5.5. Интерполационни сплайни

Постановка на задачата

Нека $y = f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $[a,b]$ и е известна таблица от стойностите $y_i = f(x_i)$ на функцията в точките (възлите) $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b \in [a,b]$. В общия случай възлите са неравноотстоящи, като стъпките между тях ще означаваме с $h_k = x_k - x_{k-1}$. Нека таблицата има вида:

x_i	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

Интерполационният сплайн $S_k(f,x)$ от ред k е функция със следните свойства:

- $S_k(f,x)$ е полином $f_i(x)$ от степен k във всеки подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$,
- $S_k(f,x)$ интерполира функцията, т.е. $S_k(f,x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$,
- $S_k(f,x)$ е непрекъсната навсякъде в интервала $[a,b]$ заедно с производните си до ред (k-1).

Когато сплайните удовлетворяват и други допълнителни свойства, те се намират по единствен начин. Най-използвани са сплайните от ред $k = 1$, 2 и 3, които се наричат съответно линеен, квадратичен и кубичен сплайн.

Обща формула на линеен сплайн	**Коефициенти на сплайна**
$S_1(f,x) = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ \ldots \\ f_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \ldots \\ f_n = a_n + b_n(x - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$	$a_i = y_{i-1}$, $b_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1,n}$

Обща формула на квадратичен сплайн	**Коефициенти на сплайна**
$S_2 = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2, & x \in [x_0, x_1] \\ \ldots \\ f_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \ldots \\ f_n = a_n + b_n(x - x_{n-1}) + c_n(x - x_{n-1})^2, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$	$a_i = y_{i-1}$, $b_1 = 0$, $b_{i+1} = -b_i + 2\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$, $c_i = \dfrac{b_{i+1} - b_i}{2h_i}, \quad i = \overline{1,n}$

Обща формула на кубичен сплайн
$S_3 = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x-x_0) + c_1(x-x_0)^2 + d_1(x-x_0)^3, & x \in [x_0, x_1] \\ \ldots & \\ f_i = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \ldots & \\ f_n = a_n + b_n(x-x_{n-1}) + c_n(x-x_{n-1})^2 + d_n(x-x_{n-1})^3, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$

Коефициенти на кубичния сплайн

$$a_i = y_{i-1}, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(l_{i+1} + 2l_i), \quad i = \overline{1,n}$$

$$c_i = \frac{l_i}{2}, \quad d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h_i}, \quad i = \overline{1,n-1}$$

Тук помощните коефициенти l_i са решения на следната тридиагонална система линейни алгебрични уравнения с преобладаващ главен диагонал:

$$\left| \begin{array}{lllll} l_1 & & & & = 0 \\ h_1 l_1 & + 2(h_1 + h_2) l_2 & + h_2 l_3 & & = 6\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\ & & \ldots & & \\ h_{i-1} l_{i-1} & + 2(h_{i-1} + h_i) l_i & + h_i l_{i+1} & & = 6\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \\ & & & \ldots & \\ & & & l_{n+1} & = 0 \end{array} \right.$$

Коефициенти на кубичния сплайн в случай на равноотстоящи възли

$$h = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}$$

$$a_i = y_{i-1}, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(l_{i+1} + 2l_i), \quad i = \overline{1,n}$$

$$c_i = \frac{l_i}{2}, \quad d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h}, \quad i = \overline{1,n-1}$$

Помощните коефициенти l_i се намират от системата:

$$\left| \begin{array}{lllll} l_1 & & & & = 0 \\ l_1 & + 4l_2 & + l_3 & & = 6\,\dfrac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \\ & & \ldots\ldots & & \\ l_{i-1} & + 4l_i & + l_{i+1} & & = 6\,\dfrac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2} \\ & & & \ldots\ldots & \\ & & & l_{n+1} & = 0 \end{array} \right.$$

Пример 1. Дадена е следната таблица от стойности на функцията $y = f(x)$:

x_i	3,0	4,5	7,0	9,0
y_i	2,5	1,0	2,5	0,5

Да се построи указаният сплайн и с негова помощ да се намерят приближените стойности на функцията в точките: $z_1 = 4$ и $z_2 = 5$:

а) линейният сплайн

б) квадратичният сплайн

в) кубичният сплайн

Решение:

Изчисляваме стъпките: $h_1 =$ 4,5 - 3 = 1,5; $h_2 =$ 7 - 4,5 = 2,5; $h_3 =$ 9 – 7 = 2.

а) По формулите за S_1 пресмятаме последователно коефициентите a_i, b_i:

при $i = 1$, интервал [3,0; 4,5]: $a_1 = y_0 = 2{,}5$, $b_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} = \dfrac{1 - 2{,}5}{1{,}5} = -1$;

при $i = 2$, интервал [4,5; 7]: $a_2 = y_1 = 1$, $b_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} = \dfrac{2{,}5 - 1}{2{,}5} = 0{,}6$;

при $i = 3$, интервал [7; 9]: $a_3 = y_2 = 2{,}5$, $b_3 = \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} = \dfrac{0{,}5 - 2{,}5}{2} = -1$.

Нанасяме коефициентите и получаваме следната таблица:

i	a_i	b_i	Линеен сплайн $S_1(f, x)$ от пример 1а)
1	2,5	-1,0	$f_1 = 2{,}5 - (x - 3)$ при $x \in [3;\ 4{,}5]$
2	1,0	0,6	$f_2 = 1 + 0{,}6(x - 4{,}5)$ при $x \in [4{,}5;\ 7]$
3	2,5	-1,0	$f_3 = 2{,}5 - (x - 7)$ при $x \in [7;\ 9]$

За да изчислим приближената стойност на функцията в точката $z_1 = 4$ с помощта на сплайна, определяме, че тя се намира в първия интервал и ще се апроксимира по формулата за f_1. Тогава

$$f(4) \approx f_1(4) = a_1 + b_1(z_1 - x_0) = 2{,}5 + (-1)(4 - 3) = 1{,}5 .$$

Аналогично $f(5) \approx f_2(5) = a_2 + b_2(z_2 - x_1) = 1 + 0{,}6(5 - 4{,}5) = 1{,}3$.

Графиката на сплайна е показана на фиг.1. – S_1 .

Лесно може да се установи, че сплайнът е вярно определен. В случая на линеен сплайн за целта трябва само да се провери дали той минава през точките y_i, $i = 1,2,3,4$ и е непрекъснат. Наистина $S_1(3) = f_1(3) = 2{,}5$, $S_1(4{,}5) = f_2(4{,}5) = 1$ и $S_1(7) = f_2(7) = 2{,}5$, Освен това: $f_1(4{,}5) = 2{,}5 + (-1).(4{,}5-3) = 2{,}5 - 1{,}5 = 1 = f_2(4{,}5)$, $f_2(7) = 1 + (0{,}6).(2{,}5) = 1 + 1{,}5 = 2{,}5 = f_3(7)$ и $f_3(9) = 2{,}5 + (-1).(9-7) = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$.

б) В случая на квадратичен сплайн S_2 изчисленията се извършват по рекурентните формули от съответната таблица. за a_i, b_i, c_i при $i = 1, 2, 3$:

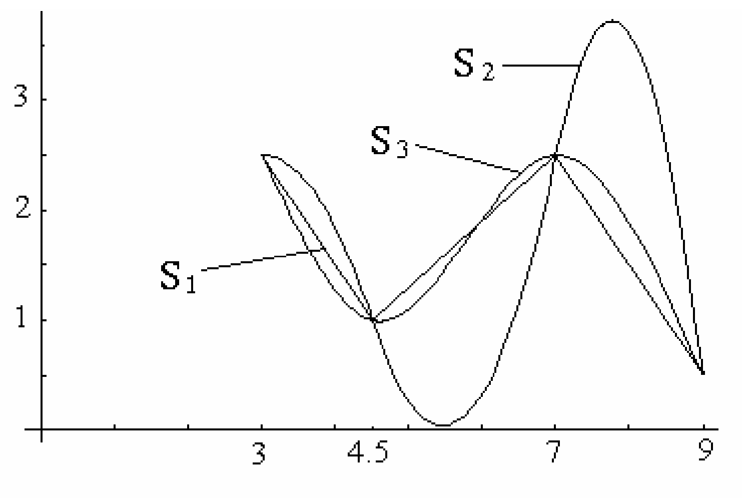
i	a_i	b_i	c_i	Квадратичен сплайн $S_2(f,x)$ от пример 1б)
1	2,5	0,0	-0,6667	$f_1 = 2{,}5 - 0{,}6667(x-3)^2$ при $x \in [3; 4{,}5]$
2	1,0	-2,0	1,0400	$f_2 = 1 - 2(x-4{,}5) + 1{,}04(x-4{,}5)^2$ при $x \in [4{,}5; 7]$
3	2,5	3,2	-2,1000	$f_3 = 2{,}5 + 3{,}2(x-7) - 2{,}1(x-7)^2$ при $x \in [7; 9]$
4	-	-5,2	-	-

Приближението на функцията в точката $z_1 = 4$ се намира от

$$f(4) \approx f_1 = a_1 + b_1(z_1 - x_0) + c_1(z_1 - x_0)^2 = 2{,}5 - 0{,}6667(4-3)^2 = 1{,}8333.$$

Аналогично за другата точка $z_2 = 5$ получаваме

$$f(5) \approx f_2 = a_2 + b_2(z_2 - x_1) + c_2(z_2 - x_1)^2 = 1 - 2(5-4{,}5) + 1{,}04(5-4{,}5)^2 = 0{,}26 \;.$$



Фиг. 1. Графики на получените сплайни от задача 1а), 1б) и 1в).

в) Нека сега да построим и кубичния сплайн S_3. За целта образуваме линейната система за помощните коефициенти l_i, където $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{cases} l_1 & & & = 0 \\ h_1 l_1 & + 2(h_1 + h_2) l_2 & + h_2 l_3 & = 6\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\ & h_2 l_2 & + 2(h_2 + h_3) l_3 \quad + h_3 l_4 & = 6\left(\dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2}\right) \\ & & l_4 & = 0 \end{cases}.$$

Като заместим конкретните данни стигаме до системата:

$$\begin{cases} 8 l_2 + 2{,}5 l_3 = 9{,}6 \\ 2{,}5 l_2 + 9 l_3 = -9{,}6 \end{cases}.$$

Решавайки тази система, за помощните коефициенти намираме:

$l_1 = 0,\ l_2 = 1{,}6791,\ l_3 = -1{,}5331,\ l_4 = 0$.

След заместване във формулите, за коефициентите получаваме таблицата:

i	l_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,0000	2,5	-1,4198	0,0000	0,1866
2	1,6791	1,0	-0,1605	0,8395	-0,2141
3	-1,5331	2,5	0,0221	-0,7666	0,1278
4	0,0000	-	-	0,0000	-

С помощта на тези коефициенти търсеният кубичния сплайн се записва във вида:

Таблица на кубичния сплайн $S_3(f,x)$ от пример 1в)	
$f_1 = 2,.5 - 1{,}4198(x-3) + 0{,}1866(x-3)^3$	при $x \in [3;\ 4{,}5]$
$f_2 = 1 - 0{,}1605(x-4{,}5) + 0{,}8395(x-4{,}5)^2 - 0{,}2141(x-4{,}5)^3$	при $x \in [4{,}5; 7]$
$f_3 = 2{,}5 + 0{,}0221(x-7) - 0{,}7666(x-7)^2 + 0{,}1278(x-7)^3$	при $x \in [7; 9]$

Както и в предишните случаи, за да получим приближени значения в точките $z_1 = 4$ и $z_2 = 5$ с помощта на кубичния сплайн заместваме в общите формули, в зависимост от интервала, в който се намира точката. За първата точка имаме

$$f(4) \approx f_1(4) = a_1 + b_1(z_1 - x_0) + c_1(z_1 - x_0)^2 + d_1(z_1 - x_0)^3 =$$

$$2{,}5 - 1{,}4198.(4-3) + 0.(4-3)^2 + 0{,}1866.3^3 = 1{,}2668 .$$

За втората точка -

$$f(5) \approx f_2(5) = a_2 + b_2(z_2 - x_1) + c_2(z_2 - x_1)^2 + d_2(z_2 - x_1)^3 =$$

$$1 - 0{,}1605.(5-4{,}5) + 0{,}8395.(5-4{,}5)^2 - 0{,}2141.(5-4{,}5)^3 = 1{,}1029 .$$

Задачи за упражнения

1) Да се построи натуралният квадратичен сплайн по данните за функцията $y = f(x)$ и с негова помощ да се намерят приближените стойности на $f(0{,}5)$ и $f(1{,}5)$.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1,2	1,3	1,6	1,2	0,6

2) Да се построи натуралният кубичен сплайн по данните за функцията $y = f(x)$ и с негова помощ да се намерят приближено стойностите на $f(0{,}5)$ и $f(1{,}7)$.

x_i	0,1	1	1,5	2	2,5
y_i	-0,7	0	1	0,8	1,2

3) Функцията $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ да се апроксимира в точките 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8, 2 с помощта на натурален интерполационен сплайн от: а) първа степен; б) втора степен; в) трета степен. Колко е приближението в точката 1,5?

4) Напишете компютърна програма за интерполиране на произволна функция със сплайн от а) втора степен; б) от трета степен, като използвате таблица на функцията в дадено множество точки от дефиниционната й област.

Отговори: 1) $f(0{,}5) \approx 1{,}2125$; $f(1{,}5) \approx 0{,}4875$, 2) $f(0{,}5) \approx -0{,}5993$; $f(1{,}7) \approx 0{,}9922$,

3) l=(0, -0,2146, -0,2712, -0,2523, -0,2963, 0), $f(1{,}5) \approx 0{,}7307$.