Писмен изпит по Диференциална Геометрия, Математика - II курс

17.06.2014 г.

Задача 1 *Във всяка точка M на кривата $c : x = x(s), s \in J$ прекарваме нормала, която сключва ъгъл $\varphi(s)$ с главната нормала и върху нея нанасяме точка $\overline{M}$ такава, че $|M\overline{M}| = l = const$. Когато точката M описва кривата c, точката $\overline{M}$ описва крива $\overline{c}$.*

а)(0.5 точки) Да се докаже, че допирателната $\overline{t}$ на кривата $\overline{c}$ е перпендикулярна на отсечката $M\overline{M}$;

б)(0.5 точки) Да се определи така $\varphi(s)$ така, че допирателните към c и $\overline{c}$ в съответните точки да са перпендикулярни.

Задача 2 *Нека $c : x = x(s), s \in J$ е поне петкратно гладка правилна крива. Разглеждаме кривите $c_0 : x_0 = \int b ds$ и $\overline{c} : \overline{x} = cos(\theta).x + sin(\theta).x_0$, където $\theta = const$, а b е бинормалата на кривата c.*

а)(0.25 точки) Да се докаже, че ако кривата c има постоянна кривина $\kappa = const$, то кривата c_0 има постоянна торзия $\tau_0 = const$;

б)(0.25 точки) Да се докаже, че ако кривата c има постоянна кривина $\kappa = const$, то кривината $\overline{\kappa}$ и торзията $\overline{\tau}$ на кривата $\overline{c}$ удовлетворяват равенството $\overline{\kappa}.cos(\theta) + \overline{\tau}.sin(\theta) - \kappa = 0$;

в)(0.5 точки) В случая, когато

$$c : \begin{cases} x^1 = cos(q) \\ x^2 = sin(q) \\ x^3 = q \end{cases},$$

да се пресметнат торзията τ_0 кривата c_0 и кривината $\overline{\kappa}$ на кривата $\overline{c}$.

Задача 3 *Дадено е семейството от повърхнини:*

$$S_\varphi : \begin{cases} x^1 = (u+v)cos(v) \\ x^2 = (u+v)sin(v) \\ x^3 = \varphi(u) + v \end{cases},$$

където $\varphi(u)$ е поне двукратно гладка функция, $u > 0$ и $0 \leq v < \pi$.

а)(0.5 точки) Да се определи повърхнината S от семейството повърхнини S_φ, за която параметричните линии са спрегнати и която минава през точката $M(1,0,1)$;

б)(0.5 точки) В случая, когато $\varphi(u) = u$ да се намерят асимптотичните линии на получената повърхнина.

Задача 4 *Дадено е семейството от повърхнини:*

$$S_\varphi : \begin{cases} x^1 = \varphi(u) \\ x^2 = v \\ x^3 = \ln\cos(u) + \ln\cos(v) \end{cases},$$

където $\varphi(v)$ е еднократно гладка функция, $\varphi'(u) > 0$ за $u, v \in [0, \frac{\pi}{2})$.

а)(0.5 точки) Да се намерят онази повърхнина S от семейството повърхнини S_φ, минаваща през точката $O(0,0,0)$ и за която семейството линии $\frac{tg(u)}{cos(v)} = const$ са ортогонални траектории на параметричните u-линии;

б)(0.5 точки) В случая, когато $\varphi(u) = u$ да се намерят линиите на кривината, Гаусовата и Средната кривина.

Задача 5 *(1.0 точка) Формулирайте и докажете теоремата на Херглоц.*

Задача 6 *(1.0 точка) Формулирайте и докажете теоремата за плоската свързаност.*

Задача 7 *(1.0 точка) Дадено е диференцируемото многообразие $M = \{(\mathbb{R}^3, id_{\mathbb{R}^3})\}$ с локални координати x^i. Нека ∇^k е каноничната свързаност върху M, дефинирана чрез $\nabla^k_X Y = X(\psi^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$, за $X = \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \psi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \chi(M)$. Дефинираме изображение $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla^k_X Y + XY.\frac{\partial}{\partial x^1}$, където $XY = \sum_{i=1}^3 \varphi^i \psi^i$.*

а)(0.5 точки) Да се докаже, че $\widetilde{\nabla}$ е линейна свързаност върху M и да се намерят торзията $\widetilde{T}$ и кривината $\widetilde{R}$ на $\widetilde{\nabla}$;

б)(0.5 точки) Да се намерят геодезичните линии на $\widetilde{\nabla}$.

Задача 8 *(1.0 точка) Нека $M = (\mathbf{R}^2, id_{\mathbf{R}^2})$ е диференцируемо многообразие. Дадени са векторните полета $E_1 = e^{x_1}\frac{\partial}{\partial x^1} \in \chi(M)$ и $E_2 = e^{-x_1}\frac{\partial}{\partial x^2} \in \chi(M)$. Нека ∇ е свързаността, определена от паралелизацията E_1, E_2 на M, т.е. ако $Y = Y^i E_i$, то $\nabla_X Y = \nabla_X(Y^i E_i) = X(Y^i)E_i$.*

а)(0.5 точки) Да се намерят Γ^k_{ij} и R^l_{ijk} относно ∇, и да се провери дали тензорът на торзията на ∇ е нула.

б)(0.5 точки) Да се намери векторно поле $Y(t)$, паралелно по линията

$c : \begin{cases} t^1 = t \\ t^2 = \cos(t) \end{cases}$ *за ∇, за което $Y(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_{c(0)} + \frac{\partial}{\partial x_2}|_{c(0)}$.*

Задача 9 *(1.0 точка) Дадена е римановата сфера $S^n = \{(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + ... + (x^n)^2 = R^2\}$ с метрика $g_{ij} = \frac{4R^2}{A^2}\delta_{ij}$, където $A = R^2 + \sum_{s=1}^n (x^s)^2$. Да се докаже, че (S^n, g) е многообразие с постоянна секционна кривина.*