогенната система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \ t \in \Delta. \tag{2.2.4}$$

Лесно се проверява, че линейна комбинация на решения на тази система е пак нейно решение. Може да се докаже следната

Лема 2.2.1 *Решенията на системата (2.2.4) образуват линейно пространство с размерност n.*

Дефиниция 2.2.1 *Системата $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ от решения на (2.2.4) се нарича фундаментална система в Δ, ако е линейно независима в този интервал.*

Лема 2.2.2 *Системата (2.2.4) притежава безбройно много фундаментални системи.*

Дефиниция 2.2.2 *Нека решенията $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \ldots, \varphi_k^n), \ k = 1, 2, \ldots n$ на (2.2.4) са линейно независими в Δ. Матрицата*

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) \ \varphi_2^1(t) \ldots \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) \ \varphi_2^2(t) \ldots \varphi_n^2(t) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_1^n(t) \ \varphi_2^n(t) \ldots \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \ t \in \Delta,$$

се нарича фундаментална за системата (2.2.4), а нейната детерминанта - детерминанта на Вронски за $\{\varphi_k\}_1^n$. Детерминанта на матрицата Φ се нарича детерминанта на Вронски и в случая, когато функциите $\{\varphi_k\}_1^n$ са линейно зависими.

Сега вече можем да запишем общото решение на системата (2.2.4)

$$x(t) = \Phi(t) \cdot c, \tag{2.2.5}$$

където $\Phi(t)$ е фундаментална матрица, а $c \in \mathbf{C}^n$.

Детерминантата на Вронски ни позволява да дадем един прост критерии за линейна независимост за дадена n-торка от решения на (2.2.4).

Лема 2.2.3 *Нека $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са решения на системата (2.2.4), дефинирани в Δ, а $W(t)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Следните три твърдения са еквивалентни.*

1. *Съществува $t_0 \in \Delta$, за което $W(t_0) \neq 0$.*
2. *Системата $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ е линейно независима в Δ.*
3. *$W(t) \neq 0$ за всяко $t \in \Delta$.*

Наличието на фундаментална система от решения на хомогенната система (2.2.4) ни позволява да намерим всички решения на нехомогенната система (2.2.2), стига да знаем едно нейно частно решение. Наистина, ако $x(t)$ и $\psi(t)$ са две решения на нехомогенната система (2.2.2), то очевидно тяхната разлика $x(t) - \psi(t)$ е решение на хомогенната система (2.2.4) и за него е в сила представянето (2.2.5), тоест

$$x(t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t), \tag{2.2.6}$$

Остава да покажем как знаейки фундаментална система от решения на хомогенната система можем да намерим частно решение на нехомогенната. Ще използваме метода на Лагранж, известен още като метод на вариране на константите. Търсим решение на нехомогенната система (2.2.2) от вида

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \varphi_k(t), \tag{2.2.7}$$

където $c_k(t) \in C^1(\Delta), \ k = 1, 2, \ldots, n$ са функции, който подлежат на определение. Това ще стане като заместим в (2.2.2)

$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t) + f(t) = A(t) \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \varphi_k(t) + f(t).$$

От друга страна

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= \sum_{k=1}^{n}\dot{c}_k(t)\varphi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\dot{\varphi}_k(t)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\dot{c}_k(t)\varphi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k(t)A(t)\varphi_k(t).\end{aligned}$$

Следователно

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_k(t)\varphi_k(t)=f(t). \tag{2.2.8}$$

Вярно е и обратното - ако функциите $c_k(t)\in C^1(\Delta),\ k=1,2,\dots,n$, удовлетворяват (2.2.8), то (2.2.7) ще бъде решение на (2.2.2). Остава да покажем, че системата (2.2.8) има решение. Тя може да записана по следния начин

$$\Phi(t)\dot{c}(t)=f(t),\, t\in\Delta,$$

където $c(t)$ е вектор-стълб с елементи $c_k(t), t\in\Delta$, $\Psi(t)$ е фундаментална матрица на системата (2.2.2) и следователно нейната детерминанта е ненулева в Δ. Следователно $\Psi(t)$ е обратима в Δ и можем да запишем

$$\dot{c}(t)=\Phi^{-1}(t)f(t).$$

Сега вече едно интегриране ни дава

$$c(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\,ds+c_0,\ t_0\in\Delta,\ c_0\in\mathbf{C}^n.$$

Така окончателно получаваме

$$\psi(t)=\Phi(t)c_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)\,ds. \tag{2.2.9}$$

Понеже търсим едно частно решение на нехомогенната система (2.2.2), то можем да изберем $c_0=\vec{0}$. Ако векторът c_0 е произволен, то (2.2.9) ни дава всички решения на (2.2.2).

Следващата наша стъпка ще бъде да покажем, че линейните системи с постоянни коефициенти се решават експлицитно. Ще изложим най-простия метод, който води до тази цел, именно метода на изключването. Чрез диференциране и образуване на подходящи линейни комбинации, задачата се свежда до решаване на едно диференциално уравнение с постоянни коефициенти и на система от линейни алгебрични уравнения. Да разгледаме системата

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ t \in \Delta, \tag{2.2.10}$$

където $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ е матрица от реални константи.

Лесно се вижда, че ако $f(t) \in C^k(\Delta),\ k \geq 1$, то $x(t) \in C^{k+1}(\Delta)$. Наистина, тогава ще имаме

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + \dot{f}(t),$$

тоест $x(t) \in C^2(\Delta)$. След k диференцирания получаваме желания резултат.

След това наблюдение, ще покажем, че хомогенната система с постоянни коефициенти

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \in \Delta, \tag{2.2.11}$$

може да бъде сведена до n еднакви линейни диференциални уравнения от n-ти ред за всяка една от функциите $x_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$. Това ще стане по следния начин: да означим с p диференциалния оператор $\frac{d}{dt}$. Тогава системата (2.2.11) може да бъде записана по следния начин

$$px(t) = A\dot{x}(t)$$

или

$$(A - pE)x(t) = 0, \tag{2.2.12}$$

където E е единичната матрица с размерност $n \times n$.

Нека $A_{ij}(p)$ е адюлгираното количество на елемента в i-я ред и j-я стълб на матрицата $A - pE$. Да умножим i-я ред в (2.2.12) с $A_{i,j}(p)$ (на практика, това означава, че на i-то уравнение в (2.2.11) действаме с диференциалния оператор $A_{i,j}(\frac{d}{dt})$) и да съберем получените равенства. Ще получим

$$\det(A - pE)x_k(t) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2.13}$$

Това означава, че за всяка една от неизвестните функции $x_k(t)$ получаваме едно и също линейно диференциално уравнение от ред n с характеристичен полином $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Вижда се, че $P(\lambda)$ е характеристичният полином на матрицата A и следователно, човек може веднага да напише уравненията (2.2.13) до които се свежда системата (2.2.11).

Разбира се тези уравнения са само следствие на системата и не всички решения на (2.2.13) са решения на (2.2.11).

В случая,когато системата е с реални коефициенти, можем да отделим нейните реални решения. Понеже в този случай елементите на матрицата A са реални константи, то полиномът $P(\lambda)$,както и уравненията (2.2.11) са с реални коефициенти. Това означава, че (2.2.11) има фундаментална система от реални решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Следователно

$$\begin{array}{l} x_1(t) = c_{11}\varphi_1(t) + c_{12}\varphi_2(t) + \ldots + c_{1n}\varphi_n(t), \\ x_2(t) = c_{21}\varphi_1(t) + c_{22}\varphi_2(t) + \ldots + c_{2n}\varphi_n(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t) = c_{n1}\varphi_1(t) + c_{n2}\varphi_2(t) + \ldots + c_{nn}\varphi_n(t). \end{array} \tag{2.2.14}$$

За да определим кои от решенията (2.2.14) на уравненията (2.2.13) са решения на системата (2.2.11), заместваме в нея и установяваме, че от всичките n^2 константи c_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ само n са независими, а останалите се изразяват чрез тях. По този начин получаваме общото решение на хомогенната система (2.2.11).

Ако искаме да намерим общото решение на нехомогенната система с постоянни коефициенти (2.2.10), то можем да използваме описания по-горе метод на Лагранж. В случая, когато компонентите $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ на дясната страна $f(t)$ са квазиполиноми, то метода на неопределените коефициенти за намиране на частно решение е значително по-ефикасен от метода на Лагранж. Тогава представяме f като сума от квазиполиноми от вида $Q(t)e^{\alpha t}$, където $Q(t)$ е векторен полином, а α е реална или комплексна константа. Преобразувайки системата (2.2.10) до уравненията (2.2.13) ще получим във всяко едно от тях дясна страна $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, която е квазиполином и по-нататък процедираме както при линейните уравнения с постоянни коефициенти.

Като следваща стъпка, ще дадем един интересен резултат за непрекъсната зависимост от параметър на решенията на система от ОДУ. Да разгледаме в многомерната призма

$$\Pi = \{(t, x, \mu) : |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b,\ |\mu - \mu_0| \leq c,$$
$$t,\ t_0 \in \mathbf{R},\ x,\ x_0 \in \mathbf{R}^n,\ \mu,\ \mu_0 \in \mathbf{R}^l,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0\}$$

малко по-обща задача на Коши за системата

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, \mu), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2.15}$$

където функцията $f(t,x,\mu)$ може да е нелинейна, но е непрекъсната в Π и липшицова по x при всяко фиксирано (t,μ), т.е.

$$|f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)|\le K|x-y|,\ \forall(t,x,\mu),\ (t,y,\mu)\in\Pi,\ K=const>0.$$

Нека освен това $f(t,x,\mu)\le m$, $0<M=const$, $\forall(t,x,\mu)\in\Pi$. Тогава е в сила следната

Теорема 2.2.2 *Задачата на Коши (2.2.15) притежава единствено решение $x(t,\mu)$ дефинирано и непрекъснато в $|t-t_0|\le h$, $|\mu-\mu_0|\le c$, където $h=\min(a,\frac{b}{M})$.*

Този резултат показва че решението зависи непрекъснато от параметъра μ. Като следствие от него ще извлечем и непрекъсната зависимост от началното условие:

Теорема 2.2.3 *Нека (t_1,x_1) е вътрешна точка за*

$$\Pi_1=\{(t,x):|t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b,\ t,\ t_0\in\mathbf{R},\ x,\ x_0\in\mathbf{R}^n,\ a>0,\ b>0\}$$

и $f(t,x)\in C^1(\Pi_1)$. Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=f(t,x),\\ x(t_1)=x_1,\end{array}\right. \tag{2.2.16}$$

зависи непрекъснато от t и от началните условия (t_1,x_1).

За пълнота ще завършим с един резултат за диференцируема зависимост на решението от началните условия

Теорема 2.2.4 *Нека $f\in C^2(\Pi_1)$. Тогава решението $x(t,t_1,x_1)$ на задачата на Коши (2.2.16) притежава непрекъснати частни производни относно аргументите t, $x_{1,j}$, където $x_1=(x_{1,1},\,x_{1,2},\dots,x_{1,n})$. Освен това съществуват и са непрекъснати следните производни $\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial t_1}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial x_{1,j}}$, $j=1,2,\dots,n$.*

Пример 2.2.1 *Ще решим с метода на изключването линейната система*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t). \end{cases} \tag{2.2.17}$$

След което с помощта на Matlab *ще начертаем графиката на решението* $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $t \in [0,1]$ *на задачата на Коши за (2.2.17) с начални данни* $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 1$.

Характеристичният полином на системата (2.2.17) е

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 6.$$

Следователно системата се свежда до следното линейно диференциално уравнение

$$-x''' + x'' - 6x' + 6 = 0.$$

Корените на $P(\lambda)$ са $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ и следователно фундаментална система на полученото уравнение е $\{e^t,\, e^{2t},\, e^{3t}\}$. Тогава за неизвестните функции $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ получаваме

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}, \\ x_2(t) &= c_4 e^t + c_5 e^{2t} + c_6 e^{3t}, \\ x_3(t) &= c_7 e^t + c_8 e^{2t} + c_9 e^{3t}. \end{aligned}$$

Заместваме в системата и намираме, че нейните решения са

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}, \\ x_2(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \\ x_3(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}. \end{aligned}$$

Можем да запишем това решение и във векторен вид

$$P(\lambda) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Лесно се проверява, че векторите $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ са собствените вектори на матрицата на системата (2.2.17) съответстващи на собствените стойности 1, 2, 3.

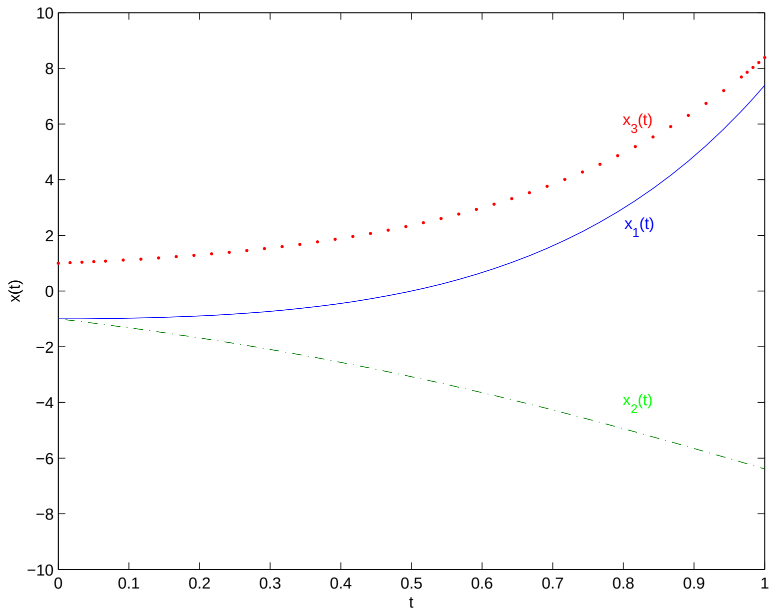
Всъщност решенията $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$ образуват фундаментална система от решения. Наистина, тяхната детерминанта на Вронски е

$$W(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{vmatrix} = -e^{6t} \neq 0.$$

Следния код изчертава графиката на решенията на формулираната задача на Коши, като използва оператора *ode45*

```
function linear_system

% решаване на системата
[T,X] = ode45(@rhs,[0,1],[-1 -1 1]);

% чертане графиката на решението
plot(T,X(:,1),'-',T,X(:,2),'-.',T,X(:,3),'.');
axis([0 1 -10 10]);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
gtext('x_1(t)','Color','b');
gtext('x_2(t)','Color','g');
gtext('x_3(t)','Color','r');

% дясна страна на системата
function y=rhs(t,x)
y=[2*x(1)-x(2)+x(3); x(1)+x(2)-x(3); x(1)-x(2)+
x(3)];
end

end
```

Графиката на решението, която изчертава този код е показана на Фиг. 2.1.



Фигура 2.1: Графиката на решението $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ на системата от Пример 2.2.1.

Упражнения

1.2.1. Дадена е системата

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 2z + 2e^t \\ \dot{y} &= -3x + 2z + 2e^t \\ \dot{z} &= -x - y + z. \end{aligned}$$

а)Намерете всички реални решения на системата;

б)Начертайте с помощта на *Matlab* графиката на решението на задачата на Коши за тази система с начално условие $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

1.2.2. Дадена е системата

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + z - e^{-t} \\ \dot{y} &= 3x + 2y + 4z \\ \dot{z} &= -3x - y - 3z + 2e^{-t}. \end{aligned}$$

а)Намерете всички реални решения на системата;

б)Начертайте с помощта на *Matlab* графиката на решението на задачата на Коши за тази система с начално условие $x(0) = -1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0$.

1.2.3. Дадена е системата

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + z + e^t\\ \dot{y} &= 3x - y + 3z\\ \dot{z} &= 2x + y + z - e^t.\end{aligned}$$

а)Намерете всички реални решения на системата;

б)Начертайте с помощта на *Matlab* графиката на решението на задачата на Коши за тази система с начално условие $x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1$.

1.2.4. Дадена е системата

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y + \tfrac{e^t}{\sin^3 t}\\ \dot{y} &= -x + 2y + z\\ \dot{z} &= x + z.\end{aligned}$$

а)Намерете всички реални решения на хомогенната система;

б)Начертайте с помощта на *Matlab* графиката на решението на задачата на Коши за хомогенната система с начално условие $x(0) = 1,\ y(0) = -1,\ z(0) = -1$;

в)Намерете всички реални решения на нехомогенната система системата.

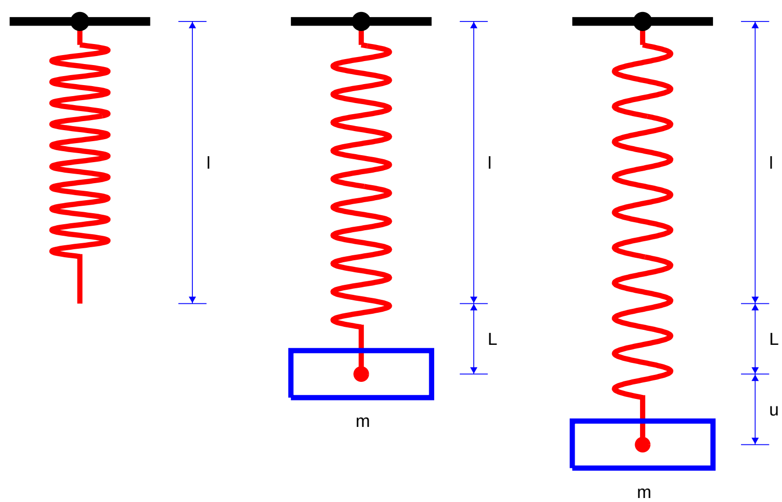
2.3 Механични трептения.

Една от причините да се изучават детайлно линейните обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти е, че те възникват при математическото моделиране на важни физични процеси. Например, движението на материална точка, окачена на пружина, усукващи вибрации на вал с маховик, потока от електрически ток в една проста схема, движението на материална точка окачена на безтегловен прът и много други физични проблеми се описват от решението на една начална задача от вида

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(t), \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

2.3.1 Система пружина-маса.

Ще изучим вертикалните трептения на материална точка, окачена на пружина. Нека материалната точка има маса m и е закачена в края вертикална пружина с първоначална дължина l. Точката ще предизвика удължаване L на пружината в посока надолу.



Фигура 2.2: Система пружина-маса.

Има две сили, които действат на точката. Гравитационната сила или силата на тежестта на точката действат в посока надолу и има големина $\omega = mg$, където g е земното ускорение. Има още една сила F_s, породена от пружината, която действа в посока нагоре. Ако допуснем, че удължаването L на пружината е малко, то силата, с която пружината действа е пропорционална на L. Този факт е известен като закон на Хук. Следователно $F_s = -kL$, където коефициента на пропорционалност k се нарича константа на пружината и зависи от нейното качество. Ако системата е в равновесие, то двете сили се балансират, което означава

$$mg - kL = 0. \tag{2.3.2}$$

Ако е известна масата m, човек може да измери L и чрез равенството (2.3.2) да определи k.

Интересно е да се изучи движението на описаната система, когато на материалната точка действа допълнителна външна сила или тя е първоначално отместена. Нека $u(t)$ е отместването на материалната точка от равновесното ѝ положение в посока надолу в момента t. Тогава законът на Нютон дава следната връзка между ускорението $u''(t)$ на точката и равнодействащата сила $f(t)$ на силите, които ѝ действат.

$$mu''(t) = f(t). \tag{2.3.3}$$

За да определим $f(t)$ ще разгледаме четири различни сили, които биха могли да действат на точката:

1. Силата на тежестта $\omega = mg$ винаги действа в посока надолу.

2. Силата F_s, породена от пружината, която предполагаме е пропорционална на сумарното удължение $L+u$ на пружината и винаги се стреми да върне пружината в естественото ѝ положение. Ако $L+u>0$, то струната е удължена и силата F_s действа в посока нагоре. В този случай

$$F_s = -k(L+u). \tag{2.3.4}$$

Ако $L+u<0$, тогава пружината е свита и е по-къса от първоначалната си дължина с $|L+u|$. Сега силата F_s е насочена нагоре и има големина $F_s = k|L+u| = -k(L+u)$, тоест отново се дефинира с равенството (2.3.4).

3. Дъмпингова или резистивна сила F_d, която винаги е насочена в посока противоположна на движението. Тя може да е породи от различни източници: съпротивлението на въздуха или средата, в която се движи системата; загуба на енергия, дължаща се на удължаването или свиването на пружината; триенето между механичните части на системата. Във всеки случай ще предполагаме, че дъмпинговата сила е пропорционална да скоростта $u'(t)$ на движение на точката. Този случай обикновено се нарича вискозен дъмпинг. Ако $u'(t)>0$, то u нараства и точката се движи надолу. Тогава F_d е насочена надолу и се дава с равенството

$$F_d = -\gamma u'(t), \tag{2.3.5}$$

където γ е положителна константа известна като дъмпингова константа. Ако $u'(t)<0$, то u намалява и точката се движи нагоре. Силата F_d е насочена нагоре и има големина $F_d = \gamma|u'(t)| = -\gamma u'(t)$. Следователно и в този случай F_d се определя с равенството (2.3.5).

4. Външна сила $F(t)$ насочена надолу или нагоре, която може да се дължи на конструкцията на която е окачена пружината или може да бъде външна сила директно приложена върху материалната точка. Често външната сила е периодична.

Взимайки под внимание всички тези сили, законът на Нютон ни дава

$$\begin{aligned} mu''(t) &= mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t), \\ &= mg - k[L+u(t)] - \gamma u'(t) + F(t). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Тъй като $mg - kL = 0$, то получаваме, че уравнението на движението на материалната точка е

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \tag{2.3.7}$$

където m, γ и k са положителни константи. Трябва да отбележим, че при извода на уравнението (2.3.7) ние пренебрегнахме масата на пружината. За да определим еднозначно положението на материалната точка в даден момент t е необходимо да знаем нейното първоначално отместване u_0 и началната ѝ скорост v_0:

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0. \tag{2.3.8}$$

Добре известен факт е, че задачата на Коши (2.3.7),(2.3.8) има единствено решение и нейното решение $u(t)$ определя (приблизително) положението на точката във всеки момент $t \geq 0$.

Свободни вибрации без дъмпинг.

Да разгледаме описаната система, когато няма дъмпинг $\gamma = 0$ и отсъства външна сила $F(t) = 0$. В този случай уравнението (2.3.7) приема вида

$$mu''(t) + ku(t) = 0. \tag{2.3.9}$$

Неговото общо решение има вида

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{2.3.10}$$

където $\omega^2 = \frac{k}{m}$, а константите A и B се определят от началните условия. Ако означим $\varrho = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = \arctan\frac{B}{A}$, то решението приема вида $u(t) = \varrho\cos(\omega t + \varphi)$. Максималното отклонение от равновесното положение ϱ се нарича амплитуда на движението, а величината φ се нарича фаза. Амплитудата и фазата зависят от началните условия, докато ω зависи само от физическата система и често се нарича собствена честота на системата. Величината $T = \frac{2\pi}{\omega}$ се нарича период на движението. Той нараства, когато m расте, следователно по-тежките точки вибрират по-бавно. От друга страна периодът намалява, когато k нараства, което означава, че по-твърдите пружини водят до по-бързо вибриране на системата.

Свободни вибрации с дъмпинг.

Нека сега има дъмпинг($\gamma \neq 0$). Тогава уравнението на движението е

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = 0. \tag{2.3.11}$$

Неговото общо решение е

$$u(t) = \begin{cases} Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, & \gamma^2 - 4km > 0; \\ (A + Bt)e^{-\gamma t/2m}, & \gamma^2 - 4km = 0; \\ (A\cos\mu t + B\sin\mu t)e^{-\gamma t/2m}, & \gamma^2 - 4km < 0, \end{cases} \tag{2.3.12}$$

където $r_{1,2} = \frac{\gamma}{2m}(-1 \pm \sqrt{1 - 4km/\gamma^2})$, а $\mu = \sqrt{4km - \gamma^2}/2m > 0$.

И в трите случая решението $u(t)$ намалява с нарастването на t и клони към 0, когато $t \to \infty$, което отговаря на интуитивната ни представа, че триенето намалява енергията на системата. Въпреки, че движението не е периодично величината μ показва честотата с която точката вибрира и се нарича квази–честота, а $T_d = 2\pi/\mu$ се нарича квази–период.

Принудени трептения. Резонанс и биене.

Ще разгледаме случая, когато върху материалната точка действа външна периодична сила, например $F_0 \cos\omega_0 t,\ \omega_0 > 0$. Тогава уравнението на движението е

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_0 \cos\omega_0 t. \tag{2.3.13}$$

Да предположим, че $\gamma > 0$, $\omega > 0$, $\gamma^2 - 4km < 0$. Общото решение на уравнението (2.3.13) в този случай е

$$u(t) = (A\cos\mu t + B\sin\mu t)e^{-\gamma t/2m} + \frac{F_0\cos(\omega_0 t - \beta)}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2}}, \tag{2.3.14}$$

където $\beta = \arg(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\gamma}{m}\omega_0 i)$.

Понеже $\gamma > 0$, след известно време първия член става пренебрежимо малък. Второто събираемо тогава ни дава периодично движение с честота равна на честотата на външната сила ω_0 и с известно отместване по фаза. Когато ω_0 се мени и амплитудата на второто събираемо се мени и достига максимума си при $\omega_0 = \omega$. Тогава ефектът на външната сила е най-голям. В този случай се казва, че имаме резонанс. При $\gamma = 0$ и $\omega_0 = \omega$ общото решение на уравнението (2.3.13) е

$$u(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \frac{F_0}{2m\omega} t\sin\omega t.$$

Сега амплитудата на принудените трептения расте линейно заедно с t.

В зависимост от обстоятелствата резонансът може да бъде както хубав, така и лош. Той се взима под сериозно внимание, когато се проектират такива съоръжения, като мостове, при които той би могъл да предизвика разрушение. Резонансът играе важна роля и в радиотехниката - радиоапаратите приемат най-ясно сигналите с честота, близка до собствената им.

Да предположим сега, че $\gamma = 0$, $\omega_0 \neq \omega$ и в началния момент системата се намира в покой, тоест $u(0) = 0$ и $u'(0) = 0$. Решението на получената задача на Коши е

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{2F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}(\cos\omega_0 t - \cos\omega t) \\ &= \frac{2F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \sin\frac{(\omega + \omega_0)t}{2}. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Ако $|\omega - \omega_0|$ е малко число, то $\omega + \omega_0$ е много по-голямо от $|\omega - \omega_0|$ и $\sin\frac{(\omega+\omega_0)t}{2}$ осцилира много по-бързо от $\sin\frac{(\omega-\omega_0)t}{2}$. Следователно движението е бързо осцилиращо със честота $(\omega + \omega_0)/2$, но с бавно варираща амплитуда

$$\frac{2F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}.$$

Такъв тип движение с периодично променяща се амплитуда се нарича биене. В електрониката например варирането на амплитудата във времето се нарича амплитудна модулация.

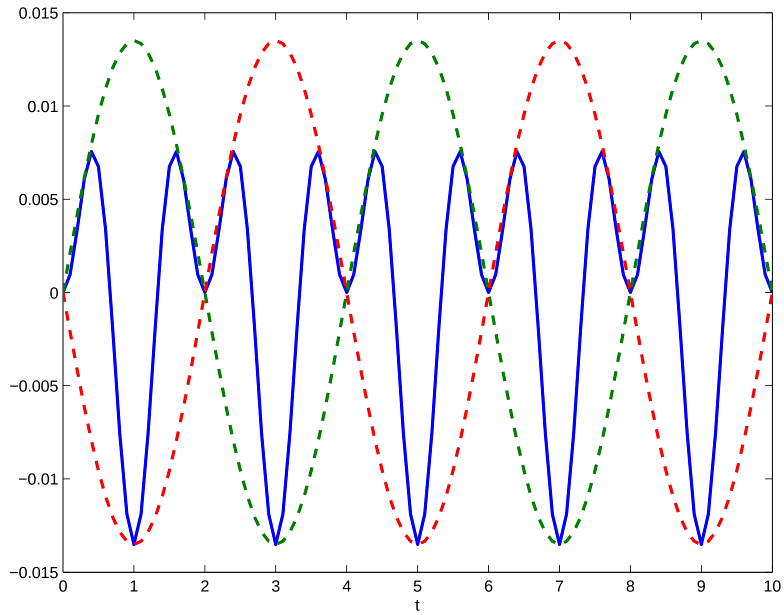
На Фиг. 2.3 са показани графиката на $u(t)$ и $\pm$ амплитудата в случая на биене при $F_0 = 1$, $m = 5$, $\omega = 2\pi$, $\omega_0 = \pi$.

Пример 2.3.1 *Материална точка с маса $m = 4$ kg. е окачена на пружина с дължина $l = 6$ cm. и константа $= 4\,N/m$. Първоначалното отместване на точката от равновесното положение е $u_0 = 1$ cm., а началната ѝ скорост е $v_0 = 0$. На точката действа външна сила $F = 5\cos 3t\,N$, а дъмпинговата константа е $\gamma = 0.5$. Да се визуализира с Matlab движението на системата за време $t \in [0, 10]$.*

Решение. Математическият модел описващ движението на дадената система е следната задача на Коши за линейно ОДУ от втори ред

$$\begin{cases} 4u''(t) + \frac{1}{2}u'(t) + 4u(t) = 5\cos 3t, \\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.3.16}$$

За да визуализираме с Matlab движението на системата ще използваме оператора *ode*45. За целта ще сведем задачата на Коши (2.3.16) до



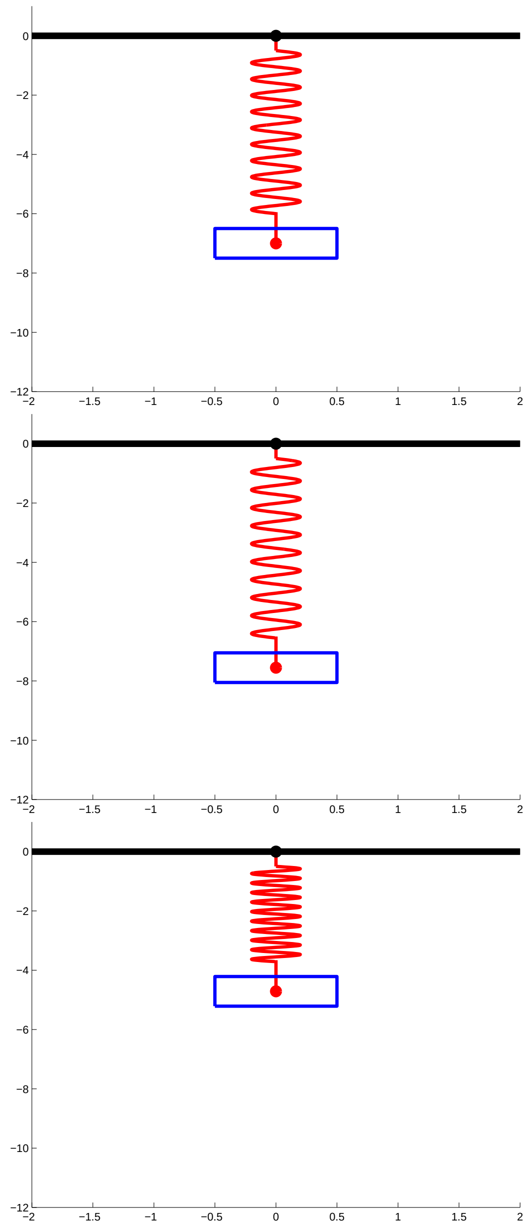
Фигура 2.3: Биене. Графики на амплитудата и решението.

задача на Коши за линейна система от първи ред. Ето защо въвеждаме нови функции $y_1(t) = u(t)$ и $y_2(t) = u'(t)$. Сега лесно достигаме до следната начална задача

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 - \frac{1}{8}y_2 + 5\cos 3t, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Решението на тази задача е визуализирано със следният примерен код на Matlab, а на Фиг. 2.4 е показана графиката, която дава той в моментите $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 2$.

```
function spring_mass1
clear;

global m l gamma k
m=4;l=6;
gamma=0.5;k=4;
u0=1;v0=0;
tmax=10; epsi=l/12;

% решаване на системата
```



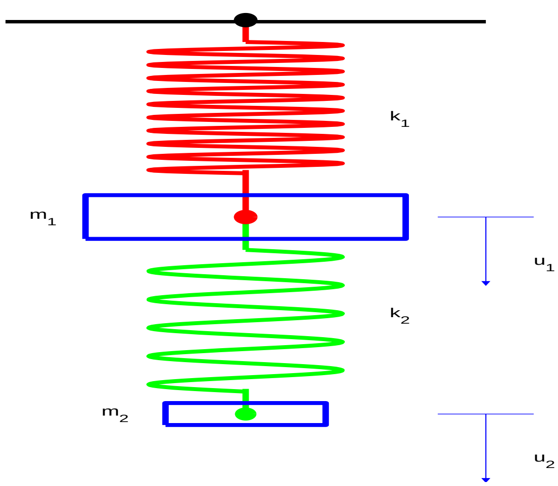
Фигура 2.4: Вертикални трептения на материалната точка от Пример 2.3.1 в моментите $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 2$.

```
[T,Y]=ode45(@rhs,[0,tmax],[u0,v0]);
u=Y(:,1);

% изчертаване на движението
for k=1:length(T)
```

```
    clf;
x(k)=0;

y(k)=-l-u(k);

hold on

line([-2 2],[0 0],'LineWidth',6,'Color','k');

% изчертаване на пружината
s=0:1/100:-y(k)-3*epsi;
plot(-sin(20*s*pi/(y(k)+3*epsi))/5,-s-epsi,
'LineWidth',3,'Color','r');

% изчертаване на точката и правоъгълника
plot(x(k),y(k),'o','LineWidth',5,'Color','r',

'MarkerFaceColor',[1 0 0]);


line([0 0],[-epsi 0],'LineWidth',3,'Color','r');
line([0,0],[y(k)+2*epsi+0.05, y(k)],
'LineWidth',3,'Color','r');

line([x(k)-epsi,x(k)+epsi,
x(k)+epsi,x(k)-epsi,x(k)-epsi],
[y(k)-epsi,y(k)-epsi,y(k)+epsi,
 y(k)+epsi,y(k)-epsi],'LineWidth',3,
'Color','b');

line([-2 2],[0 0],'LineWidth',5,'Color','k');
plot(0,0,'o','LineWidth',5,'Color','k',
'MarkerFaceColor',[0 0 0]);

axis([-2 2 -l-l 1])
M(k)=getframe;
end


% дясна страна на системата
function z=rhs(t,y)
```

```
global m l gamma k
z=[y(2);-(gamma/m)*y(2)-(k/m)*y(1)+5*cos(3*t)];
end
end
```

Пример 2.3.2 *Да разгледаме система пружина-маса с две степени на свобода, състояща се от две отделни материални точки с маси m_1 и m_2, които са окачени последователно на две пружини със дължини и пружинни константи съответно l_1, k_1 и l_2, k_2. Нека отместванията на двете материални точки от равновесното положение са съответно $u_1(t)$ и $u_2(t)$.*



Фигура 2.5: Система пружина-маса с две степени на свобода.

За простота ще предполагаме, че няма триене и че на системата не действат външни сили. Вторият закон на Нютон дава следните уравнения на движение на системата

$$\begin{cases} m_1 u_1''(t) + k_1 u_1(t) - k_2(u_2(t) - u_1(t)) = 0, \\ m_2 u_2''(t) + k_2(u_2(t) - u_1(t)) = 0. \end{cases} \tag{2.3.18}$$

Разбира се, за да определим състоянието на системата в определен момент t трябва да знаем нейното начално състояние - началните отмествания и началните скорости на двете материални точки $u_1(0) = u_0$, $u_2(0) = v_0$ и $u_1(0)' = w_0$, $u_2'(0) = z_0$.

Лесно се вижда, че ако изразим u_2 от първото уравнение и заместим във второто уравнение на системата, то за u_1 ще получим линейно ОДУ от четвърти ред.

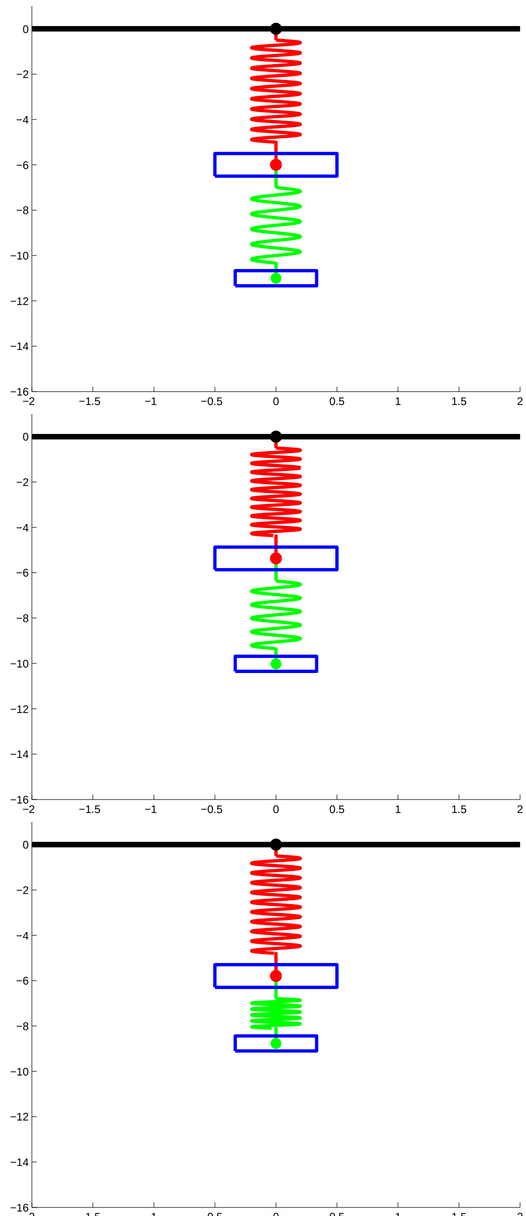
$$m_1 u_1^{iv}(t) + (k_1 + k_2 + \frac{m_1}{m_2}k_2)u_1''(t) + \frac{k_1 k_2}{m_2}u_1(t) = 0. \qquad (2.3.19)$$

Ще визуализираме движението на системата като сведем системата (2.3.18) до система от четири уравнения от първи ред. За целта въвеждаме нови функции $y_1 = u_1$, $y_2 = u_2$, $y_3 = u_1'$, $y_4 = u_2'$ и получаваме следната задача на Коши

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' = -\frac{k_1}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1), \\ y_4' = -\frac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1), \\ y_1(0) = u_0,\ y_2(0) = v_0, \\ y_3(0) = w_0,\ y_4(0) = z_0. \end{cases} \qquad (2.3.20)$$

Следния примерен код на Matlab визуализира движението на системата при $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $l_1 = 6$, $l_2 = 4$, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$, $z_0 = 1$, а на Фиг. 2.6 е показана графиката на системата в моментите $t = 0$, $t = 3$, $t = 4$.

```
function spring_mass2

clear;
global m1 m2 l1 l2  k1 k2

% въвеждане на параметрите и началните данни
m1=2; m2=1; l1=6; l2=4; k1=4; k2=2;
u0=0;v0=1;w0=0;z0=1;

tmax=10; epsi1=l1/12; epsi2=l2/12;

% решаване на системата
[T,Y]=ode45(@rhs,[0,tmax],[u0,v0,w0,z0]);
u1=Y(:,1); u2=Y(:,2);

for k=1:length(T)
    clf;
x1(k)=0; y1(k)=-l1-u1(k);
x2(k)=0; y2(k)=-l1-l2-u2(k);
hold on
line([-2 2],[0 0],'LineWidth',5,'Color','k');
```



Фигура 2.6: Вертикални трептения на две материални точки (Пример 2.3.2), окачени последователно на пружини в моментите $t = 0$, $t = 3$, $t = 4$.

```
% изчертаване на първата пружина
s1=0:1/100:-y1(k)-3*epsi1;
plot(-sin(20*s1*pi/(y1(k)+3*epsi1))/5,-s1-epsi1,
```

```
'LineWidth',3,'Color','r');

% изчертаване на втората пружина
s2=0:1/100:-y2(k)-5*epsi2+y1(k);
plot(-sin(10*s2*pi/(y2(k)-y1(k)+5*epsi2))/5,
-s2+y1(k)-3*epsi2,'LineWidth',3,'Color','g');


% изчертаване на втората точка
plot(x2(k),y2(k),'o','LineWidth',4,'Color','g',
'MarkerFaceColor',[0
1 0]);

line([0 0],[-epsi1 0],'LineWidth',3,'Color','r');
line([0,0],[y1(k)+2*epsi1+0.05, y1(k)],
'LineWidth',3,'Color','r');


% изчертаване на първата точка
line([x1(k) x1(k)],[y1(k) y1(k)-3*epsi2],
'LineWidth',3,'Color','g'); line([0,0],
[y2(k)+2*epsi2+0.05, y2(k)],
'LineWidth',3,'Color','g');

plot(x1(k),y1(k),'o','LineWidth',5,'Color','r',
'MarkerFaceColor',[1
0 0]);


line([x1(k)-epsi1,x1(k)+epsi1,x1(k)+epsi1,
x1(k)-epsi1,x1(k)-epsi1],
[y1(k)-epsi1,y1(k)-epsi1,y1(k)+epsi1,
y1(k)+epsi1,y1(k)-epsi1],
'LineWidth',3,'Color','b');


line([x2(k)-epsi2,x2(k)+epsi2,x2(k)+epsi2,
x2(k)-epsi2,x2(k)-epsi2],
[y2(k)-epsi2,y2(k)-epsi2,y2(k)+epsi2,
y2(k)+epsi2,y2(k)-epsi2],
'LineWidth',3,'Color','b');
```

```
% изчертаване на основата
plot(0,0,'o','LineWidth',5,'Color','k',
'MarkerFaceColor',[0 0 0]);
axis([-2 2 -l1-l2-6 1])
M(k)=getframe;
end

% дясна страна на системата
function z=rhs(t,y)
global m1 m2 k1 k2
z=[y(3); y(4);
-(k1/m1)*y(1)+(k2/m2)*(y(2)-y(1));
 - (k2/m2)*(y(2)-y(1))];
end
end
```

2.3.2 Математическо махало.

В този параграф ще разгледаме движението на тежка частица P с маса m в окръжност C с център точката O и радиус l, разположена във вертикална равнина. Избираме остта Ox да е насочена в посока на земното ускорение g. Нека φ е ъгълът между оста Ox и OP, а движението на точката да започва в момента t_0 от положение $P_0(\varphi_0)$.

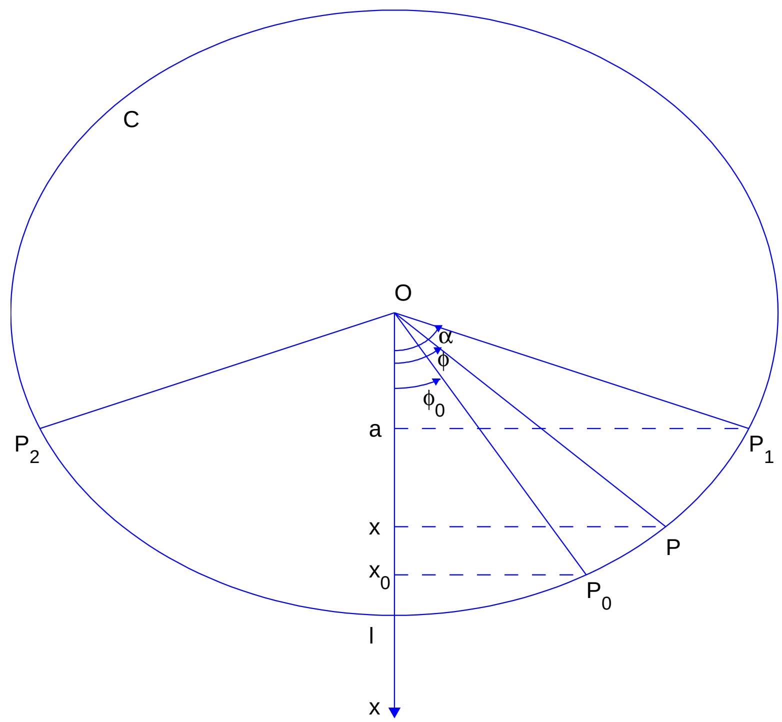
Първоначална ще предполагаме, че няма триене. Тогава теоремата за кинетичната енергия за точките P и P_0 ни позволява да запишем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(x - x_0)$$

и следователно

$$v^2 = v_0^2 - 2g(x_0 - x) = v_0^2 - 2gl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = -2g(a - x), \qquad (2.3.21)$$

където, $a = x_0 - v_0^2/2g$, а v_0 е началната скорост на точката. $\{x = a\}$ е уравнението на правата, до която точката P може да достигне. Стойността на константата a определя характера на движението. Ако $-l < a < l$, то правата $x = a$ пресича окръжността C и движението е осцилиращо. Ако разглежданата права е тангенциална към окръжността ($a = \pm l$), то тогава имаме $v_0 = 0$, което съответства на равновесното положение. Ако правата $x = a$ не пресича окръжността C (тоест $a < -l$, понеже $a > l$ е невъзможно), то движението е циркулиращо.



Фигура 2.7: Математическо махало.

Да предположим, че $v_0^2 < 4gl$. Тогава движението на частицата ще бъде осцилиращо. Да означим $a = l\cos\alpha$, където $0 < \alpha < \pi$ е ъгълът съответстващ на граничното положение P_1 (за което $v = 0$) на частицата P, определящо амплитудата на движението. Уравнението (2.3.21) приема вида

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{2.3.22}$$

където $\omega^2 = g/l$. Ще отбележим, че $\varphi_0 \neq 0$. Диференцираме последното уравнение по времето t и получаваме

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0. \tag{2.3.23}$$

Това уравнение се нарича уравнение на математическото махало и често се среща в различни задачи на механиката в една от двете си форми, написани по-горе. В случая, когато разглеждаме малки осцилации около равновесното положение, можем да смятаме, че $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогава уравнението (2.3.23) приема вида

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \tag{2.3.24}$$

Това е линейно уравнение от втори ред и ако знаем началното положение $\varphi(t_0)$ и началната скорост $\dot{\varphi}(t_0)$, можем еднозначно да определим положението на частицата във всеки момент $t \geq t_0$.

Периодът на това движение е

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.3.25}$$

Както при циклоидалното махало, виждаме че движението в разглеждания случай е изохронно и таутохронно. Ако отчетем и съпротивлението γ, което оказва средата, в която се движи частицата P, то уравнението на движението ще има следния вид

$$ml\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0. \tag{2.3.26}$$

Друга постановка на задачата, която води до същия модел е движението във вертикална равнина на тежка частица P с маса m, закачена посредством безтегловен неразтеглив прът с дължина l за една фиксирана точка O.

Пример 2.3.3 *Да се визуализира движението на математическото махало за* $t \in [0, 6]$, *ако дължината на пръта е 6 m., масата на точката е 2 kg., а коефициента на съпротивление на средата е 2. Първоначално точката е отклонена от равновесното си положение на ъгъл* $\pi/6$, *а началната и скорост е* $0.3m/sec$.

Решение. За малки отклонения от равновесното положение можем да използваме следното линейно приближение на уравнението на движението (2.3.7)

$$ml\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + mg\varphi = 0.$$

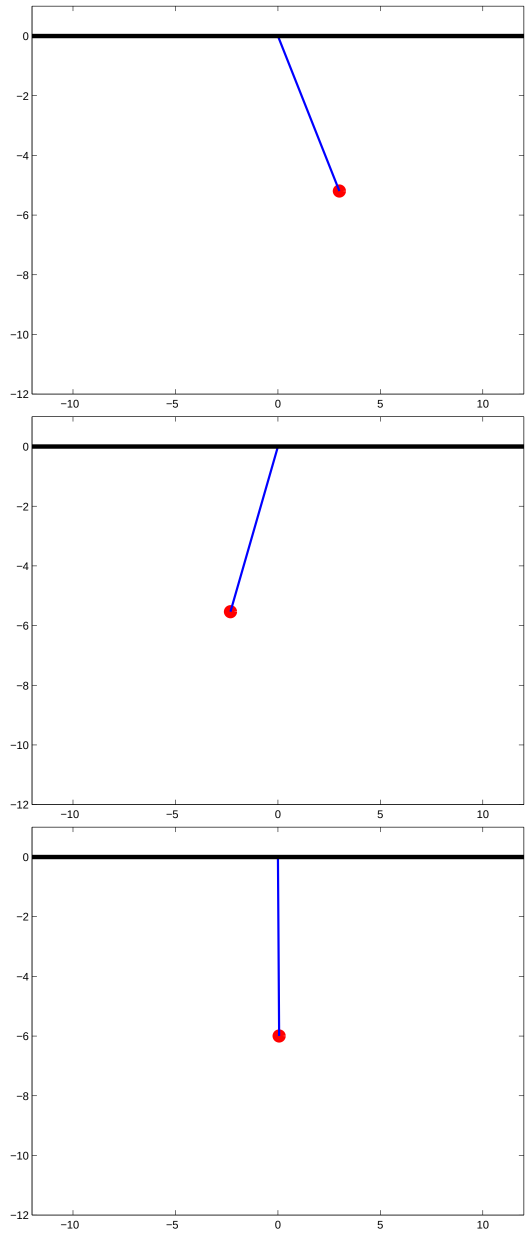
Въвеждаме нови функции $y_1(t) = \varphi(t),\ y_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ и достигаме до следната задача на Коши

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{g}{l}y_1 - \frac{\gamma}{m}y_2, \\ y_1(0) = \pi/6,\ y_2(0) = 0.3. \end{cases} \tag{2.3.27}$$

Следния примерен код визуализира движението на махалото.

```
function pendulum

clear;
clf; global
gamma m g l
gamma=0.5; m=2; g=9.81; l=6;

tmax=6;

% решаване на системата
[T,Y]=ode45(@rhs,[0,tmax],[pi/6, 0.3]);


% координатите на частицата
x=l*sin(Y(:,1));
 y=-l*cos(Y(:,1));

for k = 1:length(x)

% движението частицата
plot(x(k),y(k),'ro','LineWidth',6);

line([0,x(k)],[0,y(k)],'LineWidth',2);
line([-2*l 2*l],[0
0],'LineWidth',4,'Color','k');

          axis([-2*l 2*l   -2*l 1]);
M(k)=getframe;
end

movie(M,2)

% дясна страна на системата
function z=rhs(t,y)
global gamma m g l

z= [y(2); -(gamma/m)*y(2)-(g/l)*y(1)];
end
```

На Фиг. 2.8 е показано движението на махалото в моментите $t = 0$, $t = 3$, $t = 5$.



Фигура 2.8: Движение на математическото махало от Пример 2.3.3 в моментите $t = 0$, $t = 3$, $t = 5$.

Упражнения

1.3.1. Материално точка с маса 4 kg. е окачена на пружина и я разтяга с 2 cm. Точката е отместена с още 6 cm. в посока надолу и след това е пусната свободно да се движи с начална скорост 3 cm/sec надолу. Движението е във среда с вискозен дъмпинг 6 N/m. Дефинирайте начална задача, която моделира движението на системата и визуализирайте това движение за $t \in [0, 10]$. Първа задача

1.3.2. Материално точка с маса 10 kg. е окачена на пружина и я разтяга с 2 cm. Точката е отместена с още 2 cm. надолу, след което е пусната в движение с начална скорост 1 cm/sec. нагоре в среда без съпротивление. Определете положението на материалната точка във всеки следващ момент, както и периодът, амплитудата и фазата на нейното движение. Визуализирайте движението за $t \in [0, 15]$. Втора задача

1.3.3. Движението на система пружина-маса се описва с уравнението

$$u'' + 0.5u' + u = 0,$$

където u се измерва в сантиметри, а t в секунди. Ако $u(0) = 0$, а $u'(0) = 1$, определете положението на материалната точка във всеки следващ момент. Определете момента, в който материалната точка минава за първи път през равновесното положение. Визуализирайте движението за $t \in [0, 15]$.

1.3.4. (Биене) Движението на система пружина-маса се описва с уравнението

$$u'' + u = 0.5 \cos(4t/5),$$

където u се измерва в сантиметри, а t в секунди. Ако $u(0) = 0$, а $u'(0) = 0$. Визуализирайте движението за $t \in [0, 15]$.

1.3.5. Движението на система пружина-маса се описва с уравнението

$$u'' + u = 0.5 \cos t,$$

където u се измерва в сантиметри, а t в секунди. Ако $u(0) = 0$, а $u'(0) = 0$. Визуализирайте движението за $t \in [0, 15]$.

1.3.6. Движението на система пружина-маса се описва със следната задача на Коши

$$\begin{gathered} u'' + u = 3\cos(\omega t), \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{gathered}$$

Намерете решението за $\omega \neq 1$. Визуализирайте движението за $t \in [0, 15]$ при $\omega = 0.7$, $\omega = 0.8$ и $\omega = 0.9$. Какво се случва, когато ω приема стойности близки до 1?

1.3.7. Визуализирайте математическото махало от Пример 3.1., като вместо оператора $ode45$ използвате $Dsolve$.

1.3.8. Визуализирайте математическото махало от Пример 3.1., когато няма триене като вместо оператора $ode45$ използвате метода на Ойлер (изберете подходяща стъпка τ и диференчната разлика $\dot{\varphi}(t_j) = \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{\tau}$).

Глава 3

Качествени методи - фазови портрети, устойчивост

3.1 Автономни системи

3.1.1 Основни понятия

В тази глава ще предполагаме, че търсените функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ на времето t трябва да определим от система от диференциални уравнения, в които времето явно не участва. Такава система обикновени диференциални уравнения ще наричаме автономна система. Понякога тя бива наричана динамична система или консервативна система. При скаларен запис една нормална автономната система от първи ред има вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ &\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

С използването на векторни означения записът е по кратък

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.1.1}$$

Напомняме, че

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ще отбележим, че произволна нормална неавтономна система

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{3.1.2}$$

от n уравнения можем да сведем към автономна, като увеличим броя на търсените функции с единица, полагайки $x_{n+1} = t$. Новата система за неизвестните $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$

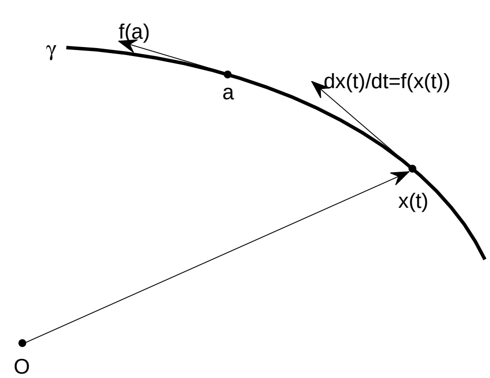
$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = f_1(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
&\dot{x}_n = f_n(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n) \\
&\dot{x}_{n+1} = 1
\end{aligned}$$

е очевидно автономна.

По-нататък ще предполагаме, че функциите в дясната страна на автономната система притежават непрекъснати частни производни от първи ред в областта $G \subset \mathbb{R}^n$ от n-мерното пространство, в която разглеждаме автономната система.

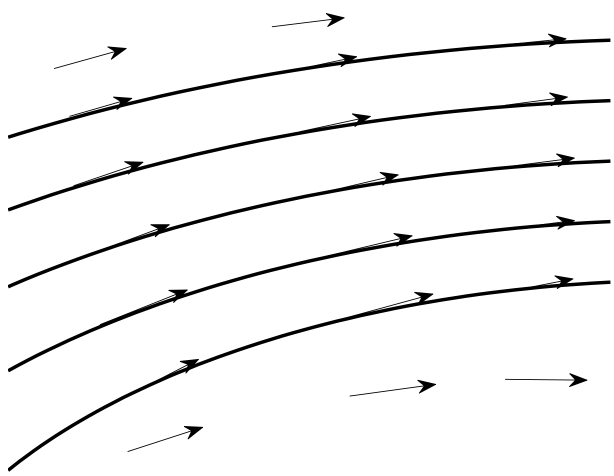
3.1.2 Геометрична и механична интерпретация

Да предположим, че $x = \varphi(t),\ t \in \Delta$ е решение на автономната система. Множеството от точките $\gamma = \{x : x = \varphi(t),\ t \in \Delta\}$ е една крива в n-мерното пространство (мислете си за по-просто, че n е равно на 2 или 3). С нарастване на времето точката $\varphi(t)$ приема различни положения върху кривата. Можем да си мислим, че решението описва движението



Фигура 3.1: Трактория на движението.

на точка върху кривата. Векторът $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$ е допирателен към кривата в точка $x = \varphi(t)$ и представлява моментната скорост. От системата имаме връзката $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$, която показва, че дясната страна на системата $f(a)$ е векторът на скоростта, с която точката движеща се по кривата γ, трябва да премине през точка $a \in G$. Дясната страна $f(x)$ е вектор определен еднозначно за всяка точка x от областта G. В подобни случаи говорим, че дясната страна определя в областта G векторно поле. От



Фигура 3.2: Движение по различни траектории.

казаното следва, че векторната функция $\varphi(t)$ е решение на автономната система само ако кривата γ е такава, че за всяка точка от нея допирателният вектор е този, определен от векторното поле (дясната страна).

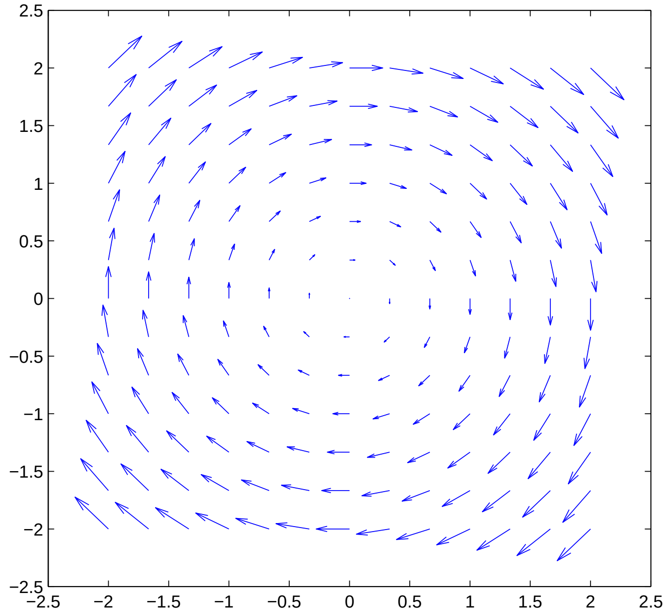
Ако използваме езика на механиката, описанието е още по точно. Векторната функция $x = x(t)$ е решение на автономната система, ако движението по кривата γ става по такъв начин, че през дадена точка преминаваме с предписаната от векторното поле скорост. Казано по друг начин, автономната система описва движение на точка (или множество от точки, непрекъсната среда) по такъв закон, при който през дадена точка от пространството можем да преминаваме само с предписана скорост.

За автономната система

$$\dot{x} = y \tag{3.1.3}$$

$$\dot{y} = -x. \tag{3.1.4}$$

имаме следната картина на векторното поле



Фигура 3.3: Картина на векторното поле.

Кодът, който при използването на MatLabсъздава картината с изображението на векторното поле, се дава в следния листинг

```
[x, y] = meshgrid(-2:1/3:2, -2:1/3:2);
xd = y; yd= -x;
quiver(x,y,xd,yd)
```

Автономната система описва такъв закон на движение, който не се променя с времето, тъй като времето явно не участва в записа на системата и връзката между променливите и техните производни не се променя. Това можем да интерпретираме и така: Законът на движение не се изменя с времето, защото няма външно въздействие, т.е. движението с е извършва автономно. Оттук идва и названието автономна система.

Автономните системи възникват при описанието на процеси и явления от различни области на познанието. Представете си, че наблюдаваме движение на частица (малък плаващ обект) върху водната повърхност на речно течение. Обикновено дори за големи интервали от време това течение е постоянно (стационарно, без изменения). Наблюденията ни показват, че движението на частицата е такова, че през дадена точка преминаваме винаги с една и съща скорост. Можем да експериментираме като пускаме многократно плаваща частица от една и съща или различни начални точки. Този тип движение на частици върху водната повърхност води до модела описван като стационарно течение на флуид в равнината.

Лесно можем да си представим и тримерни стационарни течения на флуид, т.е. течения, описвани с автономни системи. В редица случаи системи от по-висок ред се свеждат до автономна след подходящо полагане, което ще видим по-нататък като разглеждаме различни математически модели.

3.1.3 Основни понятия

С механичната интерпретация са свързани основните понятия при автономните системи. Кривата, по която се движи дадена точка наричаме обикновено траектория. Математическият термин е фазова траектория или фазова крива. Тук фаза се интерпретира като състояние, положение. За всяка точка $x \in G$ автономната система определя фазова скорост $f(x)$. Фазовата траектория се характеризира с посоката на движение по нея при нарастване на времето и тя е съгласувана с посоката на фазовата скорост. Посоката на движение върху траекторията указваме със стрелка. От теоремата за съществуване и единственост на решението на автономна система можем да заключим, че през всяка точка от областта минава еднозначно определена фазова траектория, т.е. областта е "изтъкана"от фазови траектории.

Фазово пространство наричаме множеството от всевъзможните стойности на x за разглежданата автономна система, в нашия случай това е областта G.

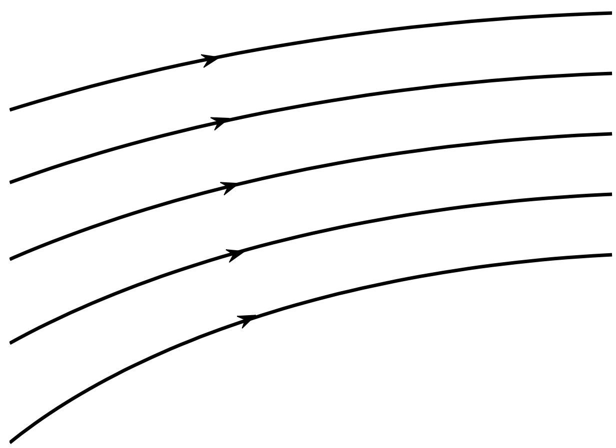
Фазов портрет ще наричаме съвкупността от всевъзможните фазови траектории. Разбира се, на картината представяща фазовия портрет е достатъчно да изобразим само краен брой фазови траектории, за да получим задоволителна представа за него.

Както ще се убедим по-нататък фазовият портрет на автономната системата

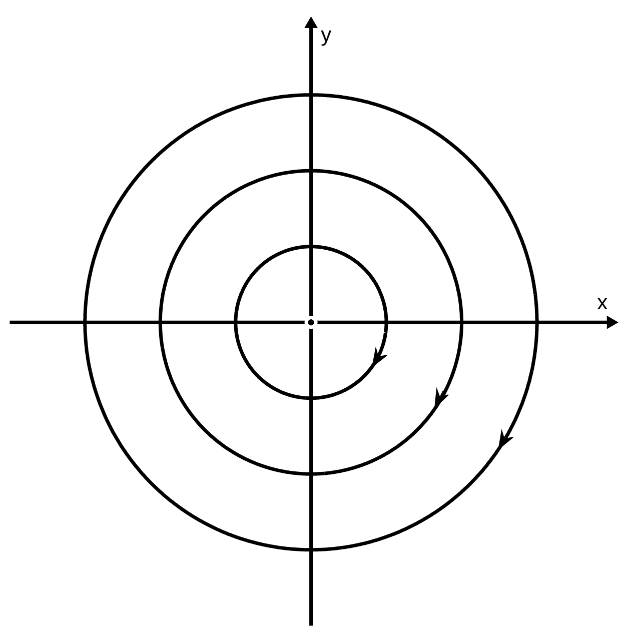
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

изглежда така

Най-простият тип движение е състоянието на покой, при което във всеки момент се намираме в една и съща точка $a \in G$, т.е. $x(t) = a$ за всяко t. Естествено в такъв случай скоростта на движение е нулева, т.е. $\dot{x}(t) = 0$. Ако този тип движение се описва от нашата автономна система, то имаме $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(a)$. Ако $f(a) = 0$, то очевидно $x(t) \equiv a$ е



Фигура 3.4: Фазов портрет.



Фигура 3.5: Фазов портрет на системата $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$.

решение на автономната система. В примерите за автономно движение от механиката в състояние на покой се намираме в точка, която е положение на равновесие.

Дефиниция 3.1.1 *Казваме, че точката* $a \in G$ *е положение на равновесие за автономната система, ако* $f(a) = 0$.

3.1.4 Класификация на фазовите траектории на една автономна система

Ако ползваме механичната интерпретация и автономността на движението (без външно въздействие) описвано с автономна система, можем да се убедим, че:

Ако две фазови траекории имат обща точка, те съвпадат.

Ако една фазова траектория съдържа положение на равновесие, то тя съвпада с положението на равновесие.

Ако една фазова траектория се самопресича, то тя е затворена гладка крива с ненулев допирателен вектор, съответстваща на периодично движение по кривата.

И така, фазовият портрет на една автономна система се състои от фазови траектории само от следните три вида:

1) положение на равновесие,

2) отворена гладка крива,

3) затворена гладка крива, съответстваща на периодично движение.

Горните изводи могат без затруднение да бъдат доказани и формално.

3.1.5 Фазови портрети на линейните автономни системи в равнината

Всяка линейна автономна система е линейна система с постоянни коефициенти. В двумерния случай тя има вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_1. \end{aligned} \qquad (3.1.5)$$

или при векторни означения $\dot{x} = Ax + b$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Ще разгледаме само така наречените неизродени случаи, при които фазовият портрет запазва вида си, ако малко променим коефициентите.

Основното ни предположение е, че матрицата A е неособена, т.е. $\det A \neq 0$, което ни осигурява, че линейната система

$$Ax + b = 0, \text{ т.е. } \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_1 = 0 \end{array} \right. ,$$

има единствено решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ и следователно единствено положение на равновесие в точка (c_1, c_2).

Това ни дава възможност да запишем системата във вида

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}(x_1 - c_1) + a_{12}(x_2 - c_2) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(x_1 - c_1) + a_{22}(x_2 - c_2) \end{array}, \text{ т.е. } \dot{x} = A(x - c). \tag{3.1.6}$$

След полагането $y = x - c$, т. е. $y_1 = x_1 - c_1$, $y_2 = x_2 - c_2$, тъй като $\dot{y} = \dot{x}$, за новите търсени функции y_1 и y_2 получаваме системата $\dot{y} = Ay$ с положение на равновесие точка $(0, 0)$. Ако познаваме фазовия портрет за тази система, то фазовият портрет на първоначалната система ще се получи с транслацията $x = y + c$.

Затова без да ограничаваме общността ще разглеждаме само случая на хомогенна линейна система

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.1.7}$$

Формулите за решенията на системата имат различен вид, в зависимост от собствените числа λ_1 и λ_2 на матрицата A, които определяме от уравнението

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0, \tag{3.1.8}$$

което е квадратно уравнение за λ с реални коефициенти. То има два реални корена λ_1 и λ_2 или два комплексно спрегнати корена λ_1 и $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Тъй като $\det A \neq 0$ е свободният член в уравнението, то не може да има равен на нула корен.

Ще разгледаме два основни случая:

А) собствените числа λ_1 и λ_2 на матрицата A са реални и различни,

Б) собствените числа на матрицата A са комплексно спрегнати.

А. Реални собствени числа

Собствените вектори

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \end{pmatrix} \text{ и } e_2 = \begin{pmatrix} e_2^1 \\ e_2^2 \end{pmatrix}$$

съответстващи на собствените числа λ_1 и λ_2 са линейно независими и решението на системата се записва във вида

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2. \tag{3.1.9}$$

Нека y_1 и y_2 са координатите на точка x спрямо новия базис образуван, от векторите e_1 и e_2, т.е. $x = y_1 e_1 + y_2 e_2$, което е еквивалентно на въвеждането на нови променливи y_1 и y_2 чрез неособената линейна смяна

$$\begin{array}{l} x_1 = y_1 e_1^1 + y_2 e_2^1 \\ x_2 = y_1 e_1^2 + y_2 e_2^2 \end{array}. \tag{3.1.10}$$

Новите координати $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на точка $x(t)$ от решението тогава очевидно се задават като

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t},\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{3.1.11}$$

което ни позволява лесно да съобразим какъв е фазовият портрет в координати y_1 и y_2. Той очевидно е симетричен спрямо осите. и затова е достатъчно да го получим най-напред само в първи квадрант, т.е. при $C_1,\ C_2 \geq 0$.

Случай А.1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, Устойчив възел

Положението на равновесие $(0,\ 0)$ получаваме при $C_1 = C_2 = 0$. При $C_1 > 0$ и $C_2 = 0$ фазовата траектория е положителната полуос y_1, а при $C_1 = 0$ и $C_2 > 0$ фазовата траектория е положителната полуос y_2. Нека $C_1,\ C_2 > 0$. Тогава като изключим параметъра t получаваме, че фазовата трактория има вида

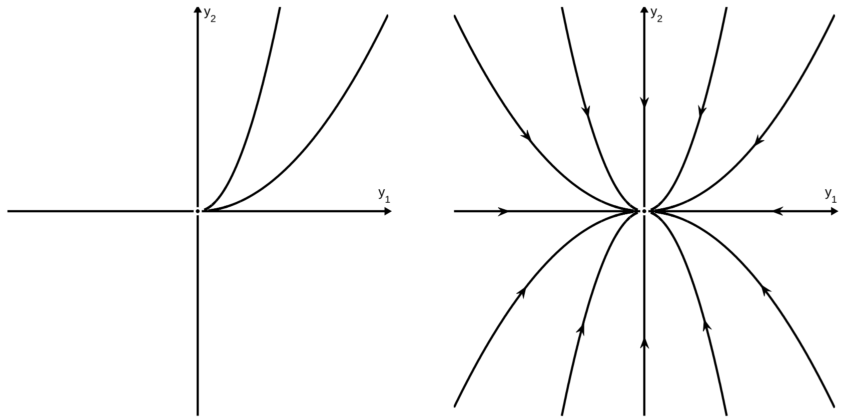
$$y_2 = C {y_1}^{\mu},\ \text{където}\ \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{3.1.12}$$

Това е уравнение на парабола, но в разглеждания случай, фазовата траектория е само онази част от нея, която се съдържа в първи квадрант и не включва точка $(0,\ 0)$. Тъй като $\mu > 1$, параболата 3.1.12 се допира до оста y_1 (при $\mu < 1$ се допира до оста y_2), в което можем да се убедим и като пресметнем, че

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_2}{y_1} = \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

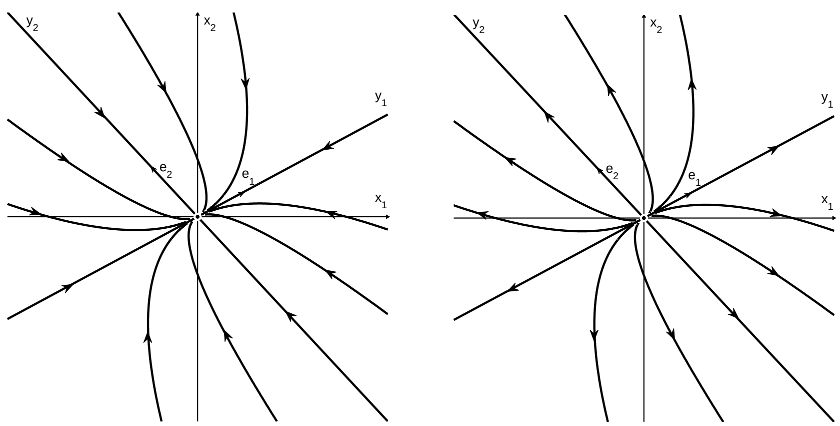
Пълната картина получаваме от симетрията на фазовия портрет чрез отражения относно координатните оси.

Пак от фомулите 3.1.11 се вижда, че по всички фазови трактории при $t \to \infty$ се движим към началото на координатната система. Посоката на движение по траекториите указваме със стрелки.



Фигура 3.6: Фазов портрет възел в y координати.

В старите координати картината е подобна, но деформирана. Тя е образ на вече получената чрез неособеното линейно изображение 3.1.10, като образите на параболите се допират до правата през началото, имаща направлението на вектора e_1. Полученият фазов портрет наричаме



Устойчив възел Неустойчив възел

Фигура 3.7: Фазов портрет на възел в старите координати.

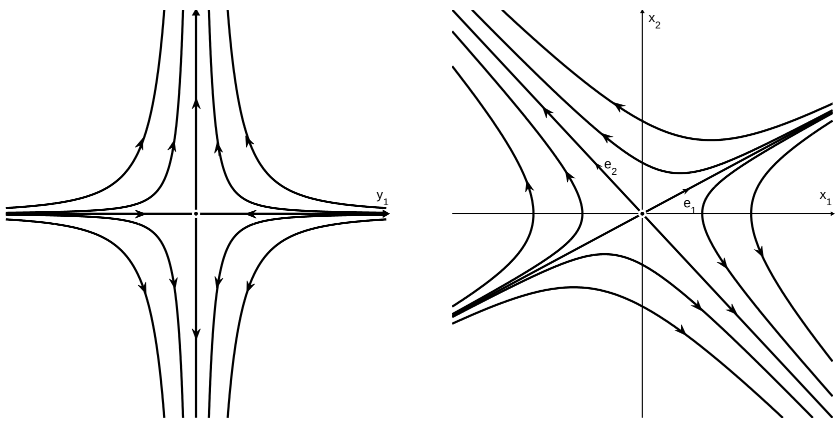
устойчив възел, тъй като положението на равновесие $(0,\,0)$ е устойчиво. От която и точка да тръгнем, за решението $x(t)$, съответстващо на фазовата траектория имаме $x(t) \to (0,\,0)$ при $t \to \infty$.

Случай A.2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, Неустойчив възел

Фазовите криви са същите, като сега по тях се движим като при нарастване на t се отдалечаваме от началото. Фазовият портрет наричаме неустойчив възел, а положението на равновесие неустойчиво, тъй като по всяка от траекториите при нарастване на времето бягаме от него.

Случай А.3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, Седло

Сега имаме $\mu < 0$ и при $C_1, C_2 \neq 0$ съгласно 3.1.12 траекториите имат вид на "хиперболи" с асимптоти координатните оси. Посоките на движение върху полуосите са съгласувани с тези по хиперболите и при нарастване на времето $y_2(t)$ расте, а $y_1(t)$ намалява. Фазовият портрет наричаме седло. Положението на равновесие в случая на седло е неустойчиво, защото само по полуосите y_1 наближаваме началото. По която



Фигура 3.8: Фазов портрет на седло.

и друга траектория да тръгнем, дори първоначално да приближаваме началото, при нарастване на времето започваме да се отдалечаваме неограничено от него.

Б. Комплексни собствени числа

Собствените числа λ_1 и λ_2 са комплексно спрегнати. Да въведем означенията $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.Нека e е собственият вектор на матрицата A, съответстващ на собственото число λ_1, т.е. $A\,e = \lambda_1\,e$. Като вземем комлексно спрегнатите страни на това равенство имаме $A\,\overline{e} = \overline{\lambda_1}\,\overline{e}$, т.е. $\overline{e}$ е собственият вектор съответстващ на $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Нека $e = f_1 - if_2$ и $\overline{e} = f_1 + if_2$, където векторите f_1 и f_2 са реални. Те са линейно независими, защото e и $\overline{e}$ са линейно независими (като собствени вектори съответстващи на различни собствени значения). Една фундаментална система от комплексни решения е

$$z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}\,(f_1 - if_2),\ \overline{z(t)} = e^{(\alpha-i\beta)t}\,(f_1 + if_2).$$

За да получим реална фундаментална система, съгласно рецептата взимаме реалната и имагинерната част на $z(t)$. Тъй като

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

получаваме реалната фундаментална система

$$u(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t f_1 + \sin\beta t f_2),\ v(t) = e^{\alpha t}(\sin\beta t f_1 - \cos\beta t f_2)$$

Всички реални решения получаваме по формулата

$$x(t) = C_1 u(t) + C_2 v(t)$$

и след очевидни преобразувания

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)f_1 + e^{\alpha t}(C_1\sin\beta t - C_2\cos\beta t)f_2.$$

Въвеждаме нови координати y_1 и y_2, така че $x = y_1 f_1 + y_2 f_2$, и решението на системата представяме във вида

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t),\\ y_2(t) &= e^{\alpha t}(C_1\sin\beta t - C_2\cos\beta t). \end{aligned}$$

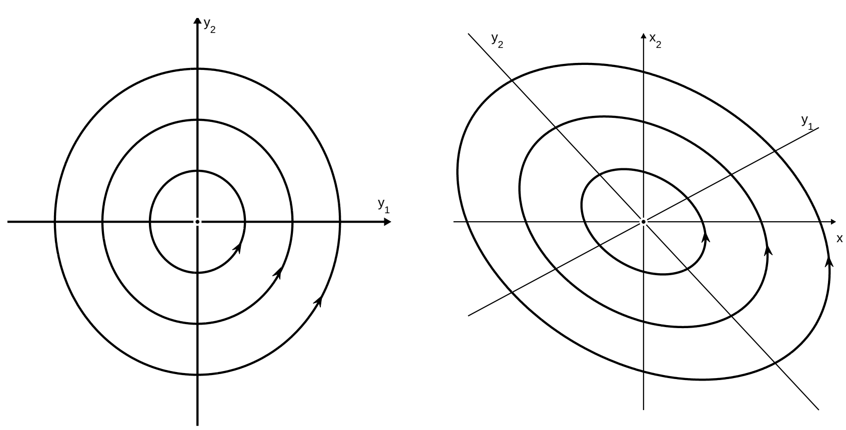
След полаганията

$$\rho = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \cos\tau = \frac{C_1}{\rho},\ \sin\tau = -\frac{C_2}{\rho},$$

имаме

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \tau),\\ y_2(t) &= \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \tau). \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Сега е лесно да анализираме поведението на фазовите траектории.



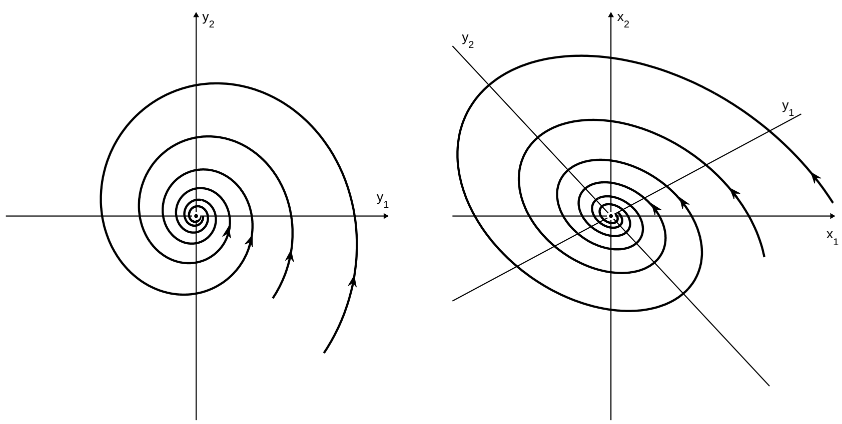
Фигура 3.9: Фазов портрет център.

Случай Б.1. $\alpha = 0$, Център.

При $\alpha = 0$ имаме $e^{0t} = 1$ и според 3.1.13 фазовите траектории са окръжности. Посоката на движение по тях е обратна на движението на часовниковата стрелка при $\beta > 0$ и по посока на движението на часовниковата стрелка при $\beta < 0$. При връщането към старите координати картината се деформира, при което окръжностите се преобразуват в елипси. Този случай е изроден, защото при малко изменение на коефициентите на системата веднага имаме $\alpha \neq 0$ и попадаме в някой от следващите два случая.

Случай Б.2. $\alpha < 0$, Устойчив фокус.

Сега отново обикаляме около положението на равновесие, но разстоянието до него намалява при нарастване на времето експоненциално съгласно 3.1.13, като $y(t)$ клони към началото при $t \to \infty$. Фазовите тра-

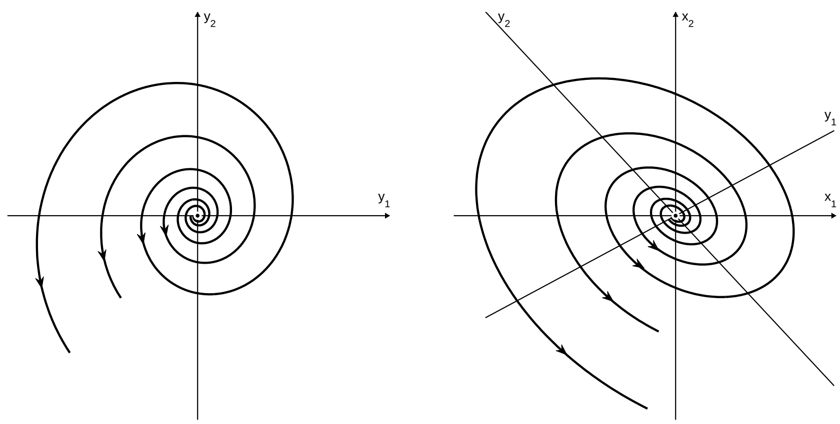


Фигура 3.10: Фазов портрет на устойчив фокус.

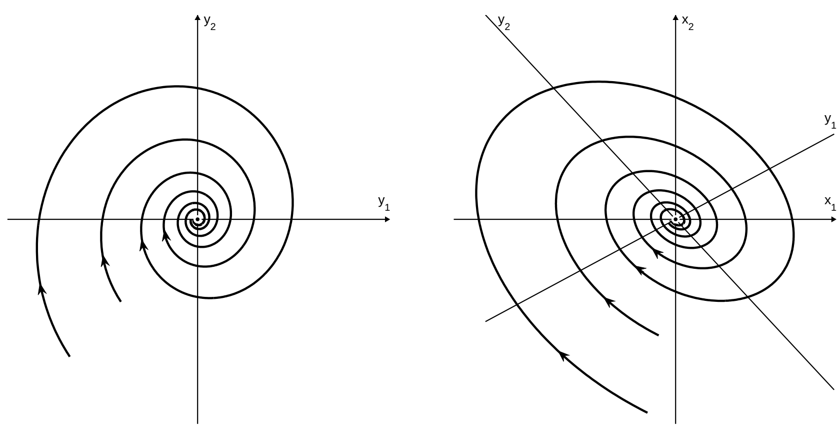
ектории са спирали, които се "събират (фокусират) в началото". Оттук идва и названието на фазовия портрет. В старите координати картината е аналогична, но се деформира при линейната смяна на променливите.

Случай Б.3. $\alpha > 0$, Неустойчив фокус.

Фазовият портрет е аналогичен на предишния, но началото е неустойчиво положение на равновесие, защото по фазовите траектории бягаме от началото. В старите координати знаем вида на фазовите криви. Тъй като ориентацията може да се промени при линейната смяна, то посоката на движение върху фазовите траектории определяме, като намерим един допирателен вектор върху някоя от кривите, например допирателният вектор в точка $(1, 0)$, защото лесно се пресмята чрез дясната страна на системата. Той е (a_{11}, a_{21}) и сочи нагоре, при $a_{21} > 0$, следователно положението на равновесие обикаляме обратно на часовниковата стрелка, а при $a_{21} < 0$ сочи надолу и началото обикаляме по часовниковата стрелка. Като изхождаме от проведените разглеждания, благодарение на явните формули за решенията на линейната система, познаваме вида на фазовия портрет само като анализираме собствените числа на матрицата на



Фигура 3.11: Фазов портрет неустойчив фокус.



Фигура 3.12: Фазов портрет на устойчив фокус с посока на въртене по часовниковата стрелка.

системата, и можем да го изобразим приблизително. За определяне на посоката на движение по фазовите криви използваме допирателен ветор върху някоя от кривите, например както е описано по-горе.

Представа за фазовия портрет можем да получим и като използваме възможностите на MatLab. Можем да изобразим векторното поле на разглежданата автономна система, или да решим числено задача на Коши за системата с начални данни в достатъчно много точки и след това, използвайки богатите графични възможности на MatLab, да изобразим едновременно на екрана получените фазови траектории.

3.1.6 Фазов портрет на нелинейна автономна система

Може да бъде доказано, че в околност на точка, която не е положение на равновесие, фазовите траектории са сноп непресичащи се гладки криви, получени с непрекъсната (дори гладка) деформация от сноп успоредни прави.

В разгледаните примери се убедихме, че поведението на фазовите траектории в околност на положение на равновесие е особено важно.

В околност на положение на равновесие, което е изолирано, при нелинейните автономни системи обикновено използваме линеаризация.

Ще предположим, без да ограничаваме общността, че a е единственото положение на равновесие за автономната система 3.1.1. Като развием по Тейлор десните страни на системата до линейните членове от първи ред и използваме, че $f(a) = 0$, получаваме

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = f_1(x) = f_{1x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f_{1x_n}(a)(x_n - a_n) + o(|x - a|),\\
&\vdots\\
&\dot{x}_n = f_n(x) = f_{nx_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f_{nx_n}(x_n - a_n)(a) + o(|x - a|).
\end{aligned}$$

където с $o(|x-a|)$ е означена някаква функция, например $\varphi(x)$, различна за всеки ред, за която $\frac{\varphi(x)}{|x-a|} \to 0$ при $|x - a| \to 0$, т. е. при $x \to 0$. Нелинейната система 3.1.1 записваме накратко при векторни означения във вида

$$\dot{x} = A(x - a) + o(|x - a|), \tag{3.1.14}$$

където

$$A = \begin{pmatrix} f_{1x_1}(a) & \ldots & f_{1x_n}(a) \\ \vdots & & \\ f_{nx_1}(a) & \ldots & f_{nx_n}(a) \end{pmatrix}$$

е матрицата на Якоби.

Близо до положението на равновесие $o(|x - a|)$ намалява по бързо от линейните членове и това ни дава основание да предполагаме, че вместо нелинейната листема можем да изучим така наречената линеаризирана система

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = f_{1x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f_{1x_n}(a)(x_n - a_n),\\
&\vdots\\
&\dot{x}_n = f_{nx_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f_{nx_n}(a)(x_n - a_n)
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

или при векторни означения

$$\dot{x} = A(x - a). \tag{3.1.16}$$

Както видяхме в случая на две независими променливи, след полагането $y = x - a$ можем да разлеждаме линейната система с положение на равновесие в началото

$$\dot{y} = Ay.$$

Очакваме фазовият портрет на линеаризираната система 3.1.16 да ни даде представа за фазовия портрет на нелинейната 3.1.14. Това със сигурност е така, ако всички собствени числа на матрицата на линеаризираната система са с различни от нула реални части (Теорема на Хартман – Гробман). В околност на положението на равновесие фазовият портрет на на автономната система се получава от този на линеаризираната система с непрекъсната деформация.

Ако имаме няколко различни положения на равновесие фазовият портрет може да изглежда доста сложно, както ще се убедим от примери по-нататък.

3.2 Устойчивост

3.2.1 Основни понятия

При гладка дясна страна решенията на системите обикновени диференциални уравнения зависят непрекъснато, дори гладко от началните условия и параметри. За приложенията е особено важно едно устройство да бъде създадено така, че да работи устойчиво в продължение на дълго време. Това означава, че при малки или случайни малки изменения на параметрите на устройството неговият устойчив режим на работа се запазва.

Пренасянето на тези изисквания за автономни системи води до следната дефиниция на устойчиво положение на равновесие.

Дефиниция 3.2.1 *Казваме, че a е устойчиво положение на равновесие на автономната система $\dot{x} = f(a)$, ако за всяка околност U на a съществува такава околност V, че решението $x = x(t, x_0)$, удовлетворяващо началното условие $x(t_0, x_0) = x_0$, има свойствата:*

1. *Решението $x = x(t, x_0)$ е дефинирано за всички $t \geq t_0$.*
2. *Решението остава в V при $t \geq t_0$, т.е. $x(t, x_0) \in V$ за всяко $t \geq t_0$.*

Положението на равновесие се нарича асимптотично устойчиво, ако е устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0.$$

3.2.2 Устойчивост по линейно приближение

Най-често се използва критерият за устойчивост, при който от устойчивостта на положението на равновесие за линеаризираната система 3.1.16, можем да заключим, че положението на равновесие е устойчиво и за нелинейната автономна система.

Теорема 3.2.1 (Ляпунов, за устойчивост) *Ако a е положение на равновесие за автономната система и всички собствени числа на якобиевата матрица*

$$\begin{pmatrix} f_{1x_1}(a) & \dots & f_{1x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{nx_1}(a) & \dots & f_{nx_n}(a) \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

имат отрицателни реални части, то a е асимптотично устойчиво положение на равновесие.

Теорема 3.2.2 (Ляпунов, за неустойчивост) *Ако a е положение на равновесие за автономната система и якобиевата матрица 3.2.1 има поне едно собствено число с положителна реална части, то a е неустойчиво положение на равновесие.*

3.3 Модели, водещи до системи нелинейни ОДУ

3.3.1 Популационен модел на Волтера (модел "хищник-жертва")

Нека в едно езеро има два вида риба: A, който се изхранва с растения, намиращи се в изобилно количество, и B (хищникът), който преживява, изяждайки (жертвата). Ще построим груб модел на взаимодействието между A и B.

Нека $x(t)$ е популацията на A, а $y(t)$ е тази на B. Допускаме, че A живее сравнително дълго и се размножава бързо, ако няма врагове. Тогава за време δt имаме популационен прираст

$$ax\delta t, a > 0$$

поради раждане и "естествена"смърт, а също така отрицателен прираст

$$-cxy\delta t, c > 0$$

породен от изяждането на A от B (считаме, че броят на изядените за това време е пропорционален на броя на срещите между A и B). Тогава нетният популационен прираст на A, δx, е

$$\delta x = ax\delta t - cxy\delta t.$$

Пускайки $\delta t \to 0$, получаваме

$$\dot{x} = ax - cxy. \tag{3.3.1}$$

Да предположим сега, че в отсъствие на жертви броят на умиращите от глад хищници е по-голям от този на раждащите се, а също така, че положителният прираст на B е пропорционален на броя на срещите с . Това ни дава

$$\dot{y} = -by + xyd, \tag{3.3.2}$$

където $b > 0$ и $d > 0$.

Уравненията (3.3.1-3.3.2) образуват нелинейна система, която по форма е същата като системата описваща химична реакция, получена от Лотка. Системите от този вид често се наричат системи на Лотка-Волтера.

Нека сега нарисуваме фазовия портрет в равнината x, y. Интересуваме се само от първи квадрант $x \geq 0, y \geq 0$. Равновесните точки са където

$$ax - cxy = 0, -by + xyd = 0,$$

т. е. това са точките $(0, 0)$ и $(b/d, a/c)$. Фазовите криви се дават с уравнението

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b + xd)y}{(a - cy)x},$$

на което променливите се разделят и след интегриране се получава

$$\int \frac{a - cy}{y} dy = \int \frac{-b + xd}{x} dx$$

или

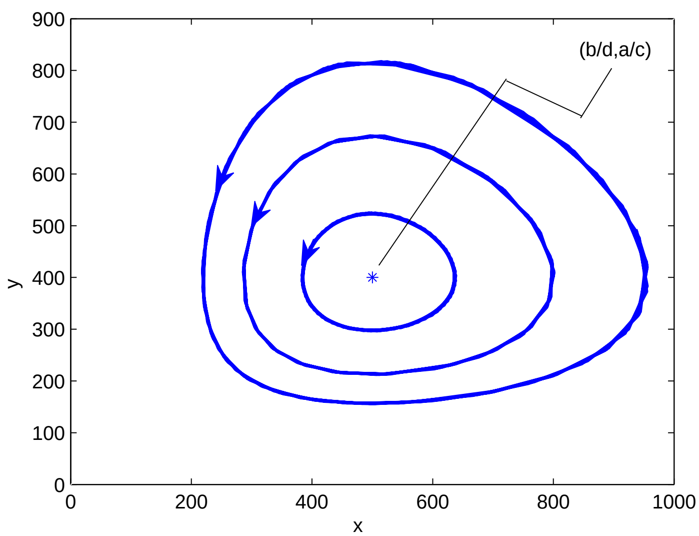
$$a \ln y + b \ln x - cy - xd = 0,$$

където C е произволна константа. Това е фамилия от затворени криви с център равновесната точка $(b/d, a/c)$.

Ще построим конкретен фазов портрет на системата, решавайки с Matlab една такава система при различни начални условия:

```
%Задаване на коефициентите на системата
a=0.8; b=1; c=0.002; d=0.002;
%Трикратно решаване на системата при различни начални стойности
```

```
F=@(t,y)[a*y(1)-c*y(1)*y(2); -b*y(2)+d*y(1)*y(2)];
[T, Y] = ode23s(F,[0 50],[500;525]);
[t, y] = ode23s(F,[0 50],[800;400]);
[tt, yy] = ode23s(F,[0 50],[300;700]);

%Изобразяване на равновесната точка
hold on;
plot(b/d,a/c,'Marker','*');
%Изобразяване на трите фазови траектории
plot(Y(:,1), Y(:,2),'LineWidth',1.5);
plot(y(:,1), y(:,2),'LineWidth',1.5);
plot(yy(:,1), yy(:,2),'LineWidth',1.5)
```

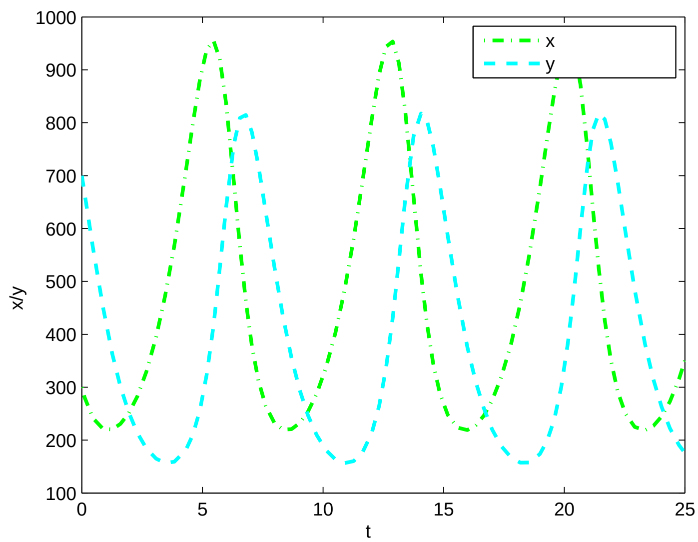


Фигура 3.13: Типичен фазов портрет на системата "хищник-жертва".

На фиг.3.13 е показан как изглежда построеният фазов портрет. Посоката на траекториите може да се определи от знака на $\dot{x}$ в някоя точка, може дори върху $y = 0$. Това определя посоките във всички останали точки по непрекъснатост. От (3.3.1) и (3.3.2) виждаме, че изоклини с нулев наклон имаме при $\dot{y} = 0$, това означава върху правите $y = 0$ и $y = xd/b$, а изоклини с безкраен наклон - при $\dot{x} = 0$, т. е. върху правите $x = 0$ и $y = ax/c$.

Тъй като траекториите са затворени, варирането на $x(t)$ и $y(t)$, започвайки от произволна начална численост на популациите, е периодично, като максималната численост на A е около четвърт период преди тази на

B. Зависимостта на двете популации от времето е показана на фиг. 3.14. Изяждайки A, B започва да процъфтява, след което обаче числеността x на популацията A намалява, което от своя страна евентуално предизвиква спад на популацията B. Недоимъкът на хищници тогава води до възраждане на A и така цикълът започва отначало. Ако настъпи внезапна промяна в текущите обстоятелства поради външни причини, като например лош сезон за растенията и др., тогава прескачаме на друга фазова крива от фамилията, но така или иначе не се очаква равновесно състояние за популациите или тяхното изчезване. Това е възможно, ако конструираме друг модел.

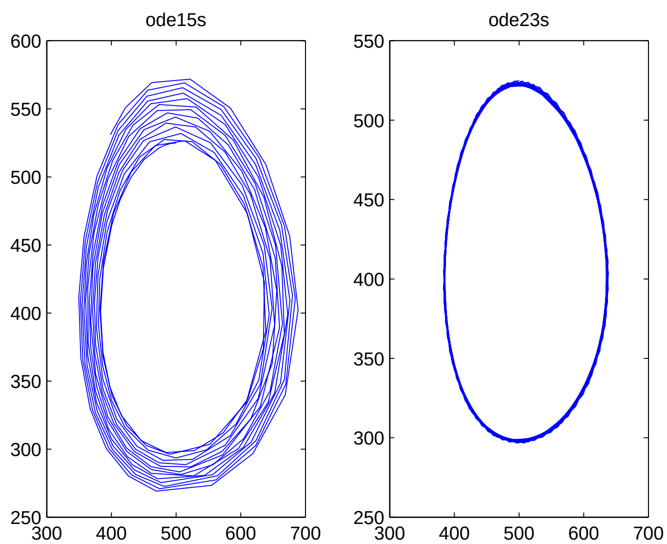


Фигура 3.14: Зависимост на броя на хищниците и жертвите от времето.

В заключение ще отбележим, че различните решатели на базата на числени методи в Matlab в зависимост от конкретните свойства на задачата е възможно да дадат съвсем различна точност. В нашия конкретен модел ние използвахме решателя *ode23s*, който се оказва подходящ за разрешаване на системи тип Лотка-Волтера. Долу е показан сравнителен пример за решение на системата с използване на *ode15s* и с използване на *ode23s*:

```
function population
Y0 = [500; 525];
[T, Y] = ode15s(@LotVol, [0 100], Y0);
subplot(1, 2, 1); plot(Y(:,1), Y(:,2)); title('ode15s')
[T, Y] = ode23s(@LotVol, [0 100], Y0);
```

```
subplot(1, 2, 2); plot(Y(:,1), Y(:,2)); title('ode23s')
function F = LotVol(t, y)
F = [0.8*y(1)-0.002*y(1)*y(2); -1.0*y(2)+0.002*y(1)*y(2)];
```



Фигура 3.15: Решение на системата Лотка-Волтера с използване на *ode15s* и с използване на *ode23s*.

3.3.2 Модели на бойни действия

По времето на първата световна война английският инженер и математик Ф. У. Ланкастър е построил няколко математически модела за водене на въздушни сражения. След това тези модели били обобщени и разпространени за случаи на бойни действия на регулярни войски, партизански съединения, а също така на първите и вторите едновременно. Тези три модела ще разгледаме долу.

И така, нека в бойните действия участват две противоборстващи страни x и y. Техният числен състав в момента t, където t се измерва в дни, ще означим с $x(t)$ и $y(t)$ съответно. При построяването на моделите практически е трудно да се отчетат много критерии, като степен на бойна готовност и въоръженост, ниво и опит на командирския състав, морален дух и много, много други. Затова нашите модели ще се основават на няколко предположения, без да могат да отразят редица реални фактори.

Ще предположим, че $x(t)$ и $y(t)$ се изменят непрекъснато и, нещо повече, че са диференцируеми по времето функции. Разбира се, това е упростяване на реалната ситуация, доколкото $x(t)$ и $y(t)$ са цели числа. Но заедно с това е ясно, че при достатъчно голям числен състав на войските увеличаването на числеността с един или двама души ни дава от практическа гледна точка безкрайно малка величина в сравнение с наличния вече състав. Освен това ще въведем няколко фактора, които ще ни позволят да опишем скоростта на изменение на числеността на противоборстващите страни. Ще означим с OLR величината, изразяваща скоростта, с която страната x търпи загуби от болести и други фактори, не свързани с непосредствените бойни действия. Нека CLR е скоростта, с която страната x търпи загуби от непосредствените стълкновения в боя срещу страната y. И накрая с RR ще означим скоростта на пристигане на подкрепления към x. Тогава е ясно, че общата скорост на изменение на $x(t)$ се дава с уравнението

$$\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} = -(OLR + CLR) + RR. \tag{3.3.3}$$

Аналогично уравнение е в сила и за $y(t)$.

Нататък ще използваме следните означения:a, b, c, d, g, h — неотрицателни константи, характеризиращи степента на влияние на различните фактори за загубите на жива сила у двете страни x и y; $P(t)$ и $Q(t)$ — членове, отчитащи попълването с подкрепления на съответните сили; x_0 и y_0 — численият състав на x и y преди началото на бойните операции. Ще изложим трите модела, построени от Ланкастър въз основа на схемата (3.3.3). И в трите модела присъстват членовете $-ax(t)$ и $-dy(t)$, съответстващи на фактора OLR, а също така и членовете $P(t)$ и $Q(t)$, свързани с подкрепленията. Но ние ще обсъждаме различията в моделите, т. е. членовете, отразяващи бойните загуби: от една страна как се интерпретират тези членове и от друга как те влияят на решението.

Модел А: Бойни действия между регулярни войски. Моделът се изписва по следния начин:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} &= -ax(t) - by(t) + P(t),\\
\frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t} &= -cx(t) - dy(t) + Q(t).
\end{aligned}$$

Разглеждайки тази система предполагаме първо, че всяка от противоборстващите страни се намира в зоната на действие на огневите средства на другата страна и второ, че огънят се води само по живата сила, непосредствено участваща в бойните действия. При тези предположения

Ланкастър предлага за войската x да въведе члена $-by(t)$, който да отразява бойните загуби. Коефициентът b тогава ще отразява ефективността на бойните действия на страната y, т. е. това е единица за измерване на средната ефективност на всяка единица бойна сила на страната y. Подобно обяснение може да се даде и на члена $-cx(t)$. Ясно е, че никак не е просто да се изчислят коефициентите на ефективност b и c. Един от начините, който се предлага, е да се разглеждат тези коефициенти във вида

$$b = r_y p_y, c = r_x p_x, \tag{3.3.4}$$

където r_y и r_x са коефициенти на огневата мощ на страните y и x съответно, а p_y и p_x са вероятностите всеки от изстрелите от страните y и x съответно да се окажат точни. Ще забележим, че членовете, които съответстват на бойните загуби в тази система са линейни.

За да разберем как тези членове влияят на изхода на борбата, ще разгледаме по-простия модел, когато няма загуби, не свързани с бойните действия и двете сили не получават подкрепления. В този случай математическият модел се свежда до системата

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} &= -by(t), \\ \frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t} &= -cx(t). \end{aligned}$$

Разделяйки второто уравнение на първото, получаваме

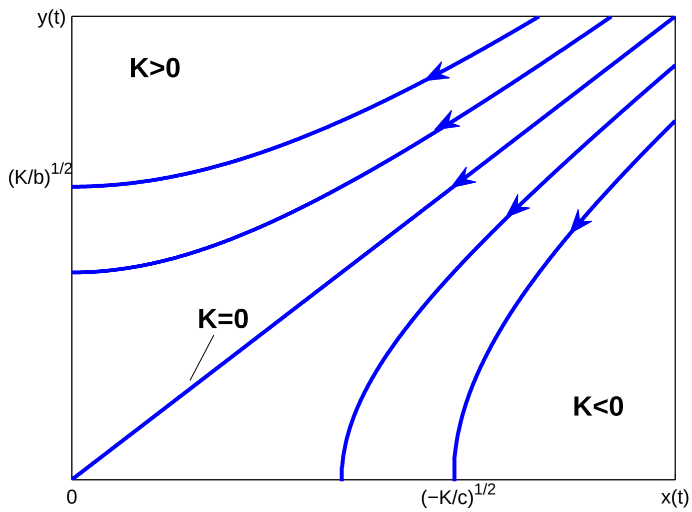
$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{cx}{by}.$$

Интегрирайки последното уравнение стигаме до равенството

$$by^2 - cx^2 = by_0^2 - cx_0^2 := K. \tag{3.3.5}$$

Това уравнение задава хипербола (или двойка прави в случая, когато $K = 0$).

На фиг. 3.16 са изобразени хиперболи за различни стойности на K, при това по очевидни съображения се разглежда само първи квадрант ($x \geq 0, y \geq 0$). Стрелките върху кривите указват посоката на изменение на числеността на силите с течение на времето. От получения резултат и от фиг. 3.16 се вижда, че побеждава страната y (т. е. първа унищожава силите на x) ако $K > 0$, защото в уравнение (3.3.5) променливата y никога не може бъде равна на нула, докато при $y(t) = \sqrt{K/b}$ променливата



Фигура 3.16: Бойни действия между регулярни войски. Съотношението на силите се определя от квадратичен закон.

x се нулира. Следователно за да победят силите y, е необходимо те да се стремят да достигнат ситуация, при която $K > 0$, т. е. когато

$$by_0^2 > cx_0^2.$$

Използвайки равенствата (3.3.4), това условие можем да запишем така:

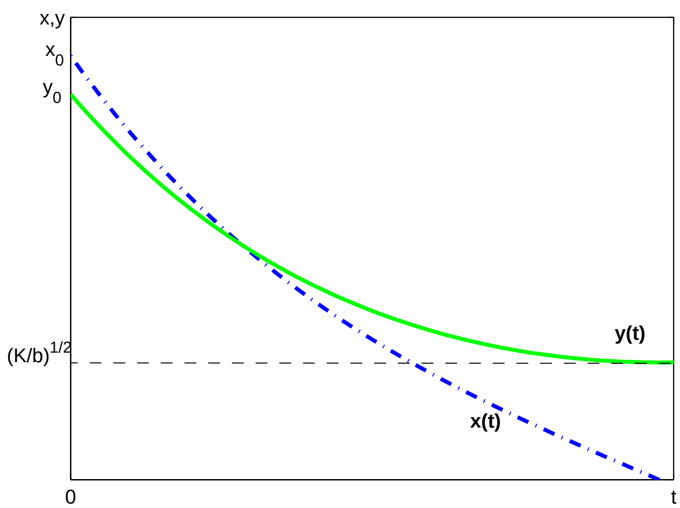
$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x}{r_y}\frac{p_x}{p_y}.$$

Лявата част на това неравенство показва един интересен факт: *изменението в отношението на силите y_0/x_0 дава преимущество на една от страните по квадратичен закон.* (Така например, изменението в отношението на силите от $y_0/x_0 = 1$ до $y_0/x_0 = 2$ дава четирикратно преимущество на y.)

Ще отбележим, че равенството (3.3.5) определя съотношението между двете сили, но не отчита явно времето. Функциите $x(t)$ и $y(t)$ могат да се определят в явен вид и ние ще направим това с Matlab, използвайки *Symbolic Toolbox*:

```
%Параметри на задачата
x0=1100; y0=1000;
b=0.04; c=0.03;
```

```
%Решение в явен (символичен) вид
[x,y]=dsolve('Dx=-b*y','Dy=-c*x','x(0)=x0','y(0)=y0');
%Задаване на конкретни числени стойности
t=0:60;
x=subs(x); y=subs(y);
%Визуализация
plot(t,x,'-.',t,y,'g');
axis([0 55 0 1200]);
```



Фигура 3.17: Функционална зависимост между числеността на силите x и y и времето t в сражения между регулярни съединения.

Както се вижда на получената графика (фиг. 3.17), за победата на силата y не е задължително нейната численост да е по-голяма от противниковата. Изисква се единствено изпълнението на условието $K > 0$.

Модел Б: Бойни действия между партизански съединения. Моделът е описан посредством системата

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} &= -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t),\\ \frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t} &= -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t).\end{aligned}$$

В този случай членовете отразяващи загубите от сражения вече са нелинейни и това се обяснява по следния начин. Нека бойните сили на партизаните с численост $x(t)$ заемат някаква територия R, оставайки невидими за противника. Макар и да държи под огън територията R, противникът не може да знае ефективността на своите действия. При това съвсем е правдоподобно загубите на партизанските подразделения x да са пропорционални от една страна на броя партизани $x(t)$, намиращи се върху R (колкото по-гъсто е населена територията, толкова е по-вероятно "слепите"изстрели да оцелят човек) и от друга страна — на броя противници $y(t)$. По този начин членът, съответстващ на загубите на партизанските съединения x, има вида $-gx(t)y(t)$, където коефициентът на ефективност на бойните действия на страната y е по-труден за оценяване от коефициента b в (3.3.4). Обаче за неговото определяне ние можем да използваме коефициента на огнева мощ r_y, а също така да вземем предвид разсъжденията на Ланкастър, според които вероятността от точен изстрел от страната y е правопропорционална на тъй наречената териториална ефективност A_{ry} на един изстрел от страната y и обратнопропорционална на площта A_x на територията R, заета от силите x. По този начин, вероятните формули за определянето на g и h са следните:

$$g = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}, h = r_x \frac{A_{rx}}{A_y}. \tag{3.3.6}$$

Сега да престъпим вече към анализ на модела по аналогичен начин като при предишния. Отново ще разгледаме упростения модел, когато $a = 0$, $d = 0$, $P(t) \equiv 0$ и $Q(t) \equiv 0$ с цел да фокусираме вниманието си върху влиянието на членовете $-gxy$ и $-hxy$, т. е. интересуваме се от системата

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} &= -gx(t)y(t), \\ \frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t} &= -hx(t)y(t). \end{aligned}$$

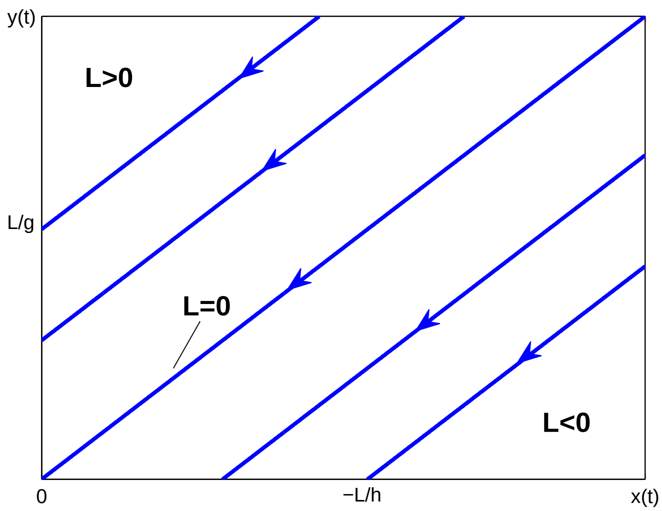
Решението се намира лесно. Разделяме второто уравнение от системата на първото и получаваме

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{h}{g},$$

интегрирането на което ни дава

$$gy - hx = gy_0 - hx_0 := L. \tag{3.3.7}$$

От тука вече се вижда, че ако $L > 0$, то побеждава страната y и ако $L < 0$ - страната x. На фиг.3.18 е дадена геометрична интерпретация на линейната функционална зависимост (3.3.7) при различни стойности на L.



Фигура 3.18: Бойни действия между партизански отряди. Зависимостта между силите е линейна.

Да разгледаме по-подробно ситуацията, при която побеждава например страната y. Тогава, както вече знаем , трябва да е изпълнено неравенството

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{h}{g}.$$

Ако се върнем към формулите (3.3.6), то условието за победа на страната се изразява в следния вид

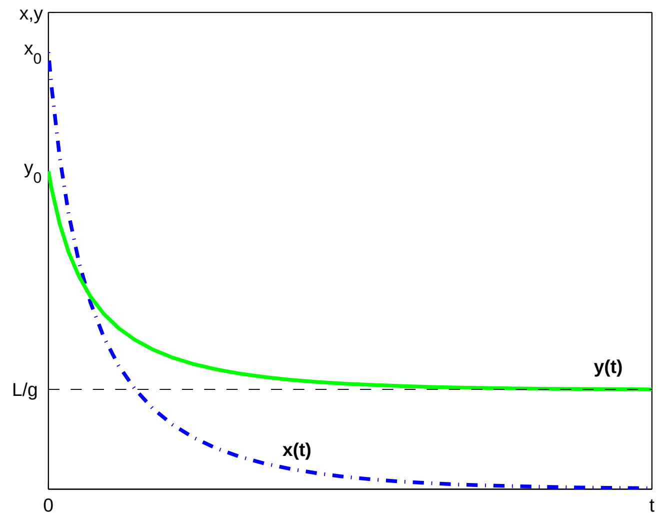
$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{r_x A_{rx} A_x}{r_y A_{ry} A_y}.$$

И така, ние виждаме, че *изменението в отношението на силите* y_0/x_0 *дава преимущество на една от страните по линеен закон.* Освен това отношението между площите на заетите от двата противника територии A_x/A_y също линейно влияе върху преимуществото на едната сила.

Модел B: Бойни действия от смесен тип.

В този модел партизански сили се противопоставят на регулярни части:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} &= -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t),\\ \frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t} &= -cx(t) - dy(t) + Q(t).\end{aligned}$$



Фигура 3.19: Функционална зависимост между числеността на силите x и y и времето t в сражения между партизански съединения.

където $x(t)$ са силите на партизаните, а $y(t)$ - силите на регулярните войски.

Ние отново ще направим упростяващите предположения, че противоборстващите страни не получават подкрепления и не търпят загуби, които не са свързани с непосредствени бойни действия. В този случай имаме диференциалната система

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} &= -gx(t)y(t),\\ \frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t} &= -cx(t).\end{aligned}$$

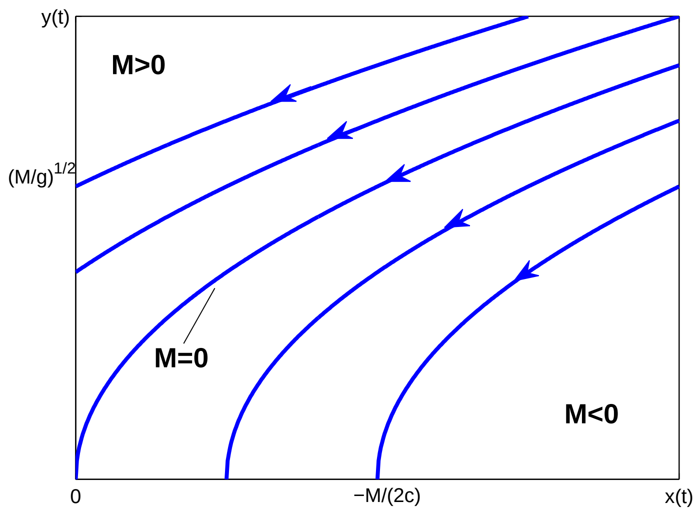
След разделяне на второто уравнение от системата на първото получаваме уравнението

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{c}{gy}.$$

Интегрирайки го в съответните граници, стигаме до съотношението

$$gy^2 - 2cx = gy_0^2 - 2cx_0 := M. \tag{3.3.8}$$

От тука вече се вижда, че ако $M < 0$, то побеждават партизаните, а ако $M > 0$, то те търпят поражение. На фиг. 3.20 са изобразени параболите, определени от уравнението (3.3.8) при различни стойности на M.



Фигура 3.20: Бойни действия между партизански съединения и регулярни войски. Съотношението на силите се определя от параболичен закон.

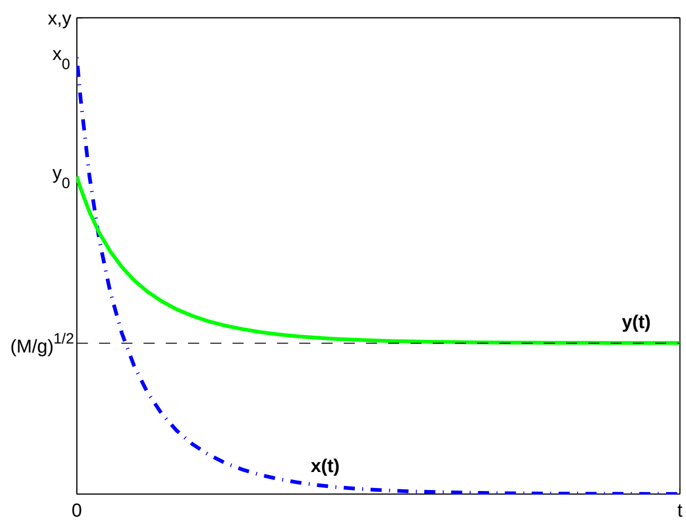
Опитът показва, че регулярните части могат да нанесат поражение на партизанските съединения само в случая, когато отношението y_0/x_0 е значително по-голямо от единица. Основавайки се на равенство (3.3.8) и отчитайки условието $M > 0$, стигаме до извода, че победата на регулярните сили ще бъде гарантирана ако е изпълнено неравенството

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2c}{g}\frac{1}{x_0},$$

което отчитайки формулите (3.3.4) и (3.3.6) може да се запише така:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > 2\frac{r_x}{r_y}\frac{A_x p_x}{A_{ry}}\frac{1}{x_0}.$$

В този модел *изменението в отношението на силите* y_0/x_0 *дава преимущество на една от страните по параболичен закон.*



Фигура 3.21: Функционална зависимост между числеността на силите x и y и времето t в сражения между партизански и регулярни съединения.

Глава 4

Вълнови процеси и вълнови уравнения. Коректни и некоректни задачи на математическата физика.

4.1 Понятие за ЧДУ

Формулирането на задача за частно диференциално уравнение е направено за пръв път от Даламбер, който изследва уравнението на трептящата струна. Оттогава започва да се развива и апаратът на анализа, така че да могат да бъдат изучавани и функции на много променливи.

Изучаването на елиптичните уравнения започва с въвеждането на уравнението на Лаплас

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0,$$

където $u = u(x_1, x_2, x_3)$ е търсената функция на три променливи. То се нарича още уравнение на потенциала, понеже се удовлетворява от потенциалите на полета, създадени от пространствено разпределени електрически заряди или гравитационни маси. Изучаването на свойствата на потенциалите на електрическите или гравитацинни полета чрез изучаването на гранични задачи за уравнението на потенциала, което е частно диференциално уравнение от втори ред, се оказало извънредно плодотворна идея и инспирирало появата на теорията на частните диференциални уравнения, която с цялото многообразие от идеи и методи е съществена част от съвременната математика и е повлияла съществено за развитието на редица нейни направления, например за развитието на функционалния анализ.

Ако разгледаме потенциала на поле, който не се променя при изменението на третата променлива x_3 (такъв е например потенциалът на тънък еднороден зареден прът разположен по остта Ox_3), понеже $u_{x_3x_3} = 0$, стигаме до двумерното уравнение на Лаплас

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0,$$

в което се търси функцията на две променливи $u = u(x_1, x_2)$.

Типични гранична задача за уравнеието на Лаплас е задачата на Дирихле, в която се търси решението $u = u(x_1, x_2, x_3)$ на уравнението на Лаплас в ограничена област G, като стойностите му по границата й Γ са известни

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0,\ x \in G,$$

$$u(x) = g(x) \text{ при } x \in \Gamma,$$

като $g : \Gamma \to R$ е известна непрекъсната функция на x. Тази задача е математически модел за описание както на електрическо поле, така и на гравитационно поле, създадено от неподвижно разположени в пространството съответно заряди или маси. Виждаме, че различни по своята физическа природа явления се описват чрез един и същ математически модел.

Друга задача, естествена от физическа гледна точка, е задачата на Нойман

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0,\ x \in G,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \text{ при } x \in \Gamma,$$

при която във всяка точка x от границата Γ се задава производната на решението $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ по направление на единичния външен нормален вектор $n = (n_1, n_2, n_3)$.

Класификацията на частните диференициални уравнения от втори (и по-висок ред) на елиптични, хиперболични и параболични е математическа.

От физическа гледна точка елиптични са уравненията, които описват така наречените стационарни процеси, т.е. процеси, при които измененията във времето вече са приключили.

Хиперболични са уравненията, които описват нестационарни процеси, или още ги наричат еволюционни процеси, т.е. процеси при които се наблюдават изменения във времето, но за които смущенията (трептенията) се разпространяват със крайна скорост. Типичен представител е уравнението, което описва разпространението на трептенията, например звуковите третения, електромагнитните трептения и в частност разпространението на светлината. Математически модел (при известни предположения) за тези разнородни процеси е вълновото уравнение

$$u_{tt} - a^2\Delta u \equiv u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0,\ a = Const > 0,$$

като в случая на звукови трептения $u = u(t, x)$ е отклонението на точка $x = (x_1, x_2, x_3)$ от трептящата среда от равновесното й положение в момент от време t.

Параболични са тези еволюционни (нестационарни) уравнения, при които разпространението на смущенията става с безкрайна скорост, т.е. малко изменение на решението в дадена точка предизвиква веднага изменение на решението във всички точки (разбира се изменението е малко в отдалечените точки). Типичен представител тук е уравнението на топлопроводността

$$u_t - a^2\Delta u \equiv u_t - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0,\ a = Const > 0,$$

описващо изменението на температурата $u = u(t, x)$ на произволна точка $x = (x_1, x_2, x_3)$ от топлопроводящата среда при изменението на времето t.

Да разгледаме граничната задача, описваща трептенията с малка амплитуда (големина) на еластична мембрана.

$$u_{tt} - a^2\Delta u \equiv u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0,\ G = (0, \infty) \times D,$$

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in D,$$

$$u_t(0, x) = \psi(x),\ x \in D,$$

$$u(t, x) = g(x),\ x \in \gamma,\ t \geq 0.$$

Предполага се, че в спокойно състояние мембраната (незакрепена по краищата) е плоска и лежи в хоризонталната равнина Ox_1x_2, заемайки областта $D \in R^2$ с граница γ, а при трептения с малка амплитуда (големина) всяка точка се движи нагоре-надолу по вертикална права, като $u = u(t, x_1, x_2)$ е големината на отклонението на точката от мембраната с координати $x = (x_1, x_2)$ от равновесното й положение в момент от време t. Граничното условие $u(t, x) = g(x),\ x \in \gamma,\ t \geq 0$ показва, че мембраната е закрепена (опъната) по края, защото във всеки момент точките от края имат предписаните чрез функцията g отклонения Началното условие $u(0, x) = \varphi(x),\ x \in D$ показва каква е формата на мембраната в началния момент, а началното условие $u_t(0, x) = \psi(x),\ x \in D$ показва какви са началните скорости на точките от мембраната. Ако предизвикаме трептения на мембраната, след което я оставим да трепти свободно, без външно въздействие, то под влияние на загуби на енергия заради съпротивлението на средата и триене в самата мембрана, големината на трептенията ще намалява постепенно и в един момент мембраната ще престане да трепти, и ще застане в равновесно положение. Тъй като в равновесно положение u не се изменя с времето (мембраната е неподвижна), то $u_{tt} = 0$ и горната нестационарна задача преминава в стационарната задача,

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0,\ x \in D,$$

$$u|_\gamma = g(x),\ x \in \gamma,$$

описваща равновесното положение на закрепената мембрана, която очевидно съвпада по форма с двумерната задача на Дирихле за уравнението на потенциала.

До същата стационарна задача на Дирихле стигаме, ако си представим, че мембраната е топлопроводяща еднородна пластина (например метална) заемаща областта $D \in R^2$ с граница γ в равнината Ox_1x_2, а $u = u(t, x_1, x_2)$ е температурата на точка $x = (x_1, x_2)$ от нея, измерена в момент t. Граничната задача

$$u_t - a^2 \Delta u \equiv u_t - a^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0,\ G = (0, \infty) \times D,$$

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in D,$$

$$u(t, x) = g(x),\ x \in \gamma,\ t \geq 0.$$

описва процесите на топлопренасяне в пластината, като по границата на пластината се поддържа предписаната чрез функцията g температура, а чрез функцията φ е зададена началната температура на всяка точка от пластината. С времето в пластината ще се установи стационарно разпределение на температурата, което отново удовлетворява формулираната по-горе двумерна задача на Дирихле.

Дадохме примери на няколко различни от физическа гледна точка явления, които се описват с един и същи математически модел – задачата на Дирихле за уравнението на Лаплас.

Обикновено се търсят "класически" решения на разгледаните гранични задачи, т.е. функции притежаващи непрекъснати производни до втори ред, които удовлетворяват уравнението и граничните условия. В някои случаи класически решения просто няма и е уместно да се търсят така наречените обобщени решения. Развитието на числените методи също води до необходимостта от разглеждането на обобщени решения.

Обощената постановка на една гранична задача е първата стъпка към прилагането на метода на крайните елементи за числено намиране на решението.

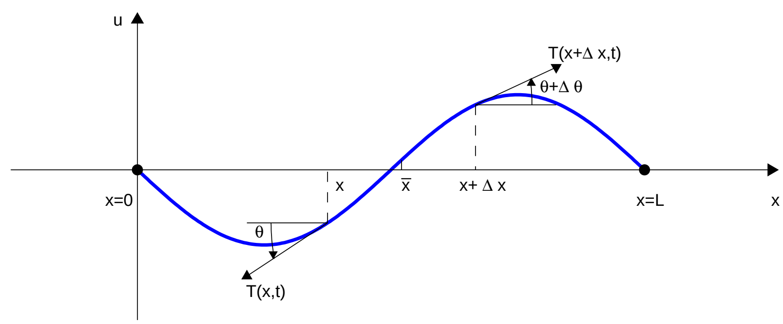
4.2 Вълново уравнение. Трептене на еластична струна.

Основното хиперболично уравнение, което се появява в приложната математика е вълновото уравнение или уравнението описващо разпространението на трептенията в еластична среда. Различни форми на това уравнение или някои негови обобщения почти неизбежно възникват във всеки математически модел на явления, включващи разпространение на вълни в непрекъсната среда. Например, изследванията на акустични вълни, водни вълни, електромагнитни вълни и сеизмични вълни се базират на това уравнение. Всъщност решаването на вълновото уравнение е един от основните математически проблеми от средата на осемнадесети век. Уравнението за трептенето на струната е получено и изучавано за първи път от Даламбер през 1746. След това то привлича вниманието и на математици като Ойлер, Бернули, Лагранж. Получени са решения в няколко различни форми и естеството им и връзката между тях са дискутирани, понякога разгорещено, в редица статии в продължение на години. Основните спорни въпроси се отнасят до естеството на функциите, както и вида на функциите, които могат да бъдат представени в тригонометричен ред. Тези въпроси не са били решени до деветнадесети век.

Най-лесната за визуализиране ситуация се среща в изследването на механични вибрации. Ще изследваме трептенията на една еластична струна. Можем да си мислим, че това е струна на цигулка или пък електропроводна жица. Същото уравнение с различна интепретация се среща и в много други вълнови процеси, имащи само една пространствена променлива.

4.2.1 Извод на уравнението на струната.

И така, разглеждаме една идеално гъвкава неразтеглива струна с фиксирани краища на едно и също хоризонтално ниво. Нека оста Ox е разположена по дължината на струната, чиито краища са в точките $x = 0$ и $x = L$. Ако струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$ (чрез придърпване, например) и след това е оставена без външно въздействие, то тя ще се движи във вертикална равнина, при условие, че ефекти като съпротивление на средата или триене в краищата са пренебрегнати. Ще предполагаме, че отклонението на струната от равновесното и положение е малко и следователно всяка точка от нея се движи върху вертикална линия. Да означим с $u(x,t)$ вертикалното отместване на точката x от струната в момента t. За да изведем уравнението на движение на струната, ще разгледаме силите действащи върху малка част от нея с дължина Δx, лежаща между точките x и $x+\Delta x$. Нека опъването на струната, което винаги действа в тангенциално направление, е означено с $T(x,t)$, а с $\varrho = const$ нейната плътност.



Фигура 4.1: Трептене на еластична струна.

Законът на Нютон, приложен за разглежданата част от струната, твърди, че външната сила, която е резултат от опъванията в краищата на тази част от струната, трябва да бъде равна на произведението от масата на частта и ускорението на нейния център на тежестта. Понеже няма хоризонтално ускорение, то за хоризонталната компонента $H = T\cos\theta$ на опъването ще имаме

$$H(x+\Delta x,t)-H(x,t) = T(x+\Delta x,t)\cos(\theta+\Delta\theta)-T(x,t)\cos\theta = 0. \quad (4.2.1)$$

Следователно хоризонталната компонента H не зависи от x.

От друга страна, вертикалната компонента $V = T\sin\theta$ удовлетворява равенството

$$\begin{aligned} &V(x+\Delta x,t)-V(x,t) = \\ &= T(x+\Delta x,t)\sin(\theta+\Delta\theta)-T(x,t)\sin\theta = \varrho\,\Delta x\, u_{tt}(\bar{x},t), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

където $\bar{x}\in[x,\, x+\Delta x]$ е координата на центъра на тежестта на разглежданата част от струната.

Можем да запишем уравнението (4.2.2) в следния вид

$$\frac{V(x+\Delta x,t)-V(x,t)}{\Delta x} = \varrho\, u_{tt}(\bar{x},t). \quad (4.2.3)$$

Пускаме Δx да клони към 0 и получаваме

$$V_x(x,t) = \varrho\, u_{tt}(x,t). \tag{4.2.4}$$

Да забележим, че

$$V(x,t) = H(t)\tan\theta = H(t)u_x(x,t). \tag{4.2.5}$$

Тогава (4.2.3) ни дава

$$(Hu_x)_x = \varrho\, u_{tt}$$

и понеже H не зависи от x, то получаваме

$$Hu_{xx} = \varrho\, u_{tt}. \tag{4.2.6}$$

За малки движения на струната е допустимо да заместим $H = T\cos\theta \approx T$. Ако означим

$$a^2 = T/\varrho, \tag{4.2.7}$$

ще получим от (4.2.6) вълновото уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{4.2.8}$$

По-нататък ще предполагаме, че a е константа, въпреки че това не беше изискано в извода на вълновото уравнение, дори за малки движения на струната. Понеже T е сила, а ϱ е плътност, то a ще измерва скорост. Възможно е да интерпретираме a като скоростта, с която малки смущения (вълни) се придвижват по струната. Ако във всеки момент на струната действа и външна сила $f(x,t)$, то уравнението, което описва нейното движение е

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t). \tag{4.2.9}$$

4.2.2 Трептене на безкрайна струна.

Ще визуализираме трептенето на безкрайна струна. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$, чрез придърпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие ($f(x,t) \equiv 0$). Така получаваме следната задача на Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, \ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4.2.10}$$

където $a = const. > 0$, а $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ са произволни функции. При направените предположения задачата на Коши (4.2.10) има единствено решение $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\, ds. \qquad (4.2.11)$$

Ще изведем формулата на Даламбер чрез метода на характеристиките. Нека $u(x,t)$ е решение на задачата на Коши (4.2.10). Уравнението на хрктеристиките на вълновото уравнение в тази задача е

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$

То ни дава две семейства реални характеристики на вълновото уравнение

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2,$$

където c_1 и c_2 са произволни константи.

Това ни позволява да направим следната неособена смяна на независимите променливи

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

с якобиан

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a > 0.$$

Обратната смяна е

$$x = \frac{\eta+\xi}{2}, \quad t = \frac{\eta-\xi}{2a}.$$

Въвеждаме нова функция

$$U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2a}\right)$$

тоест

$$u(x,t) = U(x-at, x+at).$$

Сега вече лесно пресмятаме

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = -4a^2 U_{\xi\eta}.$$

Така достигаме до каноничния вид на вълновото уравнение

$$U_{\xi\eta} = 0. \qquad (4.2.12)$$

Следният запис на уравнението (4.2.12)

$$[U_\xi(\xi,\eta)]_\eta = 0$$

показва, че $U_\xi(\xi,\eta)$ не зависи от η, тоест

$$U_\xi(\xi,\eta) = H(\xi),$$

където $H(\xi)$ е произволна диференцируема функция. Интегрираме последното равенство при фиксирано η и намираме

$$U(\xi,\eta) = \int H(\xi)\,d\xi + g(\eta) = h(\xi) + g(\eta),$$

където $G(\eta)$ е произволна двукратно гладка функция, а $h(\xi) = \int H(\xi)\,d\xi$.

Следователно функцията

$$u(x,t) = h(x-at) + g(x+at) \tag{4.2.13}$$

е общото решение на вълновото уравнение. Началните условия в задачата на Коши (4.2.10) ни дават системата

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -ah'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Диференцираме първото уравнение и от получената система за $h'(x)$ и $g'(x)$ намираме

$$h'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2a}\psi(x), \tag{4.2.14}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2a}\psi(x). \tag{4.2.15}$$

Интегрираме (4.2.14) и (4.2.15) от 0 до x и получаваме

$$h(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)\,ds + f(0) - \frac{1}{2}\varphi(0),$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)\,ds + g(0) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Понеже

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) = \varphi(x) + f(0) + g(0) - \varphi(0),$$

то

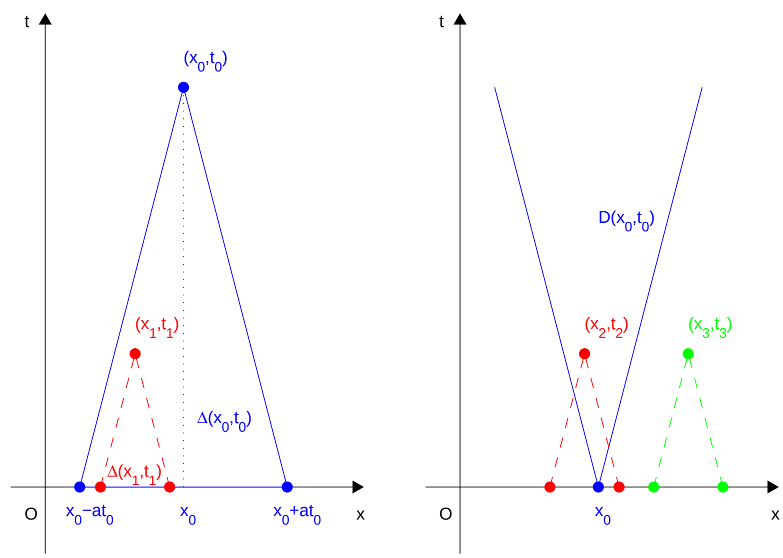
$$f(0) + g(0) = \varphi(0).$$

Следователно

$$\begin{aligned} u(x,t) &= h(x-at) + g(x+at) \\ &= \tfrac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \tfrac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}\psi(s)\,ds - \int_0^{x-at}\psi(s)\,ds\right) \\ &= u(x,t) = \tfrac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \tfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds. \end{aligned}$$

По този начин показахме, че ако задачата на Коши (4.2.10) има решение то се дава с формулата на Даламбер и следователно е единствено. Лесно се проверява и обратното - ако $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$, то формулата на Даламбер дава решени на задачата на Коши (4.2.10).

Един поглед върху формулата на Даламбер ни позволява да направим следните заключения и да въведем понятията:



Фигура 4.2: Характеристичен триъгълник, област на зависимост и област на влияние.

1. Област на зависимост. Вижда се, че стойността на u в точката $(x_0, t_0) \in \mathbf{R} \times (0, +\infty)$ се определя от стойностите на началните данни $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в интервала $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ от оста Ox. Крайните точки на този интервал са пресечните точки с оста Ox на характеристиките на вълновото уравнение $x - x_0 = \pm a(t - t_0)$, които минават през точката (x_0, t_0).

2. Характеристичен триъгълник. Това е триъгълникът $\Delta(x_0, t_0)$ в $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$ с върхове точките (x_0, t_0), $(x_0 - at_0, 0)$ и $(x_0 + at_0, 0)$. Лесно се вижда, че за всяка точка $(x_1, t_1) \in \Delta(x_0, t_0)$

$$\Delta(x_1, t_1) \subset \Delta(x_0, t_0),$$

$$[x_1 - at_1, x_1 + at_1] \subset [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$$

и стойността $u(x_1, t_1)$ се определя от стойностите на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в интервала $[x_1 - at_1, x_1 + at_1]$.

3. Област на влияние. Стойността на началните данни $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точката $(x_0, 0)$ влияе на стойностите на решението u в точките от

$$D(x_0, t_0) := \{(x, t) : x_0 - a\,t \le x \le x_0 + a\,t,\ t \ge 0\}.$$

Очевидно за всяка точка $(x_2, t_2) \in D(x_0, t_0)$ ще имаме $x_0 \in [x_2 - a\,t_2, x_2 + a\,t_2]$, докато ако $(x_3, t_3) \notin D(x_0, t_0)$ то $x_0 \notin [x_2 - a\,t_2, x_2 + a\,t_2]$.

Пример 4.2.1 *Трептенето на безкрайна струна се моделира със следната задача на Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4.2.16}$$

където

$$\varphi = \begin{cases} \sin^4(\pi x), & 1 \le x \le 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 2]. \end{cases} \tag{4.2.17}$$

С помощта на формулата на Даламбер ще визуализираме трептенето на струната за $t \in [0, 6]$ като чертаем последователно проекциите на графиката на функцията $u(x, t)$ в равнината $\{x, u\}$. Ще начертаем и графиката на функцията $u(x, t)$ в тримерното пространство $\{x, t, u\}$.

Съгласно формулата на Даламбер решението на задачата е

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - t) + \varphi(x + t)]. \tag{4.2.18}$$

В случая $\psi(x) \equiv 0$, а $\varphi(x)$ е различно от нула само в краен интервал. Лесно се вижда, че функцията $\varphi(x - t)$ описва една вълна, която се движи надясно със скорост a, без да изменя големината си. Наистина, ако при $t = 0$ точката $x = x_0$ е имала положение $\varphi(x_0)$, същото положение при $t = t_0$ ще има точката $x_1 = x_0 + at_0$, защото $\varphi(x_1 - at_0) = \varphi(x_0)$, тоест за време t_0 вълната се е преместила на разстояние at_0. Аналогично $\varphi(x + t)$ описва вълна, която се движи надясно. Следователно в случая вибрирането на струната е суперпозиция от две вълни, които се движат със скорост a в противоположни посоки. Това се вижда много добре на следната визуализация с MatLab, която реализира следния код

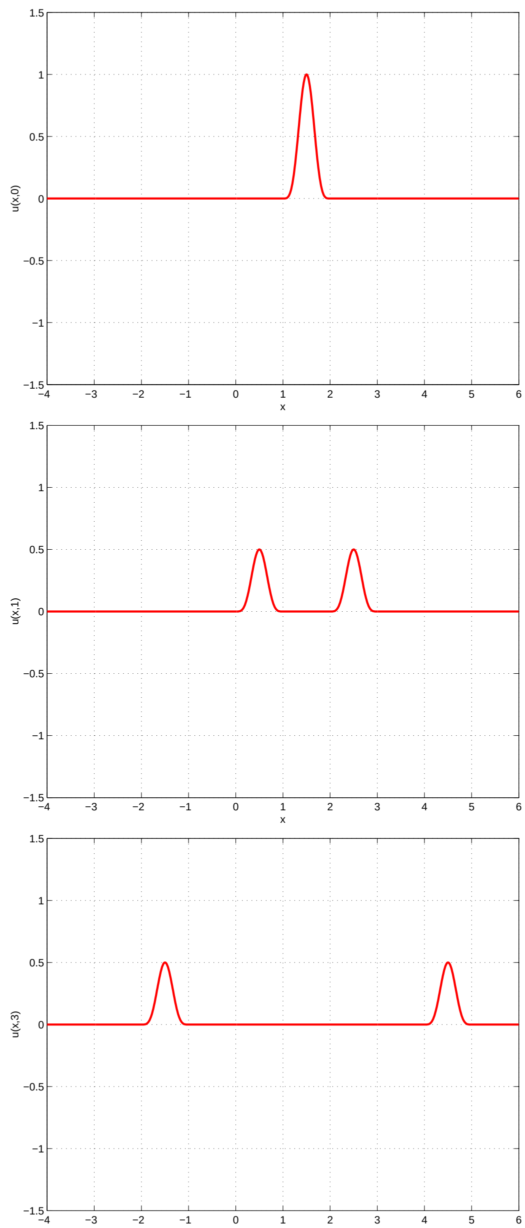
```
function infinite_string_vibration

tmax=6;
x=-4:1/100:6;
```

```
t=0:tmax/100:tmax;

% изчертаване графиката на решението
for k=1:length(t)
plot(x,dalambert(x,t(k)),'LineWidth',2,'Color','r');
 xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');

axis([-4 6  -1.5 1.5]);

grid on;
M(k)=getframe;
end
movie(M,2)

% формула на Даламбер
function y =dalambert(x,t)
y=(phi(x-t)+phi(x+t))/2;
end

% начални условия
function y=phi(x)
for k = 1:length(x)
if 1<=x(k) & x(k)<=2
y(k)=sin(pi*x(k))^4;
else y(k)=0;
end
end
end

end
```

На Фиг. 4.3 е показано трептенето на струната в моментите $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$.

Ето и кодът, който изчертава графиката на решението $u(x,t)$.

```
function plot_infinite_string_vibration

tmax=6;
t=0:tmax/100:tmax;
x=-4:1/10:6;
```



Фигура 4.3: Трептене на безкрайната струна от Пример 4.2.1 в моментите t=0, t=1 и t=3.

```
% тримерна графика на решението
z=dalambert(x,t);
surf(x,t,z);
xlabel('t');
```

```
ylabel('x');
zlabel('u(x,t)');


% формула на Даламбер
function y =dalambert(x,t)
for i=1:length(x)
    for j=1:length(t)
y(i,j)=(phi(x(i)-t(j))+phi(x(i)+t(j)))/2;
end
end
end

% начални условия
function y=phi(x)
if 1<=x & x<=2
y=sin(pi*x)^4;
else y=0;
end
end
end

end
```

Резултатът е следният:

Упражнения

1.1.1. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\, x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

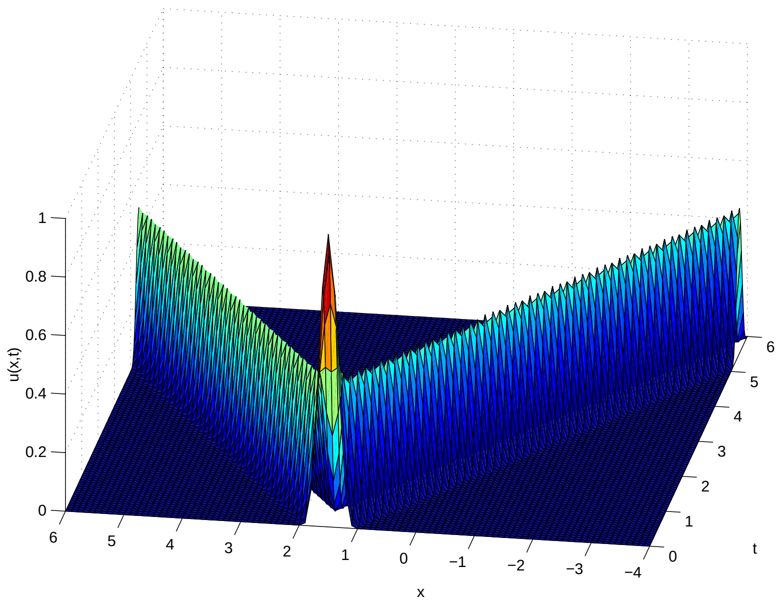
където

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sin^3(x - 3\pi), & x \in [-3\pi, -2\pi], \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus (-2\pi, 0]. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6],\ x \in [-10, 10]$.

1.1.2. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, & t > 0,\, x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$



Фигура 4.4: Графика на решението от Пример 4.2.1

където

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos^3(x - \frac{5\pi}{2}), & x \in [-4\pi, -3\pi], \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus (-3\pi, -\pi]. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6],\ x \in [-10, 10]$.

1.1.3. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^3(x - \frac{3\pi}{2}), & x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus (-\frac{\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} -\sin^3(x - \frac{\pi}{2}), & x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus (\frac{5\pi}{2}, 4\pi]. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6],\ x \in [-10, 10]$.

4.2.3 Задача на Коши за нехомогенното уравнение на струната. Метод на Дюамел.

В този параграф ще изследваме задачата на Коши за нехомогенното уравнение на струната:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4.2.19}$$

където $a = const. > 0$, $f \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$, а $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ са произволни функции.

Нека $v(x,t)$ е решение на задачата на Коши за хомогенното уравнение на струната с ненулеви начални данни

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4.2.20}$$

а $w(x,t)$ е решение на Задачата на Коши за нехомогенното уравнение на струната с нулеви начални данни

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 0),\ u_t|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4.2.21}$$

Тогава функцията $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ ще е решение на изходната задача на Коши (4.2.19). Както вече знаем решението на задача (4.2.20) се дава с формулата на Даламбер:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)\, d\lambda. \tag{4.2.22}$$

Остава да намерим решението на задача (4.2.21). Дюамел е забелязал, че решението на тази задача се конструира лесно с помощта на фамилията от решения на задачата на Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t \geq s \geq 0, \\ u|_{t=s} = 0),\ u_t|_{t=s} = f(x,s),\ x \in \mathbf{R},\ s \geq 0, \end{cases} \tag{4.2.23}$$

която се получава, когато параметърът s описва интервалът $[0, +\infty)$. Понеже уравнението на струната е инвариантно относно транслациите, субституцията $\tau = t - s$ свежда задачата (4.2.23) към вече изследваната задача

$$\begin{cases} u_{\tau\tau}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, \ x \in \mathbf{R}, \ \tau > 0, \\ \\ u|_{\tau=0} = 0), \ u_\tau|_{\tau=0} = f(x,s), \ x \in \mathbf{R}, \ s \geq 0, \end{cases} \tag{4.2.24}$$

чието решение се дава от формулата на Даламбер

$$u(x,\tau,s) = \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\lambda,s)\, d\lambda. \tag{4.2.25}$$

От коректността на задачата на Коши следва, че u зависи непрекъснато от s. Това ни позволява да въведем функцията

$$w(x,t) = \int_0^t u(x,t-s,s)\, ds, \ t \geq 0. \tag{4.2.26}$$

Лесно се проверява, че функцията $w(x,t)$ е решение на задачата (4.2.21). Сега вече (4.2.22), (4.2.22) и (4.2.26) ни дават

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)\, d\lambda \qquad (4.2.27) \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda,s)\, d\lambda ds. \end{aligned}$$

4.3 Коректни и некоректни задачи на математическата физика.

Математическите модели на много физични явления и процеси водят до задачи на Коши за различни уравнения. Освен основните въпроси за разрешимост и единственост на решението на тези задачи, естествено възниква въпросът, може ли да твърдим, че малки изменения на началните условия водят до малки изменения на решението? Важно е да се знае отговора, защото при практически проблеми съответните величини се измерват с някаква точност и следователно са известни само приблизително. Тогава намереното решението на получената задача на Коши ще бъде приближение на търсената величина.

Ще казваме, че една задача на Коши е коректна в смисъл на Адамар (Jdcques Hadamard, 1865-1963), ако са изпълнени следните три условия:

1. Съществува решение,

2. Решението е единствено,

3. Решението зависи непрекъснато от началните данни.

Третото условие означава, че малки изменения на началните данни водят до малки изменения на решението. Смисълът на понятието "малки изменения" трябва да се прецизира за всяка конкретна задача по подходящ начин. Задача, която не удовлетворява поне едно от тези условия се нарича некоректна. Примерно задачата на Коши за линейно ЧДУ от втори ред с данни върху характеристична повърхнина е некоректна, защото няма да е изпълнено първото условие. Първият резултат за некоректност е добре известният пример на Адамар. Той разглежда следната задача на Коши за уравнението на Лаплас:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = 0,\ (x,t) \in G \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ a < x < b, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

където областта $G \subset \mathbf{R}^2$ съдържа отсечката $\{a < x < b,\, t = 0\}$. Формулираната задача е разрешима само, когато функцията $\varphi(x)$ е аналитична. Но дори и да е аналитична, няма непрекъсната зависимост от началните данни. Това се вижда в частния случай, когато $G = \{(x,t) : x^2 + t^2 < 1\}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{n^k} \sin nx,\ -1 < x < 1,\ n, k \in \mathbf{N}$.

Съществуват физични задачи, които водят именно до задачи на Коши за уравнението на Лаплас. Поради примера на Адамар дълги години те са се считали за математически безнадеждни. Тяхното математическо изследване напоследък стана възможно благодарение на различни модификации на понятието коректност.

Ще дадем един пример за коректно поставена задача на математическата физика. Такива са всъщност всички задачи, чиито решения визуализирахме. Сега ще докажем, че задачата на Коши (4.2.10), моделираща трептенето на безкрайна струна е коректна:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbf{R},\, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4.3.2}$$

където $a = const. > 0$, а $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ са произволни функции. Както вече знаем тази задача има единствено решение, което се дава с формулата на Даламбер

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\, ds. \tag{4.3.3}$$

Сега ще покажем, че е изпълнено и третото условие за непрекъсната зависимост от началните данни.

За функциите $f(x) \in C(\mathbf{R})$ и $g(x,t) \in C(\mathbf{R} \times [0,\infty))$ въвеждаме равномерните норми

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$$

и

$$\|g\|_{\infty,T} = \sup_{x\in\mathbf{R},\, 0\le t\le T} |g(x,t)|.$$

При фиксирано $T > 0$ от (4.3.3) получаваме

$$\begin{array}{rcl} \|u\|_{\infty,T} & \leq & \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty\right) + \frac{1}{2a}\|\psi\|_\infty \int_{x-at}^{x+at} ds \\ & \leq & \|\varphi\|_\infty + T\|\psi\|_\infty. \end{array}$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{1+T})$, такова че, ако $\|\varphi\|_\infty < \delta$ и $\|\psi\|_\infty < \delta$, то $\|u\|_{\infty,T} < \varepsilon$, което доказва непрекъснатата зависимост.

4.4 Метод на Фурие за смесената задача.

4.4.1 Трептене на ограничена струна

Ще демонстрираме как работи метода на разделяне на променливите, известен още като метод на Фурие, за втората смесена задача за уравнението на струната:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < L, \\ \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=L} = 0,\ t > 0, \end{cases} \tag{4.4.1}$$

където $\varphi(x) \in C^3[0,L]$, $\psi(x) \in C^2[0,L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0,\ \varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

Идеята е да търсим решение от следния вид

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4.4.2}$$

Заместваме във вълновото уравнение от задача (4.4.1) и получаваме

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4.4.3}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4.4.4}$$

$$X'(0) = 0,\ X(L) = 0. \tag{4.4.5}$$

За функцията $X(x)$ получаваме задачата на Щурм - Лиувил (4.4.3), (4.4.5). Общото решение на линейното уравнение (4.4.3) е

$$X(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \lambda < 0; \\ C_1 x + C_2, & \lambda = 0; \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0, \end{cases}$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи. При $\lambda \leq 0$ лесно се вижда, че за да е изпълнено условието (4.4.5), трябва $C_1 = C_2 = 0$, тоест $X(x) \equiv 0$. В случая $\lambda > 0$ от (4.4.5) получаваме $C_2 = 0$ и $C_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) = 0$. За да имаме ненулево решение на задачата на Щурм - Лиувил избираме

$$\lambda = \lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4L^2},\ k = 0, 1, 2, ... \tag{4.4.6}$$

Тогава получаваме следните решения

$$X_k(x) = C_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L},\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{4.4.7}$$

където C_k са произволни реални константи.

Константите λ_k се наричат собствени стойности, а функциите $X_k(x)$ собствени функции на задачата на Щурм - Лиувил (4.4.3), (4.4.5).

При $\lambda = \lambda_k$, общото решени на линейното уравнение (4.4.4) е

$$T_k(x) = a_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L},\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{4.4.8}$$

където a_k и b_k са произволни реални константи. По този начин получихме функциите

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t),\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{4.4.9}$$

които удовлетворяват уравнението и граничните условия в изходната задача (4.4.1). Те обаче не удовлетворяват началните условия, освен в случаите на много специален избор на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По тази причина ще търсим решението на задачата (4.4.1) в следния вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \qquad (4.4.10) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\left[A_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right], \end{aligned}$$

където $A_k = a_k C_k,\ B_k = b_k C_k$.

От първото начално условие получаваме

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Тъй като $\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\}$ е пълна и ортогонална система в $L_2(0,L)$ с норма $\|\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\}\|_{L_2(0,L)} = \frac{L}{2}$, то константите A_k трябва да са фуриеровите коефициенти в развитието на $\varphi(x)$ по тази система:

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx.$$

Аналогично от второто начално условие получаваме

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2k+1)\pi a}{2L}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}. \tag{4.4.11}$$

Следователно

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx. \tag{4.4.12}$$

С тези изрази за A_k и B_k редът (4.4.10), както и получените от него редове с почленно диференциране по x и t от първи и втори ред са равномерно сходящи в ивицата $G = \{(x,t) : 0 \le x \le L,\ t \ge 0\}$. Равномерната сходимост на тези редове ще бъде доказана, ако докажем, че

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2(|A_k| + |B_k|) < \infty. \tag{4.4.13}$$

Нека A_k''' и B_k'' са фуриеровите коефициенти в развитието съответно на $\varphi'''(x)$ по $\left\{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\}$ и на $\psi''(x)$ по $\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\}$. Интегрирайки по части и отчитайки условията за съгласуване на φ и ψ намираме

$$A_k = -\left[\frac{2L}{(2k+1)\pi}\right]^3 A_k''',\ B_k = -\frac{1}{a}\left[\frac{2L}{(2k+1)\pi}\right]^3 B_k''.$$

Неравенството на Бесел ни дава, че $\sum_{k=0}^{\infty}(|A_k'''|^2 + |B_k''|^2) < \infty$. Сега вече благодарение на неравенството $|A_k'''| \le (2k+1)|A_k'''|^2 + \frac{1}{(2k+1)}$ получаваме оценката (4.4.13).

Сега вече може да твърдим, че $u(x,t) \in C^2(G)$ и производните ѝ се получават чрез почленно диференциране. Следователно функцията

$u(x,t)$ удовлетворява уравнението и граничните условия в (4.4.1), понеже всеки член на реда ги удовлетворява.

Понеже A_k са фуриеровите коефициенти в развитието на $\varphi(x)$ по пълната и ортогонална в $L_2(0,L)$ система $\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\}$, то

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L} \to \varphi(x),\ N\to\infty. \tag{4.4.14}$$

Редът (4.4.10) е равномерно сходящ в G и следователно $\sum_{k=0}^{N} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$ при $N\to\infty$ клони равномерно по x към $u(x,0)$. Това означава, че $u(x,0)=\varphi(x)$ почти навсякъде в $(0,L)$ и понеже и двете функции са непрекъснати, то $u(x,0)=\varphi(x)$ за $x\in(0,L)$. Аналогично се проверява, че е изпълнено и другото начално условие.

Както видяхме метода на Фурие се състой от следните стъпки:

1. Търсене на решение от вида $u(x,t)=X(x)T(t)$ и свеждане на уравнението до две ОДУ от втори ред за $X(x)$ и $T(t)$.

2. Получаване на задача на Щурм - Лиувил за функцията $X(x)$ чрез използване на граничните условия. Решаване на тази задача и намиране на нейните собствени стойности λ_k и собствени функции $X_k(x)$.

3. Намиране на решенията $T_k(t)$ на уравнението за $T(t)$ при $\lambda=\lambda_k$.

4. Намиране на безкраен брой функции $u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)$, които удовлетворяват уравнението и граничните условия.

5. Търсене на решението във вида $u(x,t)=\sum_k u_k(x,t)$ и определяне на неизвестните константи, така че функцията u да удовлетворява началните условия (чрез развитие в ред на Фурие на началните данни по системата $X_k(x)$).

6. Изследване сходимостта на получените редове за решението и производните му и доказване, че намерената функция е решение на поставената задача.

Пример 4.4.1 *Трептенето на ограничена струна със свободен ляв край в точката $x=0$ и закрепен десен край в точките $x=L$ се моделира със следната смесена задача:*

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0,\ 0<x<5,\ t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ 0<x<5,\\ u_x|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0,\ t>0, \end{cases} \tag{4.4.15}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\cos^3(\frac{\pi x}{2}), & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x \in [0,1) \cup (3,5], \end{cases} \tag{4.4.16}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} (x-2)^3(x-3)^3, & 2 \le x \le 3, \\ 0, & x \in [0,2) \cup (3,5]. \end{cases} \tag{4.4.17}$$

Ще визуализираме трептенето на струната като използваме описания по-горе метод на Фурие при $a = 2$, $L = 5$ и използваме за приближение на $u(x,t)$ първите 21 събираеми в реда (4.4.10)

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{20} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\left[A_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right], \tag{4.4.18}$$

където коефициентите A_k и B_k се изчисляват съответно чрез равенствата (4.4.11) и (4.4.12).

Следващия примерен код визуализира трептенето на струната като създава *avi* файл с име *stringfourie.avi* :

```
function avi_string_fourie

a=2; L=5;

x=0:1/100:L;
tmax=6;
t=0:tmax/100:tmax;

%създаване на avi файл
aviobj =
avifile('stringfourie.avi','compression','None');
fig=figure;

for k=1:length(t)
    clf;
    hold on;
y=fourieru(x,t(k),a,L);
plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(L,0,'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
axis([0 8 -1.5 1.5]);
grid on;

xlabel('x');
```

```
ylabel('u(x,t)');

axis([0 L -2 2]);
grid on;

F = getframe(fig);


aviobj =
 addframe(aviobj,F); end close(fig);

aviobj = close(aviobj);

% ред на Фурие
function y=fourieru(x,t,a,L) y=0; for k=0:20
    y=y+(A(k,L)*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L))+
    B(k,L,a)*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L)))
    .*cos(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
end

% коефициентите Ak
function y=A(k,L)
 x=0:1/100:L;
 z=phi(x).*cos(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
y=(2/L).*trapz(x,z);
end

% коефициентите Bk
function y=B(k,L,a)
 x=0:1/100:L;
z=psi(x).*cos(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
y=(4/(2*k+1)*pi*a).*trapz(x,z);
end

% началната позиция
function y=phi(x)
for k=1:length(x)
    if 1<=x(k) & x(k)<=3
        y(k)= -cos(pi*x(k)/2)^3;
    elseif (0<=x(k)<1) | (3<x(k)<=5)
        y(k)=0;
```

```
    end
end

% началната скорост
function y=psi(x) for k=1:length(x)
    if 2<=x(k) & x(k)<=3
        y(k)= (x(k)-2)^3*(x(k)-3)^3;
    elseif (0<=x(k)<2) | (3<x(k)<=5)
        y(k)=0;
    end
end


end
```

На Фиг. 4.5 е показано положението на струната в моментите $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$.

Пример 4.4.2 *(Стоящи вълни.) Ще разгледаме трептенето на струната, когато функцията $\varphi(x)$ съвпада с някоя от собствените функции на задачата на Щурм – Луивил, а началната скорост е нула. Нека трептенето на ограничена струна със закрепени краища в точките $x = 0$ и $x = L$ се моделира със следната смесена задача:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0,\ 0 < x < 5,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \sin \pi x,\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 < x < 5, \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5} = 0,\ t > 0. \end{cases} \tag{4.4.19}$$

Разделянето на променливите $u(x,t) = X(x)T(t)$ води до следната задача на Щурм - Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \end{cases}$$

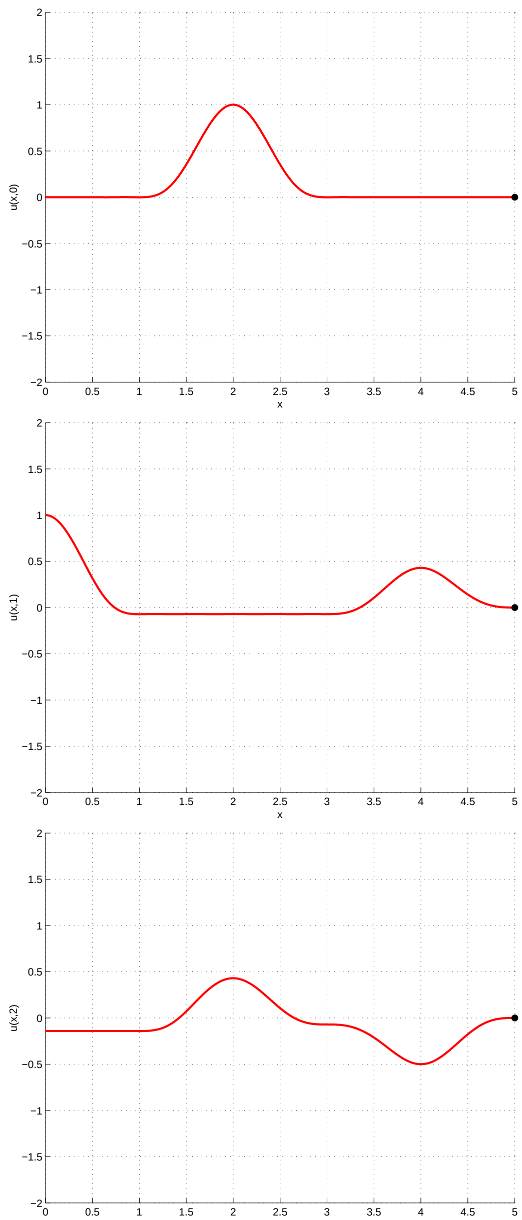
и уравнението

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4.4.20}$$

при $a = 2$, $L = 5$.

Собствените стойности и собствените функции на задачата (4.4.20) са съответно

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2,\ X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi x}{L},\ k = 1, 2, ..., \tag{4.4.21}$$



Фигура 4.5: Струната от Пример 4.4.1 в моментите $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

където C_k са произволни реални константи.

Следователно функцията в началното условие е $\varphi(x) = X_5(x)$ и ако използваме метода на Фурие и търсим решението във вид на ред, то в този ред ще има само едно ненулево събираемо (проверете !) и решението на задачата е

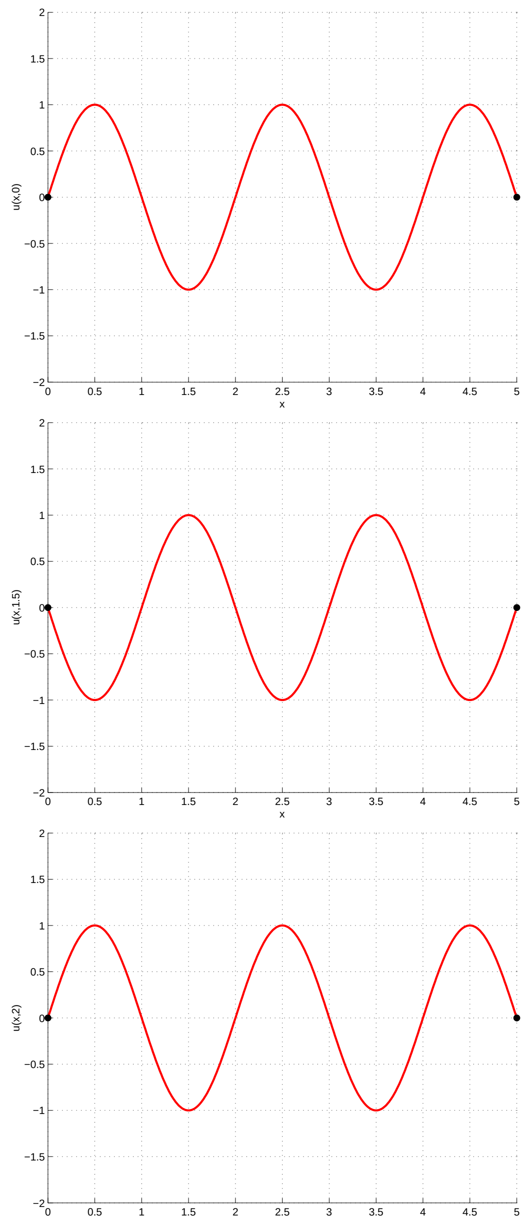
$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t). \tag{4.4.22}$$

Получихме вълна, която осцилира във времето, но точките $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ от струната не се движат(амплитудата в тях е винаги нула, u=0). Те се наричат възли(nodes). Точките $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ се наричат анти-възли(anti-nodes) – в тях амплитудата е максимална. Такива вълни се наричат стоящи вълни. Следният код визуализра третпенето на струната за време $t \in [0, 6]$ и създава *avi* файл с име *standingwaves.avi* :

```
function standing_waves

a=2; L=5;

x=0:1/100:L;
tmax=6;
t=0:tmax/100:tmax;

% създаване на avi файл
aviobj =
avifile('standingwaves.avi','compression','None');
fig=figure;

for k=1:length(t)
    clf;
    hold on;
y=sin((5*pi/L).*x).*cos(5*pi*a*t(k)/L);
plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(L,0,'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
axis([0 8  -1.5 1.5]);
grid on; title('standing waves');
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');

axis([0 L -2 2]);
grid on;
F = getframe(fig);

aviobj = addframe(aviobj,F); end close(fig);

aviobj = close(aviobj);
```

end

На Фиг.4.6 е показано положението на струната в моментите $t = 0$, $t = 1.5$ и $t = 2$.



Фигура 4.6: Стоящите вълни от Пример 4.4.2 в моментите $t = 0$, $t = 1.5$, $t = 2$.

Упражнения

1.4.1. Разгледайте смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ -3\pi < x < 2\pi, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0, & -3\pi < x < 2\pi, \\ u|_{x=-3\pi} = u|_{x=2\pi} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3(x - \frac{\pi}{2}), & x \in [-\pi, 0], \\ 0, & x \in [-3\pi, -\pi) \cup (0, 2\pi]. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер и метода на отраженията визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6]$.

1.4.2. Разгледайте смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ -3\pi < x < 2\pi, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0, & -3\pi < x < 2\pi, \\ u|_{x=-3\pi} = u|_{x=2\pi} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sin^3(x - \frac{3\pi}{2}), & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \in [-3\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

С помощта на метода на Фурие визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6]$.

1.4.3. Разгледайте смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ -7\pi < x < 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0, & -7\pi < x < 0, \\ u_x|_{x=-7\pi} = u_x|_{x=0} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\cos^3(x - \frac{5\pi}{2}), & x \in [-5\pi, -4\pi], \\ 0, & x \in [-7\pi, -5\pi) \cup (-4\pi, 0]. \end{cases}$$

С помощта на метода на Фурие визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6]$.

1.4.4. Разгледайте смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 2\pi, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < 2\pi, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=2\pi} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

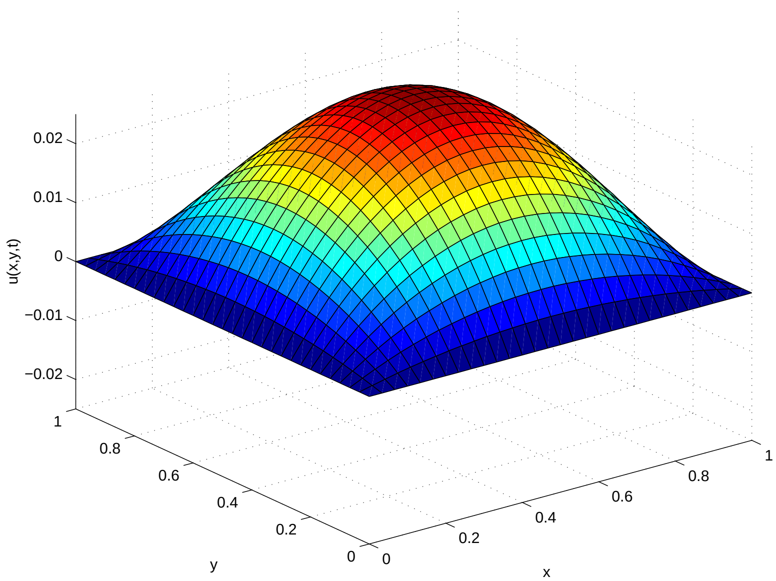
където

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sin^3(x - \frac{\pi}{2}), & x \in \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

С помощта на метода на Фурие визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6]$.

4.4.2 Трептене на правоъгълна мембрана.

Ще изучим движението на неразтеглива мембрана, която трепти над правоъгълник $D := \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ под действието на външна сила f.



Фигура 4.7: Правоъгълна мембрана.

Уравнението, което описва това движение е

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t),\ (x, y, t) \in G = D \times [0, +\infty), \qquad (4.4.23)$$

където $c = const > 0$.

Трептенето на мембраната ще бъде еднозначно определено, ако познаваме началното ѝ положение и началната ѝ скорост

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y),\ (x,y) \in D, \tag{4.4.24}$$

както и поведението на граничните точки на мембраната

$$u|_{\partial D} = \tau(x,y,t),\ t > 0. \tag{4.4.25}$$

Ще приложим метода на Фурие, когато $\varphi(x,y) \in C^3(D)$, $\psi(x,y) \in C^2(D)$, $\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0$, $f \equiv 0$ и $\tau \equiv 0$. Търсим ненулево решение на задачата (4.4.23), (4.4.24), (4.4.25) от вида

$$u(x,y,t) = v(x,y)T(t).$$

Заместваме в уравнението (4.4.23)при $f \equiv 0$ и получаваме

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)}{v(x,y)} = -\lambda = const.$$

Следователно за функцията $v(x,y)$ получаваме уравнението на Хемхолц

$$v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0,\ (x,y) \in D, \tag{4.4.26}$$

а за функцията $T(t)$ уравнението

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0,\ t > 0. \tag{4.4.27}$$

В уравнението (4.4.26) също разделяме променливите

$$v(x,y) = X(x)Y(y).$$

и намираме

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = \mu = const.$$

Тъй като $\partial D = \{x = 0,\ 0 \le y \le b\} \cup \{x = a,\ 0 \le y \le b\} \cup \{y = 0,\ 0 \le x \le a\} \cup \{y = b,\ 0 \le x \le a\}$, то последното равенство заедно с (4.4.25) при $\tau \equiv 0$ ни дават следните задачи на Щурм - Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0,\ 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \tag{4.4.28}$$

и

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0,\ 0 < y < b, \\ Y(0) = Y(a) = 0, \end{cases} \tag{4.4.29}$$

където $\nu = \lambda - \mu$.

Собствените стойности и собствените функции на задача (4.4.28) са

$$\mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \ X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{a}x, \ C_n = const, \ n \in \mathbf{N},$$

а тези на задача (4.4.29) са

$$\nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \ Y_m(y) = D_m \sin\frac{\pi m}{b}y, \ D_m = const, \ n \in \mathbf{N}.$$

Така получаваме следните решения на уравнението на Хемхолц, които удовлетворяват граничните условия $v_{n,m}(x,y)|_{\partial D} = 0$

$$\begin{gathered} \lambda_{n,m} = \left(\tfrac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{\pi m}{b}\right)^2, \\ v_{n,m}(x,y) = E_{n,m} \sin\tfrac{\pi n}{a}x \sin\tfrac{\pi m}{b}y, \ E_{n,m} = const, \ n,m \in \mathbf{N}. \end{gathered}$$

При $\lambda = \lambda_{n,m}$ решенията на уравнението (4.4.27) са

$$T_{n,m}(t) = a_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}ct + b_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}ct, \ n,m \in \mathbf{N}.$$

Решението на изходната задача (4.4.23), (4.4.24), (4.4.25) ще търсим във вида

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \textstyle\sum_{n,m=1}^{\infty} v_{n,m}(x,y)T_{n,m}(t) \\ &= \textstyle\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}ct + B_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}ct\right)\sin\tfrac{\pi n}{a}x \sin\tfrac{\pi m}{b}y, \end{aligned} \tag{4.4.30}$$

където $A_{n,m} = a_{n,m}E_{n,m}, \ B_{n,m} = b_{n,m}E_{n,m}$.

Коефициентите $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ еднозначно се определят от началните условия

$$\varphi(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}\sin\frac{\pi n}{a}x \sin\frac{\pi m}{b}y$$

и

$$\psi(x,y) = u_t(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{n,m}}cB_{n,m}\sin\frac{\pi n}{a}x \sin\frac{\pi m}{b}y$$

понеже функциите $\{\sin\frac{\pi n}{a}x \sin\frac{\pi m}{b}y, \ n,m \in \mathbf{N}\}$ образуват пълна и ортогонална система в $L_2(D)$. Следователно

$$A_{n,m} = \frac{4}{ab}\int_D \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{a}x \sin\frac{\pi m}{b}y\,dxdy,$$

и

$$B_{n,m} = \frac{4}{abc\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_D \psi(x) \sin \frac{\pi n}{a} x \, \sin \frac{\pi m}{b} y \, dxdy.$$

Може да се провери, че с тези коефициенти $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ (4.4.30) дава решение на изходната задача.

Пример 4.4.3 *Да разгледаме трептенето на правоъгълна мембрана, което се описва със смесената задача*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \; 0 < x < \pi, \, 0, y < \pi, \, t > 0, \\ u|_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y, \; u_t|_{t=0} = 5 \sin 3x \sin 4y, \; x, \, y \in (0, \pi), \\ u|_{x=0} = 0, \; u|_{x=\pi} = 0, \; 0 < y < \pi, \, t > 0, \\ u|_{y=0} = 0, \; u|_{y=\pi} = 0, \; 0 < x < \pi, \, t > 0, \end{cases} \tag{4.4.31}$$

Следвайки описания метод на Фурие достигаме до следното решение

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} t + B_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} t \right) \sin nx \, \sin my,$$

където $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2$,

$$A_{n,m} = \frac{12}{\pi^2} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx \int_0^\pi \sin 2y \sin my \, dy,$$

$$B_{n,m} = \frac{20}{\pi^2 \sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^\pi \sin 3x \sin nx \, dx \int_0^\pi \sin 4y \sin my \, dy.$$

Следователно $A_{1,2} = 3$, $B_{3,4} = 1$ и всички останали коефициенти са нули. Решението може да бъде записано в явен вид

$$u(x, y, t) = 3 \cos \sqrt{5} t \sin x \sin 2y + \sin 5t \sin 3x \sin 4y.$$

Следния код визуализира трептенето на мембраната за време $t \in [0, 6]$

```
function rec_membrana

% създаване на мрежа от точки
tmax=6;
```

```
t=0:tmax/50:tmax;
x=0:pi/50:pi;
y=0:pi/50:pi;
[X,Y]=meshgrid(x,y);


% чертане на решението
  for k = 1:length(t)
  Z=solution(X,Y,t(k));
  surf(X,Y,Z);
  grid on;
axis([0 pi 0 pi -3 3]);
xlabel('x');
ylabel('y');
  zlabel('u(x,y,t)');

M(k)=getframe;
end
movie(M,2)

% пресмятане стойностите на решението
  function y=solution(x,z,t)
  y=3.*cos(sqrt(5).*t).*sin(x).*sin(2.*z)+
  sin(5.*t).*sin(3.*x).*sin(4.*z);
end
end
```

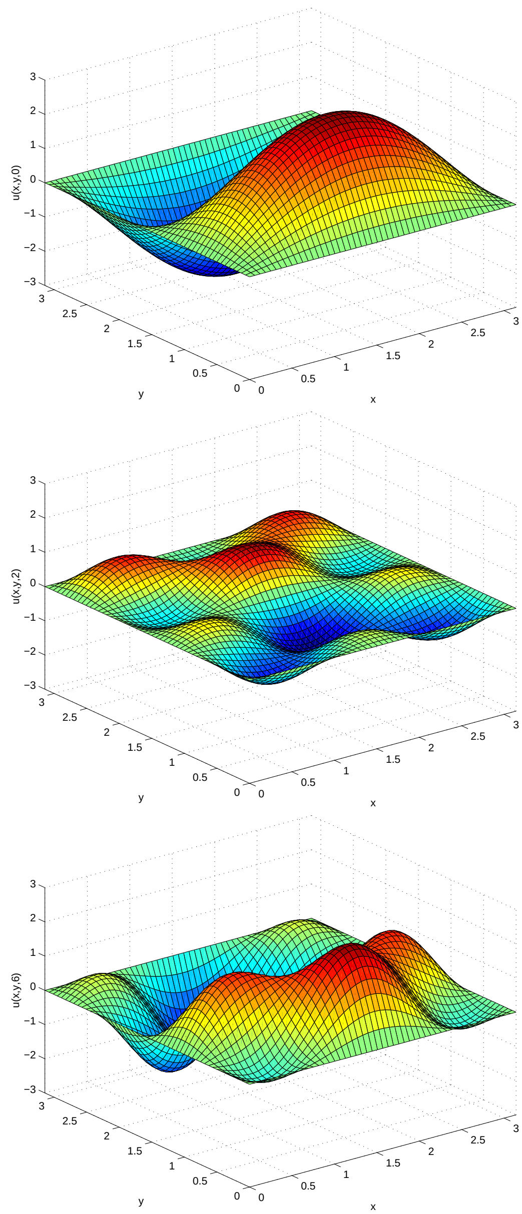
На Фиг. 4.8 е показана мембраната в моментите $t = 0$, $t = 2$, $t = 6$

Пример 4.4.4 *Да разгледаме трептенето на правоъгълна мембрана, което се описва със смесената задача*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0, y < 1,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = xy(1-x)(1-y),\ x,\ y \in (0,1), \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\ 0 < y < 1,\ t > 0, \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=1} = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \end{cases} \tag{4.4.32}$$

Следвайки описания метод на Фурие достигаме до следното решение

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} t + B_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} t \right) \sin \pi n x \, \sin \pi m y,$$



Фигура 4.8: Мембраната от Пример 4.4.3 в моментите $t = 0$, $t = 2$, $t = 6$.

където $\lambda_{n,m} = \pi^2(n^2 + m^2)$, $A_{n,m} = 0$,

$$B_{n,m} = \frac{4}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^1 x(1-x)\sin \pi n x \, dx \int_0^1 y(1-y)\sin \pi m y \, dy.$$

Ще визуализираме решението, като използваме следното приближение на решението $u(x, y, t)$

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{20} B_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} t \sin \pi n x \, \sin \pi m y,$$

Следния код визуализира трептенето на мембраната за време $t \in [0, 6]$

```
function rec_membrana_1

% създаване на мрежа от точки
tmax=6;
t=0:tmax/50:tmax;
x=0:1/30:1;
y=0:1/30:1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);

% чертане на решението

for k=1:length(t)
Z=solution(X,Y,t(k));
surf(X,Y,Z);
grid on;
axis([0 1 0 1 -1/40 1/40]);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u(x,y,t)');
 M(k)=getframe;
 end
 movie(M,2)

% пресмятане стойностите на решението

 function y=solution(x,z,t)
y=0; for n=1:20
     for m=1:20
          lambda=pi^2*(n^2+m^2);
          y=y+Bnm(n,m)*sin(sqrt(lambda)*t)
          .*sin(n*pi.*x).*sin(m*pi.*z);
     end
end end

% пресмятане на коефициентите Bnm
```

```
function y=Bnm(n,m)
x=0:1/100:1;
lambda=pi^2*(n^2+m^2);
y=(4/sqrt(lambda))*trapz(x,x.*(1-x)
.*sin(n*pi.*x))*trapz(x,x.*(1-x).*sin(m*pi.*x));
end

end
```

На Фиг. 4.9 е показана мембраната в моментите $t = 0$, $t = 1$, $t = 6$

Упражнения

1.6.1. Разгледайте трептенето на правоъгълна мембрана, което се описва със смесената задача

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} - 4u_{yy} = 0,\ 0 < x < 2,\ 0, y < 2,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2y^2(4 - 2x - 2y + xy)^2,\ u_t|_{t=0} = 0,\ x,\ y \in (0, 2), \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2} = 0,\ 0 < y < 2,\ t > 0, \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=2} = 0,\ 0 < x < 2,\ t > 0, \end{cases}$$

Визуализирайте трептенето на мембраната за време $t \in [0, 6]$.

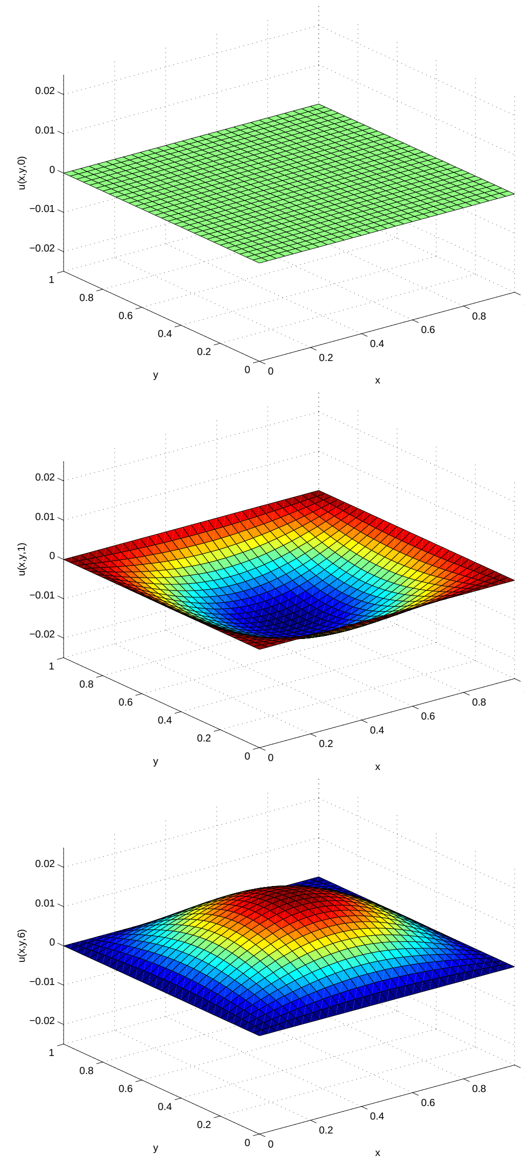
1.6.2. Разгледайте трептенето на правоъгълна мембрана, което се описва със смесената задача

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0, y < 1,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (1 - x - y + xy)\sin \pi x \sin \pi y,\ x,\ y \in (0, 1), \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\ 0 < y < 1,\ t > 0, \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=1} = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \end{cases}$$

Визуализирайте трептенето на мембраната за време $t \in [0, 6]$.

4.5 Числено решаване на смесената задача с диференчни методи.

Следващата наша цел е да визуализираме движението на ограничена струна за период от време $[0, T]$, когато ѝ действа външна сила $f(x, t)$, а



Фигура 4.9: Мембраната от Пример 4.4.4 в моментите $t = 0$, $t = 1$, $t = 6$.

краищата на струната се движат по определен закон. Математическият модел на движението на такава струна е следната смесена задача:

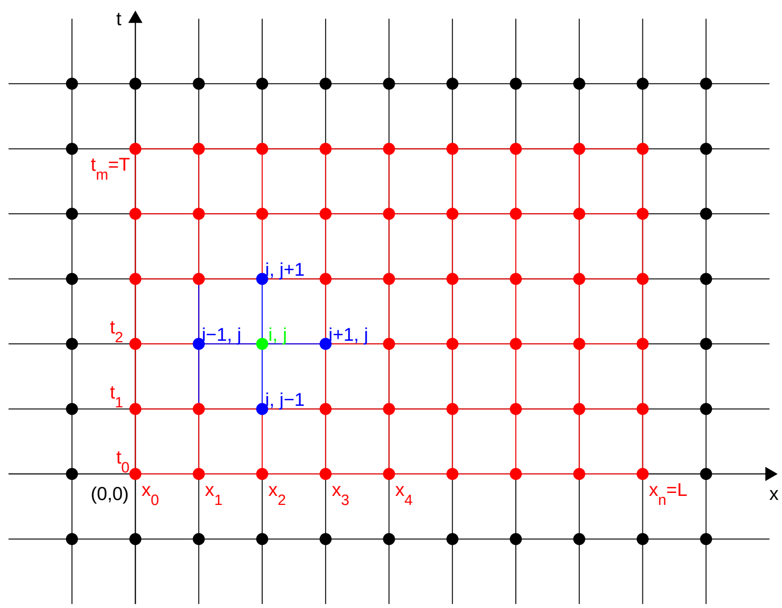
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega := \{0 < x < L,\ 0 < t < T\}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < L, \\ u|_{x=0} = \mu(t),\ u|_{x=L} = \nu(t),\ 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$, $\mu, \nu \in C^2[0, T]$, $f(x, t) \in C^2(\bar{\Omega})$ и са изпълнени условията за съгласуване

$$\mu(0) = \varphi(0),\ \mu'(0) = \psi(0),\ \mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0, 0),$$
$$\nu(0) = \varphi(L),\ \nu'(0) = \psi(L),\ \nu''(0) = a^2\varphi''(L) + f(L, 0).$$

В областта Ω ще въведем мрежа $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ със стъпки h и τ , където

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{x_i = ih,\ h = \frac{L}{n},\ i = 0, 1, 2, ..., n,\ n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau,\ \tau = \frac{T}{m},\ j = 0, 1, 2, ..., m,\ m \geq 2,\ m \in \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$



Фигура 4.10: Правоъгълна мрежа и шаблонът "кръст".

Точките (x_i, t_j) се наричат възли на мрежата, а при фиксирано j точките $(x_i, t_j), i = 0, 1, 2, ..., n$ образуват j – тия слой на мрежата.

Нека за по-кратко означим

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j),\ f_{i,j} = f(x_i, t_j),$$
$$\varphi_i = \varphi(x_i),\ \psi_i = \psi(x_i),\ \mu_j = \mu(t_j),\ \nu_j = \nu(t_j).$$

Ще намерим приближено (с определена грешка) стойностите на решението $u(x, t)$ във възлите на въведената мрежа, като апроксимираме производните с подходящи диференчни частни. За целта ще използваме формулата на Тейлър

$$u(x+h,t) = u(x,t) + u_x(x,t)\cdot h + O(h^2)$$

за да получим

$$u_x(x,t) = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + O(h)$$

или

$$u_x(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} + O(h).$$

За втората производна ще имаме

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2).$$

За апроксимация на вторите производни във вълновото уравнение използваме

$$u_{tt}(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + O(\tau^2),$$
$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2),$$

ако $u(x,t) \in C^4(\Omega)$. По този начин за апроксимиране на вълновото уравнение с локална грешка на апроксимация $O(h^2+\tau^2)$ във вътрешните възли на мрежата получаваме диференчните уравнения

$$\begin{gathered}\tfrac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\tau^2} - a^2\tfrac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j},\\ i=1,2,...,n-1,\ j=1,2,...,m-1.\end{gathered} \tag{4.5.2}$$

От първото начално условие получаваме

$$u_{i,0} = \varphi_i,\ i=0,1,...,n, \tag{4.5.3}$$

а от второто

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\tau} = \psi_i,\ i=0,1,...,n, \tag{4.5.4}$$

където използвахме

$$u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau).$$

Апроксимация на второто условие с локална грешка на апроксимация $O(\tau^2)$ е следната:

$$\frac{u_{i,1}-u_{i,0}}{\tau} - \frac{\tau}{2}\left(a^2\frac{u_{i+1,0}-2u_{i,0}+u_{i-1,0}}{h^2} + f_{i,1}\right) = \psi_i, \tag{4.5.5}$$

$$i = 1, 2, ..., n-1. \tag{4.5.6}$$

Граничните условия ни дават

$$u_{0,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 1, 2, ..., m. \tag{4.5.7}$$

От равенството (4.5.2) можем да изразим $u_{i,j+1}$ и да получим

$$u_{i,j+1} = 2(1-c^2)u_{i,j} + c^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j},$$
$$i = 1, 2, ..., n-1,\ j = 1, 2, ..., m-1,$$

където $c = \frac{a\tau}{h}$.

Вижда се, че стойностите на u в $j+1$-тия слой се определят чрез стойностите му в предните два слоя j и $j-1$. По-точно стойността в точката $i, j+1$ се определя от стойностите в останалите четири точки от "кръста" $i-1, j;\ i, j\,; i+1, j;\ i, j-1$. Така знаейки стойностите в първите два слоя можем да намерим стойностите във всички възли на мрежата. Затова полученате диференчна схема се нарича явна трислойна схема по шаблона "кръст":

$$u_{i,0} = \varphi_i,\ i = 0, 1, ..., n, \tag{4.5.8}$$
$$u_{i,1} = \varphi_i + \frac{a^2\tau^2}{2h^2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2}f_{i,2} + \tau\psi_i,\ i = 1, 2, ..., n-1,$$
$$u_{0,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 1, 2, ..., m,$$
$$u_{i,j+1} = 2(1-c^2)u_{i,j} + c^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j},$$
$$i = 1, 2, ..., n-1,\ j = 1, 2, ..., m-1.$$

Разбира се с описаната диференчна схема ще намерим приближено стойностите на решението във възлите на мрежата. По тези стойности можем да визуализираме движението на струната. Възниква въпросът след като получените стойностите на u в третия слой или още във втория са само приближение на истинските му стойности, то дали грешката, която правим по този начин няма да нараства и стойностите в следващите слоеве да се отличават значително от истинските. Отрицателният отговор на този въпрос се дава от коректността на разглежданата задача. Освен това стойностите в точката i, j зависят от точките от "кръста" в предните два слоя, те пък от своя страна зависят от точките от съответните "кръстове" в предишните за тях два слоя и т.н.т. Получаваме, че стойността в точката i, j зависи от стойностите в точките от първия слой намиращи се между точките $\max(i-j, 0), 0$ и $\min(i+j, L), 0$. Знаем, че стойностите на истинското решение на диференциалната задача в точката (x_i, t_j) зависят от стойностите на началните данни в точките от отсечката $\{0 \leq x \leq L,\, y = 0\}$ заключени между пресечните точки на тази права с двете характериситки на уравнението на струната, минаващи през точката (x_i, t_j). Тези точки имат координати $(x_i - at_j, 0)$ и $(x_i + at_j, 0)$. Следователно за да можем да определим стойностите на решението на диференчната схема в точката i, j трябва

$$x_{i-j} \leq x_i - at_j < x_i + at_j \leq x_{i+j},\ i \geq j.$$

Понеже $x_i = ih,\ t_j = j\tau$, то получаваме

$$(i-j)h \leq ih - a\tau j < ih + a\tau j \leq (i+j)h,\ i \geq j.$$

Откъдето получаваме условието

$$c = \frac{a\tau}{h} \leq 1. \tag{4.5.9}$$

В следващия пример, ще визуализираме трептене на струна по описания метод и ще покажем, че ако условието (4.5.9) не е изпълнено, то диференчната схема не дава адекватен модел на това движение

Пример 4.5.1 *Ще разгледаме трептенето на ограничена струната с фиксиран ляв край. Нека десния край се движи по определен закон, зададен в следната смесена задача:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ 0 < x < 4\pi,\ 0 < t < 20, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 < x < 4\pi, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=4\pi} = \sin^3 t,\ 0 < t < 20, \end{cases} \tag{4.5.10}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & \pi \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x \in [0, \pi) \cup (2\pi, 4\pi], \end{cases} \tag{4.5.11}$$

Въвеждаме диференчна схема по описания по-горе начин. Нека стъпката по x е $h = \pi/25$, а стъпката по t е $\tau = 2/25$. Понеже $a = 1$, то $c = \frac{a\tau}{h} = \frac{2}{\pi} < 1$ и условието (4.5.9) е изпълнено. Тъй като условията за съгласуване са изпълнени, то можем да запишем диференчната схема (4.5.8) по следния начин

$$\begin{gathered}
u_{i,0} = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., n-1,\\
u_{i,1} = \varphi_i + \frac{a^2\tau^2}{2h^2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} f_{i,2} + \tau\psi_i,\ i = 1, 2, ..., n-1,\\
u_{i,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 0, 1, ..., m,\\
u_{i,j} = 2(1 - c^2)u_{i,j-1} + c^2(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j-1},\\
i = 1, 2, ..., n-1,\ j = 2, 3, ..., m.
\end{gathered}$$

Трептенето на струната се визуализира чрез следния примерен код, който създава *avi* файл с име *endpointmoving.avi*.

```
function avi_endpoint_moving

clear all;
L=4*pi;
T=20;
h=L/100;
tau=T/250;
x=0:h:L; a=1;
t=0:tau:T;
c=(tau*a)/h;

% диференчна схема
for j=1:length(t)
for i=1:length(x)
if i>1 & i<length(x)
if j==1
u(i,j)=phi(x(i));
elseif j==2

u(i,j)= (1-c^2)*phi(x(i))
+c^2/2*(phi(x(i+1))+phi(x(i-1)));
else
u(i,j)=2*(1-c^2)*u(i,j-1)
+c^2*(u(i+1,j-1)+u(i-1,j-1))-u(i,j-2);
end
elseif i==1 u(i,j)=0;
else u(i,j)=ni(t(j));
end
end
```

```
end

% създаване на avi файл
aviobj =
avifile('endpointmoving.avi','compression','None');
fig=figure;

for k = 1:length(t)
     clf;
     hold on;
    y=u(:,k);
    plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
    plot(x(length(x)),y(length(y)),'ko',
    'MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    grid on;
    axis([0 4*pi -3 3]);
    xlabel('x');
  ylabel('u(x,t)');

  F = getframe(fig);


aviobj = addframe(aviobj,F);
end
close(fig);

aviobj = close(aviobj);

% начална позиция
function y=phi(x)
  if x>=pi & x<=2*pi
  y=sin(x)^4;
else y=0;
end
end

% движението на левия край
function y=ni(t)
 y=sin(t)^3;
end
```

end

На Фиг. 4.11 е показано положението на струната в моментите $t = 0$, $t = 1$ и $t = 4$.

Нека стъпката по x е $h = \pi/25$, а стъпката по t е $\tau = 5/25$. Понеже $a = 1$, то $c = \frac{a\tau}{h} = \frac{5}{\pi} > 1$ и условието (4.5.9) не е изпълнено. На Фиг.4.12 е показано как ще изглежда решението на описаната диференчна схема в момента $t = 10$. Очевидно то няма нищо общо с истинското решение на смесената задача (4.5.10) и описаното с нея трептене на струна.

Пример 4.5.2 *Ще разгледаме трептенето на ограничена струната със закрепени краища под действието на периодична външна сила. Нека движението на струната се задава със следната смесена задача:*

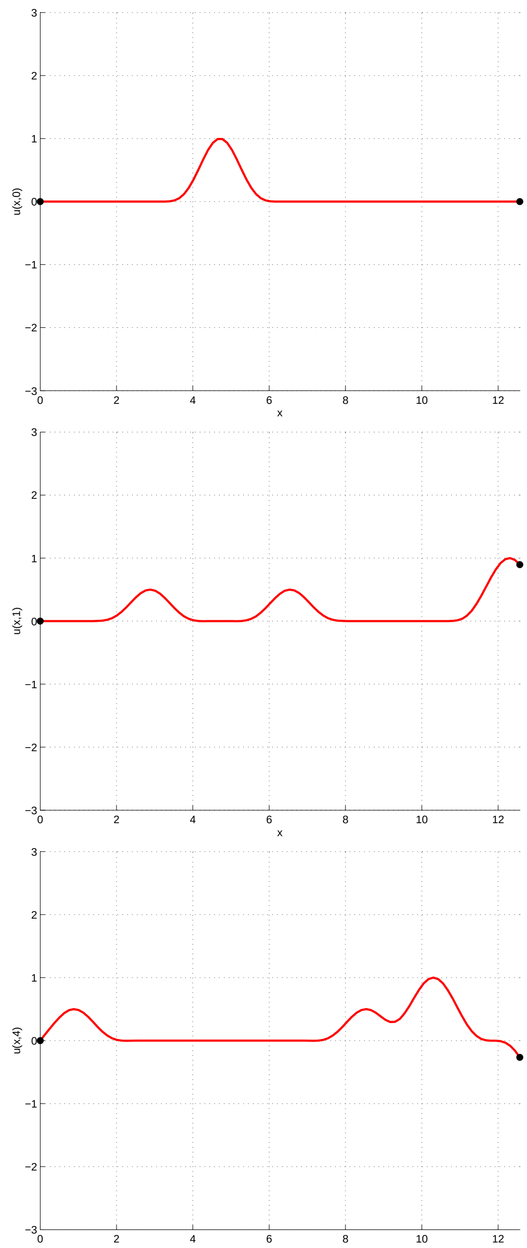
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{5}x^2(x-\pi)^2\sin(\omega t), \ 0 < x < \pi, \ 0 < t < 12, \\ \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0, \ 0 < x < \pi, \\ \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=\pi} = 0, \ 0 < t < 12, \end{cases} \tag{4.5.12}$$

където $\omega > 0$ е константа.

Честотите на собствените трептения на закрепената струната са $\omega_k = \frac{ak\pi}{L} = k$, $k \in \mathbf{N}$. Ако честота ω на външната сила съвпада с една от тези честоти се получава резонанс. В този случай амплитудата на трептене на струната нараства неограничено при нарастване на времето.

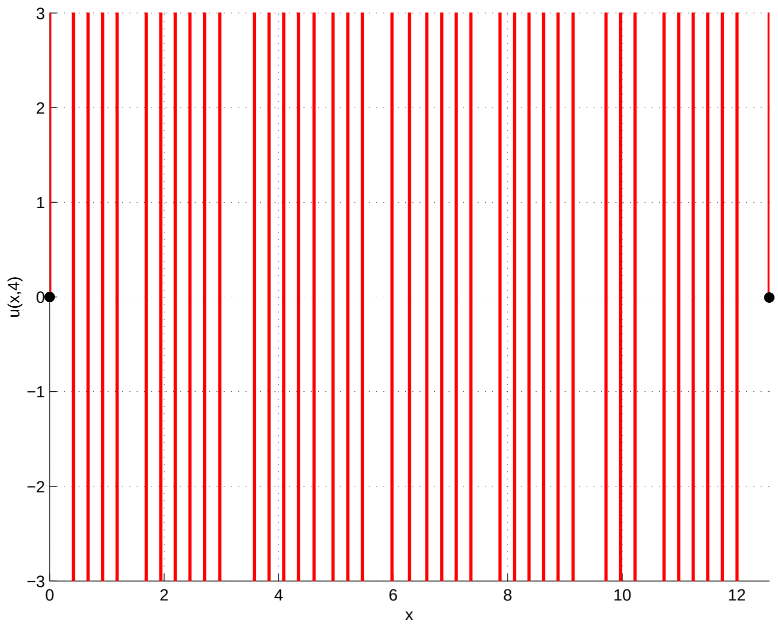
Ще визуализираме трептенето на струната при $\omega = 1/2$ и $\omega = \omega_1 = 1$. Нека стъпката по x е $h = \pi/80$, а стъпката по t е $\tau = 6/175$. Понеже $a = 1$, то $c = \frac{a\tau}{h} \approx 0,8731 < 1$ и условието (4.5.9) е изпълнено. Трептенето на струната се визуализира чрез следния примерен код, който създава *avi* файл с име *resonance.avi*.

```
function forced_string
clear all;
L=pi; T=12;
h=L/80; tau=T/350;
x=0:h:L; a=1;
t=0:tau:T;
c=(tau*a)/h;

% диференчна схема
```



Фигура 4.11: Струната Пример 4.5.1 в моментите $t = 0$, $t = 1$, $t = 4$.

```
for j=1:length(t)
for i=1:length(x)
if i>1 & i<length(x)

if j==1 |j==2 u_{i,j}= 0;
```



Фигура 4.12: Струната от Пример 4.5.1 в момента $t = 4$ при $c = \frac{5}{\pi} > 1$.

```
else
u(i,j)=2*(1-c^2)*u(i,j-1)+c^2*(u(i+1,j-1)
+u(i-1,j-1))-u(i,j-2)+tau^2*f(x(i),t(j-1));
end
else u(i,j)=0;
end
end
end

% създаване на avi файл
aviobj =
avifile('resonance.avi','compression','None');
fig=figure;
for k = 1:length(t)
     clf;
    hold on;
    y=u(:,k);
      plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
    plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
     plot(L,0,'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
     grid on;
```

```
    axis([0 pi -6 6]);
    title('forced string');
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
 F = getframe(fig);


aviobj = addframe(aviobj,F);
end
close(fig);

aviobj = close(aviobj);


% дясна страна на уравнението
function y=f(x,t)
w=1;
 y=x^2*(x-pi)^2*sin(w*t)/5;
end

end
```

На Фиг. 4.13 е показано положението на струната при $\omega = 1/2$ в моментите $t = 0$, $t = 9$.

При резонанс ($\omega = 1$) в същия момент $t = 9$ положението на струната е показано на Фиг. 4.14. Очевидна е разликата в амплитудата на трептенето в двата случая.

Упражнения

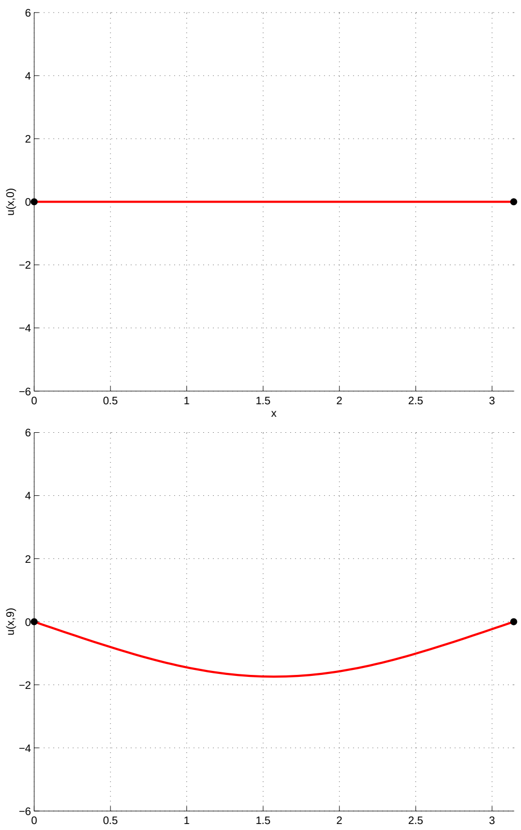
1.5.1. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin t, \ x \in \mathbf{R}, \, t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\cos^3(x - \frac{\pi}{2}), & x \in [-\pi, 0], \\ 0, & x \in [-3\pi, -\pi) \cup (0, 2\pi]. \end{cases}$$

С помощта на формулата на метода на Дюамел визуализирайте трептенето на струната за $t \in [0, 6]$.



Фигура 4.13: Струната от Пример 4.5.2 в моментите $t = 0$, $t = 9$.

1.5.2. Разгледайте смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 5\pi, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < 5\pi, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5\pi} = t^5, & t > 0, \end{cases}$$

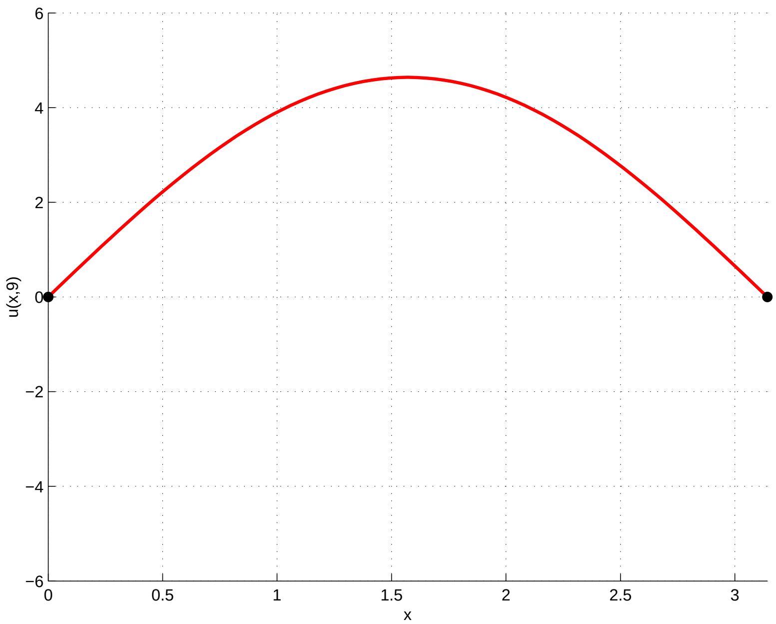
където

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3(x + \frac{\pi}{2}), & x \in [\pi, 2\pi], \\ 0, & x \in (0, \pi) \cup (2\pi, 5\pi]. \end{cases}$$

Решете приближено задачата за t в интервала [0,2] с помощта на явна диференчна схема с подходяща стъпка. Направете анимация от графиките на функциите в отделните слоеве.

1.5.3. Разгледайте смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 3\pi, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < 3\pi, \\ u|_{x=0} = t^3,\ u_x|_{x=3\pi} = 0, & t > 0, \end{cases}$$



Фигура 4.14: Струната от Пример 4.5.2 в моментите $t = 9$ при резонанс.

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3(x-\pi), & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 3\pi). \end{cases}$$

Решете приближено задачата за t в интервала [0,2] с помощта на явна диференчна схема с подходяща стъпка. Направете анимация от графиките на функциите в отделните слоеве.

Глава 5

Еволюционни уравнения и процеси на дифузия.

5.1 Задача на Коши за уравнението на топлопроводността

Да разгледаме процесът на разпространение на топлина по тънък еднороден прът. Ще предполагаме, че няма топлообмен през околната повърхнина на пръта и в точките от произволно взето сечение температурата е постоянна. Нека си мислим, че прътът е разположен по оста x и $u(x,t)$ е температурата на сечението през точка x в момент t. Разпространението на топлина става от областите с по-висока температура към тези с по-ниска температура и съгласно допускането може да става само по направление на оста на пръта. Затова можем да си мислим че прътът е безкрайно тънък, а x е координатата на точка от него. Законът, който описва изменението на температурата във времето се дава с частното диференциално уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

което се нарича уравнение на топлопроводността. Положителната константа a наричаме коефициент на топлопроводност.

Най-напред ще предположим, че прътът е много дълъг и можем да пренепрегнем топлообменът през краищата му. Така стигаме до следната задача на Коши

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in G, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

където началната температура φ е непрекъсната и ограничена функция, а G е безкрайната ивица $G = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$.

Решение на задачата на Коши ще наричаме ограничена в G функция $u(x,t)$, която удовлетворява уравнението и началното условие.

Единствеността на решението на задачата на Коши се установява с помощта на следния вариант на принципа за максимума (минимума).

Нека $u(x,t)$ е решение на задачата на Коши, формулирана по-горе, и нека за всяко x са в сила неравенствата

$$m \leq \varphi(x) \leq M.$$

Тогава за $(x,t) \in \overline{G}$ имаме

$$m \leq u(x,t) \leq M.$$

От физична гледна точка това означава, че ако в начален момент зададем някакво начално разпределение на температурата по "безкрайно дългия"прът, в следващите моменти температурата ще започне да "се изглажда като се стреми да заеме някакви усреднени стойности.

Задачата е коректна, защото се оказва, че притежава решение и то се дава в явен вид с формулата

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \quad 0 < t < T, \tag{5.1.1}$$

която се нарича още *интеграл на Поасон.* Тя може се запише в друг, в някои случаи по-удобен за изчисления, вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta, \tag{5.1.2}$$

който се получава след като направим субституцията $\xi = x + 2a\sqrt{t}\eta$ (x и $t > 0$ са фиксирани). В новата формула отсъства t от знаменателя и се вижда, че решението $u(x,t)$ отговаря на изискването за ограниченост, защото ако $|\varphi| \leq A$, то следва

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} |\varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta)| d\eta \leq \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = A.$$

Тук използвахме, че

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}, \tag{5.1.3}$$

което е известно от курса по математически анализ.

От формулата на Поасон може да се направи едно много важно заключение. Да допуснем, че $\varphi(x)$ е непрекъсната неотрицателна функция, която се анулира извън някакъв произволно малък интервал $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ и удовлетворява условието $\varphi(x) > 0$ за $|x - x_0| < \epsilon$. Тогава прилагайки формулата (5.1.1), имаме за всяко $t > 0$ и всяко x

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi > 0.$$

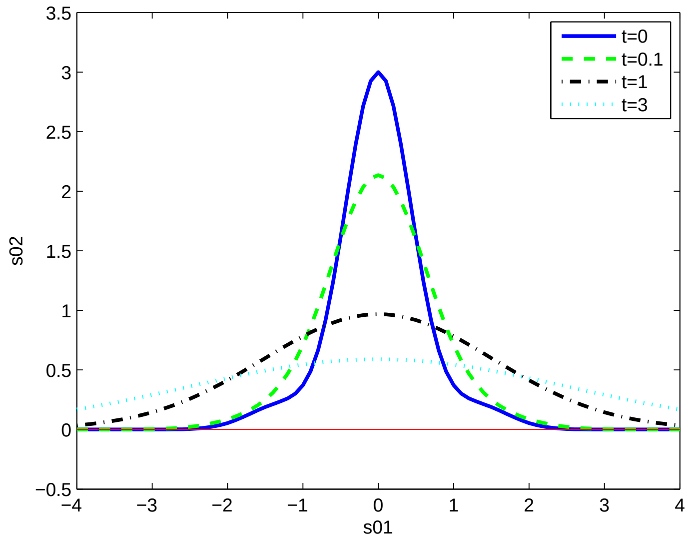
Излиза, че ако вземем точка (x_1, t_1), където t_1 е произволно малко, а x_1 е произволно отдалечено от x_0, то $u(x,t) > 0$. С други думи, колкото и голямо да е разстоянието между точките x_1 и x_0 от пръта, топлината, която започва да се разпространява от интервала $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$, моментално достига до точката x_1. Тогава според формула (5.1.1) *топлината се разпространява с безкрайно голяма скорост.*

Тези разисквания показват, че уравнението описва физическия процес само приблизително. Все пак за практиката е достатъчно точно, защото ако моментът от време t_1 е много малък, а точката x_1 е много далече от x_0, ще имаме $u(x,t) \approx 0$, тъй като числото t_1 се намира в знаменателя на експонентата, а x_1 — в числителя на квадрат. Например ако $t_1 = 0.1$ и $x_1 = 10$ (а това не са много екстремни стойности) , то $e^{\frac{x_1^2}{t_1}} \approx 10^{-440}$. Ако хванем един много дълъг прът за единия край и другия го сложим в огъня, ще мине доста време докато усетим топлината с ръката си. Това не значи, че формулата не описва добре процеса, просто t трябва да е доста голямо, за да не бъде приблизително равна на нула изчислената промяната в стойностите на температурата в далечния край на пръта .

Ще визуализираме разгледаната гранична задача и нейните свойства с един пример на Matlab. Да вземем например:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), t \in (0,3), \\ &u|_{t=0} = e^{-x^2}(2 + \cos 3x), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Функцията от началното условие е изобразена на фиг. 5.1 с плътна линия. Понеже имаме $-x^2$ в експонентата, тази функция приблизително с точност от висок порядък може да се разглежда като нулева извън някакъв интервал $[-\epsilon, \epsilon]$. Ние ще изчислим решението посредством фор-



Фигура 5.1: Профил на решението в четири различни момента от време.

мула (5.1.2), т. е. имаме

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-[(1+4t)\eta^2 + 4\sqrt{t}x\eta + x^2]}[2+\cos(3x+6\sqrt{t}\eta)]d\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t,\eta)d\eta,$$

където

$$\psi(x,t,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-[(1+4t)\eta^2 + 4\sqrt{t}x\eta + x^2]}[2+\cos(3x+6\sqrt{t}\eta)].$$

Ще изобразим решението в крайната област $x \in [-4,4]$, $t \in [0,3]$. Ясно е, че за да пресметнем всяка конкретна стойност на $u(x,t)$, трябва да си фиксираме съответна точка (x,t) в подинтегралната функция $\psi(x,t,\eta)$ и да интегрираме така получената функция на една променлива. Ние ще интегрираме числено с помощта на *quadl* , което ще ни даде точност от порядъка на 10^{-6}. Разбира се, численo интегриране може да се извърши само в крайни граници и ние ще пресметнем $\int\limits_{-40}^{40} \psi(x,t,\eta)d\eta$ вместо $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t,\eta)d\eta$. Може да се провери, че ако вземем за граници на интегриране числа многократно по-големи от -40 и 40, ще получим решение, което нищожно се различава от другото. Това е следствие от факта, че въпреки безкрайната скорост на разпространение на топлината, в точките далече от $x=0$ температурата е много близка до нула и интегрирането на тези стойности (т. е. интегрирането по η, където $|\eta| > 40$) има ефект много по-малък от порядъка на точност, с който ние работим.

```
%Дефиниране на (x,t)
x=-4:.1:4; t=0:.1:3;
%Граници на интегриране
eta1=-40; eta2=40;
%Подинтегралната функция
% psi=e^(-eta^2)*phi(x+2sqrt(t)eta)/sqrt(pi)
psi=@(x,t,eta) [exp(-((1+4*t).*eta.^2+4*sqrt(t)...
.*x.*eta+x.^2)).*(2+cos(3*x+6*sqrt(t).*eta))/sqrt(pi)];
%Дефинираме, че u(x,t) е (засега празна) (X,T) матрица
X=length(x); T=length(t); u=zeros(X,T);

%Попълване на матрицата u(x,t) със стойности (решения)
for k=1:X
    for n=1:T
%Рестрикция на подинтегралната функция за фикс. x и t
        f=@(eta) [psi(x(k),t(n),eta)];
%Числено интегриране по eta за фиксирано x и t
        u(k,n)=quadl(f,eta1,eta2);
    end;
end;

%Анимация (приготвяне на кадрите)
for m=1:T
plot([-4 4],[0 0],'r'); hold on;
plot(x,u(:,m),'LineWidth',2); hold off;
axis([-4 4 -0.5 3.5]);
daspect([1 1 1]);
xlabel('Дължина');
ylabel('Температура');
M(m)=getframe;
end;
%Анимация (прожектиране)
movie(M,1,3);
```

Получената анимация ни показва как се "изглажда"температурата. На фиг. 5.1 са изобразени решенията в четири фиксирани момента от време. Ясно се вижда, че е изпълнен принципът на максимума: решението заема екстремалните си стойности в момента $t = 0$. Може да се забележи, че за времето от $t = 0$ до $t = 1$ температурата в много по-голяма степен се е променила в сравнение с тази от момента $t = 1$ до момента $t = 3$.

5.2 Метод на Фурие за смесената задача

Да разгледаме процеса на топлопренасяне в случая на прът с дължина l, в двата края на който се поддъжа нулева температура. Стигаме до граничната задача

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{в} \quad \Pi := \{(x,t) : 0 < x < l, \quad 0 < t < T\}, && (5.2.5) \\ u|_{t=0} &= \phi(x), \quad 0 \le x \le l, && (5.2.6) \\ u|_{x=0} &= u|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T, && (5.2.7) \end{aligned}$$

където $\phi \in C^1([0,l])$.

Получената задача наричаме смесена задача за уравнението на топлопроводноста, защото освен начално условие имаме и нулеви гранични условия зададени в краищата на пръта.

Както при изследването на граничната задача за уравнението на струната, отначало ще намерим безброй много решения на уравнението (5.2.5), които се нулират при $x = 0$ и $x = l$, а след това ще покажем, че при подходящ избор на константите, участващи в тях, функцията

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

е решение на задачата (5.2.5–5.2.7).

Търсейки решения на (5.2.5) от вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, получаваме

$$T'(t)X(x) = X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = const.$$

От тук следват равенствата

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, && (5.2.8) \\ T' - \lambda T &= 0. && (5.2.9) \end{aligned}$$

От своя страна граничните условия

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

ни дават

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{5.2.10}$$

защото в противен случай $u(x,t)$ би се нулира тъждествено.

Както бе показано в задачата за уравнението на струната, единствените нетривиални решения на задачата (5.2.8), (5.2.10) са от вида

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

които са възможни при $\lambda = -(\pi n/l)^2$. Интегрирайки (5.2.9), получаваме

$$T_n(t) = B_n e^{-(\pi n/l)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

По този начин получихме функциите

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-(\pi n/l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Те удовлетворяват уравнението (5.2.5) и граничните условия (5.2.7).

Нека сега да построим безкрайния ред

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\pi n/l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{5.2.11}$$

с неопределени коефициенти и да допуснем, че е равномерно сходящ в П и е решение на изходната гранична задача (5.2.5–5.2.7) (по-долу ще се види, че тези предположения са верни). Тогава полагайки $t = 0$, намираме

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{5.2.12}$$

От предположението за равномерна сходимост на реда следва , че C_n са фуриеровите коефициенти на нечетното продължение на $\phi(x)$ в интервала $[-l, l]$, т. е.

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \tag{5.2.13}$$

Така формално получихме решение във вид на безкраен ред. Ако покажем, че този ред, както и редовете, получени от почленно диференциране по t и по x, са равномерно сходящи, ще излезе, че $u(x,t)$ наистина решава граничната задача.

Отначало ще покажем, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|$ е сходящ и с него ще мажорираме редовете, чиято равномерна сходимост искаме да докажем. Интегрираме (5.2.13) по части и получаваме

$$C_n = \frac{l}{\pi n}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi'(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{l}{\pi n}A'_n,$$

където, както се вижда от формата на получения израз, $\{A'_n\}$ са фуриеровите коефициенти на $\phi'(x)$. Неравенството на Бесел ни дава

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n'^2 \leq \frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi'^2(x)dx$$

и следователно $\sum_{n=1}^{\infty} A'^2_n$ е сходящ ред. Понеже

$$|C_n| = \frac{l}{\pi n}|A'_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{\pi^2 n^2} + A'^2_n\right),$$

излиза, че $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|$ наистина е сходящ.

Директно се вижда, че този ред мажорира редовете (5.2.11) и (5.2.12), понеже $|e^{-\alpha}| \leq 1, \quad \forall\alpha \geq 0$ и $|\sin\beta| \leq 1, \quad \forall\beta$.

Формалното диференциране по t ни дава реда

$$u_t(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 C_n e^{-(\pi n/l)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{5.2.14}$$

За равномерната му сходимост е достатъчно да бъдат мажорирани членовете му с индекси $n \geq N$, където N е някое естествено число. Да разгледаме произволен правоъгълник $\Pi_\delta := \{(x,t) : 0 < x < l, \quad \delta < t < T\}$, $0 < \delta < T$. Понеже

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-(\pi n/l)^2 t} \leq \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-(\pi n/l)^2 \delta} \quad \text{в} \quad \Pi_\delta$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-(\pi n/l)^2\delta} = 0,$$

което може да се установи например с правилото на Лопитал, следва, че

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-(\pi n/l)^2 t} \leq 1, \quad n \geq N \quad \text{в} \quad \Pi_\delta$$

за достатъчно голямо N. Така получихме и равномерна сходимост на реда (5.2.14) във всеки от правоъгълниците Π_δ. Понеже всяка точка от

Π (но не и от $\bar{\Pi}$!) се включва в някой от правоъгълниците Π_δ, следва равномерна сходимост на разглеждания ред в Π.

Формалното диференциране по x ни дава реда

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} C_n e^{-(\pi n/l)^2 t} \cos \frac{\pi n}{l} x.$$

С аналогично разсъждение се вижда и неговата равномерна сходимост в Π.

Второто диференциране по x ни дава формално същия ред, който получихме с едно диференциране по t (и чиято сходимост вече изследвахме), следователно редът (5.2.11) удовлетворява уравнението (5.2.5). Началното условие (5.2.6) очевидно също е изпълнено, доколкото $u(x,0)$ представлява фуриеровото развитие (5.2.12) на функцията $\phi(x)$. Всички членове на реда (5.2.11) изпълняват граничните условия (5.2.7), следователно и нашето решение ги изпълнява.

Нека забележим един интересен факт. Всички формални диференцирания по x или по t на реда (5.2.11) ни дават редове от вида

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^k C_n e^{-(\pi n/l)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (\text{или по } \cos \frac{\pi n}{l} x)$$

които със същите разсъждения се вижда, че и те са равномерно сходящи в Π_δ. Оказа се, че функцията $u(x,t)$, която получихме е безбройно много пъти диференцируема при $t > 0$.

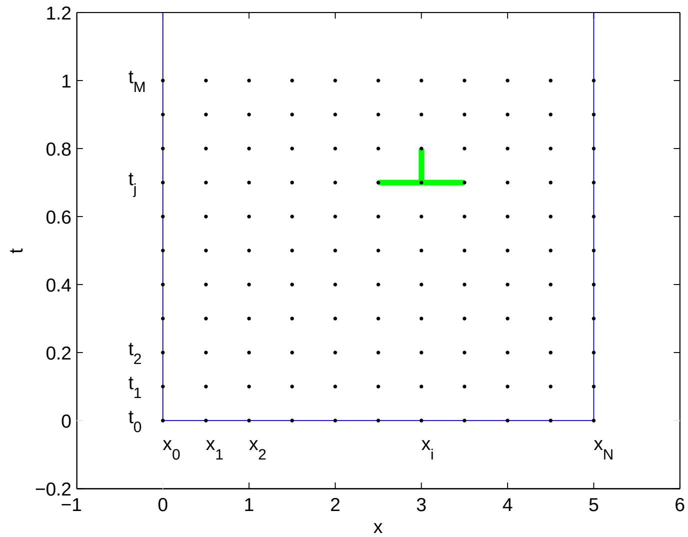
5.3 Числено решаване с използването на диференчна схема

Да разгледаме конкретен пример.

Дадено ни е:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} \quad \text{в} \quad G := \{(x,t) : 0 < x < 5, \quad 0 < t < 1\}, \\
u|_{t=0} &= \phi(x) := \frac{1}{5}(x^2 + 3x), \\
u|_{x=0} &= \psi_1(t) := \sin \pi t, \\
u|_{x=5} &= \psi_2(t) := 8 - 10t.
\end{aligned}$$

Обърнете внимание, че $\phi(0) = \psi_1(0)$ и $\phi(5) = \psi_2(0)$. Тези условия на съгласуваност възникват естествено, в противен случай нашето решение не би било непрекъснато в точките $(0,0)$ и $(5,0)$.



Фигура 5.2: Мрежата $\omega_{h\tau}$ със стъпки $h = x_{i+1} - x_i$ и $\tau = t_{j+1} - t_j$. Шаблонът е изобразен със зелен цвят.

В областта G въвеждаме мрежата $\omega_{h\tau}$, както е показано на фиг. 5.2.

Ще използваме следното означение $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$. Тогава ще апроксимираме производните в уравнението по следния начин:

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_i, \eta) \\ &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau), \quad t_j \le \eta \le t_{j+1}, \qquad (5.3.15) \\ u_{xx}(x_i, t_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{xxx}(\xi, t_j) \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \quad x_{i-1} \le \xi \le x_{i+1} \qquad (5.3.16) \end{aligned}$$

Така изследването на граничната задача се свежда до пресмятане на диференчните равенства:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

или

$$u_{i,j+1} = \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_{i,j} + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \qquad (5.3.17)$$

за $i = 1, 2, \ldots, N-1$ и $j = 1, 2, \ldots, M-1$. Стойностите на $u_{i,0}$, $u_{0,j}$ и $u_{0,N}$ са ни известни от началните и граничните условия. От формулата (5.3.17) се вижда (и от формата на шаблона, изобразена на фиг. 5.2), че ако познаваме стойностите на $u_{i,j}$ в даден слой по време, можем да изчислим директно стойностите в следващия слой от време. Съществуват и т. нар. неявни схеми, при които за определянето на $u_{i,j}$ трябва да се състави обща система линейни алгебрични уравнения, но ние тук няма да се спираме на тях.

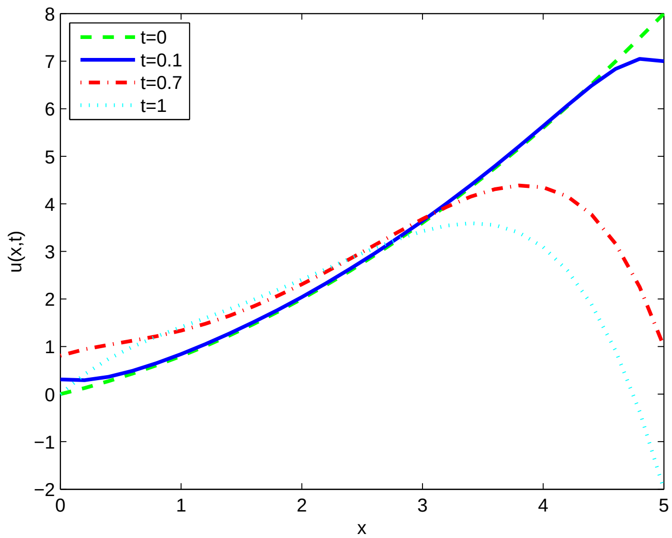
Като вземем предвид (5.3.15-5.3.16) за грешка на апроксимация получаваме $O(\tau + h^2)$. Може да се покаже, че необходимо и достатъчно условие за устойчивостта на схемата (т. е. грешката да не се натрупва, а да намалява, когато пресмятаме всеки следващ слой) е

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Ние ще изчислим решението, използвайки Matlab:

```
%Дефинираме стъпките
h=0.2; tau=h^2/6;
%Дефинираме x и t
x=0:h:5;
t=0:tau:1;
%Дефинираме, че u е (t,x)-мерна матрица
u=zeros(length(t),length(x));
%Попълваме първия ред на u с началните стойности
u(1,:)=(x.^2+3*x)/5;
%Попълваме крайните колони на u с граничните стойности
u(:,1)=sin(pi*t);
u(:,length(x))=8-10*t;
%Изчисляваме чрез диференчната схема решението
for j=1:length(t)-1
    for i=2:length(x)-1
            u(j+1,i)=(1-2*tau/h^2)*u(j,i)...
            +tau/h^2*(u(j,i+1)+u(j,i-1));
    end;
end;

%Анимация
for k=1:length(t)
    plot(x,u(k,:),'LineWidth',2);
    axis([0 5 -2 8]);
    daspect([0.5 1 1]);
    M(k)=getframe;
```

```
end;
movie(M,1 ,5);
```



Фигура 5.3: Решение на двумерната задача на Дирихле с използването на диференчна схема.

На фиг. 5.3 е показано решението в четири различни момента от време. От графиката и от анимацията на решението добре се вижда, че принципът на максимума е в сила.

Глава 6

Стационарни модели. Гранични задачи за уравнението на Лаплас

Елиптичното уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

се нарича уравнение на Лаплас в $\mathbb{R}^2$. В случая на m независими променливи $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, уравнението на Лаплас в $\mathbb{R}^m$ е

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + ... + u_{x_mx_m} = 0.$$

Диференциалният оператор в лявата част се нарича оператор на Лаплас и се бележи с Δ:

$$\Delta u := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + ... + u_{x_mx_m}.$$

Функцията $u(x_1, x_2, ..., x_m)$ се нарича хармонична в област D в $\mathbb{R}^m$, ако $u \in C^2(D)$ и удовлетворява уравнението на Лаплас в D.

Уравнението

$$\Delta u = f(x)$$

се нарича уравнение на Поасон.

До уравнения на Лаплас и Поасон се достига например от параболични или хиперболични уравнения в $\mathbb{R}^{m+1}$, ако се търси решение което не зависи от времето t. Така често с елиптични уравнения се моделират различни стационарни процеси, т.е. не променящи се във времето. С уравненията на Лаплас и Поасон се описват например:

- стационарно разпределение на температурата в хомогенно тяло

- стационарен потенциален поток за несвиваема течност
- разпределение на потенциала в електростатично поле
- потенциал на нютоново гравитационно поле
- статични огъвания на мембрана

Основни гранични задачи

Нека D е ограничена област в $\mathbb{R}^m$ с граница Γ, а функциите $g(P) \in C(D)$ и $f(P) \in C(\Gamma)$, $P = (x_1, x_2, ..., x_m)$. С $\dfrac{\partial}{\partial n}$ ще означаваме производната по нормалното направление по Γ ($\vec{n}$ е външния единичен нормален вектор към Γ).

Задача на Дирихле

Да се намери функция $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, която удовлетворява в D уравнението

$$\Delta u = g(P)$$

и граничното условие

$$u|_\Gamma = f(P).$$

Задача на Нойман

Да се намери функция $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, която удовлетворява в D уравнението

$$\Delta u = g(P)$$

и граничното условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = f(P).$$

За разлика например от задачите на Коши, където се се задават стойностите на функцията и нейните нормални производни върху една крива, тук се задава или само функцията или производната, но върху цялата граница на областта в която търсим решението. Ако областта е неограничена, обикновено се налагат и условия за поведението на решението в безкрайността.

Физическата интерпретация на задачата на Дирихле е например при известен електрически потенциал по границата да се определи потенциала във вътрешността на областта.

Фундаментално решение на уравнението на Лаплас.

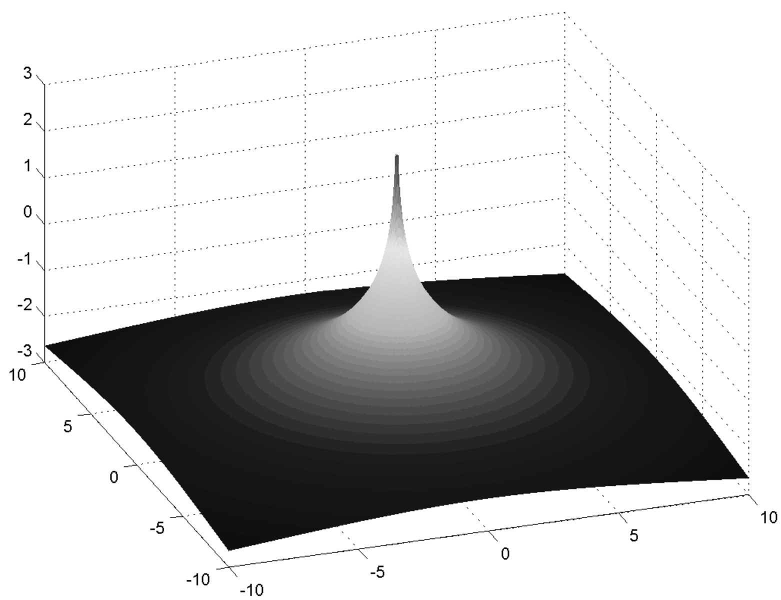
Нека $P_0(y_1, y_2, ..., y_m)$ е фиксирана точка в $\mathbb{R}^m$ и $r = r(P, P_0)$ е разстоянието от $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ до P_0, т.е.

$$r(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_m - y_m)^2}.$$

Функцията

$$v(M, M_0) = r^{2-m}$$

при $m > 2$ е хармонична в $\mathbb{R}^m \backslash M_0$ и се нарича фундаментално решение на уравнението на Лаплас. В случая $m = 2$ фундаментално решение е функцията $v(M, M_0) = \ln \dfrac{1}{r}$.



Фигура 6.1: Фундаментално решение в $\mathbb{R}^2$.

Физическа интерпретация: фундаменталното решение може да се тълкува например, като потенциалното поле на електричен заряд поставен в точката M_0.

6.1 Формули на Грийн и следствия

6.1.1 Формули на Грийн

Основният инструмент при изследването на уравнението на Лаплас са формулите на Грийн. Нека $u(x)$ и $v(x)$ са функции от $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, където D е ограничена област в $\mathbb{R}^m$ с частично гладка граница Γ. С помощта на формулата на Гаус с директни пресмятания могат да се изведат следните две формули

Несиметрична формула на Грийн

$$\int\limits_D v\Delta u dx + \int\limits_D \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int\limits_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Симетрична формула на Грийн

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$$

Като заместим в симетричната формула на Грийн с хармонична функция u и $v = 1$, непосредствено се получава следната

Теорема 6.1.1 *Нека функцията u е хармонична в ограничената област D и G е такава, че $\overline{G} \subset D$ има частично гладка граница Γ, тогава*

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0.$$

Веднага се вижда, че за съществуването на решение на задачата на Нойман за уравнението на Лаплас

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad P \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = f(P) \end{cases}$$

необходимо условие е

$$\int\limits_\Gamma f(P) dS = 0.$$

Аналогично се получава, че за задачата на Нойман

$$\begin{cases} \Delta u = g(P), \quad P \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = f(P) \end{cases}$$

необходимото условие за съществуване на решение е

$$\int\limits_\Gamma f(P) dS - \int\limits_D g(P) dx = 0.$$

Хармоничните функции притежават производни от произволен ред. Нещо повече, ако u е хармонична в областта D, то тя е аналитична в D, както може да се съобрази и от връзката с холоморфните функции. Изобщо, решенията на по-общи елиптични уравнения са със същата гладкост с каквато са коефициентите на уравнението.

Хармоничните функции в $\mathbb{R}^2$ са тясно свързани с холоморфните функции (аналитичните функции на комплексна променлива).

Нека $f(z) \equiv f(x+iy)$ е холоморфна функция на комплексната променлива $z = x+iy$ в D и реалните функции $u(x,y)$ $v(x,y)$ са съответно реалната и имагинерната част на f, т.е. $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ за $(x,y) \in D$. Тогава u и v са хармонични в D.

Функцията $u(x,y)$ е хармонична в едносвързаната област D, тогава и само тогава, когато е реалната част на някаква холоморфна функция $f(z)$.

6.1.2 Интегрално представяне

Нека D е ограничена област в $\mathbb{R}^m$ с частично гладка граница Γ, $u(P) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, P_0 е произволна точка от D и $r := r(P, P_0)$ е разстоянието от точката P до P_0. Тогава ако $m > 2$

$$u(P_0) = \frac{1}{\sigma_m} \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) \right] dS - \frac{1}{\sigma_m} \int\limits_{D} \frac{\Delta u(P)}{r^{m-2}} \, dx,$$

където е σ_m лицето на единичната сфера в $\mathbb{R}^m$, а при $m = 2$

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left[\left(\ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] dS - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{D} \Delta u(P) \ln \frac{1}{r} \, dx.$$

Интегралното представяне се получава като се приложи формулата на Грийн за u и фундаменталното решение в $D \backslash K_\varepsilon(P_0)$ – областта D с изрязан кръг с малък радиус $\varepsilon > 0$ и център в точката P_0, а след това в полученото равенство се направи граничен преход $\varepsilon \to 0$.

Дефиниция 6.1.1 *Интегралите от вида*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(P)}{r^{m-2}(P, P_0)} \, dS$$

$$\int\limits_{\Gamma} g(P) \, \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{m-2}(P, P_0)} \right) dS$$

$$\int\limits_D \frac{h(P)}{r^{m-2}(P,P_0)}\,dx,$$

където $f(P)$, $g(P) \in C(\Gamma)$ и $h(P) \in C(D)$, се наричат съответно потенциал от прост слой, потенциал от двоен слой и обемен потенциал.

Теорема 6.1.2 ***(Принцип за средното аритметично при хармонични функции)*** *Нека функцията u е хармонична в ограничената област $D \subset \mathbb{R}^m$. Нека и затвореното кълбо с център точката $P \in D$ и радиус $r > 0$ се съдържа в D, като границата му е сферата $S_r(P)$. Тогава стойността на функцията u в центъра P е равна на средното аритметично от стойностите ѝ по сферата $S_r(P)$:*

$$u(P) = \frac{1}{\sigma_m r^{m-1}} \int\limits_{S_r(P)} u\,dS,$$

където е σ_m лицето на единичната сфера в $\mathbb{R}^m$.

Очевидно хармоничните функции не могат да имат строги локални екстремуми във вътрешни точки на областта.

Като следствие получаваме

Теорема 6.1.3 (Принцип на максимума) *Нека ограничената отгоре функция u е хармонична в областта D. Тогава тя достига своя супремум във вътрешна точка на D тогава и само тогава, когато е константа.*

Като следствие получаваме, че хармоничната функция $u \in C(\overline{D})$ достига максимума си и минимума си върху границата Γ на D:

$$\max_{P\in D} u(P) = \max_{P\in\Gamma} u(P)$$

и

$$\min_{P\in D} u(P) = \min_{P\in\Gamma} u(P)$$

С други думи имаме

$$\min_{Q\in\Gamma} u(Q) \le u(P) \le \max_{Q\in\Gamma} u(Q)$$

за всяко $P \in D$. При това, ако функцията не е константа

$$\min_{Q\in\Gamma} u(Q) < u(P) < \max_{Q\in\Gamma} u(Q)$$

за всяко $P \in D$, защото ако съществува точка $P_0 \in D$ такова, че $u(P_0) = \max\limits_{Q\in\Gamma} u(Q)$ или $u(P_0) = \min\limits_{Q\in\Gamma} u(Q)$, тогава u е константа.

Теорема 6.1.4 (Теорема на Лиувил) *Ако една хармонична функция във цялото пространство е ограничена отгоре или отдолу, то тя е константа.*

Като директно следствие от принципа на максимума веднага получаваме че задачата на Дирихле може да има само едно решение.

Теорема 6.1.5 (Теорема за единственост на задачата на Дирихле) *Нека е D ограничена област. нейната граница Γ, а $g \in C(D)$. Тогава задачата на Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = g(P), \quad P \in D, \\ u|_\Gamma = f(P) \end{cases}$$

има не повече от едно решение.

За разлика от задачата на Дирихле, лесно се вижда, че задачата на Нойман няма единствено решение. Все пак имаме следната

Теорема 6.1.6 *Нека е D ограничена област и към всяка точка от нейната граница Γ може да се построи вътрешно допиращо се кълбо. Тогава всеки две решения на задачата на Нойман*

$$\begin{cases} \Delta u = g(P), \quad P \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = f(P) \end{cases}$$

се различават с константа.

6.2 Метод на Фурие

6.2.1 Задача на Дирихле в правоъгълник

Да разгледаме задачата на Дирихле в правоъгълника $D = \{0 < x < a\,,\ 0 < y < b\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D, \\ u|_{x=0} = 0 \quad \text{за } 0 < y < b, \\ u|_{x=a} = 0 \quad \text{за } 0 < y < b, \\ u|_{y=0} = g_1(x) \quad \text{за } 0 < x < a, \\ u|_{y=b} = g_2(x) \quad \text{за } 0 < x < a. \end{cases}$$

Ще използваме метода на разделяне на променливите, наричан още метод на Фурие. Търсим ненулево решение на уравнението от вида

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Като заместим в лапласиана, имаме

$$X''Y + XY'' = 0$$

и получаваме

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

където $\lambda = const$ е константа.

Така, заедно с хомогенните гранични условия, за функцията X получаваме задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

Собствените стойности са $\lambda_k = -\dfrac{k^2\pi^2}{a^2}$ $k = 1, 2, ...,$ а собствените функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}$$

За Y имаме уравнението

$$Y_k'' + \lambda_k Y_k = 0$$

и за решенията за съответните собствени стойности намираме

$$Y_k(x) = A_k e^{k\pi y/a} + B_k e^{-k\pi y/a}$$

Търсим решението, като линейна комбинация на функции от вида $X_k Y_k$

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{k\pi y/a} + B_k e^{-k\pi y/a}) \sin\frac{k\pi x}{a}$$

където коефициентите A_k и B_k се определят от граничните условия

$$u|_{y=0} = g_1(x) \quad \text{и} \quad u|_{y=2} = g_2(x)$$

Така получаваме линейната система

$$\left| \begin{array}{l} A_k \;+\; B_k \;=\; \alpha_k \\ A_k e^{k\pi b/a} + B_k e^{-k\pi b/a} = \beta_k \end{array} \right.$$

където десните страни са коефициентите в развитието в ред на Фурие на граничните данни:

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{a}$$

$$g_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi x}{a}$$

с други думи

$$\alpha_k = \frac{1}{2a} \int_0^a g_1(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{2a} \int_0^a g_2(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx$$

Пример 6.2.1 *Да се намери решение на задачата на Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \text{в } D = \{0 < x < 2,\ 0 < y < 2\}, \\ u|_{y=0} = 0, \\ u|_{y=2} = (2-x)\sin(2\pi x), \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=2} = 0. \end{cases}$$

С метода на Фурие решението се представя като

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(e^{k\pi y/2} - e^{-k\pi y/2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right),$$

където

$$A_k = \frac{1}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \int_0^2 (2-x)\sin(2\pi x) \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right) dx.$$

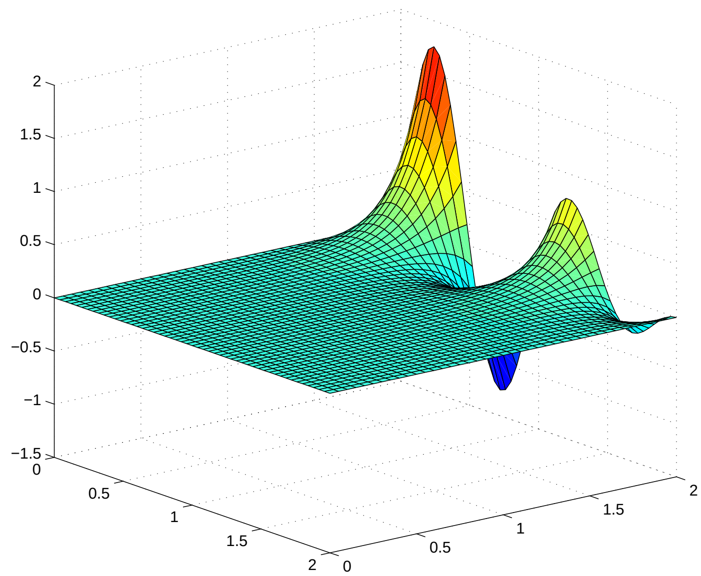
Примерен код на MatLab за визуализация на решението чрез пресмятане на парциалната сумата от първите $N = 35$ члена на реда.

```
function sep_var_rectangular

N=35;
```

```
% Пресмятане на коефициентите в реда
for k = 1 : N
    Ak(k) = intsinf(k)/(exp(2*k*pi/2)-exp(-2*k*pi/2));
end

% Мрежа от възли в областта
[x,y] = meshgrid([0:0.04:2],[0:0.05:2]);

% Пресмятане на сумата от първите N члена на реда
% във възлите на мрежата
u = 0;
for k = 1 : N
    u = u + Ak(k)*sin(k*pi*x/2).*
              (exp(k*pi*y/2)-exp(-k*pi*y/2));
end

% Графика на u
surf(x,y,u)
daspect([1 1 2])

% Локални функции:
% Интеграл за коефициентите в реда на Фурие
function res = intsinf(k)
xx = 0:0.01:2;
yy = sin(k*pi*xx/2).*func1(xx);
res = trapz(xx,yy);

% Гранични стойности при y=2
function res = func1(x)
res = (2-x).*sin(2*pi*x);
```

Разбира се, по аналогичен начин могат да се решават с разделяне на променливите и задачи, при които върху някои части от страни от границата имаме условия от типа на Нойман, както и когато хомогенните гранични условия са върху другите две страни на правоъгълника.

Да разгледаме по-общия случай, когато имаме ненулеви условия вър-



Фигура 6.2: Графика на решението от Пример 1.

ху цялата граница

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D, \\ u|_{x=0} = h_1(y) \quad \text{за } 0 < y < b, \\ u|_{x=a} = h_2(y) \quad \text{за } 0 < y < b, \\ u|_{y=0} = g_1(x) \quad \text{за } 0 < x < a, \\ u|_{y=b} = g_2(x) \quad \text{за } 0 < x < a. \end{cases}$$

Условията за съгласуване на граничните данни във върховете $h_1(0) = g_1(0)$, $h_2(0) = g_1(a)$, $h_1(b) = g_2(0)$, $h_2(b) = g_2(a)$. Идеята е да се раздели на две задачи, всяка с хомогенни гранични условия върху една от двете двойки срещуположни страни на правоъгълника. Така получените гранични задачи ще могат да се решат по отделно с метода на Фурие илюстриран по-горе. Първо обаче се налага да се "нулират" граничните данни във върховете на правоъгълника. За целта ще представим решението като $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, където функцията w удовлетворява условията

$$\begin{cases} w(0,0) = h_1(0) = g_1(0) \\ w(a,0) = h_2(0) = g_1(a) \\ w(0,b) = h_1(b) = g_2(0) \\ w(a,b) = h_2(b) = g_2(a) \end{cases}$$

и е удобно да се търси от вида

$$w(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy$$

където коефициентите се определят подходящо. Забележете, че за така избраната функция w имаме $\Delta w = 0$ и следователно v също е хармонична в D.

Сега вечеможем да представим v като $v = v_1 + v_2$. Функциите v_1 и v_2 са решения на следните гранични задачи

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 \quad \text{в } D, \\ v_1|_{x=0} = 0 \quad \text{за } 0 < y < b, \\ v_1|_{x=a} = 0 \quad \text{за } 0 < y < b, \\ v_1|_{y=0} = \psi_1(x) \quad \text{за } 0 < x < a, \\ v_1|_{y=b} = \psi_2(x) \quad \text{за } 0 < x < a. \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v_2 = 0 \quad \text{в } D, \\ v_2|_{x=0} = \varphi_1(y) \quad \text{за } 0 < y < b, \\ v_2|_{x=a} = \varphi_1(y) \quad \text{за } 0 < y < b, \\ v_2|_{y=0} = 0 \quad \text{за } 0 < x < a, \\ v_2|_{y=b} = 0 \quad \text{за } 0 < x < a. \end{cases}$$

където функциите

$$\begin{array}{ll} \psi_1(x) = g_1(x) - w(x,0)\ , & \varphi_1(y) = h_1(y) - w(0,y)\ , \\ \psi_2(x) = g_2(x) - w(x,b)\ , & \varphi_2(y) = h_2(y) - w(a,y) \end{array}$$

Построихме функцията w именно така, че да са изпълнени условията за съгласуване на граничните данни във върховете на правоъгълника

$$\psi_1(0) = \psi_1(a) = \psi_2(0) = \psi_2(a) = 0 \ \text{ и } \ \varphi_1(0) = \varphi_1(b) = \varphi_2(0) = \varphi_2(b) = 0.$$

Така към всяка от двете задачи може да се приложи метода на разделяне на променливите. Решението на оригиналната задача ще получим като

$$u = v_1 + v_2 + w\ .$$

Пример 6.2.2 *Да намерим решението на задачата*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } \{0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}, \\ u_x|_{x=0} = 1 \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ u|_{x=2} = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}y\right) \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ u|_{y=0} = x - 2 \quad \text{за } 0 < x < 2, \\ u|_{y=1} = x^3 - x^2 + x - 2 \quad \text{за } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Първо, ще представим решението във вида $u = v + w$, където w се избира така, че във върховете на правоъгълника да приема същите стойности както граничните данни. Можем да вземем

$$w(x,y) = x + 4y - 2.$$

Тогава, за функцията v получаваме граничната задача

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{в } \{0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}, \\ v_x|_{x=0} = 0 \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ v|_{x=2} = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}y\right) - 4y \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ v|_{y=0} = 0 \quad \text{за } 0 < x < 2, \\ v|_{y=1} = x^3 - x^2 - 4 \quad \text{за } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Вече ще може да представим v, като $v = v_1 + v_2$, където v_1 е решение на граничната задача

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 \quad \text{в } \{0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}, \\ (v_1)_x|_{x=0} = 0 \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ v_1|_{x=2} = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}y\right) - 4y \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ v_1|_{y=0} = 0 \quad \text{за } 0 < x < 2, \\ v_1|_{y=1} = 0 \quad \text{за } 0 < x < 2, \end{cases}$$

а за v_2 имаме задачата

$$\begin{cases} \Delta v_2 = 0 \quad \text{в } \{0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}, \\ (v_2)_x|_{x=0} = 0 \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ v_2|_{x=2} = 0 \quad \text{за } 0 < y < 1, \\ v_2|_{y=0} = 0 \quad \text{за } 0 < x < 2, \\ v_2|_{y=1} = x^3 - x^2 - 4 \quad \text{за } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Решаваме поотделно всяка от тези две задачи с метода на разделяне на променливите. За v_1 получаваме

$$v_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{k\pi x} + e^{-k\pi x})\sin(k\pi y),$$

където

$$A_k = \frac{2\displaystyle\int_0^1 \left[4\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 4y\right]\sin(k\pi y)\,dy}{e^{2k\pi} + e^{-2k\pi}},$$

а за v_2 намираме

$$v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(e^{(2k+1)\pi y/4} - e^{-(2k+1)\pi y/4})\cos\left(\frac{2k+1}{4}\pi x\right),$$

където

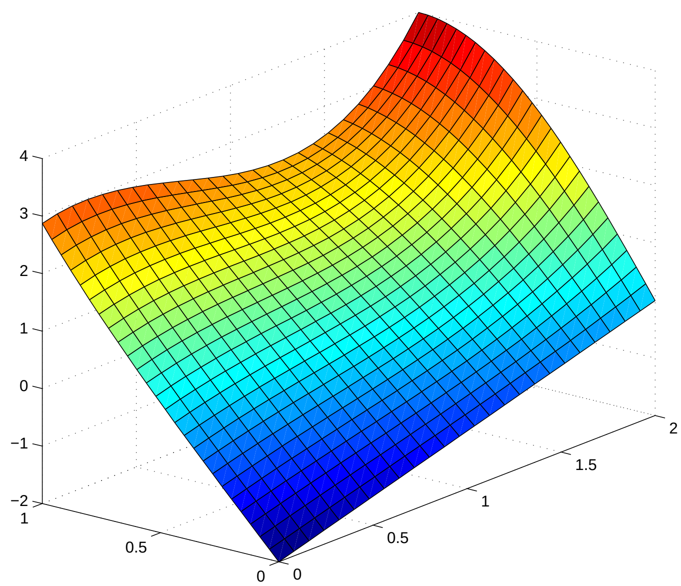
$$C_k = \frac{\displaystyle\int_0^2 \left(x^3 - x^2 - 4\right)\cos\left(\frac{2k+1}{4}\pi x\right)\,dx}{e^{(2k+1)\pi/4} - e^{-(2k+1)\pi/4}}.$$

Остава да съберем трите помощни функции за да намерим решението u на първоначалната задача: $u = w + v_1 + v_2$.

Ще начертаем с MatLab графиката на решението като пресметнем парциалната сумата например от първите $N = 30$ члена на редовете за v_1 и v_2.

```
function sep_var_rec

% Пресмятане на първите 30 коефициента в редовете
N = 30;
for k = 1 : N
  Ak(k)=2*int_Ak(k)/(exp(2*k*pi)+exp(-2*k*pi));
  Ck(k)=int_Ck(k)/(exp((2*k+1)*pi/4)-exp(-(2*k+1)*pi/4));
end

% Мрежа от възли в областта
[x,y] = meshgrid([0:0.08:2],[0:0.04:1]);

% Първоначално задаваме функцията w
u =  x+4*y-2;

% Пресмятане на сумата от първите N члена на двата реда
% във възлите на мрежата, чрез натрупване в  u
for k = 1 : N
  u = u +
      Ak(k)*sin(k*pi*y).*(exp(k*pi*x)+exp(-k*pi*x))+
      Ck(k) * cos((2*k+1)*pi*x/4) .*
          (exp((2*k+1)*pi*y/4)-exp(-(2*k+1)*pi*y/4));
end

%Чертеж на графиката на u
surf(x,y,u)
daspect([1 1 5])

% Локални функции:
% Интеграли за коефициентите в редовете на Фурие
function res = int_Ak(k)
y = 0:0.005:1;
f = func_x2(y).*sin(k*pi*y);
res = trapz(y,f);
```

```
function res = int_Ck(k)
x = 0:0.01:2;
f = func_y1(x).*cos((2*k+1)*pi*x/4);
res=trapz(x,f);

% Гранични данни при x=2
function res=func_x2(y)
res=4*sin(pi*y/2)-4*y;

% Гранични данни при y=1
function res=func_y1(x)
res=x.^3-x.^2-4;
```



Фигура 6.3: Графика на решението от примера.

6.2.2 Разделяне на променливите за кръг

След смяна на променливите, могат да се разделят променливите за оператора на Лаплас и за някои други области. Например, да вземем задачата на Дирихле в кръга $D = \{x^2 + y^2 < R^2\}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D, \\ u(x,y) = g(x,y) \quad \text{при } (x,y) \in \Gamma = \{x^2 + y^2 = R^2\} \end{cases}$$

Да въведем полярни координати (ρ, φ): $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$. В полярни координати оператора на Лаплас има вида:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Тъй като, ρ е разстоянието до центъра на кръга, областта D се записва като $\{\rho \in (0, R)\ ,\ \varphi \in (0, 2\pi)\}$, а граничните условия по окръжността са $u|_{\rho=R} = g(\varphi)$. В тази правоъгълна област можем да разделим променливите – търсим решения на уравнението от вида $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Така от оператора на Лаплас в полярни координати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

получаваме уравнението

$$R''\Phi + \frac{R'}{\rho}\Phi + \frac{R}{\rho^2}\Phi'' = 0,$$

Като разделим на $R\Phi$ можем да отделим променливите – имаме

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

където $\lambda = const$ е константа.

За функцията $\Phi(\varphi)$ намираме

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

като ще определим константата λ от условието, че $\Phi(\varphi)$ е периодична с период 2π , т.е. $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Единствените възможни стойности са $\lambda_k = k^2$ за $k = 0, 1, 2, ...$, а решенията на уравнението са от вида

$$\Phi_k(\varphi) = a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi.$$

Съответните им функции $R_k(\rho)$ намираме като решим ойлеровото уравнение

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0.$$

Получаваме $R_k(\rho) = c_k\rho^k + d_k\rho^{-k}$ при $k = 1, 2, ...$, а за $k = 0$ имаме $R_0(\rho) = c_0 + d_0\ln\rho$.

Решението на задачата на Дирихле можем да търсим от вида

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + C_0\ln\rho + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(A_k\rho^k + C_k\rho^{-k})\cos k\varphi + (B_k\rho^k + D_k\rho^{-k})\sin k\varphi\right]$$

Тъй като тази функция трябва да е ограничена при $\rho = 0$ (което отговаря на центъра O на кръга), то коефициентите пред отрицателните степени на ρ и логаритъма трябва да са нула: $C_0 = 0$ и $C_k = D_k = 0$ за $k = 1, 2, ...$ Така за реда остава

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \ ,$$

където определяме стойностите на A_k и B_k от граничното условие

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) = g(\varphi),$$

чрез коефициентите от развитието в ред на Фурие на функцията $g(\varphi)$. Окончателно получаваме

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta\,;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta\ ;\ B_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(k\theta)\, d\theta$$

Достатъчно условие за равномерната сходимост на реда е $g \in C^1(\Gamma)$. Всъщност, редът с така получените стойности за A_k и B_k може да се сумира и да се изведе формулата за решението на задачата Дирихле в кръга, която получихме чрез функция на Грийн по-рано.

Пример 6.2.3 *Да се намери решение на задачата на Дирихле в кръга* $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{ в } D, \\ u(x, y) = \cos(2\pi x) + \sin(2\pi y) \quad \text{ за } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

С метода на Фурие, за решението получаваме реда

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)$$

където

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(2\pi \cos\theta) + \sin(2\pi \sin\theta)]\, d\theta\,;$$

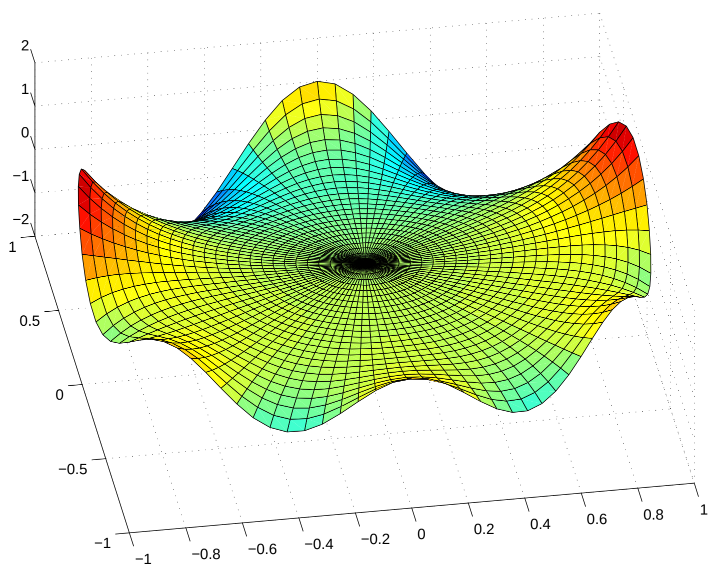
$$A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\cos(2\pi\cos\theta)+\sin(2\pi\sin\theta)]\cos(k\theta)\,d\theta\ ;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\cos(2\pi\cos\theta)+\sin(2\pi\sin\theta)]\sin(k\theta)\,d\theta$$

Да начертаем графиката на решението като пресметнем сумата от първите $N = 40$ члена на реда.

```
function sep_var_circle

% Пресмятане на коефициентите в реда
N=40;
A0=int_cos(0)/(2*pi);
for k=1:N
    Ak(k)=int_cos(k)/pi;
    Bk(k)=int_sin(k)/pi;
end

% Мрежа от възли в областта
[r,phi]=meshgrid([0:0.04:1],[0:pi/50:2*pi]);

% Пресмятане на сумата от първите N члена в реда
% във възлите на мрежата, чрез натрупване в u
u=A0;
for k=1:N
    u=u+Ak(k)*r.^k.*cos(k*phi)+Bk(k)*r.^k.*sin(k*phi);
end

% Графика на u
x=r.*cos(phi);
y=r.*sin(phi);
surf(x,y,u)

% Локални функции:
% Интеграли за коефициентите в реда на Фурие
function res=int_cos(k)
s=0:pi/100:2*pi;
f=cos(k*s).*func1(s);
res=trapz(s,f);
```

```
function res=int_sin(k)
s=0:pi/100:2*pi;
f=sin(k*s).*func1(s);
res=trapz(s,f);

% Данни по границата
function res=func1(phi)
x=cos(phi);
y=sin(phi);
res = cos(2*pi*x)+sin(2*pi*y);
```



Фигура 6.4: Графика на решението от примера.

6.2.3 Разделяне на променливите за венец

По подобен начин, полярните координати позволяват да се използва метода на Фурие и за венец. Както и при кръг, решението на задачата

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } D = \{a < \rho < b\}, \\ u|_{\rho=a} = g(\varphi) \\ u|_{\rho=b} = h(\varphi) \end{cases}$$

може да се запише като

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + C_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k\rho^k + C_k\rho^{-k}) \cos k\varphi + (B_k\rho^k + D_k\rho^{-k}) \sin k\varphi \right]$$

Сега обаче $b > \rho > a > 0$ и всички събираеми са ограничени. Коефициентите определяме от граничните условия по двете окръжности $\{\rho = a\}$ и $\{\rho = b\}$

$$A_0 + C_0 \ln a + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k a^k + C_k a^{-k}) \cos k\varphi + (B_k a^k + D_k a^{-k}) \sin k\varphi\right] = g(\varphi)$$

$$A_0 + C_0 \ln b + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k b^k + C_k b^{-k}) \cos k\varphi + (B_k b^k + D_k b^{-k}) \sin k\varphi\right] = h(\varphi)$$

Така за A_k, B_k, C_k и D_k получаваме линейните системи

$$\left| \begin{array}{l} A_0 + C_0 \ln a = \alpha_0 \\ A_0 + C_0 \ln b = \beta_0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} A_k a^k + C_k a^{-k} = \alpha_{1,k} \\ A_k b^k + C_k b^{-k} = \beta_{1,k} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} B_k a^k + D_k a^{-k} = \alpha_{2,k} \\ B_k b^k + D_k b^{-k} = \beta_{2,k} \end{array} \right.$$

където десните страни са коефициентите от развитието в ред на Фурие на функциите $g(\varphi)$ и $h(\varphi)$:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta\,; & \beta_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h\theta)\, d\theta \\ \alpha_{1,k} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta\ ; & \beta_{1,k} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta \\ \alpha_{2,k} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(k\theta)\, d\theta\ ; & \beta_{2,k} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(k\theta)\, d\theta \end{array}$$

Пример 6.2.4 *Ще използваме метода на разделяне на променливите за да намерим решението на задачата на Дирихле*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{в } D = \{1 < \rho < 2\}, \\ u|_{\rho=1} = 0 \\ u|_{\rho=2} = e^{\sin 4\varphi} - 1. \end{array} \right.$$

Получаваме формулата

$$u(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k - \rho^{-k})(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi),$$

където коефициентите са

$$A_0 = \frac{1}{2\pi \ln 2} \int\limits_0^{2\pi} (e^{\sin 4\theta} - 1)\, d\theta\ ;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi(2^k - 2^{-k})} \int\limits_0^{2\pi} (e^{\sin 4\theta} - 1) \cos(k\theta)\, d\theta$$

и

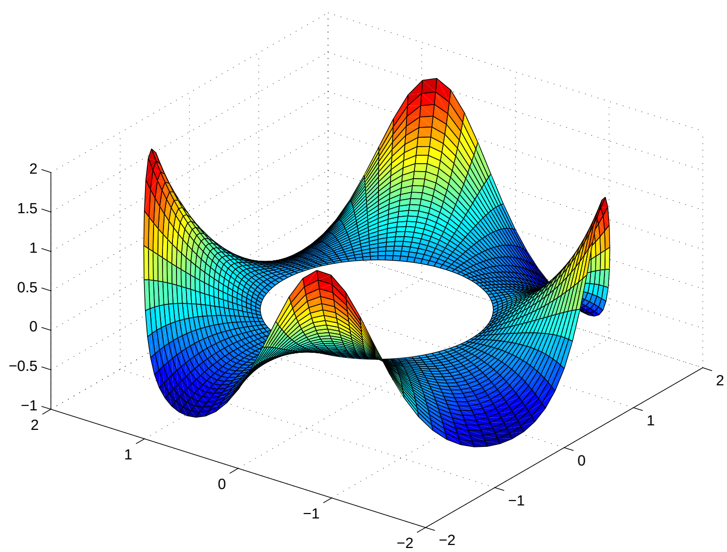
$$B_k = \frac{1}{\pi(2^k - 2^{-k})} \int\limits_0^{2\pi} (e^{\sin 4\theta} - 1) \sin(k\theta)\, d\theta$$

за $k = 1, 2, \ldots$

Да пресметнем сумата на първите 35 члена от реда и да начертаем резултата.

```
function venets

% Пресмятане на коефициентите в реда
N = 35;
A0 = int_cos(0)/(2*pi*log(2));
for k = 1 : N
    Ak(k) = int_cos(k)/(pi*(2^k-2^(-k)));
    Bk(k) = int_sin(k)/(pi*(2^k-2^(-k)));
end

% Мрежа от възли в областта
[r,phi] = meshgrid([1:0.04:2],[0:pi/50:2*pi]);

% Пресмятане на сумата от първите N члена от реда
% във възлите на мрежата, чрез натрупване в u
u = A0*log(r);
for k = 1 : N
    u = u + ( Ak(k)*cos(k*phi)+Bk(k)*sin(k*phi) )
           .* (r.^k-r.^(-k));
end

%Чертеж на графиката на u
x = r.*cos(phi);
y = r.*sin(phi);
surf(x,y,u)
```

```
% Локални функции:
% Интеграли за коефициентите в реда на Фурие
function res = int_cos(k)
s = 0:pi/100:2*pi;
f = cos(k*s).*func1(s);
res = trapz(s,f);

function res = int_sin(k)
s = 0:pi/100:2*pi;
f = sin(k*s).*func1(s);
res = trapz(s,f);

% Гранични данни за r=2
function res = func1(phi)
res = exp(sin(4*phi))-1;
```



Фигура 6.5: Графика на решението от примера.

Полярните координатите позволяват да се разделят променливите и за задача на Дирихле в сектор на кръг или венец $D = \{a < \rho < b\ ,\ \varphi_0 < \varphi < \varphi_1\}$ с хомогенни условия върху частите от границата $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$. Сега, вместо да търсим периодични решения, от граничните условия получаваме гранична задача за уравнението $\Phi'' - \lambda\Phi = 0$.

Метода на Фурие е приложим по естествен начин и когато имаме гранични условия от типа на Нойман върху някои от частите на границата. В полярни координати тези условия водят отново до условия за нормалната производна на решението. Например за областта $D = \{a < \rho < b\ ,\ \varphi_0 < \varphi < \varphi_1\}$ директно се пресмята, че ако $\vec{n}$ е външния единичен нормален вектор в точките от границата, то по сферите имаме

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=a^2} = -\left. u_\rho\right|_{\rho=a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=b^2} = \left. u_\rho\right|_{\rho=b}$$

а по радиусите

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x\,\mathrm{tg}\varphi_0} = -\rho \left. u_\varphi\right|_{\varphi=\varphi_0}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x\,\mathrm{tg}\varphi_1} = \rho \left. u_\varphi\right|_{\varphi=\varphi_1}$$

Пример 6.2.5 *Да се намери решение на задачата*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } D = \{x > 0\ ,\ y > 0\ ,\ x^2 + y^2 < 1\}, \\ u|_{y=0} = 0 & \text{за } 0 < x < 1, \\ u_x|_{x=0} = 0 & \text{за } 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = x^3 + 7x^2 - 8 & \text{при } x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

В полярни координати задачата води до

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \left\{0 < \rho < 1\ ,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}, \\ u|_{\varphi=0} = 0 & \text{за } 0 < \rho < 1, \\ u_\varphi|_{\varphi=\pi/2} = 0 & \text{за } 0 < \rho < 1, \\ u_\rho|_{\rho=1} = \cos^3\varphi + 7\cos^2\varphi - 8 & \text{при } 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

С метода на Фурие решението се представя като

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \rho^{2k-1} \sin(2k-1)\varphi,$$

където

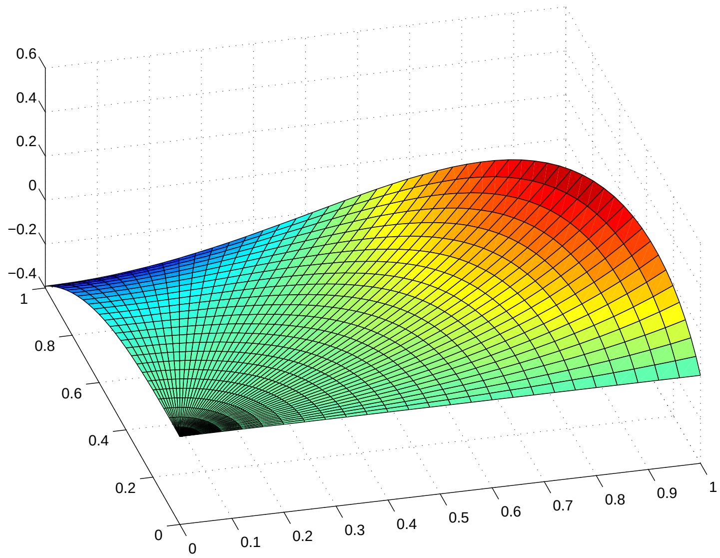
$$A_k = \frac{4}{(2k-1)\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^3\varphi + 7\cos^2\varphi - 8)\sin(2k-1)\varphi\, d\varphi.$$

Примерен код на MatLab за визуализация на решението чрез пресмятане на парциалната сумата от първите $N = 30$ члена на реда.

```
function sep_var_sector

% Пресмятане на коефициентите в реда
N=30;
for k=1:N
    Ak(k)=4*int_coef(k)/((2*k-1)*pi);
end

% Мрежа от възли в областта
[r,phi]=meshgrid([0:0.04:1],[0:pi/100:pi/2]);

% Пресмятане на сумата от първите N члена на реда
% във възлите на мрежата
u=0;
for k=1:N
    u=u+Ak(k)*r.^(2*k+1).*sin((2*k-1)*phi);
end

% Графика на решението
x=r.*cos(phi);
y=r.*sin(phi);
surf(x,y,u)

% Локални функции:
% Интеграл за коефициентите в реда на Фурие
function res=int_coef(k)
s=0:pi/100:pi/2;
x=2*cos(s);
f=sin((2*k-1)*s).*func1(s);
res=trapz(s,f);

% Гранични стойности при rho=1
function res=func1(phi)
x=cos(phi);
res = x.^3 + 7*x.^2 - 8;
```

Пример 6.2.6 *Да се намери решение на граничната задача*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{в } D = \{(x,y): \ y > 0\ ,\ 1 < x^2 + y^2 < 16\}, \\ u_y|_{y=0} = 0 \qquad \text{за } x \in (-4,-1) \cup (1,4), \\ u = 0 \qquad \text{при } \ x^2 + y^2 = 1,\ y > 0, \\ u = (1 + y^2)[1 + \sin(2\pi x)] \quad \text{при } \ x^2 + y^2 = 16,\ y > 0. \end{cases}$$



Фигура 6.6: Графика на решението от примера.

С метода на Фурие за решението в полярни координати получаваме

$$u(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\rho^k - \rho^{-k}) \cos k\varphi,$$

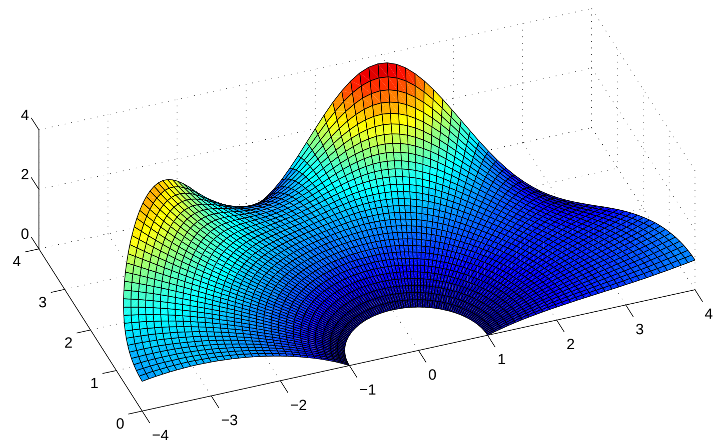
където коефициентите са

$$A_0 = \frac{1}{\pi \ln 4} \int\limits_0^{\pi} (1 + \sin^2 \theta)[1 + \sin(2\pi \cos \theta)]\, d\theta \ ;$$

$$A_k = \frac{2}{\pi(2^k - 2^{-k})} \int\limits_0^{\pi} (1 + \sin^2 \theta)[1 + \sin(2\pi \cos \theta)]\, d\theta.$$

```
function sektor_venets

% Пресмятане на първите 30 коефициента в реда
N = 30;
A0 = int_coef(0)/(pi*log(4));
for k = 1 : N
    Ak(k) = 2*int_coef(k)/(pi*(4^k-4^(-k)));
end
```

```
% Мрежа от възли в областта
[r,phi] = meshgrid([1:0.1:4],[0:pi/100:pi]);

% Пресмятане на сумата от първите N члена в реда
% във възлите на мрежата, чрез натрупване в  u
u = A0*log(r);
for k = 1 : N
    u = u+ Ak(k)*cos(k*phi).*(r.^k-r.^(-k));
end

% Чертеж на графиката на решението
x = r.*cos(phi);
y = r.*sin(phi);
surf(x,y,u)
daspect([1 1 2])

% Локални функции:
% Интеграл за коефициентите в реда на Фурие
function res = int_coef(k)
s = 0:pi/100:pi;
f = cos(k*s).*func(s);
res = trapz(s,f);

% Гранични данни
function res = func(phi)
x = cos(phi);
y = sin(phi);
res = (sin(2*pi*x)+1).*(y.^2+1);
```



Фигура 6.7: Графика на решението от примера.

6.3 Диференчна схема за задачата на Дирихле.

Ще покажем как чрез диференчна схема можем да решим приближено задачата на Дирихле в правоъгълник $D = \{a < x < b \ , \ c < y < d\}$

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y) & \text{в } D, \\ u|_{x=a} = g_1(y) & \text{за } c < y < d, \\ u|_{x=b} = g_2(y) & \text{за } c < y < d, \\ u|_{y=c} = g_3(x) & \text{за } a < x < b, \\ u|_{y=d} = g_4(x) & \text{за } a < x < b. \end{cases}$$

Да въведем равномерна мрежа с една и съща стъпка h по x и по y. Предполагаме, че е възможно да разделим страните на правоъгълника на равни части с дължина h, т.е. че съществуват такива две естествени числа M и N, че $\dfrac{b-a}{M} = \dfrac{d-c}{N} = h$. Въвеждаме означенията

$$\begin{aligned} x_m &= a + mh \quad \text{за } m = 0, 1, ..., M; \\ y_n &= c + nh \quad \text{за } n = 0, 1, ..., N. \end{aligned}$$

Ще пресметнем приближено стойностите на решението на задачата на Дирихле във точките с координати (x_m, y_n). За удобство ще ги означим с $u_{m,n}$, а $f(x_m, y_n)$ с $f_{m,n}$:

$$u_{m,n} \approx u(x_m, y_n) \quad \text{за } m = 0, 1, ..., M \text{ и } n = 0, 1, ..., N;$$

$$f_{m,n} = f(x_m, y_n) \quad \text{за } m = 0, 1, ..., M \text{ и } n = 0, 1, ..., N.$$

Ще казваме, че възела (x_m, y_n) е вътрешен за областта, ако и четирите съседни (x_{m+1}, y_n), (x_{m-1}, y_n), (x_m, y_{n+1}) и (x_m, y_{n-1}) са от $\overline{D}$, т.е. в случая на правоъгълника – за $m = 1, 2, ..., M-1$ и $n = 1, 2, ..., N-1$. За възлите по границата на D можем директно да използваме граничните условия:

$$\begin{array}{ll} u_{0,n} = g_1(y) & \text{за } n = 0, 1, ..., N, \\ u_{M,n} = g_2(y) & \text{за } n = 0, 1, ..., N, \\ u_{m,0} = g_3(x) & \text{за } m = 0, 1, ..., M, \\ u_{m,N} = g_4(x) & \text{за } m = 0, 1, ..., M. \end{array}$$

За да изразим вторите производни на u в уравнението чрез $u_{m,n}$, например да съберем изразите

$$u(x+h, y) \approx u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x, y);$$

$$u(x-h, y) \approx u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x, y),$$

които имаме от формулата на Тейлър. Като заместим с вътрешния възел (x_m, y_n), за u_{xx} получаваме

$$u_{xx}(x_m, y_n) \approx \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n)}{h^2}.$$

Аналогично и за u_{yy} намираме

$$u_{yy}(x_m, y_n) \approx \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1})}{h^2}$$

Така, в оператора на Лаплас заместваме производните с

$$u_{xx}(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{h^2}$$

Получаваме равенството

$$\frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{h^2} = f_{m,n}$$

откъдето намираме диференчното уравнение

$$u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{k,m-1} - 4u_{m,n} = h^2 f_{m,n}.$$

за $m = 1, 2, ..., M-1$ и $n = 1, 2, ..., N-1$. В случая на хомогенно уравнение, т.е. $f(x, y) = 0$ и $\Delta u = 0$, можем да гледаме на връзката

$$u_{m,n} = \frac{1}{4}(u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1}).$$

като на дискретен аналог на свойството на средното аритметично на хармоничните функции – значението във възела (x_m, y_n) е средно аритметично от стойностите в четирите съседни (x_{m+1}, y_n), (x_{m-1}, y_n), (x_m, y_{n+1}) и (x_m, y_{n-1}).

Тъй като от граничните условия знаем стойностите на $u_{m,n}$ при $m = 0$ и M и при $n = 0$ и N, за останалите възли получаваме линейна система от $(N-1)(M-1)$ уравнения с $(N-1)(M-1)$ неизвестни, която има единствено решение.

Когато размерите на системата не са големи, тя може да бъде решена явно. Обикновено обаче, се избира стъпката h да е малко число, което прави линейната система твърде голяма за да може ефективно да се решава директно. Вместо това се строят приближения на решението чрез серия последователни итерации. Ще означим k-тата итерация с $u^k_{m,n}$, $k = 1, 2, ...$ Във възлите по границата стойностите са едни и същи и се дават от граничните условия

$$\begin{array}{ll} u^k_{0,n} = g_1(y_n) & \text{за } n = 0, 1, ..., N, \\ u^k_{M,n} = g_2(y_n) & \text{за } n = 0, 1, ..., N, \\ u^k_{m,0} = g_3(x_m) & \text{за } m = 0, 1, ..., M, \\ u^k_{m,N} = g_4(x_m) & \text{за } m = 0, 1, ..., M. \end{array}$$

Във вътрешните възли стойността $u^{k+1}_{m,n}$ в $(k+1)$-вата итерация се пресмята от k-тата чрез връзката

$$u^{k+1}_{m,n} = \frac{1}{4}(u^k_{m+1,n} + u^k_{m-1,n} + u^k_{m,n+1} + u^k_{m,n-1} - h^2 f_{m,n})$$

Итерационният процес е сходящ към точното решение $u^k_{m,n}$ на системата, като грешката (разликата $|u^k_{m,n} - u_{m,n}|$) намалява на всяка стъпка с коефициент от порядъка на $1 - h^2/2$.

Като условие за прекратяване на изчисленията може да се използва някакво ограничение на разликата между стойностите на две поредни итерации – при предварително избрано малко положително число δ, спираме итерационния процес когато $\max\limits_{(m,n)} |u^k_{m,n} - u^{k+1}_{m,n}| < \delta$.

Пример 6.3.1 *С диференчна схема да пресметнем приближено с MatLab* *решението на задачата на Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = xy(x-1)(x-2)\sin(\pi y) & \text{в } D = \{(x,y):\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 3\}, \\ u|_{x=0} = 0 & \text{за } 0 < y < 3, \\ u|_{x=2} = 0 & \text{за } 0 < y < 3, \\ u|_{y=0} = 0 & \text{за } 0 < x < 2, \\ u|_{y=3} = 0 & \text{за } 0 < x < 2. \end{cases}$$

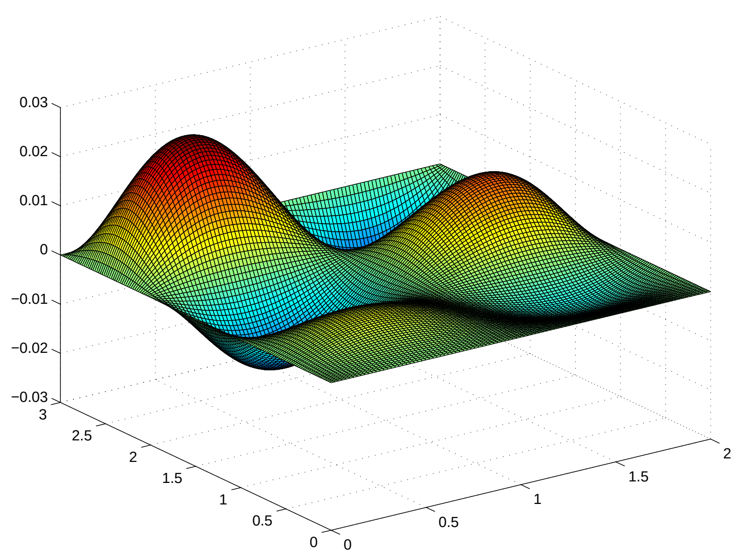
Ще използваме стъпка $h = 0.02$ и итерационен процес. Всъщност за улеснение за да не се налага заемане на допълнителни помощни променливи, за получаването на $u^{k+1}_{m,n}$ ще ползваме и вече пресметнатите стойности от $(k+1)$-вата итерация – уравнението на итерационния процес ще е

$$u^{k+1}_{m,n} = \frac{1}{4}(u^{k+1}_{m-1,n} + u^{k+1}_{m,n-1} + u^{k}_{m+1,n} + u^{k}_{m,n+1} - h^2 f_{m,n}).$$

Условието за прекратяване на изчисленията е $\max\limits_{(m,n)} |u^k_{m,n} - u^{k+1}_{m,n}| \leq 0.0001$.

```
% Стъпка
h = 0.02;

% Равномерна мрежа от възли в областта със стъпка h
[x,y] = meshgrid([0:h:2],[0:h:3]);

% Пресмятане на дясната страна във възлите
f =(x.^3-3*x.^2+2*x).*y.*sin(pi*y);

% Избор на толеранс за прекратяване на  пресмятанията
delta = 0.0001;

% Първоначална стойност на променливата difrnce
% за да започне изпълнението на цикъла  while
difrnce = delta+1;

% Пресмятане на последователните приближения
% на решението във възлите
[M,N] = size(x);
u = zeros(M,N);

while difrnce > delta
  difrnce = 0;
  for m = 2 : M-1
```

```
      for n = 2 : N-1
         % Стара стойност на u(m,n)
         dummy = u(m,n);

         % Нова стойност на u(m,n)
         u(m,n)=(u(m-1,n)+u(m,n-1)+u(m+1,n)+u(m,n+1))/4
                + h^2*f(m,n)/4;

         % Намиране на най-голямата стойност на
         % |u(m,n)^k-u(m,n)^(k+1)|
         % и запазването й в difrnce
         if abs(u(m,n)-dummy) > difrnce
            difrnce = abs(u(m,n)-dummy);
         end
      end
   end
end

% Графика на решението
surf(x,y,u)
```



Фигура 6.8: Графика на решението от примера.

Бихме могли да гледаме на итерационния процес и като явна диференчна схема за параболично уравнение в $\mathbb{R}^3$. Наистина, рекурентната формула може да се запише във вида

$$\frac{4(u_{m,n}^{k+1}-u_{m,n}^{k})}{h^2}=\frac{u_{m-1,n}^{k}-2u_{m,n}^{k}+u_{m+1,n}^{k}}{h^2}+\frac{u_{m,n+1}^{k}-2u_{m,n}^{k}+u_{m,n+1}^{k}}{h^2}-f_{m,n}$$

и ако считаме, че k е номера на слоя по времето t, то това е точно диференчната схема за смесената задача за двумерното уравнение на топлопроводността

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}-f(x,y)$$

със стъпка по времето $\tau=h^2/4$. При това, условието за устойчивост на схемата е изпълнено, защото $\tau/h^2=1/4<1/2$.

Това е естествено и физически обосновано – когато граничните условия и нехомогенната част в уравнението не зависят от t, разпределението на температурата в областта, т.е. решението на смесената за уравнението на топроводността, с нарастване на времето се приближава до стационарно състояние – именно решението на задачата на Дирихле. Тази аналогия ни навежда на мисълта да разглеждаме всяка стационарна задача като частен случай на еволюционна, нестационарна задача, като ни интересува само граничното състояние, а не целия процес на получаването му. Така можем да използваме наличния апарат за приближено решаване на еволюционни уравнения.

Описаните методи за намиране приближение на решението могат да се използват и за по-общи области. Да разгледаме задачата на Дирихле в ограничена област D с граница Γ

$$\begin{cases} \Delta u=f(x,y) & \text{в } D,\\ u|_\Gamma=g(x,y) \end{cases}$$

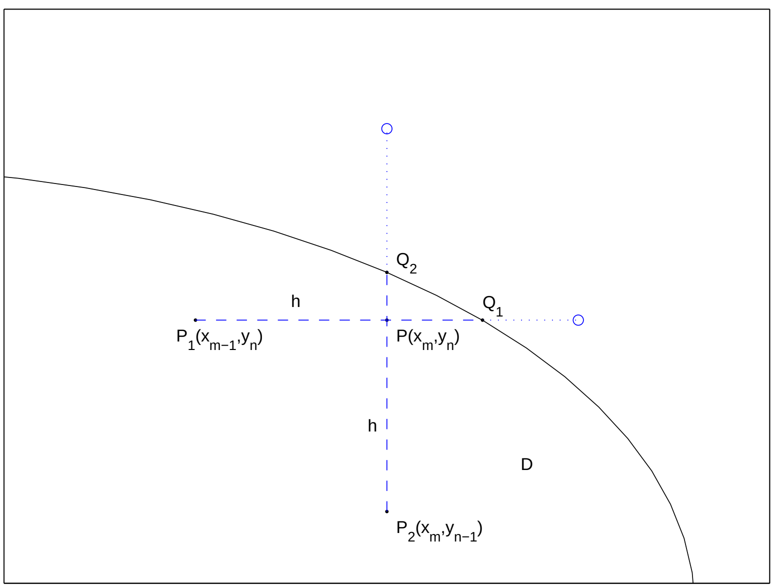
Както и преди, да въведем равномерна мрежа от възли (x_m,y_n).

Да напомним, че наричаме възела (x_m,y_n) вътрешен за областта, ако и четирите съседни (x_{m+1},y_n), (x_{m-1},y_n), (x_m,y_{n+1}) и (x_m,y_{n-1}) са от $\overline{D}$. Във вътрешните възли можем спокойно да напишем диференчното уравнение както по-рано

$$u_{m,n}=\frac{1}{4}(u_{m+1,n}+u_{m-1,n}+u_{m,n+1}+u_{k,m-1}-h^2f_{m,n}).$$

Казваме, че възела (x_m,y_n) е граничен, ако поне една от съседните точки (x_{m+1},y_n), (x_{m-1},y_n), (x_m,y_{n+1}) и (x_m,y_{n-1}) е извън $\overline{D}$. Ако зададем предварително стойности на $u_{m,n}$ в граничните възли, както и преди получаваме линейна система за $u_{m,n}$ във вътрешните възли. Тя има единствено решение и за приближеното му намиране може да се прилагат вече описаните итерационни методи. За разлика от правоъгълната област, в общия случай граничния възел не лежи върху границата на областта Γ, което не позволява да използваме директно граничното условие. Най-лесният способ за задаване стойността на $u_{m,n}$ във граничен възел е просто да вземем значението на функцията g в най-близката точка от границата.

Друга възможност е от уравнението и граничните данни да се получи връзка между $u_{m,n}$ и стойностите в съседните вътрешни възли. Нека например $P_1 = (x_{m-1}, y_n)$ и $P_2 = (x_m, y_{n-1})$ да са вътрешни, а $Q_1 = (x_m + \alpha h, y_n)$ и $Q_2 = (x_m, y_n + \beta h)$, където α, $\beta \in (0, 1)$, са координатите на "съседните" на $P = (x_m, y_n)$ точки от границата на областта Γ. От



Фигура 6.9: Граничен възел.

теоремата на Тейлър имаме

$$u(Q_1) = u(P) + \alpha h u_x(P) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} u_{xx}(P) + O(h^3)$$

и

$$u(P_1) = u(P) - h u_x(P) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(P) + O(h^3)$$

Оттук, като елиминираме $u_x(P)$ от двете равенства, получаваме

$$u_{xx}(P) = 2\frac{\alpha u(P_1) - (1+\alpha)u(P) + u(Q_1)}{\alpha(1+\alpha)h^2} + O(h).$$

Аналогично имаме и

$$u_{yy}(P) = 2\frac{\beta u(P_2) - (1+\beta)u(P) + u(Q_2)}{\beta(1+\beta)h^2} + O(h).$$

Сега, заместваме в лапласиана и използваме че $u(Q_1) = g(Q_1)$ и $u(Q_2) = g(Q_2)$ са известни от граничното условие. Получаваме следното приближение на уравнението на Поасон в (x_m, y_n):

$$\frac{u_{m-1,n}}{1+\alpha} + \frac{u_{m,n-1}}{1+\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) u_{n,m} + \frac{g(Q_1)}{\alpha(1+\alpha)} + \frac{g(Q_2)}{\beta(1+\beta)} = \frac{h^2}{2} f_{n,m}.$$

Това е ново линейно уравнение в граничния възел.

Библиография

[1] Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях, Наука, Москва, 1987.

[2] Валландер, С. В. Лекции по гидроаэромеханике, Изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1978.

[3] Дьяченко, В. Ф. Основные понятия вычислительной математики, Наука, Москва, 1977.

[4] Димова, С., Черногорова Т., Йотова, А. Лекции по числени методи за диференциални уравнения (http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/chmdu)

[5] Генчев, Т. Г. Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство "Св. Климент Охридски София, 2009.

[6] Генчев, Т. Г. Частни диференциални уравнения, Университетско издателство "Св. Климент Охридски София, 2004.

[7] Годунов С.К. Уравнения математической физики, Наука, Москва, 1979.

[8] Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Изд. Нижегородского университета, Нижний Новгород, 2007.

[9] Кошляков, Н. С., Глинер, Э. Б., Смирнов, М. М. Уравнения в частных производных математической физики, Высшая школа, Москва, 1970.

[10] Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений, Изд. Вышейшая школа, Минск, 1973.

[11] Попиванов, П., Китанов, П. Обикновенни диференциални уравнения, Благоевград, 2000.

[12] Попиванов, П. Попиванов, Н., Йорданов, Й. Ръководство по частни диференциални уравнения, София, 1998.

[13] Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем, Наука, Москва, 1971.

[14] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. Уравнения математической физики, Мир, Москва, 1977.

[15] Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, Москва, 1980.

[16] Эрроусмит Д., Плейс, К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями, Мир, Москва, 1986.

[17] Boyce, W. E., DiPrima, R. C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley and Sons, Inc., 2000.

[18] Crowell, B. Vibrations and waves, 1999.

[19] Downey, A. B. Physical Modeling in MATLAB Version 1.1, Free Software Foundation, 2008.

[20] Gekeler, E. W. Mathematical Methods for Mechanics, A Handbook with MATLAB Experiments, 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[21] Kelly, S. G. Fundamentals of Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Co, 2000.

[22] Shampine, L. F., Gladwell, I., Thompson, S., Solving ODEs with MATLAB, Cambridge University Press, New York 2003.

[23] Soare, M. V., Teodorescu, P. P., Toma, I. Ordinary differential equations with applications to mechanics, Springer, 2000.

[24] Tersian, S. A., Stavoulakis, I. P. Partial differential equations - An introduction with Mathematica and MAPLE, World Scientific Publishing Co., 2004.

[25] Wilson, H. B., Turcotte, L. H., Halpern, D. Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using Matlab, Chapman and Hall/CRC 2003.