5.2. Метод на най-малките квадрати

Разглеждаме ***M*** – множество от функции $f(x)$, зададени таблично в N - точки (не задължително различни) и $P \equiv \prod_n(x)$ – полиномите от n -та степен на променливата x. Ще считаме, че $n \ll N$. Като мярка за близост между функцията $f(x)$ от множеството M и $P(x) \in \prod_n(x)$ ще използваме стойностите на функцията:

$$\Phi(a_0,...,a_n) = \sum_{i=1}^{N}[y_i - (a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + ... + a_1 x_i + a_0)]^2,$$

където $a_0,...,a_n$ са коефициентите на полинома $P(x)$, а $y_i = f(x_i)$. Полиномът P^*, чиито коефициенти $a_0^*,...,a_n^*$ минимизират функцията $\Phi(a_0,...,a_n)$, се нарича полином на най-добро приближение по метода на най-малките квадрати (**МНМК**) и може да бъде използван като приближение на $f(x)$ (особено когато N е много по-голямо от n). Коефициентите $a_0^*,...,a_n^*$ са решение на следната линейна алгебрична система (която е със симетрична матрица и за нейното решаване може да се използва методът на квадратния корен – виж параграф 1.5):

$$\left|\begin{array}{l}
Na_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^n\right)a_n = \sum_{i=1}^{N} y_i \\
\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^3\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{n+1}\right)a_n = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^n\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{n+1}\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{n+2}\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{2n}\right)a_n = \sum_{i=1}^{N} x_i^n y_i
\end{array}\right.$$

По аналогия с метода на най-малките квадрати за приближаване на таблично зададени функции се въвежда понятието **"решение по метода на най-малките квадрати" за преопределени системи линейни алгебрични уравнения** (броят на уравненията m е по-голям от броя на неизвестните n):

Ако преопределената система има вида: $Ax = b$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{при} \quad m > n.$$

Под решение по МНМК на тази система ще разбираме n – торката $(x_1^*,...,x_n^*)$, която минимизира израза:

$$\Phi(x_1,...,x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2)^2 + \\ \ldots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)^2$$

Точката, която минимизира тази функция е решение на квадратната система, която се получава като умножим отляво изходната система с A^T :$\boldsymbol{A^T A x = A^T b}$, което се нарича още симетризиране на системата.

Пример 1. Да се намерят P_1^* и P_2^* по МНМК за таблично зададена функция $f(x)$:

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = f(x_i)$	1	2	1	0	4

Решение:

За намиране на P_1^* построяваме таблицата от стойностите на $x_i, y_i, x_i^2, y_i x_i$ и намираме необходимите суми:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	1	0	0
2	1	2	1	2
3	2	1	4	2
4	3	0	9	0
5	4	4	16	16
Σ	**10**	**8**	**30**	**20**

Тогава, ако $P_1^* = a_1^* x + a_0^*$, коефициентите a_0^* и a_1^* са решение на системата:

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 = 8 \\ 10a_0 + 30a_1 = 20 \end{cases},$$

чиито решения са $a_0^* = \frac{4}{5}$ и $a_1^* = \frac{2}{5} \Rightarrow P_1^* = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$.

За намиране на полинома от втора степен P_2^* допълваме горната таблица с още три колони: $x_i^3, x_i^4, y_i x_i^2$:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i^3	x_i^4	$y_i x_i^2$
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	1	1	2	2
3	2	1	4	8	16	2	4
4	3	0	9	27	81	0	0
5	4	4	16	64	256	16	64
$\sum$	**10**	**8**	**30**	**100**	**354**	**20**	**70**

И системата изглежда така:

$$\left|\begin{array}{l} 5a_0 + 10a_1 + 30a_2 = 8 \\ 10a_0 + 30a_1 + 100a_2 = 20 \\ 30a_0 + 100a_1 + 354a_2 = 70 \end{array}\right.$$

Решенията на системата (с точност до пет знака) са: $a_0^* = 1{,}65714$; $a_1^* = -1{,}31429$; $a_2^* = 0{,}42857$ и $P_2^*(x) = 0{,}42857x^2 - 1{,}31429x + 1{,}65714$.

Пример 2. По МНМК да се реши преопределената система:

$$\left|\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 3x + y = 3 \end{array}\right. .$$

Решение:

Матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и векторът $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Тогава

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

И получаваме симетризираната система: $\left|\begin{array}{l} 11x + 3y = 11 \\ 3x + 3y = 5 \end{array}\right.$.

След изваждане на второто уравнение от първото имаме $8x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ и след заместване $3y = 5 - \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{11}{12}$, т.е. решението на преопределената система са $x^* = \frac{3}{4}$ и $y^* = \frac{11}{12}$.

Задачи за упражнения

1) Да се намерят P_1^* и P_2^* по МНМК за таблиците:

а)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	1	10	7	6

Отговор:
$P_1^* = x + \frac{16}{3};\ P_2^* = -x^2 + 2x + 8$

б)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	4	-1	1	5	6	13

Отговор:
$P_1^* = x + 5;\ P_2^* = x^2 + x + 1$

2) Функцията $y = \sin(\pi x)$ е табулирана във възлите ± 1, $\pm 1/2$ и 0. Да се построи P_3^* по МНМК за получената таблица.

Отговор: $P_3^* = \frac{8}{3}(x - x^3)$.

3) Като предварително се извърши необходимата трансформация, по МНМК да се получи полином от указания вид за съответната таблица:

а) $P = e^{a+bx}$ за:

x	-1	0	1
y	e^2	e^3	e^4

Отговор: $P^* = e^{x+3}$

б) $P = a + \frac{b}{x}$,

x	1	2	4	5	10
y	2	1,5	1,25	1,2	1,1

Отговор: $P^* = 1 + \frac{1}{x}$

4) По МНМК да се решат преопределените системи:

а) $\left| \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-y=1 \\ x+2y=5 \end{array} \right.$, б) $\left| \begin{array}{c} x+y=1 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array} \right.$, в) $\left| \begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=-1 \\ x-y=1 \\ x-y=-1 \end{array} \right.$, г) $\left| \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-y=0{,}2 \\ x+3y=7 \\ 3x+y=5 \end{array} \right.$.

Отговор: а) $x \approx 1{,}37,\ y \approx 1{,}77;$ б) $x = y = z = \frac{3}{7};$

в) $x = y = 0;$ г) $x \approx 1{,}037,\ y \approx 1{,}968$.

5.3. Средноквадратични приближения

Постановка на задачата

Разглеждаме множеството:

$$M \equiv L_2[a,b] = \{f(x)\ /\ \int_a^b p(x) f^2(x)dx < \infty\},$$

където $p(x)$ е зададена неотрицателна функция, за която $\int_a^b p(x)dx > 0$ и която се нарича "теглова" функция и $P \equiv \prod_n(x)$ – полиномите от n – та степен, построени по базиса $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$. Пространството $L_2[a,b]$ е Хилбертово със скаларно произведение, норма и разстояние:

$$(f,g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\ ;\ \|f\|_2^2 = \int_a^b p(x)f^2(x)dx\ ;\ \rho^2(f,g) = \int_a^b p(x)[f(x)-g(x)]^2 dx$$

Полиномът P_n^*, за който $\rho(f,P^*) = \min\limits_{P_n \in \Pi_n} \rho(f,P_n)$ се нарича **полином на най-добро средноквадратично приближение** за функцията $f(x)$ (**ПНДСКП**), а числото: $E_n(f) = \rho(f,P_n^*)$ – **най-добро средноквадратично приближение** за функцията $f(x)$. Ако запишем $P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_n\varphi_n(x)$, коефициентите на ПНДСКП $a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*$ са решения на следната система алгебрични уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} (\varphi_0,\varphi_0)a_0 + (\varphi_1,\varphi_0)a_1 + ... + (\varphi_n,\varphi_0)a_n = (f,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1)a_0 + (\varphi_1,\varphi_1)a_1 + ... + (\varphi_n,\varphi_1)a_n = (f,\varphi_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\varphi_0,\varphi_n)a_0 + (\varphi_1,\varphi_n)a_1 + ... + (\varphi_n,\varphi_n)a_n = (f,\varphi_n) \end{array}\right. ,$$

която е със симетрична матрица и може да бъде решавана по метода на квадратния корен.

Ако базисът $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\}$ е ортогонален (т.е. $(\varphi_i,\varphi_j) = 0$ за $i \neq j$), горната система е диагонална (различните от нула коефициенти са по главния диагонал) и решението й е: $a_i^* = \dfrac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)},\ i = \overline{0,n}$.

Ако освен това системата е и нормирана (т.е. $(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1\,,\, i=j\\ 0\,,\, i\neq j\end{cases}$), то: $a_i^*=(f,\varphi_i),\ i=\overline{0,n}$ и в този случай пресмятането на НДСКП става по формулата: $E_n^2(f)=(f,f)-\sum\limits_{i=0}^{n}a_i^{*2}$.

Пример 1. Да се намери ПНДСКП от втора степен за функцията $f(x)=|x|$ в интервала [-1,1] с теглова функция $p(x)\equiv 1$.

Решение:

Задачата може да се реши по три начина:

I. Функциите $\varphi_k(x)=x^k$. Решението на задачата е дадено в [1], стр.136-137.

II. Функциите $\varphi_k(x)$ са ортогонални полиноми за съответните интервал и тегло.

III. Функциите $\varphi_k(x)$ са ортонормираните полиноми за съответните интервал и тегло.

II. Ако $\varphi_k(x)$ са полиномите на Льожандър $L_k(x)=\frac{1}{2^k k!}[(x^2-1)^k]^{(k)}$, които са ортогонални за интервала [-1,1] с теглова функция $p(x)\equiv 1$, [1,стр.130]: $L_0=1,\ L_1=x,\ L_2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$. Търсеният полином записваме във вида:

$$P_2(x)=a_0L_0+a_1L_1+a_2L_2\,.$$

За да определим коефициентите му пресмятаме:

$$(L_0,L_0)=\int_{-1}^{1}1^2\,dx=2\,;\ (f,L_0)=\int_{-1}^{1}|x|dx=1\,;\ (L_1,L_1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}\,;\ (f,L_1)=\int_{-1}^{1}|x|.xdx=0;$$

$$(L_2,L_2)=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})^2\,dx=\frac{2}{5}\,;\quad (f,L_2)=\int_{-1}^{1}|x|(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})^2\,dx=\frac{1}{4}\,;$$

Тогава $a_0^*=\frac{(f,L_0)}{(L_0,L_0)}=1/2;\ a_1^*=\frac{(f,L_1)}{(L_1,L_1)}=\frac{0}{2/3}=0;\ a_2^*=\frac{(f,L_2)}{(L_2,L_2)}=\frac{1/4}{2/5}=\frac{5}{8};$

$$P_2^*=\frac{1}{2}L_0+0.L_1+\frac{5}{8}L_2=\frac{1}{2}+\frac{5}{5}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})=\frac{15}{16}x^2+\frac{3}{16}\,.$$

III. Сега ще търсим ПНДСКП като използваме ортонормиран базис $L_0^*, L_1^*, L_2^*, \ldots$, който ще получим по формулата $L_0^* = L_k / \|L_k\|$. От изчисленията в II имаме:

$$\|L_0\|^2 = 2 \Rightarrow L_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \|L_1\|^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow L_1^* = \frac{x}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x;$$

$$\|L_2\|^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow L_2^* = \frac{(3/2x^2 - 1/2)}{\sqrt{2/5}} = \sqrt{\frac{5}{2}}(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})$$

Тогава:

$$a_0^* = (f, L_0^*) = \int_{-1}^{1} |x| \frac{\sqrt{2}}{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad a_1^* = (f, L_1^*) = \int_{-1}^{1} |x| \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0;$$

$$a_2^* = (f, L_2^*) = \int_{-1}^{1} |x| \sqrt{\frac{5}{2}}.(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$P_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.\sqrt{\frac{3}{2}}x + (\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}).(\sqrt{\frac{5}{2}}).(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{16}$$

В този случай можем да пресметнем и НДСКП :

$$(f, f) = \int_{-1}^{1} |x|^2 dx = \frac{2}{3}; \quad E_2^2(|x|) = \frac{2}{3} - [(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}})^2] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{5}{32} = \frac{1}{96},$$

$$E_2(|x|) = \sqrt{\frac{1}{96}} = \frac{\sqrt{6}}{24}.$$

Задачи за упражнения

1) Да се намери ПНДСКП за указаната функция, интервал, тегло и степен на полинома:

а) $f(x) = |x|, \ [-\pi, \pi], \ p \equiv 1, \ P = a + b\sin(x) + c\cos(x)$;

б) $f(x) = \sin(\pi x), \ [0,1], \ p \equiv 1, \ P = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$,

където $\varphi_0 = 1, \ \varphi_1 = x - \frac{1}{2}, \ \varphi_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$;

в) $f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$; [-1, 1], $p \equiv 1, \ P_2^* = ?$

г) $f(x) = 11x^2 + 4x + 2002, \ [-1, 1], \ p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ P_2^* = ?$

д) $f(x)=x^3$, [-1, 1], $p\equiv 1$, $P_2^*=?$; $E_2(f)=?$, като използваме ортонормираната система: $L_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $L_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$; $L_2=\sqrt{\dfrac{5}{2}}(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2})$;

е) $f(x)=|x-1|$, $[0,2]$, $p\equiv 1$, $P_2^*=?$ по ортогоналната система:

$Q_0=1$, $Q_1=x-1$, $Q_2=\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$.

ж) $f(x)=|x-\pi|$, $[0,2\pi]$, $p\equiv\pi$, $P_1^*=?$; $E_1(f)=?$

з) $f(x)=x$, $[0,\pi]$, $p\equiv 1$ по ортонормираната система:

$\varphi_1=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(x)$, $\varphi_2=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(2x)$, $\varphi_3=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(3x)$ и се изчисли $E^*(f)=?$

и) $f(x)=x$, $[0,\pi/2]$, $p\equiv 1$ по ортонормираната система:

$\gamma_1=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(x)$, $\gamma_2=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(3x)$, $\gamma_3=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(5x)$ и се изчисли $E^*(f)=?$

2) Да се докаже, че при симетричен интервал [-*a, a*] и четна теглова функция ($p(-x)=p(x)$), ако:

а) $f(x)$ е четна, то и P_n^* е четен,

б) $f(x)$ е нечетна, то и P_n^* е нечетен.

3) Ако $E_1(f), E_2(f), E_3(f)$ са НДСКП за функцията $f(x)$ съответно с полиноми от първа, втора и трета степен, да се сравнят трите стойности за:

а) $f(x)=\sin(x)$, [-π/2, π/2], $p(x)=\sqrt{1-x^2}$,

б) $f(x)=\cos(x)$, [-π/2, π/2], $p(x)=\sqrt{1-x^2}$

в) $f(x)=2x^2+1$, [-2, 2], $p\equiv 1$,

г) $f(x)=3x^3+5x$, [-1, 1]; $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.4. Равномерни приближения

Разглеждаме множеството $M = C[a,b]$ - непрекъснати в $[a, b]$ функции и $P = \prod_n(x)$ – полиномите от n – та степен за x. Разстояние се дефинира с помощта на равномерна норма:

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \Rightarrow \rho(f,g) = \|f-g\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|.$$

Полиномът $P_n^*(x)$, за който $\rho(f,P_n^*) = \min\limits_{P_n\in\Pi_n} \rho(f,P_n)$ се нарича **полином на най-добро равномерно приближение** (ПНДРП) за функцията $f(x)$, а числото $E_n(f) = \rho(f,P_n^*)$ – **най-добро равномерно приближение** (НДРП) за функцията $f(x)$ с полином от n-та степен.

За намиране на ПНДРП ще използваме теоремата на Чебишов за алтернанса [1,2]: Необходимо и достатъчно условие $P = \prod_n(x)$ да е ПНДРП за функцията $f(x) \in C[a,b]$ е да съществуват $n+2$ различни точки $a \le x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \le b$, такива че

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \|f-P\|, \quad i = \overline{0,n+1}, \varepsilon = \pm 1.$$

Точките x_i се наричат точки на алтернанс. Като пряко следствие от тази теорема се доказва единствеността на ПНДРП.

Алгоритъмът за намиране на ПНДРП от n-та степен е следният: Образуваме функцията $Q(x) = f(x) - a_0 - a_1x - ... - a_nx^n$. Точките на алтернанс ще са точки, за които функцията $Q(x)$ приема най-голямата и най-малката си стойност в интервала $[a,b]$. Тогава те ще образуват множество S, състоящо се от: краищата на интервала; точките, за които $Q'(x) = 0$; точките, за които $Q'(x)$ не съществува.

Ако множеството S е крайно, подреждаме елементите му по големина и от тях подбираме онези $(n+2)$: $x_0 < x_1 < ... < x_{n+1}$, за които $Q(x_i) = (-1)^i M$, $i = \overline{0,n+1}$ като същевременно проверяваме дали $|Q(x)| \le |M|$ за останалите точки от множеството S. Решенията на горната система, в която неизвестни са $a_0, a_1, ..., a_n$ и M, са коефициенти на ПНДРП и $E_n(f) = \pm M$.

Пример 1. Да се намери ПНДРП от първа степен за $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ в интервала $[0,1]$ (виж [1], стр.152).

Решение:

Образуваме $Q(x)=\dfrac{1}{1+x}-a_0-a_1x;\quad Q'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}-a_1$.

$Q'(x)$ съществува навсякъде в $[0,1]$. $Q'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{1}{(1+x)^2}-a_1=0 \;\Rightarrow\; (1+x)^2=-\dfrac{1}{a_1} \;\Rightarrow$

$1+x=\sqrt{\dfrac{-1}{a_1}}$, но $1+x>0$ за $x\in[0,1] \Rightarrow \quad x=-1+\sqrt{\dfrac{-1}{a_1}}$.

Или $S=\left\{x_0=0,\ x_1=-1+\sqrt{\dfrac{-1}{a_1}},\ x_2=1\right\}$. Тъй като множеството S съдържа точно три точки, те ще са точките на **алтернанс**. Образуваме системата $Q(x_i)=(-1)^i M$, $i=0,1,2.$

$$\left|\begin{array}{ll} 1-a_0=M & \textit{за}\ \ x=x_0=0, \\ \dfrac{1}{1-1+\sqrt{-1/a_1}}-a_0-a_1(-1+\sqrt{-1/a_1})=-M & \textit{за}\ \ x=x_1=-1+\sqrt{-1/a_1}, \\ \dfrac{1}{2}-a_0-a_1=M & \textit{за}\ \ x=x_2=1 \end{array}\right.$$

От първото и третото уравнение чрез изваждане намираме $a_1=-\dfrac{1}{2}$ и го заместваме във второто, след което решаваме първите две:

$$\left|\begin{array}{l} 1-a_0=M \\ \sqrt{2}-\dfrac{1}{2}-a_0=-M \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{l} a_0=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4} \\ M=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. .$$

Следователно $P_1^*=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$, $E_1(f)=|M|=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Да се докаже, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) функция, ПНДРП в симетричен интервал $[-a, a]$ е четен (нечетен).

Решение:

Ще докажем случая за четна функция, а доказателството за нечетна функция е аналогично. Нека $f(-x)=f(x)$ и $P_n^*(x)$ е ПНДРП за $[-a, a]$. Тогава:

за $\forall x \in [-a, a] \Rightarrow \left| f(x) - P_n^*(x) \right| \leq E_n(f)$.

Образуваме $Q(x) = \frac{1}{2}\left[P_n^*(x) + P_n^*(-x) \right] \in \prod_n(x)$. Тогава за $\forall x \in [-a, a]$ имаме:

$$\left| f(x) - Q(x) \right| \leq \frac{1}{2}\left| f(x) - P_n^*(x) \right| + \frac{1}{2}\left| f(x) - P_n^*(-x) \right| =$$
$$\frac{1}{2}\left| f(x) - P_n^*(x) \right| + \frac{1}{2}\left| f(-x) - P_n^*(-x) \right| \leq \frac{1}{2}E_n(f) + \frac{1}{2}E_n(f) = E_n(f),$$

тъй като от $x \in [-a, a] \Rightarrow -x \in [-a, a]$.

Следователно $Q(x) \equiv P_n^*(x)$, откъдето $P_n^*(x) = P_n^*(-x) \Rightarrow P_n^*(x)$ е четен.

Пример 3. Да се намери ПНДРП от втора степен за $f(x) = |x|$ в интервала [-1,1].

Решение:

Образуваме $Q(x) = |x| - a_0 - a_1 x - a_2 x^2$:

$$Q(x) = \begin{cases} -x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 & , -1 < x < 0 \\ -a_0 , & x = 0 \\ x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 & , 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow Q'(x) = \begin{cases} -1 - a_1 - 2a_2 x & , -1 < x < 0 \\ \textit{не съществува} & , x = 0 \\ x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 & , 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Тогава

$$S = \left\{ x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1 + a_1}{2a_2},\ x_2 = 0,\ x_3 = -\frac{1 - a_1}{2a_2},\ x_4 = 1 \right\}.$$

Сега множеството S се състои от пет точки, а за алтернанса са ни необходими четири. Стандартният начин за окончателното решаване на задачата е следният: избираме четири от петте точки, образуваме съответната система за тях и проверяваме дали стойността на Q в останалите точки е $\leq |M|$. Така може да се наложи да решаваме пет системи с по четири неизвестни, докато достигнем до правилния избор на точките на алтернанс.

Тук ще постъпим по друг начин. Нека предположим, че търсим ПНДРП от трета степен. За него ще са необходими пет точки на алтернанс. От друга страна, тъй като $f(x)$ е четна функция и интервалът е симетричен, то и $P_3^*(x)$ ще е четен (вж. Пример 2), следователно коефициентите му пред x и x^3 ще са нули, т.е. той ще е от втора степен. Или всички пет точки от множеството S са точки на алтернанс и $a_1 = 0$. Системата за определяне на $a_{0,}\, a_2$ и M е:

$$\left|\begin{array}{lll} 1-a_0-a_2=M & \text{за} & x=x_0=-1, \\ \dfrac{1}{2a_2}-a_0-a_2\left(-\dfrac{1}{2a_2}\right)^2=-M & \text{за} & x=x_1=-\dfrac{1}{2a_2}, \\ -a_0=M & \text{за} & x=x_2=0, \\ \dfrac{1}{2a_2}-a_0-a_2\left(\dfrac{1}{2a_2}\right)^2=-M & \text{за} & x=x_3=\dfrac{1}{2a_2}, \\ 1-a_0-a_2=M & \text{за} & x=x_4=1. \end{array}\right.$$

От първите три уравнения (четвъртото съвпада с второто, а петото – с първото) намираме: $a_0^*=\frac{1}{8},\ a_2^*=1,\ M=-\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ P_2^*=x^2+\frac{1}{8},\ E_2(|x|)=\frac{1}{8}$.

Задачи за упражнения

1) Да се намери ПНДРП от първа степен за:

а) $y=\sin(x)$ в интервала $[0,\ \pi]$; отговор: $P_1^*(x)=\frac{1}{2}$.

б) $y=\frac{1}{x+2}$ в интервала $[0,1]$; отговор: $P_1^*(x)=-\frac{x}{6}+\frac{1+2\sqrt{6}}{12}$.

в) $y=\sqrt{x}$ в интервала $[0,1]$; отговор: $P_1^*(x)=x+\frac{1}{8}$.

г) $y=\ln(x+1)$ в интервала $[0,1]$; отговор: $P_1^*(x)=x\ln 2+\frac{\ln 2-1-\ln\ln 2}{2}$.

2) Да се намери ПНДРП от втора степен за:

а) $y=\sqrt{1-x^2}$ в интервала $[-1,1]$; отговор: $P_2^*(x)=-x^2+\frac{9}{8}$.

б) $y=x+|x|$ в интервала $[-1,1]$; отговор: $P_2^*(x)=x^2+x+\frac{1}{8}$.