

ЗАДАЧИ ПО КЛАСИЧЕСКА ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ

1. Нека векторната функция $v(q) \in C^1(I)$. Докажете, че $|v(q)| = \text{const}$ тогава и само тогава когато $vv' = 0$.

2. Нека векторната функция $v(q) \in C^{n+1}$ ($n \geq 0$ и цяло) в $I: |q - q_0| < r$. Докажете, че за всяко $q \in I$ е в сила формулата

$$v(q) = v(q_0) + \frac{V^{(1)}(q_0)}{1!}(q - q_0) + \dots + \frac{V^{(n+1)}(q_0)}{(n+1)!}(q - q_0)^{n+1} + \eta(q)(q - q_0)^{n+1},$$

където $\eta(q)$ е дефинирана и непрекъсната в I и $\eta(q) \xrightarrow{q \rightarrow q_0} 0$.

3. Нека векторната функция $v(q) \in C^1(I)$. Докажете, че:

а) ако за всяко $q \in I$ $v(q)$ е успореден на постоянна права, то $v(q) \times v'(q) = 0$ за всяко $q \in I$.

б) ако $v(q) \neq 0$ и $v(q) \times v'(q) = 0$ за всяко $q \in I$, то $v(q)$ е успореден на постоянна права за всяко $q \in I$.

4. Нека векторната функция $v(q) \in C^2(I)$. Докажете, че:

а) ако $v(q)$ е успореден на постоянна равнина за всяко $q \in I$, то $v(q) \times v'(q) \times v''(q) = 0$ за всяко $q \in I$.

б) ако $v(q) \times v'(q) \neq 0$ и $v(q) \times v'(q) \times v''(q) = 0$ за всяко $q \in I$, то $v(q)$ е успореден на постоянна равнина за всяко $q \in I$.

5. Дадена е линията $c: x_1 = \cos^3 q, x_2 = \sin^3 q, x_3 = \cos 2q$ ($0 < q < \pi/2$). Да се намерят:

а) дължината на c ;

б) дължината на дъгата c_0 върху линията c от точката $A(\pi/3)$ до точката $B(\pi/4)$.

6. Нека $c: x = x(q)$, $q \in I$ е 3-кратно гладка правилна крива. Да се докаже, че тя е равнинна тогава и само тогава, когато $x'(q) \times x''(q) \times x'''(q) = 0$ за всяко $q \in I$.

7. Дадени са уравненията:

$$a) x^2 + x_1^2 = 10,$$

$$x_2^2 + x_3^2 = 25;$$

$$б) x^2 + x_1^2 + x_3^2 = 9,$$

$$x^2 - x_1^2 = 3.$$

На линията c_1 (c_2), представена с уравнения а), (б)) да се намерят тангентата и нормалната равнина през точката $M(1,3,4)$ ($M(2,1,2)$)

8. Да се намерят скаларните и векторните инварианти, правите и равнините на придружаващия триедър на следните криви (a, b са константи):

$$a) x_1 = a \cos q \quad x_2 = a \sin q \quad x_3 = b q, \quad -\infty < q < \infty,$$

$$б) x_1 = \cos^3 q \quad x_2 = \sin^3 q \quad x_3 = \cos 2q \quad 0 < q < \pi/2,$$

$$в) x_1 = a \operatorname{ch} q \quad x_2 = a \operatorname{sh} q \quad x_3 = a q \quad -\infty < q < \infty,$$

$$г) x_1 = q - \sin q \quad x_2 = 1 - \cos q \quad x_3 = \sin q \quad -\infty < q < \infty,$$

$$д) x_1 = 2q \quad x_2 = \ln q \quad x_3 = q^2 \quad q > 0$$

9. Дадена е кривата $c: x_1 = a \cos q, x_2 = a \sin q, x_3 = ab q, q \in I$ (a, b const). От произволна точка M на c върху главната нормада по посока към центъра на кривината нанасяме отсечка MM_1 с постоянна дължина d . Когато M описва c , точката M_1 описва кривата c_1 . Да се определи d по такъв начин, че кривите c и c_1 да притежават едно от следните 4 свойства:

а) да имат една и съща кривина;

б) да имат една и съща торзия по абсолютна стойност,

в) да имат взаимно перпендикулярни тангенти;

г) тангентата на c_1 в точката M_1 да е успоредна на бинормалата на c в M .

10. Сфера S_1 с радиус $2R$ е пресечена с кръговия цилиндър S_2 , чийто диаметър е равен на радиуса на сферата и една от образуващите му минава през центъра на сферата. Пресечната крива на S_1 и S_2 се нарича крива на Вивиани. Да се намерят:

а) параметрични уравнения на кривата на Вивиани;

б) кривината на кривата и да се провери има ли кривата точки на изпрявяне;

в) торзията на кривата, равнинните точки и дъгите върху които торзията запазва знака си

г) триедъра на Френе в равнинните точки и точките на самопресичане

11. Дадена е кривата γ с $x = \sin 2q$, $x_2 = 1 - \cos 2q$, $x_3 = 2 \cos q$, $q \in I$. Да се докаже, че тя лежи върху сфера с уравнение $y^2 + y_2^2 + y_3^2 = 4$ и че не е равнинна. Да се намерят проекциите на кривата върху координатните равнини.

12. Оскулачните равнини на 3-кратно гладка правилна крива са успоредни на дадена права. Да се докаже, че кривата е равнинна.

13. Дадена е кривата γ с $x = a(q - \sin q)$, $x_2 = a(1 - \cos q)$, $x_3 = 4a \sin(q/2)$, $q \in I$. От всяка точка на кривата по главната нормала е нанесена към вдълбнатата ѝ част отсечка с дължина $d = 4a^2 \chi$. Да се намери уравнението на кривата, образувана от втория край на тази отсечка. Да се докаже, че тя е равнина и да се определи равнината, в която тя лежи.

14. Бинормалите на 4-кратно гладка пространствена правилна крива пресичат постоянна права. Да се намерят естествени уравнения на кривата, ако $\tau = a$, $a = \text{const}$.

15. Нека γ с $x = x(s)$, $s \in I$ n -кратно гладка ($n > 4$) правилна крива без равнинни точки. От произволна точка M на γ по бинормалата в положителна посока е нанесена отсечка с дължина $1/\tau$ до точка M^* . Когато M описва γ , M^* описва линията γ^* . Да се намерят естествените уравнения на кривата γ , ако се знае, че γ^* е права линия.

16. Кривата γ с има естествени уравнения $\chi = a/s$, $\tau = b/s$ (a и b са константи, $0 < s < \infty$). Да се намерят координатни параметрични уравнения на γ спрямо произволна координатна система.

17. Между точките на две правилни криви γ и γ^* е установено биективно съответствие, така, че в съответните точки главните нормали на γ са бинормали на γ^* . Да се докаже, че за кривината и торзията на кривата γ е изпълнено равенството $\chi = \lambda(\chi^2 + \tau^2)$.

където $\lambda = \text{const}$ е разстоянието между съответните точки на c и c .

18. Нека правилната крива c е 5-кратно гладка и всички нейни ректифицируеми равнини минават през една точка A . Да се докаже, че $\tau/\chi = as+b$, където a и b са константи.

19. Кривата c е зададена с векторно параметрично уравнение $x = a \int m(q) \times m'(q) dq$, $q \in I$, където a е константа, а $m(q)$ е векторна функция от клас C^2 , удовлетворяваща условията $|m(q)| = 1$, $|m'(q)| \neq 0$ за $q \in I$. Да се докаже, че торзията на c е постоянна.

20. Да се докаже, че всяка 3-кратно гладка правилна крива c с постоянна торзия може да се зададе с векторно параметрично уравнение от вида $x = a \int m(q) \times m'(q) dq$, $q \in I$, където a е константа, а $m(q)$ е векторна функция от клас C^2 , удовлетворяваща условията $|m(q)| = 1$, $|m'(q)| \neq 0$.

21. Една 3-кратно гладка правилна крива c се нарича витлова линия когато тангентите и във всяка точка сключват постоянен ъгъл с една постоянна посока.

Да се докаже, че ако една 3-кратно гладка правилна крива притежава едно от следните 5 свойства:

а) допирателните и във всяка точка сключват постоянен ъгъл с една постоянна посока;

б) бинормалите и във всяка точка сключват постоянен ъгъл с една постоянна посока;

в) главните нормали на кривата са успоредни на постоянна равнина;

г) отношението на торзията и кривината на кривата е постоянно;

д) смесеното произведение $x'' \cdot x''' \cdot x^{IV} = 0$, то тя притежава и останалите 4 свойства.

22. Да се докаже, че кривата $c: x_1 = e^q, x_2 = e^{-q}, x_3 = (2)^{1/2} q$, $q \in I$ е витлова линия и да се намерят уравнения на цилиндричната повърхнина върху която тя лежи.

23. Между точките на две 3-кратно гладки правилни криви C и C_1 е установено биективно съответствие, така, че в съответните точки главните нормали на C са главни нормали и на C_1 (т.е. C и C_1 са криви на Бертран). Да се докаже, че:

а) разстоянието между съответните точки на C и C_1 е постоянно;

б) ъгълът между t и t_1 в съответните точки е постоянен;

в) съществува линеина връзка между кривината и торзията на всяка от кривите C и C_1 .

24. Докажете, че една крива е крива на Бертран точно тогава, когато кривината и торзията и удовлетворяват равенството $A\chi + B\tau = C$, където A , B и C са константи и $(A, B) \neq (0, 0)$.

25. Да се докаже, за 3-кратно гладка правилна пространствена крива C с постоянна кривина $\chi = \chi_0$ винаги съществува крива C^* , такава, че C и C^* са криви на Бертран. В частния случай, когато C не е обикновена винтова линия, C^* е пространствена крива със същата кривина $\chi^* = \chi_0$. В този случай кривите C и C^* притежават следните свойства:

а) Всяка една от тези криви е геометричното място на центровете на кривината на другата;

б) в съответните точки P и P^* векторите t и t^* са перпендикулярни;

в) нормалната равнина на C в P съвпада с оскулачната равнина на C^* в P^* .

26. Даден е ройт прави G , определен с точка $x(e^q \cos q - \lambda(q) \sin q, e^q \sin q + \lambda(q) \cos q, e^q)$ и вектор $l(-1/(3)^{1/2} \cos q, -1/(3)^{1/2} \sin q, (2/3)^{1/2})$, $\lambda(q) \in C^1(I)$, $q \in I$. Да се определи функцията $\lambda(q)$, така, че ройт да бъде развиваем и да се намери централната му линия.

27. Дадена е 2-параметричната система от прави

$D_1: x_1 = u x_3 + v, x_2 = v x_3 + u^3/3, (u, v) \in D$. При каква зависимост между u и v тези прави образуват развиваем рой. Да се намери пресечната крива на този рой с равнината $Ox_1 x_2$ и централната му линия.

28. Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие една 3-кратно гладка правилна пространствена крива да е крива на Бертран или обща витлова линия е да съществува права g , неизменно свързана с подвижния триедър на кривата, успоредна на ректифициращата равнина, която да образува развиваем рой.

29. Да се намерят координатни параметрични уравнения на равнинните криви, зададени със следните естествени уравнения:

а) $R = s^2/a + a$,

б) $R = a^2/s$,

($a = \text{const}$).

30. Нека $c: x = x(s)$ е 4-кратно гладка равнинна крива с еволута c^* . Да се докаже, че

а) ако χ е монотонна неанулираща се функция, то c^* е гладка крива;

б) ако χ е монотонна функция, за която съществува точка s_0 така, че $\chi(s_0) = 0$ то c^* се разпада на две гладки криви (за $s < s_0$ и $s > s_0$);

в) ако χ има локален екстремум в точката s_0 , то точката, съответна на s_0 е особена точка за c^* .

31. Да се изразят кривината и дължината на дъгата на еволутата c^* на дадена равнинна крива c във функция на дължината на дъгата s и кривината χ на дадената крива.

32. Да се намерят еволутите на:

а) елипсата $x_1 = a \cos q$, $x_2 = b \sin q$, $0 \leq q < \pi$,

б) астроидата $x_1 = a \cos^3 q$, $x_2 = b \sin^3 q$, $q \in I$.

33. Дадени са: n -кратно гладката линия $c: x = x(q)$, $q \in I$, вектор v и точка M_0 , такива, че $x(q) \neq x_0$, $x(q) \times v \neq 0$, където $x_0 = OM_0$. Да се намерят:

а) уравнения на цилиндричната повърхнина S_1 с направляваща крива c и образуващи, успоредни на v ;

б) образът на S_1 върху Гаусовата сфера;

в) уравнение на коничната повърхнина S_2 с връх M_0 и направляваща линия c ;

г) допирателната равнина към S_2 в произволна точка на направляващата линия c , при условие, че $x'(q)x(q)-x_0 \neq 0$ в тази точка.

34. В равнината Ox_1x_3 са дадени линията $c: x_1=f(q), x_3=g(q), q \in I$.

а) да се намери ротационната повърхнина, която се получава при пълното завъртане на c около оста Ox_3 ;

б) да се докаже, че нормалата на тази повърхнина в произволна нейна точка лежи в равнина, минаваща през ротационната ос.

в) в частният случай $c: x_1=2+\sin q, x_3=q$ да се намери образът на ротационната повърхнина върху Гаусовата сфера;

35. Да се намерят ротационните повърхнини, получени при пълното завъртане около Ox_3 на следните криви:

а) трактрисата $c_1: x_1=a \sin u, x_3=a \ln \operatorname{tg} u/2 + a \cos u, 0 \leq u < \pi/2$;

б) верижката $c_2: x_1=(a/2)(e^{u/a}+e^{-u/a}), x_3=u$

в) окръжността $c_3: x_1=d+a \cos q, x_3=a \sin q, 0 \leq q < 2\pi, d>a>0$;

г) $c_4: x_1=e^u \cos u, x_2=e^u \sin u, x_3=e^u, -\infty < u < \infty$.

1

36. Намерете първата основна форма на ротационната повърхнина

$S: x_1=u \cos v, x_2=u \sin v, x_3=f(u), u \in I, 0 \leq v \leq 2\pi, f \in C^1$.

Проверете, че меридианите и паралелите ѝ образуват ортогонална мрежа. Намерете линиите, които разполовяват ъглите между меридианите и паралелите.

37. Дадено е семейството повърхнини $S_{f,\varphi}: x_1=u \cos v, x_2=u \sin v, x_3=f(u)+\varphi(v), (u,v) \in D, f, \varphi \in C^1$. Да се определи онази повърхнина $S \in S_{f,\varphi}$, която има свойствата:

а) нормалите ѝ секат Ox_3 ;

б) ортогоналните проекции върху Ox_1x_2 на ортогоналните траектории на линиите $c_v: u+v=\gamma$ от S са логаритмични спирали с един и същи параметър общ полюс-началото на координатната система $Ox_1x_2x_3$.

38. Даден е хеликоида $S: x_1=u \sin v, x_2=u \cos v, x_3=v, (u,v) \in D$

Намерете:

а) първата основна форма на S ;

б) лицето на криволинейния триъгълник $0 \leq u \leq sh \ v, \quad 0 \leq v \leq v_0$ върху S ;

в) дължините на страните и ъглите на този триъгълник

39. Намерете нормалната кривина на произволно нормално сечение на параболоида $S: (x_1^2/a^2) + (x_2^2/b^2) = x_3$ в началото O на координатната система $Ox_1x_2x_3$.

40. Дадена е повърхнината $S: x_1 = u^2 + v, \quad x_2 = u^3 + uv, \quad x_3 = u^4 + (2/3)u^2v, \quad (u, v) \in D$

а) да се намерят праволинейните образуващи на повърхнината;

б) да се докаже, че оскулачната равнина във всяка точка на кривата $v=0$ съвпада с допирателната равнина към повърхнината в тази точка;

в) да се намерят асимптотичните линии на S и ортогоналните проекции върху равнината Ox_1x_2 на онези асимптотичните линии, които минават през точката $A(3/2, 3/2, 4/3)$.

41. Намерете повърхнина $S: x_3 = F(x_1, x_2)$, чиито системи асимптотични линии c_1 и c_2 са пресечните линии на S съответно с повърхнините $S_1: x_2 = a, \quad S_2: x_1 f(x_2) = b$.

42. Повърхнината S е образувана от главните нормали на 3-кратно гладката правилна пространствена крива c . Докажете, че c е асимптотична линия на S .

43. Уравненията $x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = f(u, v)$, в които f е функция на произведението uv и е най-малко двукратно гладка, когато u и v се менят в областа D , определят повърхнина S . Да се определи f по такъв начин, че едната система асимптотични линии на S да се проектира ортогонално върху равнината Ox_1x_2 в 1-системата от линии $c_\lambda: x_2 = \lambda x_1^4$. Да се определи втората система асимптотични линии.

44. Да се намери параметрично представяне на повърхнината $S: x_1^2 x_3 = a x_2^2, \quad a = \text{const}$, при което параметричната мрежа да се състои от асимптотичните линии на S .

45. Дадена е повърхнината $S : x_1 = u \cos v, x_2 = u \sin v, x_3 = bv, b = \text{const}, (u, v) \in D$. Да се намерят:

- а) линиите на кривините на S .
- б) асимптотичните линии на S .
- в) Гаусовата и средната кривина на S .
- г) главните радиуси на кривината на S .

Да се определи характера на точките на повърхнината S .

46. Да се определи характера на точките на повърхнината

$$S: x_3 = f((x_1^2 - x_2^2)^{1/2}), f \in C^2, |x_1| > |x_2|$$

47. Докажете, че ако $S : x = x(u, v), (u, v) \in D$ е 3-кратно гладка повърхнина, съставена само от параблични точки, то тя е развиваема.

48. Намерете линиите на кривина на повърхнината

$$S : x_3 = \arctg(x_2/x_1).$$

49. Намерете Гаусовата кривина на повърхнината

$$S: e^{x_3} = \sin(x_1^2 + x_2^2).$$

50. Намерете ротационна повърхнина с нулева средна кривина.

51. Намерете торзията на асимптотичните линии на повърхнината

$$S: 2x_3 = kx_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2, k, h, b - \text{константи}.$$

52. Докажете, че ако асимптотичната линия s върху повърхнината S се явява и линия на кривина, то нормалата към S в точките на s има постоянно направление, а Гаусовата кривина на S в точките на s е равна на нула.

53. Нека S е двукратно гладка повърхнина с Гаусова кривина $K < 0$. Да се докаже, че ако двойката асимптотични линии на S в произволна нейна точка се пресичат под постоянен ъгъл θ , то K и H удовлетворяват уравнението $K \cos^2 \theta + H^2 \sin^2 \theta = 0$.

54. Намерете геодезичната кривина и нормалната кривина на витловата линия $x_1 = a \cos q$ $x_2 = a \sin q$ $x_3 = b q$, $q \in I$, ако тя лежи върху:

а) хеликоида $S: x_1 = u \cos v$, $x_2 = u \sin v$, $x_3 = b v$, $(u, v) \in D$, $b = \text{const}$;

б) цилиндъра $S: x_1 = a \cos v$, $x_2 = a \sin v$, $x_3 = u$, $(u, v) \in D$, $a = \text{const}$;

55. Да се намери ковариантната производна на полето

$$X = \cos u^2 \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \quad \text{по линията } c: u^1 + u^2 = 0 \text{ върху}$$

а) сферата $S: \begin{cases} x_1 = \sin u^1 \cos u^2 \\ x_2 = \cos u^1 \cos u^2 \\ x_3 = \sin u^2 \end{cases}$

б) равнината $S: \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 u^1 + c_1 u^2 \\ x_2 = a_2 + b_2 u^1 + c_2 u^2 \\ x_3 = a_3 + b_3 u^1 + c_3 u^2 \end{cases}$

56. Да се докаже, че паралелният пренос на вектор X по крива в равнината не зависи от кривата, а само от началната точка A и крайната точка B и представлява трансляция в равнината на вектора X от точка A до точка B .

57. Да се намери паралелния пренос по произволен меридиан на сферата от северния полюс N до южния полюс S на сферата.

58. Върху повърхнината

$$S: x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = \ln(u + (u^2 - 1)^{1/2}), \quad (u, v) \in D$$

да се намери геодезичната линия c , която минава през точката $M_0(2, 0, \ln(2 + 3^{1/2}))$, и се допира до вектора $p(1, 3)$.

59. Нека $S: x = x(u, v)$, $(u, v) \in D$ е двукратно гладка повърхнина и $c: u = u(q)$, $v = v(q)$, $q \in I$ е двукратно гладка линия върху нея. Докажете, че:

а) c е асимптотична линия тогава и само тогава, когато тя е или права, или крива във всяка точка на която оскулачната равнина съвпада с допирателната равнина на S в тази точка.

6) c е геодезична линия тогава и само тогава, когато тя е или права, или крива във всяка точка на която оскулачната равнина е нормална на допирателната равнина на S в тази точка.

60. Повърхнината S е образувана от бинормалите на 3-кратно гладка правилна крива c . Докажете, че c е геодезична линия за S .

61. Какво можем да кажем за линията c , ако за повърхнината S тя е асимптотична и геодезична?

62. Да се докаже, че катеноида

$$S: x_1 = u \cos v, x_2 = u \sin v, x_3 = a \ln(u + \epsilon(u^2 - a^2)^{1/2}), \quad \epsilon = \pm 1, u + \epsilon(u^2 - a^2)^{1/2} > 0$$

и правия хеликоид

$$S: x_1 = u \cos v, x_2 = u \sin v, x_3 = a v$$

са изометрични.

63. Дадена е ротационната повърхнина

$$S: x_1 = u \cos v, x_2 = u \sin v, x_3 = f(u).$$

Да се намери изометрична на нея друга ротационна повърхнина S^* , такава, че паралелите и меридианите на S и S^* да бъдат съответни при изометрия.

64. Покажете, че съществува конформно изображение на повърхнината $S: x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ върху област от равнината $0 < x_1, x_2$.

65. Покажете, че изображението на хеликоида S върху единичната сфера посредством нормалите на S е конформно.

66. Приложете теоремата на Гаус - Боне за равнинен кръгов венец.

67. Докажете, че за всяка затворена ориентируема повърхнина S от род p с уравнение $x = \varphi(u, v)$, където $\varphi \in C^3$ е изпълнено равенството $\iint_S K d\sigma = 4\pi(1 - p)$. Намерете интегралната кривина на тора.