Иван Димитров

З А П И С К И

на лекции по АНАЛИЗ 2

СОФИЯ, 2013

Съдържание

Предговор

В настоящите записки на лекции авторът се е придържал основно към материала по дисцилината "МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ВТОРА ЧАСТ", която се чете на всички студенти от УАСГ, изучаващи инженерни специалности. В този си суров вид, записките ни най-малко не представляват учебник по тази дисциплина, а учебно помагало, имащо за цел да улесни подготовката за изпит на студентите, на които предстои да полагат изпит по тази дисциплина.

Тези записки предстои да бъдат допълвани с още примери, чертежи и задачи за самостоятелна подготовка, литературна справка и др., а също така и корегирани. Затова, авторът приема с благодарност всички забелязани неточности от всякакъв характер на адрес: *vanio_d@mail.bg* или *ivanp_fte@uacg.bg*

Глава 1

Обикновени диференциални уравнения и системи

1.1 Обикновени диференциални уравнения от първи ред

1.1.1 Обикновени диференциални уравнения от първи ред, решени спрямо производната

1. **Обикновени диференциални уравнения – основни понятия.**

а) Някои примери . Нека да разгледаме примери от физиката, които водят до идеята за диференциално уравнение. От курса по анализ 1 част знаем, че ако законът за движение на една материална точка е $x = x(t), t \in [0, T]$,то скоростта на точката е $v(t) = x'(t)$, а ускорението е $a(t) = x''(t)$ (припомнете си механичният смисъл на първата и втората производна на функция). Това означава, че ако ни е известен законът за движение на една материална точка, то чрез диференциране можем да намерим скоростта и ускорението на тази точка. Но в практиката, най-често се налага да се решава задача, в някакъв смисъл обратна на тази, а именно : ако са ни известни силите, които действат на материалната точка, началното и положение и началната и скорост, (или ако е известна скоростта и началното и положение) да се намери законът за движение на тази материална точка. В най-простите случаи това не е трудно. Например, нека скоростта на една материална точка се изменя по закона

$$v(t) = 2t + 5, t \geq 0$$

и освен това в момента $t = 0$ точката се намира в положение $x(0) = 3$. Тогава, очевидно

$$x(t) = \int x'(t)\, dt = \int v(t)\, dt = \int 2t{+}5\, dt = t^2{+}5t{+}C, \text{ т.е. } x(t) = t^2{+}5t{+}C.$$

Като заместим в последното равенство с $t = 0$, получаваме $C = 5$, следователно $x(t) = t^2 + 5t + 5$. По подобен начин се решава и задачата за намиране на законът за движение на свободно падаща материална точка от височина h, ако се пренебрегне съпротивлението на въздуха. Наистина, от вторият принцип на Нютон получаваме, че

$$mx'' = mg,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Тук масата на точката е означена с m, g е земното ускорение, абцисната ос е насочена към центъра на Земята, а кординатното начало $x = 0$ е на височина h от земната повърхност. Като съкратим на m и интегрираме два пъти последователно, получаваме

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

Тъй като в началния момент $t = 0$ по условие $x(0) = 0$ и началната скорост $v(0) = x'(0) = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$ и следователно законът за движение е

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

което е познатият от средния курс закон за свободно падане на материална точка под действие на силата на тежестта. Намерете самостоятелно времето, след което точката ще достигне земната повърхност и скоростта в този момент.

Всъщност, в първият пример ние решихме едно просто диференциално уравнение от вида $x'(t) = f(t)$, където функцията $f(t)$ е известна, с начално условие $x(0) = 5$, откъдето намерихма неизвестната константа C. Във втория пример, използвайки вторият принцип на Нютон ($m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$) приложен за праволинейно движение под действие на една единствена сила – силата на тежестта, съставихме диференциалното уравнение (от вида $x'' = f(t)$) и го решихме.

Нека сега малко да усложним модела. Да разггледаме топче с маса m, което е окачено на пружина и на което му действа силата на тежестта, и освен това движението се извършва в среда със съпротивление. Нека отново оста Ox е насочена към центъра на земята. Експериментално е установено, че пружинната сила, отговаряща на отклонение x на топчето от равновесното положение е $F_{\text{пр}} = -kx$ (закон на Хук при едностранно опъване), където знакът минус покзва, че тя е насочена „срещу“ положителната посока на оста Ox. Също така експериментално е утановено, че при относително малки скорости силата на съпротивление е пропорционална на първата степен на скоростта на точката , т.е. $F_{\text{с}} = -k_1x'$ (тук знакът минус има същият смисъл, като в случая на пружинна сила). Като приложим вторият принцип на Нютон за този модел,получаваме уравнението

$$mx'' = -kx - k_1x' + mg \text{ или } mx'' + k_1x' + kx = mg.$$

Виждаме, че се получава връзка между неизвестната функция $x(t)$ и нейните производни $x'(t)$ $x''(t)$, която далеч не е толкова очевидна като в първите два примера (а има и случаи, когато силата на съпротивление е пропорционална на квадрата на скоростта и дясната страна на уравнението не е константа).

Тези примери ни навеждат на мисълта, че "диференциално уравнение“ трябва да е някаква зависимост между неизвестната функция, нейните производни и независимата променлива. За да дадем строго определение на това що е „диференциално уравнение“, временно ще „изоставим“ физическата му интерпретация .

б) Определение и основни понятия

Определение 1.1 *Диференциално уравнение от първи ред, разрешено относно производната, наричаме израз от вида*

$$y' = f(x,y),\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

където функцията $f(x,y)$ е непрекъснатата функция на две променливи в областта D от равнината, x е независима променлива, а $y = y(x)$ е неизвестната функция.

Определение 1.2 *Функцията $y = \varphi(x)$, притежаваща непрекъсната производна за всяко $x \in (a,b)$, наричаме решение на уравнението (1.1), ако за всяко $x \in (a,b)$ е изпълнено равенството*

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)).$$

Графиката на функцията $y = \varphi(x)$ наричаме ***интегрална крива*** *на уравнението*

Пример 1.1.1 Функцията $y = x$, $x \in (-\infty, \infty)$ е решение на уравнението $y' = 1$, а функцията $y = e^x$, $x \in (-\infty, \infty)$ е решение на уравнението $y' = y$.

Да забележим, че в първия случай и функцията $y = x + C$, а във втория – функцията $y = Ce^x$, където C е произволна константа, също са решения на дадените диференциални уравнения. Графиките на всички тези решения, получени при произволни стойности на константите са интегрални криви на тези уравнения.

Често, заедно с уравнението (1.1) е целесъобразно да се разглежда и уравнението

$$x' = \frac{1}{f(x,y)},\ (x,y) \in D_1 \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

с независима променлива y и неизвестна функция $x = x(y)$. Тук се възползвахме от известният от курса по Анализ 1 част факт, че ако за функцията $y = y(x)$ съществува обратната функция $x = x(y)$ и, ако в т. x съществува производната $y'(x)$, то в т. $y = f(x)$ съществува и производната $x'(y)$ и при това $x'(y) = 1/y'(x)$, като в тези точки от D, в които $y'(x) = \infty$ полагаме $x'(y) = 0$ и обратно, ако в някоя точка от D_1 $x'(y) = \infty$, то полагаме $y'(x) = 0$. По този начин към дефиниционната област на (1.1) можем да присъединим и областта D_1, а също и онези точки, в които функците $f(x,y)$ и $1/f(x,y)$ имат отстранимо прекъсване. Например, уравнението $y' = \sin x/x$ можем да считаме дефинирано в цялата равнина, като положим $y'(0) = 1$ а уравнението $y' = y \ln y$ – в областта $G = \{(x,y) |\, y > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$, като положим $y'(x) = 0$ при $y = 0$ (защо?).

Този подход към диференциалните уравнения, позволява ролята на променливите x и y да считаме еднаква (симетрична) и да напишем уравненията (1.1) и (1.2) в една по-обща (симетрична) форма, а именно, ако $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са непрекъснати функциина на две променливи, дефинирани в една и съща област $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогава под диференциално уравнение, дефинирано в тази област разбираме следният израз:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

От (1.3) лесно получаваме уравнението (1.1), като положим

$$P(x,y) = f(x,y),\ Q(x,y) = -1$$

и уравнението (1.2), като положим

$$P(x,y) = 1,\ Q(x,y) = -1/f(x,y)$$

и съобразим, че $y'(x) = dy/dx$, $x'(y) = dx/dy$. Освен това уравнението (1.3) допуска сравнително проста геометрична интерпетация. Следващите понятия са необходими за по-нататъшното изложение.

Определение 1.3 *Правило по което на всяко $M(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ се съпоставя единствен вектор $\vec{F}(M)$ се нарича векторно поле , зададено в D.*

Спрямо една равнинна декартова координатна система полето $\vec{F}$ може да се зададе чрез двойка скаларни функции, дефинирани в олбастта D, по следният начин:

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1.4}$$

Често се използва следното по-кратко означение: $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$. По-нататък предполагаме, че функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са непрекъснати в областта D, заедно със своите частни производни от първи ред.

Определение 1.4 *Правило по което на всяко $t \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ се съпоставя единствен вектор $\vec{r}(t)$ се нарича векторнозначна функция, дефинирана в интервала $[\alpha,\beta]$.*

Спрямо една равнинна декартова координатна система функцията $\vec{r}(t)$ може да се зададе чрез двойка скаларни функции, дефинирани в $[\alpha,\beta]$, по следният начин:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},\ t \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Съответно, тук краткото означение е $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Също така, интервалът, в който е дефинирана функцията, може да бъде и отворен, полуотворени или безкраен.

Определение 1.5 *Функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$ се нарича гладка в интервала $[\alpha,\beta]$, ако за за всяка точка от този интервал съществува производната и $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ и освен това $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$.*

Определение 1.6 *Множеството от точки в равнинатата*

$$\gamma = \{\ M(x(t), y(t)) \mid \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha,\beta]\ \},$$

където функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$ е гладка в интервала $[\alpha,\beta]$ се нарича гладка крива в равнинатат .

За да се зададе една крива, обикновено се използва означението

(1.6) $$\gamma : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \text{ или } \gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \ t \in [\alpha, \beta].$$

Всяко едно от тези означения наричаме векторно-параметрично уравнение на кривата γ. Тъй като векторнозначни функции и криви са обект на разглеждане в една от следващите глави на настоящите записки, тук няма да се впускаме в подробности. Нека да изясним само най-важното – съществуването на различна от нулевият вектор производна на векторнозначна функция означава, че във всяка точка $M(x(t), y(t))$ от кривата $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, съществува ненулев допирателен вектор $\vec{r'}(t)$. Освен това, понятието гладка крива обобщава понятието графика на диференцируема функция. Наистина, нека е дадена функцията $y = g(x), x \in [a,\ b]$, за която съществува $g'(x),\ x \in [a,\ b]$. Тогава, както е известно от курса по Анализ 1 част, графиката и се състои от точките $M(x, g(x)),\ x \in [a,\ b]$, като във всяка точка от тази графика съществува допирателна права с ъглов коефициент $k = \operatorname{tg}\alpha = g'(x)$. Нека сега разгледаме кривата γ_g с векторно-параметрично уравнение $\gamma_g :\ \vec{r}(x) = (x, g(x)),\ x \in [a,\ b]$ и допирателен вектор $\vec{r'}(x) = (1, g'(x)) \neq \vec{0}$. Не трудно да се види, че кривата γ_g и графиката на функцията $y = g(x), x \in [a,\ b]$ съвпадат като множества от точки в равнината и освен това допирателните им прави във всяка точка $M(x, g(x)),\ x \in [a,\ b]$ са колинеарни (защо ?). По същия начин може да се зададе и графиката на функция от вида $x = h(y),\ y \in [c,\ d]$, което оставяме за упражнение на читателя.

Понятието решение на диференциално уравнение може да се обобщи.

Определение 1.7 *Казваме, че гладката векторнозначна функция $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, е решение на уравнението (1.3) ако за за всяка точка от този интервал е изпълнено равенството*

(1.7) $$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Кривата $\gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ се нарича интегрална крива на уравнението.

Нека да отбележим, че равенство (1.7) може да се интерпретира като скаларно произведение на вектора на полето

$$\vec{F}(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)),$$

разгледано само върху точка от кривата γ и допирателният вектор към гривата в същата тази точка. т.е. върху интегралните криви на уравнението е изпълнено равенството

$$\vec{F}(t).\vec{r'}(t) = 0,\ t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.8}$$

Както е известно от курса по ЛААГ, последното равенство означава, че в точките от кривата , в които $\vec{F} \neq \vec{0}$ е изпълнено съотношението $\vec{F} \perp \vec{r'}(t)$. Това дава основание точките от дефиниционната област на полето, в които $\vec{F} = \vec{0}$ да се наричат особени за разглежданото диференциално уравнение (защо?). Всички останали точки от областта D се наричат обикновени или правилни за даденото диференциално уравнение.

От така направените разглеждания следва, че да намерим решение на (1.3) означава да намерим гладка грива, чийто допирателни вектори са перпендикулярни на векторите на полето в точките от тази крива.

в) Начална задача (задача на Коши) за обикновено диференциално уравнение от първи ред. В приложенията, обикновено се търсят не всички решение на едно уравнение, а само това, което удовлетворява и някакво допълнително условие. Най -често това е така нареченото начално условие. Грубо казано, ако искаме да знаем точно закона за движение на една материална точка, на която познаваме скоростта като функция на времето, трябва да знаем и „откъде е тръгнала точката“, т.е. къде се е намирала в момента на започване на движението. Геометричният смисъл на такава задача е да се намери онази интегрална крива на уравнението, на която лежи една отнапред дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, която разбира се е от дефиниционната област на уравнението.(черт.!). Такава задача , поставена за едно диференциално уравнениене се нарича ***начална задача или задача на Коши*** за даденото уравнение. Обикновено се записва по следният начин:

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad \text{или } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,\ M_0(x_0, y_0). \tag{1.9}$$

В края на този параграф са формулирани условията за съществуване и единственост на задачата на Коши.

г) Общо и частно решение. Особено решение. Нека отново да разгледаме уравнението

$$y' = f(x, y),\ (x, y) \in D \tag{1.10}$$

и нека за всяко $(x_0, y_0) \in D$ задачата на Коши има единствено решение.

Определение 1.8 *Казваме, че непрекъснато диференцируемата функция*

$$y = \varphi(x, C) \tag{1.11}$$

е общо решение на това уравнение, ако:

1. *За всяко $(x, y) \in D$ уравнението (1.11) е разрешимо спрямо константата C т.е. $C = \psi(x, y), (x, y) \in D$;*
2. *За всяка константа C, получена от горното равенство функцията (1.11) е решение на (1.10).*

Например за уравнението $y' = y$ функцията $y = Ce^x$ е общо решение в областта $D = \mathbb{R}^2$. наистина, лесно се вижда, че за всяко $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имаме $C = ye^{-x}$ и $(Ce^x)' = Ce^x$.

За да решим задачата на Коши, за дадено уравнение, ако ни е известно общото му решение, постъпваме по следният начин : във формула (1.11) заместваме $x = x_0,\ y = y_0$, откъдето намираме $C_0 = \psi(x_0, y_0)$ и заместваме получената стойност в (1.11)

$$y = \varphi(x, C_0)$$

Например за уравнението от примера по-горе, ако поставим начално условие $y(1) = 2$, получаваме $C_0 = 2e^{-1}$ и тогава решението на задачата на Коши се дава с функцията $y = 2e^{x-1}$.

Ако решението на (1.10) или (1.3) или е дадено в неявен вид (връзка между променливите x и y) от вида

$$F(x, y, C) = 0 \text{ или } \psi(x, y) = C,$$

то се нарича общ интеграл на уравнението, например за уравнението $2 + y' = 0$ общ интеграл е неявно зададената функция $2x + y = C$. За уравнението (1.3) общото решение може да бъде записано и в параметрична форма

$$x = \varphi(t, C),\ y = \psi(t, C). \tag{1.12}$$

Например за уравнението $xdx + ydy = 0$ общото решение в неявна форма е $x^2 + y^2 = C,\ C > 0$, а в параметрична форма е $x = C_1 \cos t,\ y = C_1 \sin t$.

Определение 1.9 *Решение на уравнението (1.10) (или (1.3)), във всяка точка на което имаме единственост на задачата на Коши се нарича частно решение на това уравнение.*

Ако ни е известно общото решение на едно диференциално уравненине, то всяко решение, получено от общото при конкректна допустима стойност на константата (включително и $\pm\infty$) е частно решение.

Определение 1.10 *Решение на уравнението (1.10) (или (1.3)), във всяка точка на което се нарушава единствеността на задачата на Коши се нарича особено решение на това уравнение.*

Особените решения не се съдържат във формулата за общо решение на уравнението, при никакво значение на константата C, включително и $C = \pm\infty$..

Може да се докаже, че ако дясната страна на уравнението (1.10) е непрекъсната и има частни производни относно y, то особени решения могат да са само тези криви, за които във всяка тяхна точка частната производна $f'_y = \infty$. Тези криви, ако съществуват такива, са подозрителни за особени решения. при това, те са особени решения, ако 1) са решения на даденото уравнение ; 2) във всяка точка от тях се нарушава единствеността на задачата на Коши. От тук, следва например, че ако дясната страна на (1.10) е полином на x и y, то уравнението няма особени решения (Защо?). Също така, може да де покаже, че и уравнението (1.3) няма особени решения, ако функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са полиноми.

Пример 1.1.2 Да разгледаме уравнението $y' = 2\sqrt{y},\ y \geq 0$. Общото решение се дава с формулата $y = (x + C)^2,\ x \geq -C$, което се вижда с непосредствена проверка. Фамилията интегрални криви на уравнението се състои от „полупараболите“$\gamma_C : y = (x + C)^2,\ x \in [-C, \infty)$. Дясната страна на даденото уравнение е $f(x, y) = 2\sqrt{y}$, чиято частна производна $f'_y = 1/\sqrt{y}$ е равна на $+\infty$ във всяко x. Съгласно казаното по-горе това означава, че правата $y = 0$ (оста Ox) е подозрителна за особено решение. От друга страна функцията $y = 0,\ x \in \mathbb{R}$, чиято графика съвпада с тази права е решение на уравнението, защото за всяко $x \in \mathbb{R}$ е вярно, че $0' = 0 = \sqrt{0}$. И тъй като при никаква стойност на константата C от формулата за общото решение не може да се получи решението $y = 0$, то е особено решение. От казаното дотук се вижда също така, че има и решения, които не са нито осбени нито частни. Например, ако разгледаме решението $y(x)$, дефинирано по следният начин : $y(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0)$ и $y(x) = x^2,\ x \in [0, \infty)$, то е нито частно, нито особено. Направете чертеж!

Пример 1.1.3 Уравнението $x(y - 2)dx + (x^2 - 1)(y + 1)dy = 0$ също няма особени решения.

Ако за едно дадено уравнение фамилията интегрални криви от вида

$$\gamma_C : y = \varphi(x, C) \quad \text{или} \quad \gamma_C : F(x, y, C) = 0$$

имат обвивка, т.е. крива, която във всяка своя точка се допира до крива от семейството интегрални криви, то такава крива също е решение на уравнението и при това особено. Наистина: 1) всяка такава крива е съшо интегрална крива на уравнението, защото в точките на допиране допирателните им прави имат един и същи ъглов коефициент; 2) във всяка точка от кривата се нарушава единствеността решението на задачата на Коши. Уравнението на обвивката (ако има такава) се определя от системата уравнения

$$y = \varphi(x, C),\ \varphi'_C = 0 \text{ или } F(x, y, C) = 0,\ F'_C(x, y, C) = 0.$$

С други думи от системата, получена от уравнението на фамилията и частната му производна по отношение на параметъра C, приравнена на нула, като изключим C, получаваме връзка между променливите x и y, от вида $H(x, y) = 0$. След това трябва да проверим дали получената крива $\Gamma : H(x, y) = 0$ е обвивка на фамилията γ_C или на част от него. По-нататък ще бъдат разгледани конкретни примери. Нека отбележим, че съществуват и особени решениия, които не са обвивки на фамилията от интегрални криви на едно уравнение.

д) Съставяне на диференциално уравнение на фамилия криви. Изогонални и ортогонални траектории. В някои случаи се налага но зададено уравнение на дадена фамилия криви да се напише диференциалното уравнение, което те удовлетворяват. Нека е дадено уравнението на фамилията криви

$$\gamma_C : F(x, y, C) = 0 \tag{1.13}$$

(в неявен вид). Да предположим, че в околност на някоя своя точка $M_0(x_0, y_0)$ кривата може да се зададе с уравнение от вида $y = \varphi(x, C)$. Тогава в околност на такава точка ъгловият коефициент на допирателната към кривата е $\operatorname{tg} \alpha = y' = \varphi'(x, C)$. Тогава, ако за тъждеството $F(x, y, C) = 0$ (в съответната околност), приложим формулата за производна на сложна функция, получаваме :

$$F'_x(x, y, C) + F'_y(x, y, C)y' = 0. \tag{1.14}$$

За да получим диференциалното уравнение на фамилията криви, от системата уравнения (1.13) и (1.14) изкключваме константата C и получаваме зависимост от вида

$$G(x, y, y') = 0. \tag{1.15}$$

Пример 1.1.4 Да се състави уравнението на фамилията прави

$$x + 2y = C.$$

Като диференцираме относно x, получаваме $1 + 2y' = 0$, т.е.

$$y' = -\frac{1}{2}.$$

В този случай не е необходимо да се изключва константата.

Пример 1.1.5 Да се състави уравнението на фамилията параболи

$$y = Cx^2.$$

Очевидно $y' = 2Cx$. Сега от даденото уравнение, намираме $C = y/x^2$. Като заместим този израз във формулата за y', получаваме

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Пример 1.1.6 Да се напише уравнението на фамилията окръжности

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

Считайки, че $y = y(x)$, като диференцираме горното равенство относно x, получаваме $2(x - C) + 2yy' = 0$. От друга страна имаме

$$(x - C) = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Окончателно получаваме

$$y' = \pm\frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

Обяснете защо се получават две диференциални уравнения. Направете чертеж на няколко криви от фамилията!

Нека сега да разгледаме задачата за траекториите.

Определение 1.11 *Нека е дадена една фамилия криви* γ_C : $F(x,y,C)=0$, *чието диференциално уравнение е (1.15). Кривата* Γ *се нарича изогонална траектория на тази фамилия, ако тя пресича всяка крива от фамилията под един и същи ъгъл* α. *Ако* $\alpha=\pi/2$ *кривата* Γ *се нарича ортогонална траектория на фамилията* γ_C. *Черт.!!*

Нека да означим с $u=u(x)$ уравнението на Γ и да разгледаме случая $\alpha\neq\pi/2$. Тогава в пресечнатат точка $M=\Gamma\cap\gamma_C$ са изпълнени равенствата

$$y(x)=u(x) \text{ и } k=\text{tg }\alpha=\text{tg }(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{u'(x)-y'(x)}{1+u'(x)y'(x)}, \tag{1.16}$$

където $\text{tg}\,\varphi_1 = y'(x)$ и $\text{tg}\,\varphi_2 = u'(x)$ са ъгловите коефициетни на допирателните в т.M на кривите γ_C и Γ. Тук се възползвахме и от факта, че $\alpha=\varphi_2-\varphi_1$ (направете чертеж). Като изразим от (1.16) y' чрез k и u', получаваме

$$y'=\frac{u'-k}{u'k+1}. \tag{1.17}$$

Сега остава да заместим в уравнението на γ_C (1.15) y с u и y' с израза от (1.17). Получаваме

$$G\left(x,u,\frac{u'-k}{u'k+1}\right)=0, \tag{1.18}$$

което е търсеното уравнение на изогоналните траектории.

Ако $\alpha=\pi/2$, като е известно условието за перпендикулярност на допирателните в т. M е

$$y'(x)=-\frac{1}{u'(x)}. \tag{1.19}$$

Тогава уравнението на ортогоналните траектории е

$$G\left(x,u,-\frac{1}{u'}\right)=0. \tag{1.20}$$

Пример 1.1.7 Да се напише уравнението на траекориите, сключващи ъгъл $\alpha=\pi/4$ с фамилията прави $\gamma_C : x+3y=C$.

Уравнението на дадената фамилия криви е γ_C : $y'=-1/3$, а $k=\text{tg }\pi/4=1$. Тогава съответното уравнение е

$$\frac{u'-1}{u'+1}=-\frac{1}{3} \text{ или } u'=\frac{1}{2}, \text{ откъдето намираме } u=\frac{1}{2}x+C_1.$$

Ясно е, че изогоналните траеткории са също фамилия успоредни прави, всяка права от която сключва ъгъл $\alpha = \pi/4$ със всяка права от дадената фамилия.

Пример 1.1.8 Да се напише уравнението на ортогоналните траекории на фамилията концентрични окръжности $\gamma_C : x^2 + y^2 = C$.

Уравнението на дадената фамилия криви е $\gamma_C : y' = -x/y$. Тогава, съгласно (1.20), уравнението на ортогоналните траектории е

$$u' = \frac{u}{x}, \text{ откъдето следва, че } u = Cx.$$

Ортогоналните траектории в този случай са също фафиилията прави през координатното начало, всяка една от които е колинеарна с един от радиусите на окръжностите от дадената фамилия. Направете чертеж!

1.1.2 Диференциални уравнения с отделящи се променливи и хомогенни диференциални уравнения

1. Диференциални уравнения с отделящи се променливи.

а)Диференциални уравнения, не съдържащи неизвестната функция или независимата променлива. Най-простият вид диференциални уравнения е известен още от курса по Анализ 1. Това са уравненията от вида:

$$y' = f(x) \text{ или } dy = f'(x)dx, \ \ x \in (a,\, b), \tag{1.21}$$

където $f(x)$ е непрекъсната функция дефинирана в интервала (a, b), който може също така да е безкраен, затворен или полуотворен. В този случай решението, очевидно се дава с формулата

$$y = \int f(x)dx + C, \ x \in (a,\, b). \tag{1.22}$$

Всъщност, решението се свежда до намирането на всички примитивни функции на $f(x)$ в дадения интервал. Задачата на Коши в този случай е избирането на конкретна примитивна, минааща през отнапред дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, където x_0 е произволна фиксиранан точка от $(a,\, b)$, а y_0 е произволно реално число (да напомним, че всяка непрекъсната функция, дефинирана в даден интервал, притежава примитивна в този интервал и че формула (1.22) изчерпва съвкупността от всички примитивни на $f(x)$ в този интервал). Сега нека да разгледаме уравнението

$$y' = g(y) \;\text{ или }\; dx = \frac{1}{g(y)}dy, \;\; y \in (c,\, d), \tag{1.23}$$

което може да се разглежда като уравнение от вида (1.21) с разменени роли на зависимата и независимата променлива. Решението се дава с формулата

$$x + C = \int \frac{1}{g(y)}dy, \; y \in (c,\, d). \tag{1.24}$$

Тук трябва да отбележим, че реалните корени на уравнението $g(y) = 0$, ако има такива, са решения на диференциалното уравнение $y' = g(y)$, които могат да се окажат и особени . Ако $g(y)$ е полином, както беше споменато в уводният раздел, уравнението няма особени решения.

Пример 1.1.9 Да се реши уравнението $y' = \cos^2 y$.
Записваме уравнението във вида

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dx, \;\; \text{откъдето} \;\; \int \frac{1}{\cos^2 y} = \int dx + C \;\; \text{т.е.} \;\; \operatorname{tg}\, y = x + C,$$

което може да се запише и така:

$$y = \operatorname{arctg}(x + C).$$

Да забележим, че правите с уравнения $y = (2k + 1)\pi/2$ (това са корените на уравнението $\cos^2 y = 0$) са решениия на даденото уравнение при това частни, не особени, защото могат да се получат от общото решение при $C = \pm\infty$.

б)Диференциални уравнения с отделящи се променливи.

Определение 1.12 *Уранение от вида*

$$y' = f(x)g(y) \;\; \textit{или} \;\; P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0, \tag{1.25}$$

където функциите $P_1(x)$ и $P_2(x)$ са непрекъснати в някакъв интервал $(a,\, b)$, а функциите $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ са непрекъснати при $y \in (c,\, d)$, се нарича уравнение с отделящи се променливи.

Да разгледаме най-напред един частен случай на това уравннение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \tag{1.26}$$

което се нарича *уравнение с отделени променливи* и към което може да се сведе (1.25). Функциите P и Q считаме непрекъснати в съответните интервали. Нека гладката крива $\gamma : \vec{r} = (x(t), y(t)),\ t \in [\alpha,\ \beta]$ (тук се включват и случаите, когато кривата е графика на функция от вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$) удовлетворява (1.26), т.е.

$$P(x(t))x'(t)dt + Q(y(t))y'(t)dt = 0,\ \ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{1.27}$$

Като интегрираме относно t тъждеството (1.27), получаваме

$$\int P(x(t))x'(t)dt + \int Q(y(t))y'(t)dt = C,\ \ t \in [\alpha,\ \beta], \tag{1.28}$$

които след внасяне под знака на диференциала на $x'(t)$ и $y'(t)$, може да се запише във вида

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,\ C = const. \tag{1.29}$$

Ако въведем означенията $F(x) = \int P(x)dx$ и $G(y) = \int Q(y)dy$, то равенство (1.29) може да се напише във вида

$$F(x) + G(y) = C \tag{1.30}$$

Равенство (1.30) представлява общото решение на уравнение (1.26), защото ако при фиксирана стойност на константата напипишем кое да е параметрично представяне на кривата, определена от (1.30) след като заместим $x = x(t)$ и $y = y(t)$ и диференцираме относно параметъра t ще получим (1.27), което е еквивалентно на (1.26). Трябва да отбележим, че константата може да приема само определени стойности, които зависят от дефиниционните интервали на функциите P и Q. Задачата на Коши за (1.26) се решава като заместим във формулата за общото решение x и y с x_0 и y_0, откъдето намираме $C_0 = F(x_0)+G(y_0)$ и съответното частно решение $F(x)+G(y) = C_0$. Ако началните данни не са в дефиниционните области на P и Q не се гарантира нито съществуване нито единственост на решението на задачата на Коши. Ако пък в т.$M(x_0, y_0)$ се анулират едновременно и P и Q (особена точка), то през тази точка могат да минават повече от една интегрална крива на уравнението. В някои случаи (далеч не във всички, обаче) от горното равенство може да се изрази y като явна функция на x или обратно.

Нека да разгледавме уравненията от (1.25). Не е трудно да се види, че от записа $y' = f(x)g(y)$ лесно се минава към записа с диференциали (второто уравнение), което се свежда към уравнение (1.26). Наистина, нека да разделим двете страни на (1.25) на произведението $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$. Получаваме

$$\frac{P_1(x)Q_1(y)}{P_2(x)Q_1(y)}dx + \frac{P_2(x)Q_2(y)}{P_2(x)Q_1(y}(y)dy = 0,$$

или

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0, \tag{1.31}$$

което е от вида (1.26). След интегриране на последното равенство, по аналогичен начин заключаваме, че общото решение на (1.25) се дава с формулата

$$F(x) + G(y) = C, \tag{1.32}$$

$$\text{където } F(x) = \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx \quad \text{и} \quad G(y) = \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy.$$

Остава да забележим, че реалните корени на уравненията $P_2(x) = 0$ и $Q_1(y) = 0$ са също решения на диференциалното уравнение (1.25). Наистина, нека $P_2(x_1) = 0,\ x_1 = const$. Тогава параметрично зададената крива

$$\vec{r} = (x_1, t),\ t \in (-\infty, \infty)$$

е интегрална крива на уравнението, защото

$$P_1(x_1)Q_1(t)dx_1 + P_2(x_1)Q_2(t)dt = P_1(x_1)Q_1(t).0 + 0.Q_2(t)dt = 0 + 0 = 0.$$

По аналогичен начин можем да се убедим, че ако $Q_1(y_1) = 0,\ y_1 = const$, то кривата с уравнение

$$\vec{r} = (t, y_1),\ t \in (-\infty, \infty)$$

е интегрална крива на уравнението.

Решенията от този вид могат са частни или особени. Ако функциите $P_2(x)$ и $Q_1(y)$ са полиноми, тези решения обезателно са частни (вж. предишния раздел).

Нека да разгледаме някои примери.

Пример 1.1.10 Да се реши задачата на Коши за уравнението

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

при следните начални условия $x = 0$ и $y = 1/2$.

Уравнението е с разделени променливи. Имаме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

или :

$$\arcsin x + \arcsin y = C \quad \text{и в явен вид съответно} \quad y = \sin(C - \arcsin x).$$

Заместваме с дадените начални условия и получаваме

$$C = \arcsin 0 + \arcsin 1/2 = 0 + \pi/6 = \pi/6.$$

Съответното частно решение е

$$y = \sin(\pi/6 - \arcsin x).$$

Уравнението няма особени решения (защо?).

Пример 1.1.11 Да се реши задачата на Коши за уравнението

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

при следните начални условия: 1) при $x = 1$ и $y = 0$; 2) $x = 0$ и $y = 0$.

Уравнението е с разделящи се променливи. Имаме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

или :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + C,\ 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C.$$

В първия случай получаваме $C_1 = 2\sqrt{0} - 2\sqrt{1} = -2$ и съответното частно решение е $2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 2$, а във втория съответно $C_2 = 2\sqrt{0} - 2\sqrt{0} = 0$ и съответното частно решение е $2\sqrt{y} = 2\sqrt{x}$ т.е. $y = x$. Сега остава да изследваме случаите $y = 0$, и $x = 0$. Функцията $y = 0,\ x > 0$ е решение на даденото уравнение, а функцията $x = 0,\ y > 0$ е решение на „обърнатото“ уравнение $x' = \sqrt{x}/\sqrt{y}$. При това и двете решения са особени (защо?).

2.Хомогенни диференциални уравнения.

Определение 1.13 *Уранение от вида*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.33}$$

където функцията $f(z)$ *е непрекъсната в някакъв интервал* $(a,\ b)$*, се нарича хомогенно уравнение.*

Всяко хомогенно уравнение може да се сведе към уравнение с отделящи се променливи посредством полагането

$$y(x) = z(x)x, \tag{1.34}$$

където $z(x)$ е новата неизвестна функция и запазим независимата променлива x. За да направим смяната трябва да изразим $y'(x)$ чрез $z'(x)$. От равенство (1.34) намираме

$$y'(x) = (zx)' = z'(x)x + z(x)x' = z'x + z.$$

След като заместим в даденото уравнение, получаваме

$$z'x + z = f(z), \text{ или } \frac{dz}{dx} = f(z) - z, \tag{1.35}$$

което е уравнение с разделящи се променливи. От (1.35) следва, че

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \text{ т.е. } \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \tag{1.36}$$

Нека означим с $F(z)$ интеграла в лявата страна на последното равенство и за удобство положим $C_1 = \ln C$, $C > 0$ получаваме $F(z) = \ln Cx$. Тогава общото решение се дава с формулата

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Cx \tag{1.37}$$

Сега остава да проверим дали уравнението $F(z) - z = 0$ има реални корени, защото ако z_1 е един негов корен, то функцията $z = z_1 = const$ е решение на диференциалното уравнение (1.35), и следователно правата с уравнение $y = z_1 x$ е решение на изходното хомогенно уравнение, което може да е особено или частно.

Забележка 1.1.1 Ако уравнението е дадено в симетрична форма $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ можем да проверим дари е хомогенно по два начина: или като го решим спрямо производната или като проверим дали P и Q са хомогенни функции от една и съща степен. Да напомним, че функцията $f(x,y)$ се нарича **хомогенна от степен** α, ако за всяко $t \neq 0$ е изпълнено равенството $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$. Проверете самостоятелно, че ако P и Q са хомогенни функции от една и съща степен, то уравнението е хомогенно.

Сега да разгледаме някои примери, които илюстрират казаното дотук.

Пример 1.1.12 Да се реши задачата на Коши за уравнението

$$y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x},\ M_0(1,0).$$

Уравнението е хомогенно. Полагме $y = z(x)x$, намираме

$$y'(x) = z'(x)x + z(x)x' = z'x + z$$

и заместваме в даденото уравнение. Последователно получаваме

$$z'x + z = e^{-z} + z,\ z' = e^{-z},\ e^z dz = \frac{dx}{x},\ \int e^z dz = \int \frac{dx}{x} + \ln C.$$

Тук, за удобство произволната константа я записахме във вида $\ln C$, $C > 0$, което е винаги удобно, когато решаваме хомогенно уравнение. По-нататък, имаме

$$e^z = \ln C_1 x,\ \frac{y}{x} = \ln(\ln C_1 x),\ y = x\ln(\ln C_1 x),\ C_1 = \pm C.$$

Последната формула, по-горе вдясно е явен запис на общото решение на уравнението. Сега от началните условия следва, че $0 = 1\ln(\ln C_1 1)$, т. е. $\ln C_1 = 1$, откъдето е ясно, че $C_1 = e$. Търсеното частно решение е

$$y = x\ln(1 + \ln x).$$

Проверете чрез диференциране самостоятелно, че така намерената функция, удовлетворява уравнението и началното условие.

Пример 1.1.13 Да се намери общото решение на уравнението

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Уравнението е също хомогенно, тъй като функциите

$$P(x,y) = x^2 - y^2 \text{ и } Q(x,y) = 2xy$$

са хомогенни от втора степен. Уравнението може да бъде решено, като в предишния пример. Тъй като в този случай уравнението е записано в симетрична форма, без да го решаваме спрямо y', полагме $y = zx$ и намираме $dy = xdz + zdx$. След това заместваме полученият израз за dy в даденото уравнение и изнасяме зад скоби dx и dz. Ако работим вярно трябва да получим уравнение с отделящи се променливи. Втози случай имаме

$$(x^2 - x^2z^2)dx + 2xzx(xdz + zdx) = 0, \ (x^2 - x^2z^2 + 2x^2z^2)dx + 2x^3zdz = 0,$$

или

$$x^2(1 + z^2)dx + 2x^3zdz = 0,$$

което очевидно е уравнение с разделящи се променливи. По-нататък, след като разделим двете страни на уравнението на $x^3(1 + z^2) \neq 0$, получаваме

$$\frac{dx}{x} + \frac{2zdz}{1 + z^2} = 0 \ \text{ и след като интегрираме } \ \ln|x| + \ln(1 + z^2) = \ln C.$$

След преработване на полученият израз (направете това самастоятелно), общото решение може да се запише така:

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_1^2 \text{ където } C_1 = \pm\frac{C}{2}.$$

Последното уравнение е на фамилия окръжности с център т. $M(C_1, 0)$, лежаща на абцисната ос и радиус $R = C_1$. Да забележим също така, че правата с уравнение $x = 0$ (ординатната ос) е също решение на изходното уравнение, при това е частно (получава се от общото при $C_1 = \infty$). Уравнението няма особени решения, тъй като в този случай $f(z) - z = 1 + z^2 \neq 0$ за реални стойности на z. Има само една особена точка – т.$O(0,0)$, защото задачата на Коши с начални данни $x_0 = 0, \ y_0 = 0$ има безброй много решения (всички окръжности от фамилията се допират до ординатната ос в тази точка – направете чертеж!). Факта, че т.$O(0,0)$ е особена се вижда и от изходното уравнение – единственото решение на системата $x^2 - y^2 = 0, \ 2xy = 0$.

1.1.3 Диференциални уравнения, приводими към уравнения с отделящи се променливи и към хомогенни уравнения

1. Диференциални уравнения, приводими към уравнения с отделящи се променливи.

а) Диференциални уравнения от вида

$$y' = f(ax + by + c),\ a, b, c = const, \tag{1.38}$$

а f е непрекъсната функция в някакъв интервал Δ. Уравненията от този вид лесно се свеждат към уравнения с отделящи се променливи чрез въвеждане на нова неизвестна фунция $z(x) = ax+by(x)+c$. Тъй като $z'(x) = a + by'(x)$, като заместим в даденото уравнение, получаваме

$$\frac{z' - a}{b} = f(z), \tag{1.39}$$

което е с отделящи се променливи.

Пример 1.1.14 Да се реши уравнението

$$y' = -x^2 - 2xy - y^2$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(0, 1)$.

Уравнението може да се представя във вида $y' = -(x+y)^2$. След като проложим $z = x+y$ и диференцираме: $z' = 1+y'$, получаваме уравнението $z' = -1 - z^2$, което е с разделящи се променливи. Тогава

$$\frac{dz}{1+z^2} = -dx,\ \int \frac{dz}{1+z^2} = -\int dx + C,\ \text{arctg}\, z = \text{-}x\text{+}C,.$$

т.е. $z = \text{tg}\,(-x + C)$. Общото решение на изходното уравнение е

$$y = -x + \text{tg}\,(-x + C),$$

а съответното частно решение е

$$y = -x + \text{tg}\,(-x + \pi/4).$$

б) Диференциални уравнения от вида

$$y' = \frac{y}{x} + b(x)y^{\alpha},\ \alpha = const, \tag{1.40}$$

а $b(x)$ е непрекъсната функция в някакъв интервал Δ.

Уравненията от този вид не са хомогенни (частен случай на уравнение на Бернули, което се разглежда в следващата лекция), но чрез полагането $y = zx$ се свеждат към уравнения с отделящи се променливи. Наистина, като заместим $y' = z'x + z$,

$$z'x + z = z + b(x)z^{\alpha}x^{\alpha}, \text{ или } z' = b(x)z^{\alpha}x^{\alpha-1}, \tag{1.41}$$

което е уравнение с отделящи се променливи.

Пример 1.1.15 Да се реши уравнението

$$y' = \frac{y}{x} + (1+x)\sqrt{y}$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(1,1)$.

След като проложим $y = zx$ и диференцираме: $y' = z'x + z$, получаваме уравнението $z'x = (1+x)\sqrt{zx}$, което е с разделящи се променливи. Тогава, при $x \geq 0$ и $z > 0$, получаваме

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{(1+x)}{\sqrt{x}}dx, \ \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{(1+x)}{\sqrt{x}}dx + C.$$

След като решим интегралите (направете това самостоятелно), получаваме

$$2\sqrt{z} = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

а като заместим z с y/x и повдигнем на квадрат двете страни на уравнението, можем да запишем общото решение на изходното уравнение по следния начин:

$$y = x(\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C_1)^2, C_1 = \frac{C}{2}.$$

За да определим константата, заместваме с началните данни в последната формула и получаваме $C_1 = -\frac{7}{3}$ или $C_1 = -\frac{1}{3}$, първата от която не е решение на поставената задача на Коши за това уравнение (Защо?). Съответното частно решение е

$$y = x(\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3})^2.$$

Какво може да се каже за решението $y = 0$?

2. Диференциални уравнения от вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{1.42}$$

където $f = f(z)$ е непрекъсната функция в някакъв интервал Δ, а a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$ са константи. Съществуват три различни случая, които са разгледани по-долу.

а)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda = const. \tag{1.43}$$

Тогава уравнението (1.42) придобива вида

$$y' = f(\lambda) = const, \text{ откъдето следва, че } y = f(\lambda)x + C, \tag{1.44}$$

което е общото решение на уравнението.

Пример 1.1.16 Да се реши уравнението

$$y' = \sqrt{\frac{2x + 4y - 6}{x + 2y - 3}}$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(\sqrt{2}, 3)$.

Уравнението е еквивалентно на

$$y' = \sqrt{2}, \text{ т.е. } y = \sqrt{2}\, x + C,$$

От началното условие следва, че $C = 1$. Съответното частно решение е $y = \sqrt{2}x + 1$.

б)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda = const \neq \frac{c_1}{c_2}. \tag{1.45}$$

В този случай е удобно да се въведе нова неизвестна функция

$$z(x) = a_2x + b_2y(x). \text{ Тогава } a_1x + b_1y + c_1 = \lambda z + c_1, \tag{1.46}$$

$$y' = \frac{z' - a_2}{b_2} \tag{1.47}$$

и като заместим в (1.42), получаваме

$$\frac{z'-a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right), \tag{1.48}$$

което е уравнение с отделящи се променливи. До подобен резултат се стига и при полагането $z(x) = a_1 x + b_1 y$.

Пример 1.1.17 Да се намери общото решение на уравнението

$$y' = \frac{x-2y+1}{2x-4y-3}.$$

Тук е удобно да положим $z = x - 2y$, откъдето намираме $z' = 1 - 2y'$ и заместваме в даденото уравнение:

$$\frac{1-z'}{2} = \frac{z+1}{2z-3}, \text{ или } z' = \frac{-5}{2z-3}, \ (2z-3)dz = -5dx,$$

т.е.

$$\int (2z-3)dz = -5\int dx + C.$$

От тук следва, че $z^2 - 6z = -10x + C_1, \ C_1 = 2C$. Общото решение на даденото уравнение е

$$(x-2y)^2 + 4x + 12y = C_1$$

Особени решения няма.

в) Коефициентите пред x y удовлетворяват условието

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \tag{1.49}$$

Тогава системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = -c_1 \\ a_2 x + b_2 y = -c_2 \end{array} \right. \tag{1.50}$$

има единствено решение $x = \alpha$, $y = \beta$ (защо?). Да сменим променливите в уравнение (1.42) по формулите

$$x = t + \alpha, \ y = z + \beta, \ \text{ където } \ z = z(t) \tag{1.51}$$

е новата неизвестна функция и да диференцираме относно x равенството $y(x) = z(t(x)) + \beta$. Получаваме $y'(x) = z'(t)t'(x) = z'(t)$, защото $t'(x) = (x-\alpha)' = 1$. Сега като заместим в (1.42) с новите променливи и $y'(x)$ със $z'(t)$, и отчетем факта, че α и β са решения на (1.50) получаваме

$$z' = f\left(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\right), \tag{1.52}$$

което е хомогенно уравнение. Това се вижда, ако разделим числителя и знаменателя на дробта вдясно на t (вж. темата за хомогенни уравнения). Остава да положим $z(t) = w(t)t$. След като изразим z' и заместим в (1.52) стигаме до уравнението

$$w't + w = f\left(\frac{a_1 + b_1w}{a_2 + b_2w}\right), \tag{1.53}$$

което е с отделящи се променливи. След като го решим, остава да се върнем към старите променливи.

Пример 1.1.18 Да се намери общото решение на уравнението

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

Като го решим го спрямо производната се вижда, че то е от вида, разгледан по-горе. Решнията на системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{array}\right.$$

са $\alpha = -1/3$, $\beta = 1/3$. След полагането $x = t - 1/3$, $y = z + 1/3$, като отчетем, че $dx = dt$ и $dy = dz$ и заместим в даденото уравнение, получаваме

$$(2t - z)dt + (2z - t)dz = 0.$$

Сега отново полагаме $z = wt$, откъдето намираме $dz = tdw + wdt$ и заместваме в последното уравнение. Имаме

$$(2t - tw)dt + (2wt - t)(tdw + wdt) = 0,$$

или

$$2t(1 - w + w^2)dt + t^2(2w - 1)dw = 0.$$

Делим двете страни на последното уравнение на $t^2(w^2 + w - 1) \neq 0$ и интегрираме:

$$\int \frac{2}{t} dt + \int \frac{(2w-1)}{(w^2 - w + 1)} dw = \ln C.$$

Първият интеграл е табличен, а за да решим втория, съобразяваме, че $d(w^2 - w + 1) = (2w - 1)dw$, и той се свежда към табличен. Получаваме

$$\ln t^2 + \ln |w^2 - w + 1| = \ln C, \text{ откъдето следва, че } t^2(w^2 - w + 1) = C_1,$$

т.е.

$$z^2 - zt + t^2 = C_1.$$

Сега да заместим z с $y - 1/3$, а t с $x + 1/3$ (извършете необходимите пресмятания). Общото решение изглежда така:

$$x^2 + y^2 - xy + x - y = C_2, \; C_2 = C_1 - \frac{1}{3}$$

Особени решения няма, има само една особена точка (коя ?).

1.1.4 Линейни диференциални уравнения и уравнения на Бернули и Рикати

1. Линейни диференциални уравнения от първи ред.

Определение 1.14 *Уранение от вида*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1.54}$$

*където функциите $a(x)$ са $b(x)$ непрекъснати в някакъв интервал Δ, а $y = y(x)$ е неизвестната функция, се нарича **линейно диференциално уравнение от първи ред** (ЛДУ от първи ред).*

Терминът „линейно“ отразява факта, че производната на неизвестната функция y' е линейна функция на y с коефициенти, зависещи от независимата променлива x. Нека да отбележим, че уравнение от вида

$$x' = a_1(y)x + b_1(y), \tag{1.55}$$

където функциите $a_1(y)$ и $b_1(y)$ са непрекъснати в някакъв интервал, също се нарича ЛДУ от първи ред с независима променлива y неизвестна функция $x = x(y)$. Нещо повече – има уравнения, които като ги решим спрямо y' не са от нито един от познатите видове, но като разменим ролите на x и y се получава уравнение от вида (1.55).

Оказва се, че за уравненията от вида (1.54), респективно (1.55), винаги може да се намери решение в явен вид, при това дефинирано, в целия интервал, в който са дефинирани коефициентите. За да получим формулата за общото решение на (1.54) (другото се решава по същия начин), прилагаме метода на Лагранж, наречен още метод на вариране на произволната константа. Най-напред търсим решение на съответното ЛХДУ от първи ред, а именно на уравнението

$$y' = a(x)y, \tag{1.56}$$

което е също така и с отделящи се променливи. Имаме

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx, \text{ откъдето следва, че } \ln|y| = \int a(x)dx + C, \tag{1.57}$$

което може да се напише и така :

$$y = C_1 e^{\int a(x)dx},\ C_1 = \pm e^C. \tag{1.58}$$

Идеята на метода на Лагранж се състои в това, да се замени неизвестната константа C_1с неизвестна функция $\varphi(x)$, която да определим така , че функцията

$$y = \varphi(x)e^{\int a(x)dx} \tag{1.59}$$

да е решение на уравнението (1.54. За това диферецираме (1.59) и заместваме в (1.54). Получаваме

$$y'(x) = \varphi'(x)e^{\int a(x)dx} + \varphi(x)\left(e^{\int a(x)dx}\right)' = \varphi'(x)e^{\int a(x)dx} + \varphi(x)e^{\int a(x)dx}a(x),$$

$$\varphi'(x)e^{\int a(x)dx} + \varphi(x)e^{\int a(x)dx}a(x) = a(x)\varphi(x)e^{\int a(x)dx} + b(x),$$

от където следва че

$$\varphi'(x)e^{\int a(x)dx} = b(x), \text{ т.е. } \varphi'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}$$

и следователно

$$\varphi(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C. \tag{1.60}$$

Формулата за общото решение на (1.54) получаваме като в (1.59) заместим полученият резултат за (1.60):

$$y = e^{\int a(x)dx}\left[C + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right] \tag{1.61}$$

От направеното дотук се вижда, че за да решим едно линейно уравнение, първо трябва да го „познаем, че линейно“и второ – да решим правилно интегралите. Освен това, трябва да се има предвид и, че в някои учебници и сборници общият вид на линейно уравнение се дава с формулата

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.62}$$

и съответно решението с формулата

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]. \tag{1.63}$$

Линейните уравнения нямат особени решения.

Пример 1.1.19 Да се намери общото решение на уравнението

$$x^3y' + 3x^2y - 2 = 0$$

и да се намери онази интегрална крива, минаваща през т. $M(1,1)$.

Като го решим го спрямо производната се вижда, че то линейно:

$$y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3},\ \text{в този случай } a(x) = -\frac{3}{x},\ b(x) = \frac{2}{x^3},\ x \neq 0.$$

Заместваме във формула (1.61) :

$$y = e^{-\int \frac{3}{x}dx}\left[C + \int \frac{2}{x^3}\, e^{\int \frac{3}{x}dx}dx\right].$$

Последователно намираме

$$\int \frac{3}{x}dx = 3\ln|x|,\ \text{и тъй като } e^{3\ln|x|} = |x|^3,\ e^{-3\ln|x|} = \frac{1}{|x|^3}(\text{защо?}),$$

то

$$\int \frac{2}{x^3}\, e^{\int \frac{3}{x}dx}dx = \int \frac{2}{x^3}|x|^3dx = \pm 2\,x.$$

Тъй като случаите $x > 0$ и $x < 0$ се разглеждат аналогично, можем да се освободим от модула за сметка на произволната константа C, като ще запазим същото означение за нея. Тогава общото решение може да се запише така

$$y = \frac{1}{x^3}\left[C + 2\,x.\right] \text{ или } y = \frac{C}{x^3} + \frac{2}{x^2},\ x \neq 0.$$

Сега да заместим x и y с единица. Получаваме

$$1 = C + 2, C = -1. \text{ Съответното частно решение е } y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}.$$

Пример 1.1.20 Да се намери общото решение на уравнението

$$(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$$

Това уравнение не е нито с отделящи се променливи нито хомогенно нито линейно с неизвестна функция y (защо?).

Като го решим го спрямо $x'(y) = 1/y'(x)$ се вижда, че то е ЛДУ с неизвестна функция x. Наистина

$$x' = \frac{2y-1}{y^2}x + 1,\ \left(a(y) = \frac{2y-1}{y},\ b(y) = 1\right),\ y \neq 0.$$

Заместваме във формула (1.61), като разменим ролите на x и y:

$$x = e^{\int (2y-1)/y^2 dy}\left[C + \int\ e^{-\int (2y-1)/y^2 dy} dy\right].$$

Пресмятаме

$$\int \frac{2y-1}{y^2}dy = 2\int \frac{1}{y}dy - \int \frac{1}{y^2}dy = 2\ln|y| + \frac{1}{y} = \ln y^2 + \frac{1}{y}$$

и следователно (както в предишния пример), получаваме

$$e^{\ln y^2 + 1/y} = y^2 e^{1/y},\ \text{и } e^{-\ln y^2 - 1/y} = \frac{1}{y^2}e^{-1/y}.$$

За втория интеграл получаваме

$$\int \frac{1}{y^2}e^{-1/y}dy = \int e^{-1/y}d\left(-1/y\right) = e^{-1/y}.$$

Общото решение е:

$$x(y) = y^2(Ce^{1/y} + 1).$$

2. Бернулиеви диференциални уравнения .

Определение 1.15 *Уранение от вида*

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \tag{1.64}$$

където функциите $a(x)$ *са* $b(x)$ *непрекъснати в някакъв интервал* Δ*,* $y = y(x)$ *е неизвестната функция, а* $\alpha = const$*,* $\alpha \neq 0, 1$ *се нарича* ***диференциално уравнение на Бернули*** *.*

Най-напред да забележим, че случаите $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ са вече познати. В първия случай се получава линейно уравнение, а във втория – уравнение с отделящи се променливи.

Във всички останали случаи даденото уравнение може да се сведе към линейно чрез подходяща смяна на неизвестната функция.

Нека да разделим двете страни на (1.64) на $y^\alpha \neq 0$. Имаме

$$y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x), \tag{1.65}$$

в което правим смяна на неизвестната функция по формулата

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) \tag{1.66}$$

и диференцираме двете страни на горното равенство:

$$z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'(x). \tag{1.67}$$

Сега остава да забележим, че можем заместим израза в лявата страна на (1.65), който е $y'y^{-\alpha}$ с $z'/(1-\alpha)$ (разбира се и $y^{1-\alpha}$ със z) и да умножим двете страни на уравнението с $1-\alpha$. Получаваме уравнението

$$z' = a(x)(1-\alpha)z + b(x)(1-\alpha), \tag{1.68}$$

което е линейно с коефициенти $a_1(x) = a(x)(1-\alpha)$ $b_1(x) = b(x)(1-\alpha)$ и неизвестна функция z. Намираме общото му решение $z(x) = \varphi(x, C)$ по фомула (1.61) , след което се връщаме към изходната функция :

$$y(x) = \varphi(x, C)^{1/(1-\alpha)}, \tag{1.69}$$

което е и общото решение на (1.64). Остава да отбележим, че при $\alpha > 0$ функцията $y \equiv 0$ е също решение на (1.64), при това особено, ако $0 < \alpha < 1$ и частно при $\alpha > 1$.

Пример 1.1.21 Да се намери общото решение на уравнението

$$y' - 9x^2y - 3(x^5 + x^2)y^{2/3} = 0.$$

Решаваме го спрямо y' и виждаме, че то е Бернулиево с неизвестна функция y и $\alpha = 2/3$. Наистина

$$y' = 9x^2y + 3(x^5 + x^2)y^{2/3}$$

Делим двете страни на последното уравнение на $y^{2/3} \neq 0$.

$$y'y^{-2/3} = 9x^2y^{1/3} + 3(x^5 + x^2).$$

Полагаме $y^{1/3} = z$, откъдето намираме

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y' = z'.$$

След заместване по-горе, се получава линейното уравнение

$$z' = 3x^2z + (x^5 + x^2).$$

Сега от формулата за решение на линейно уравнение следва, че

$$z = e^{\int 3x^2dx}\left[C + \int (x^5 + x^2)e^{-\int 3x^2dx}dx\right],$$

т.е.

$$z = e^{x^3}\left[C + \int (x^5 + x^2)e^{-x^3}dx\right].$$

Втория интеграл решаваме, като внесем x^2 под знака на диференциала и интегрираме по части:

$$\int (x^5 + x^2)e^{-x^3}dx = \frac{1}{3}\int (x^3 + 1)e^{-x^3}3x^2dx = \frac{1}{3}\int (x^3 + 1)e^{-x^3}dx^3.$$

За удобство полагаме $x^3 = t$. По-нататък, получаваме

$$\frac{1}{3}\int (t+1)e^{-t}dt = -\frac{1}{3}\int (t+1)de^{-t} = -\frac{1}{3}(t+1)e^{-t} + \frac{1}{3}\int e^{-t}d(t+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}(t+1)e^{-t} + \frac{1}{3}\int e^{-t}dt = \frac{1}{3}(t+1)e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t}dt = -\frac{1}{3}e^{-t}\,(t+2).$$

Тогава
$$\int (x^5 + x^2)e^{-x^3}dx = -\frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3+2\right).$$
Общото решение на линейното уравнение е
$$z = e^{x^3}\left[C - \frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3+2\right)\right]$$
Сега от полагането следва, че $y = z^3$, т.е. общото решение на Беннулиевото уравнение е
$$y = e^{3x^3}\left[C - \frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3+2\right)\right]^3.$$
Остава да забележим, че $y = 0$ също решение на изходното уравнение, при това особено ($\alpha = 2/3 \in (0,1)$).

3. Уравнение на Рикати.

Определение 1.16 *Уранение от вида*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{1.70}$$

където функциите $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ са непрекъснати в някакъв интервал Δ, $y = y(x)$ е неизвестната функция, се нарича ***диференциално уравнение на Рикати*** .

С други думи, това е уравнение, в което y' е квадратна функция на y с непекъснати коефициенти, зависещи от x. Характерна особеност на този вид уравнения е, че общото им решение не винаги може да бъде намерено. Например уравнението
$$y' = x^2 + y^2$$
е уравнение на Рикати с коефициенти $a(x) = 1$, $b(x) = 0$ и $c(x) = x^2$, на което не е известно точното решение въпреки, че изглежда доста просто.

Но, ако е известно едно частно решение на (1.70) – $y = y_1(x)$, то това уравнение може да бъде сведено към линейно чрез полагането

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \tag{1.71}$$

където z е новата неизвестна функция. За да се убедим в това, намираме y':
$$y' = y_1' - \frac{1}{z^2}z'$$

и заместваме в (1.70). Получаваме

$$y_1' - \frac{1}{z^2}z' = a(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + b(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + c(x).$$

Като преработим последния израз и отчетем факта, че y_1 е решение на (1.70), стигаме до уравнението.

$$-\frac{1}{z^2}z' = 2a(x)\frac{1}{z} + a(x)\frac{1}{z^2} + b(x)\frac{1}{z}. \tag{1.72}$$

След като умножим двете страни на (1.71) по $-1/z^2$ получаваме

$$z' = -(2a(x) + b(x))z - a(x), \tag{1.73}$$

което е линейно относно неизвестната функция z. Тъй като дясната страна на всяко уравнение на Рикати е полином от втора степен спрямо y, то няма особени решения.

Пример 1.1.22 Да се намери общото решение на уравнението

$$xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x,$$

ако е известно, че притежава частно решение от вида $y_1 = ax + b$.

Уравнението е Рикатиево. Трябва да определим константите a и b така, че y_1 да го удовлетворява. За да ги намерим диференцираме и заместваме в даденото уравнение. Получаваме

$$ax = (ax+b)^2 - (2x+1)(ax+b) + x^2 + 2x.$$

След разкриване на скобите и подреждане по степените на x, стигаме до равенството

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 + (2ab - 2a + 2b + 2)x + b^2 - b = 0,$$

което трябва да е изпълнено за всяко x. Като приравним коефициентите пред степените на x на 0 и решим получената система за a и b, намираме $a = 1$ и $b = 0$, т.е. частното решение има вида $y_1 = x$. Полагаме $y = x + 1/z$, откъдето намираме $y' = 1 - 1/(z^2 z')$ и заместваме отново в изходното уравнение :

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 2x.$$

Като извършим всички необходими пресмятания, стигаме до уравнението

$$z'x = z - 1, \text{ откъдето } \int \frac{dz}{z-1} = \int \frac{dx}{x} \text{ или } z = Cx + 1$$

Окончателно получаваме

$$y = x + \frac{1}{Cx+1}$$

Нека отбележим, също така, че за уравненията на Бернули и Рикати съществуването на решението на задачата на Коши има локален характер, т.е. дори дясната страна на уравнението да е дефинирана в цялата равнина, решението при конкректни начални данни може да е дефинирано в по-малък интервал.

1.1.5 Точни диференциални диференциални уравнения и уравнения, допускащи интегриращ множител

1. Точни диференциални уравнения .

Определение 1.17 *Уравнението*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{1.74}$$

*където функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са дефинирани и непрекъснати в областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$, се нарича **точно**, ако съществува диференцируема функция $U = U(x,y)$, дефинирана в D и такава, че са изпълнени равенствата:*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ и } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),\ (x,y) \in D. \tag{1.75}$$

Нека кривата γ с параметрично уравнение

$$\gamma : \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},\ t \in \Delta, \tag{1.76}$$

лежаща в D е интегрална крива на (1.74). Тогава

$$\begin{aligned} \frac{dU(x(t),y(t))}{dt} &= U'_x(x(t),y(t))x'(t) + U'_y(x(t),y(t))y'(t) = \\ &= P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) = 0,\ t \in \Delta. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Но това означава, че върху γ функцията U е равна на константа. Тъй като γ е произволно избрана интегрална крива на уравнението, това означава, че върху всяко решение на (1.74) е изпълнено равенството

$$U(x, y) = C = const. \tag{1.78}$$

С други думи, от последната формула при всички допустими стойности на константата се получават решенията на (1.74), записани в неявен вид – т.е.формула (1.78) е общото решение на (1.74). Ако предположим, че функцията $U(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни от втори ред в D, то необходимо условие уравнението (1.74) да е точно в областта D е да е изпълнено тъждеството

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \ (x, y) \in D. \tag{1.79}$$

Наистина, като диференцираме, като диферецираме първото от равенствата в (1.75) относно x, а второто относно y, получаваме

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{Q(x, y)}{\partial x}, \ (x, y) \in D. \tag{1.80}$$

Равенство (1.79) следва от теоремата за равенство на вторите смесени производни на на функция на две и повече променливи. При някои допълнителни предположения за областта D условието (1.79) е и достатъчно за да бъде (1.74) точно диференциално уравнение.

Определение 1.18 *Областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$ се нарича* ***едносвързана****, ако за всяка затворена начупена линия, лежаща изцяло в D и многоъгълникът, който е заграден от тази линия, също лежи изцяло в D. (Чертеж!).*

С други думи, една област в равнината се нарича едносвързана, ако в нея няма „дупки“. Например, лист хартия с произволна форма може да послужи за „реален“ модел на едносвързана област. Но, ако изрежем един или повече отвори вътре в листа (дори само да пробием листа с игла) ще получим област, която не е едносвързана. За едносвързани области е вярна следната теорема.

Теорема 1.1 *Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и частните им производни $P'_y(x, y)$ и $Q'_x(x, y)$ са непрекъснати в едносвързаната област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Тогава необходимото и достатъчно условие да съществува* *диференцируема функция $U = U(x,y)$, дефинирана в областта D и такава, че $U'_x(x,y) = P(x,y)$ и $U'_y(x,y) = Q(x,y)$ е в D да е изпълнено равенството (1.79).*

Намирането на функцята $U(x,y)$ може да стане едната от следните формулата (обосновката на този факт е предмет на темата за криволинейни интеграли от втори род) :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)ds \tag{1.81}$$

или

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)ds,$$

където $M_0(x_0,y_0)$ е произволна фиксирана точка от D, а $M(x,y)$ е коя и да е точка от същата област, а интегрирането се извършва по отсечките, успоредни на координатните оси и свързващи т.$M_0(x_0,y_0)$, т.$N(x,y_0)$ и $M(x,y)$ или т.M_0, т.$L(x_0,y)$ и т.M. Направете чертеж! Ако вече сме намерили функцията U, общото решение на (1.74) се дава с формула (1.78).

За да решим задачата на Коши за уравнението (1.74) е достатъчно с конкретните начални данни $M_0(x_0,y_0) \in D$ да заместим в (1.78), от където намираме точната константа $C_0 = U(x_0,y_0)$. Съществуването и единсвеността на решението на задачата на Коши е гарантирано в случай, че точката $M_0(x_0,y_0) \in D$ не е особена, т.е.

$$\vec{F}(M_0) = P(x_0,y_0)\vec{i} + Q(x_0,y_0)\vec{j} \neq \vec{0}. \tag{1.82}$$

Точните диференциални уравнения нямат особени решения, а само отделни особени точки.

Нека да разгледаме и един друг (най-често прилаган на практика начин) за намиране на функцията $U(x,y)$. От равенството $U'_x = P(x,y)$ (първото равенство в (1.75)) следва, че

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \tag{1.83}$$

като при интегрирането на y гледаме като на константа и затова добавяме засега неизвестната фукция $\varphi(y)$ ($\varphi'_x(y) = 0$). Сега от една страна имаме равенството $U'_y(x,y) = Q(x,y)$, а от друга

$$U'_y(x,y) = \left(\int P(x,y)dx\right)'_y + \varphi'(y). \tag{1.84}$$

Като ги приравним, получаваме

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \left(\int P(x,y)dx\right)'_y. \tag{1.85}$$

Ако работим вярно се получава, че лявата страна на (1.85) зависи само от y (като се диференцира лявята страна на (1.85) относно x, от теоремата за равенство на смесените производни и от (**??**) следва, че тази производна е равно на нула). Така стигаме до уравнението

$$\varphi'(y) = g(y), \quad \text{откъдето намираме} \quad \varphi(y) = \int g(y)dy. \tag{1.86}$$

Тогава общото решение на уравнението (1.74) може да се запише във вида

$$\int P(x,y)dx + \int g(y)dy = C. \tag{1.87}$$

Не трудно да се види, че ако се тръгне от второто равенство на (1.75)се стига до същият резултат само, че неизвестната функция зависи само от x.

Пример 1.1.23 Да се намери общото решение на уравнението

$$(2x + 3y - 5)dx + (3x - 4y + 3)dy = 0$$

и да се намери интегралната крива на това уравнение, минаваща през т.$M_0(2,3)$.

Тук $P = 2x+3y-5$, $Q = 3x-4y+3$ и равенството $P'_y = 3 = Q'_x$, което се изпълнява в цялата равнина, се проверява лесно. Обърнете внимание, че уравнението и от тези, които могат да се приведат към хомогенно уравнение, но ако го решим като такова уравнение, количеството на пресмятанията ще бъде доста по-голямо. Да приложим метода, изложен по-горе. Тогава

$$U = \int (2x+3y-5)dx + \varphi(y) = x^2+3xy-5x+\varphi(y),\ U'_y = 3x+\varphi'(y) = 3x-4y+3,$$

откъдето следва, че

$$\varphi'(y) = -4y + 3, \quad \text{или} \quad \varphi(y) = -2y^2 + 3y.$$

Общото решение на това уравнениение е

$$x^2 + 3xy - 5x - 2y^2 + 3y = C$$

За да намерим константата C заместваме в последното равенство с $x = 2$ и $y = 3$ и получаваме $C = 3$.Съответното частно решение е

$$x^2 + 3xy - 5x - 2y^2 + 3y = 3$$

Ако тръгнем от условието $U'_y = Q = 3x - 4y + 3$, получаваме

$$U = \int 3x - 4y + 3dy + \psi(x) = 3xy - 2y^2 + 3y + \psi(x) \text{ и } 2x + 3y - 5 = U'_x = 3y + \psi'(x),$$

което означава, че

$$\psi'(x) = 2x - 5,\ \psi(x) = x^2 - 5x \text{ и съответно } U = 3xy - 2y^2 + 3y + x^2 - 5x,$$

която е същата функция

Забележка 1.1.2 Може да се покаже, че ако областта D не е едносвързана, въпреки наличието на условие (1.79), може уравнението (1.74) да не точно, т.е. да не съществува функция $U(x, y)$ такава, че да се изпълняват равенствата (1.75) или получената функция да бъде многозначна. Но във всяка едносвързана подобласт D_1 на D условието (1.79) гарантира, че уравнението е точно.

Забележка 1.1.3 Фунцията $U(x, y)$, дефинирана в едносвързаната област D и удовлетворяваща уравнението (1.74) се нарича ***потенциална функция, или само потенциал***, а полето $\vec{F}$, което тя поражда чрез формулите (1.75) се нарича ***потенциално, или консервативно векторно поле.*** Линиите $\gamma_C : U(x, y) = C$ се наричат ***еквипотенциални линии на полето***- т.е. линии, върху които потенциала е един и същ. Да се реши едно точно диференициално уравнение означава по съответното потенциално векторно поле, дефинирано в едносвързаната област D да се намерят еквипотенциалните линии на полето. Потенциалните силови полета играят важна роля в много задачи от физиката и механиката. Примери на потенциални силови полета са полето на точков електричен заряд с големина q , поставен в точка от равнината (или пространтсвото), също така гравитационното силово поле, създадено от материална точка с маса m.

2. Диференциални уравнения, допускащи интегриращ множител. Сега нека се опитаме да решшм една такава задача: отново е дадено уравнението (1.74), но условието (1.79) не изпълнено. Задачата е при какви условия съществува функция $\mu = \mu(x,y) \neq 0$ и такава, че уравнението

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{1.88}$$

да е точно в някаква едносвързана област D в равнината. Ако такава фунция съществува за даденото уравнение тя се нарича **интегриращ множител** за това уравнение. Съгласно теорема 1.1, необходимото и достатъчно условие за това е тъждеството

$$(\mu(x,y)P(x,y))'_y \equiv (\mu(x,y)Q(x,y))'_x, \ (x,y) \in D \tag{1.89}$$

След като извършим диференцирането в (1.89) и преработим, получаваме

$$\mu'_x Q - \mu'_y P = \mu(P'_y - Q'_x), \tag{1.90}$$

което е уравнение, съдържащо частни производни, т.е. задачата за намиране на интегриращ множител за дадено уравнение може да се окаже и по-трудна от решаването на самото уравнение. За това най-често се търси интегриращ множител от някакъв по-специален вид $\mu = \mu(\omega)$, където $\omega = \omega(x,y)$, в частен случай $\omega = x$ или $\omega = y$. Нека потърсим достатъчно условие за съществуването на интегриращ множител от вида $\mu = \mu(\omega(x,y))$.Ако предположим, че такъв наистина съществува, то $\mu'_x = \mu'_\omega \omega'_x$ и $\mu'_y = \mu'_\omega \omega'_y$. След като заместим в (1.89) и преработим, стигаме до уравнението

$$\mu'_\omega = \frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y}\mu. \tag{1.91}$$

Сега е ясно, че ако множителят пред μ в (1.91)зависи само от ω, .т. е. има вида $g = g(\omega)$, то за μ получаваме уравнение с отделящи се променливи

$$\mu'_\omega = g(\omega)\mu, \text{ откъдето следва, че } \mu = e^{\int g(\omega)d\omega}, \ (C = 1). \tag{1.92}$$

В частност, ако търсим множител $\mu = \mu(x)$, т.е. $\omega = x$ и очевидно $\omega'_x = 1$, $\omega'_y = 0$. Такъв съществува, когато

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} \equiv g(x) \text{ и тогава } \mu(x) = e^{\int g(x)dx}. \tag{1.93}$$

Ако търсим множител от вида $\mu = \mu(x)$, аналогично $\omega = y$, $\omega'_x = 0$, $\omega'_y = 1$ и такъв съществува, когато

$$\frac{P'_y - Q'_x}{-P} \equiv g(y) \text{ и следователно } \mu(y) = e^{\int g(y)dy}. \tag{1.94}$$

Често срещани интегриращи множители при решаване на подобни уравнения са, когато ω е една от следните функции : $x \pm y$, xy, $x^2 \pm y^2$ и др.

След като намерим интегриращ множител за едно уравнение, можем да го решим по метода, изложен в точка 1 от тази тема. Но може да се случи следното: 1) да загубим решения на изходното уравнение, които могат да се окажат особени; 2) може да получим и чужди решения. Първвият от тези случаи е възможен, ако намереният интегриращ множител μ е равен на безкрайност върху някаква крива, която е интегрална крива на изходното уравнение, а вторият , ако μ се анулира, отново върху някаква крива, която може и да е решение на новополученото уравнение, но не и на изходното.

Пример 1.1.24 Да се намери общото решение на уравнението

$$(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0,$$

ако е известно, че съществува интегриращ множител от вида $\mu = \mu(x^2 - y)$, т.е. $\omega = x^2 - y$.

Тук $P = \sqrt{x^2 - y} + 2x$, $Q = -1$ Тогава $P'_y = -1/(2\sqrt{x^2 - y})$, а $Q'_x = -1$ За да проверим дали множителят пред μ в (1.91) зависи само от ω, пресмятаме $\omega'_x = 2x$ и $\omega'_y = -1$ и заместваме в същият този израз :

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y} = \frac{-1/(2\sqrt{x^2 - y})}{-2x + (\sqrt{x^2 - y} + 2x)} = -\frac{1}{2(x^2 - y)} = -\frac{1}{2\omega}$$

Уравнението за $\mu(\omega)$ в този конкретен случай има вида :

$$\frac{d\mu}{d\omega} = -\frac{1}{2\omega}\mu, \text{ откъдето намираме } \mu = e^{-1/2\int 1/\omega d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Сега умножаваме двете страни на даденото уравнение с намереният интегриращ множител и получаваме уравнението

$$\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y}}\right)dx - \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y}} = 0,$$

което, разбира се е точно (ако сме работили вярно). Тогава

$$U = \int \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y}}\right) dx + \varphi(y) = x + 2\int \frac{d(x^2 - y)}{2\sqrt{x^2 - y}} + \varphi(y) =$$

$$= x + 2\sqrt{x^2 - y} + \varphi(y).$$

Лесно се вижда, че $\varphi(y) = const$, което значи, че общото решение дададеното уравнение може да се запише така :

$$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C$$

Сега остава да проверим, дали не сме изгубили някое решение на изходното уравнение (или не сме придобили чуждо решение, което не го удовлетворява). Тъй като, в конкретния случай интегриращият множител $\mu(x, y)$ не се анулира никъде, придобити решения няма. От друга страна, кривата с уравнение $y = x^2$ не е решение на полученото точно уравнение, защото върху тази крива полето не е дефинирано ($P(x, y) = \infty$ и $Q(x, y) = \infty$ върху нея), докато, както се вижда тя е интегрална крива (решение) на първоначално зададеното уравнение. При това, както се вижда особено, защото не може да се получи при никаква стойност на константата.

Забележка 1.1.4 Нека обърнем внимание на факта, че всъщност класът на точните уравнения и на тези които допускат интегриращ мнодител е много широк. Например, всяко уравнение с отделени променливи е точно, защото в този случай $P(x, y) = P(x)$ и $Q(x, y) = Q(y)$, откъдето следва, че $P'_y = Q'_x = 0$. Освен това всяко уравнение с отделящи се променливи допуска интегриращ множител (защо?). От тук в частност следва, че и всяко хомогенно уравнение след съответното полагане се свежда до уравнение, допускащо интегриращ множител.

1.1.6 Някои диференциални уравнения, нерешени относно производната. Уравнения на Лагранж и Клеро

В тази лекция са разгледани някои видове уравнениия, нерешени стпрямо производната, т. е. уравнения от вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.95}$$

където функцията $F(x, y, z)$ е непрекъсната заедно с частните си производни от първи ред $F'_y(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ за всяка т.$M(x, y, z)$ от областта $G \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. Диференциални уравнения, в които производната се среща на степен по-висока от първа. Нека да разгледаме някои примери.

Пример 1.1.25 Да се реши уравнението

$$y'^2 - 4x^2 = 0$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(1, 2)$ и $O(0, 0)$.

Уравнението се представя като произведение $(y' - 2x)(y' - +2x) = 0$, т.е. $y = 2x$ или $y = -2x$, откъдето намираме $y = x^2 + C$ $y = -x^2 + C$ Общото решение има вида

$$(y + x^2 - C)(y - x^2 - C) = 0.$$

Интегралните криви са две семейства параболи, с оси съвпадащи с оординатната ос (Чертеж!). Като заместим в уравнението на първото семейство параболи с координатите на т.$M(1, 2)$, получаваме $C = 1$, във второто – $C = 3$. Това означава, че през тази точка минават две интетгрални криви

$$y = x^2 + 1 \text{ и } y = -x^2 + 3,$$

но това не е нарушение на единствеността на решението на задачата на Коши, защото ъгловите коефициенти на допирателните на двете криви в т.$M(1, 2)$ са различни (проверете!). Като заместим с ккординатите на т.$O(0, 0)$ в уравненията и на двете фамилии криви, получаваме $C = 0$. Решенията, които минават през тази точка са четири: $y = x^2$, $y = -x^2$,

$$y = \begin{cases} y = -x^2, \ x < 0, \\ y = x^2, \ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} y = x^2, \ x < 0, \\ y = -x^2, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Вижда се, че тази точка е особена и за всичките четири решениия, минаващи през нея е изпълнено равенството $y'(0) = 0$.

Пример 1.1.26 Да се реши уравнението

$$y'^3 - 8xy = 0$$

с начално условие $y(0) = 0$

Единственото реално решение относно y' е $y' = 2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$, което е уравнение с разделящи се променливи. Следователно

$$y^{-\frac{1}{3}}dy = 2x^{\frac{1}{3}}dx \text{ и } \int y^{-\frac{1}{3}}dy = 2\int x^{\frac{1}{3}}dx + C, \text{ и } \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + C,$$

което може да се запише и така $y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}} + C_1$. Сега от началното условие, получаваме $C = 0$, а съответните частни решениа са $y = \pm x^2$. Да забележим, че функцията $y = 0$ е също решение на това уравнение , при това особено (защо?). По колко решения минават през всяка точка от абцисната ос?

2. Диференциални уравнения, в които не участва независимата променлива или неизвестната функция. При някои от тези уравнения решението се търси в параметричен вид $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, като за параметър е удобно да се избере производната на неизвестната функция.

а) Уравнения от вида

$$y = f(y') \tag{1.96}$$

В това уравнение предполагаме, че функцията f е диференцируема в някакъв интервал. Да положим $y' = p$ (или някаква друга буква). Тогава $y = f(p)$ и остава да изразим и x чрез p. Като диференцираме уравнението $y = f(p)$ относно x, считайки, че $p = p(x)$, получаваме

$$y'(x) = f'(p)p'(x), \quad \text{откъдето} \quad dx = \frac{f'(p)}{p}dp \text{ т.е. } x(p) = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C.$$

Тук се възползвахме от полагането $y' = p$ и факта, че $dx/dp = (dp/dx)^{-1}$. Общото решение на (1.96) в параметричен вид е

$$x(p) = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C, \; y(p) = f(p). \tag{1.97}$$

б) Уравнения от вида

$$x = g(y') \tag{1.98}$$

Тук отново търсим решение в параметричен вид, използвайки същото полагане , като в предишното уравнение. Тогага $x = g(p)$. Да дихференцираме последнотот равенство относно p. Очевидно $dx/dp = g'(p)$. Сега от равенството $dy = y'(x)dx$ следва, че $dy = pg'(p)dp$ и $y(p) = \int pg'(p)dp + C$. Общото решение на (1.98) се дава с формулата

$$x = g(p), \; y = \int pg'(p)dp + C. \tag{1.99}$$

Пример 1.1.27 Да се реши уравнението

$$y = \frac{1}{2}y'^2 + 2y'$$

с начално условие $y(1) = 0$.

Да положим $y' = t$. Тогава $y = \frac{1}{2}t^2 + 2t$. Сега да диференцираме последното равенство относно x. Получаваме $y' = tt'(x) + 2t'(x)$. След като заместим y' с t и $t'(x)$ с $1/x'(t)$, след леки преобразуванииия, стигаме до уравнението

$$dx = 1 + \frac{2}{t} \text{ т.е. } x(t) = t + \ln|t| + C.$$

Общото решение на даденото уравнение в параметричен вид е

$$x(t) = t + \ln|t| + C, \; y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t.$$

За да намерим неизвестната константа, полагаме $y = 0$, откъдето намираме $t_1 = 0$, $t_2 = -4$ и заместваме във първото уравнение $x = 1$ и $t = -4$ и следователно $C = 5 - \ln 4$, тъй като при $t_1 = 0$ логаритъмът не е дефиниран.

Пример 1.1.28 Да се намери общото решение на уравнението

$$x = y' \ln y'.$$

Уравнението е от вида (1.98). Да положим $y' = t$. Тогава $x = t \ln t$. Сега да диференцираме последното равенство относно t. Получаваме

$$dx = (\ln t + 1)dt.$$

Тогава

$$dy = y'dx = t(\ln t + 1)dt \; y = \int (t \ln t + t)dt + C = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t + C.$$

Общото решение на даденото уравнение в параметричен вид е

$$x(t) = t \ln t, \; y(t) = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t + C.$$

3. Уравнения на Лагранж и Клеро.
а) Уравнение на Лагранж

Определение 1.19 *Уранение от вида*

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'), \tag{1.100}$$

където функциите φ и ψ са непрекъснато диференцируеми в някакъв интервал $(a,\, b)$ и $\varphi(y') \neq y'$, се нарича ***уравнение на Лагранж****.*

След известна „подготовка“ уравнението на Лагранж може да се сведе към линейно дифереациално уравнение. За тази цел, да положим $y' = p(x)$ и да потърсим решение на уравнението в параметрична форма (т.е.да изразим x и y като функции на параметъра). Да запишем даденото уравнение във вида

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \tag{1.101}$$

и да диференцираве последното равенство относно x. Получаваме

$$y' = \varphi'(p)p'x + \varphi(p)x' + \psi'(p)p'. \tag{1.102}$$

Сега да заместим y' с p и да изнесем вдясно p' зад скоби и да прехвърлим вляво $\varphi(p)$ (разбира се $x' = 1$, защо?). Тогава

$$p - \varphi(p) = (\varphi'(p)x + \psi'(p))p'. \tag{1.103}$$

Сега да забележим, че ако разменим ролите на p и x и се възползваме от факта, че $x'(p) = 1/p'(x)$, при $p - \varphi(p) \neq 0$, получаваме уравнението

$$x'(p) = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}, \tag{1.104}$$

което е линейно уравнение с неизвестна функция x и независима променлива p, чието общо решение може да се запише във вида (вж. лекцията за лин. уравнение).

$$x(p) = CA(p) + B(p),\; C = const.$$

Тогава, след като заместим вече полученият израз за x в уравнението (1.101), получаваме общото решение на същото това уравнение в параметрична форма:

$$x(p) = x(p) = CA(p) + B(p),\; y(p) = CA_1(p) + B_1(p). \tag{1.105}$$

Остава да разгледаме случая, когато $p-\varphi(p)=0$. Ако това уравнение има реални корени $p=p_i,\ i=1,2,\ldots,k$, като заместим в (1.101), получаваме

$$y=p_i x+\psi(p_i),\ i=1,2,\ldots,k. \tag{1.106}$$

Всяка от тези линейни функции е решение на уравнението (1.101), които могат да се окажат и особени решения.

а) Уравнение на Клеро

Определение 1.20 *Уранение от вида*

$$y=y'x+\psi(y'), \tag{1.107}$$

където функцията ψ е непрекъснато диференцируема в някакъв интервал $(a,\,b)$ се нарича ***уравнение на Клеро****.*

Уравнението на Клеро може да се реши по същият начин, както уравнението на Лагранж. Отново полагаме $y'=p(x)$, заместваме в (1.107), диференцираме относно x и след преработка получаваме уравнението

$$(x+\psi'(p))p'=0, \tag{1.108}$$

което се разпада на уравненията $p'=0$ или $x+\psi'(p)=0$. От първото от тях следва, че $p=C=const$. Като заместим в (**??**), получаваме

$$y=Cx+\psi(C), \tag{1.109}$$

което е уравнение на фамилия прави. Тази формула дава общото уравнение на уравнението на Клеро. От уравнението $x=-\psi'(p)$, заедно с (1.107) получаваме параметричното уравнение на кривата

$$\gamma:\begin{cases} x=-\psi'(p)\\ \\ y=-\psi'(p)p+\psi(p),\end{cases} \tag{1.110}$$

която обикновено се оказва особено решение на уравнението на Клеро. Може да се докаже, че ако $\psi''(p)$ има постоянен знак в някакъв интервал $(a,\,b)$, всяка права от фамилията (1.109) се допира до кривата кривата γ в т. $M(-\psi'(C),-\psi'(C)+\psi(C))$(Защо?).

До уравнение на Клеро се стига винаги, когато се търси крива със свойство на допирателната, не зависещо от точката на допиране. При това от геометрична гледна точка, интересно е особеното решение.

Пример 1.1.29 Да се намери общото решение на уравнението

$$y = 2xy' - y'^2.$$

Уравнението е уравнение на Лагранж. Като следваме метода, изложен по-горе и след като положим $y' = p$, получаваме

$$y = 2xp - p^2,\ y' = 2xp' + 2p - 2pp' \ \text{ или } -p = (2x - 2p)p',\ x' = -\frac{2}{p}x + 2.$$

Като решим съответното линейно уравнение, получаваме общото решение в параметрична форма

$$x(p) = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p,\ y(p) = \frac{2C}{p} + \frac{1}{3}p^2,\ p \neq 0.$$

Случаят $p = 0$ води до решението $y = 0$, което е частно решение.

Пример 1.1.30 Да се намери общото решение на уравнението

$$y = xy' + y'^2.$$

Това е уравнение на Клеро. След като положим $y' = p$ и диференциране относно x получаваме

$$y = xp + p^2,\ y' = xp' + p + 2pp',\ 0 = (x + 2p)p,$$

откъдето следва, че

$$x = -2p \text{ или } p = C = const.$$

Като заместим в изходното уравнение с $p = C$, получаваме фамилията прави $g_C : y = Cx + C^2$, а като заместим пак там с $x = -2p$ и изключим параметъра p, получаваме уравнението на парболата $\gamma : y = -x^2/4$. Не трудно да се съобрази, че всяка права от фамилията $\{g_C\}$ се допира до γ в т. $M(-2C, -C^2)$. Това показва, че γ е особено решение за това уравнение. Направете чертеж и всички необходими пресмятания!

1.1.7 Теореми за съществуване и единственост на решение на задачата на Коши за уравнения от първи ред

1.Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за уравнения, решени спрямо производната. Да разгледаме задачата на Коши

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0. \tag{1.111}$$

Едно достатъчно условие за съществуване на единствено решение на тази задача се дава от следната теорема.

Теорема 1.2 *Нека функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и притежава непрекъсната частна производна относно y в тази област. Тогава за всяка точка $M_0(x_0,y_0) \in D$ съществува околност на точката $O_h(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq h,\ h > 0\}$, в която съществува единствено решение $y = y(x)$ на задачата (1.111).*

Идея за доказателство. Идеята се състои в това, да разгледаме задача, еквивалента на задачата (1.111), а именно задачата за намиране на решение на интегралното уравнение

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt \tag{1.112}$$

с неизвестна функция y и да приложим към тази задча т.нар. метод на *метод на последователните приближения* , който се състои в построяването на редица от функции $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ чрез рекурентната формула

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{1.113}$$

с начално приближение $y_0(x) \equiv y_0$. Може да се докаже, че при наложените условия за дясната страна на уравнението, редицата от функции простроена по описания по-горе начин клони към функция $\tilde{y}(x)$, дефинирана в достатъчно малка околност на x_0 и която е решение на задачата на Коши, при това единствено.

Оказва се обаче, че ако поискаме само непрекъснатост на дясната страна, решението съществува , но може да не е едниствено (теорема на Пеано).

За ЛДУ от първи ред е в сила една по-силна теорема от теорема 1.2.

Теорема 1.3 *Нека функциите $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати в интервала $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Тогава за всяка точка $M_0(x_0, y_0)$, такава че $x_0 \in \Delta$, а $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ е произволно фискирано число, съществува единствено решение на уравнението*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1.114}$$

удовлетворяващо началното условие $y(x_0) = y_0$ и дефинирано в целия интервал Δ.

Забележка 1.1.5 За нелинейни диференциални уравнения подобен факт не е в сила дори, когато дясната част на уравнението (функцията $f(x,y)$) е дефинирана в цялата равнина. Това се вижда от следния пример. Да разгледаме задачата на Коши за уравнението

$$y' = y^2 x,\ y(0) = 1,\ \text{чието общо решение е}\ \ y = \frac{1}{C - x^2}\ \ \text{(проверете !).}$$

Като заместим сначалните данни, получаваме $C = 1$ и съответното частно решение е

$$y = \frac{1}{1 - x^2},$$

което е дефинирано само в итнервала $(-1, 1)$ въпреки , че дясната страна на това уравнение $f(x, y) = xy^2$ е дефинирана в цялата равнина.

2.Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за уравнения, нерешени спрямо производната. Нека отново да се спрем на пример 1.1.25, разгледан в предишната лекция – уравнението $y'^2 - 4x^2 = 0$, от което следва, че $y' = 2x$ или $y' = -2x$. Ако търсим решение на задачата на Коши например в т. $M(1,1)$, получаваме двете интегрални криви $\gamma_1 : y = x^2$ и $\gamma_2 : y = -x^2 + 2$. Това „явление“ не бива да се схваща , обаче като нарушение на единствеността на решението на задачана на Коши в дадената точка, тъй като в този случай става дума за две отделни уравнения, които следват от изходното уравнение. Освен това и ъгловите коефициенти на двете криви в т.$M(1,1)$ са различни – $k_1 = 1$, а $k_2 = -1$ (нека да напомним, че особена точка е такава точка, през която минават две или повече интегрални криви на уравнението, но всичките те имат една и съща допирателна, или точка, в която полето $\vec{F} = \vec{0}$!). От тези съображения следва, че теоремата за съществуване и едниственост на решението на задачата на Коши за уравннение от вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.115}$$

би трябвало да има по-различна формулировка от тази на теорема 1.2.

По-нататък предполагаме, че фуннкцията $F(x, y, z)$ е дефинирана и непрекъсната, заедно с частните си производни относно y и z в множеството $G \subseteq \mathbb{R}^3$, което има вида

$$G = \{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in G',\ z \in (c, d)\},$$

където G' е област в равнината.

Определение 1.21 *Точката $(x_0, y_0) \in G'$ се нарича обикновена точка за диференциалното уравнение (1.115), ако:*
1) уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ има краен брой корени $z_i \in (c, d)$, $i = 1, 2, \dots, k$;
2) във всяка една от тези точки имаме $F'_z(x_0, y_0, z_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ако поне в едно от решенията z_{i_0} е изпълнено равенството $F'_z(x_0, y_0, z_{i_0}) = 0$ за някое $1 \leq i_0 \leq k$, точката се нарича особена за (1.115).

За обикновените точки на уравнението (1.115) е в сила следната теорема.

Теорема 1.4 *Нека точката $(x_0, y_0) \in G'$ е обикновена за уравнението (1.115). Тогава за всяко решение z_i $i = 1, 2, \dots, k$ на уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ задачата на Коши за (1.115) с начално условие $y(x_0) = y_0$ притежава единствено решение $y = f_i(x)$, което удовлетворява условието $f'_i(x_0) = z_i, i = 1, 2, \dots, k$ и което е дефинирано в достатъчно малка околност на точката (x_0, y_0).*

1.2 Обикновени диференциални уравнения от по-висок ред

1.2.1 Диференциални уравнения от по-висок ред – основни понятия. Някои уравнения, допускащи понижение на реда

1. Диференциални уравнения от по-висок ред. Задача на Коши. Общо решение.

Определение 1.22 *Уранение от вида*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.116}$$

където функцията F е непрекъсната като функция на $n+2$ променливи в някаква област $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, се нарича ***диференциално уравнение от n-ти ред.*** *Функцията $y = \varphi(x)$, чийто производни са непрекъснати до ред n включително в някакъв интервал $(a,\ b)$, се нарича* ***решение*** *на уравнението (1.116), ако равенството $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ е тъждество при $x \in (a,\ b)$.*

Графиката на всяко решение на уравнението (1.116) наричаме интегрална крива на това уравнение, която може да се търси също в неявен вид $\Phi(x, y) = 0$ или в параметричен вид $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

Ако от равенство (1.116) може да се изрази старшата производна $y^{(n)}$, то уравнението придобива вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.117}$$

и се нарича ***уравнение от n-ти ред, решено спрямо старшата производна***.

Частен случай тези уравнения са уравненията от вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x), \tag{1.118}$$

където функциите $a_i(x),\ i = 1, 2, \dots, n$ $g(x)$ са непрекъснати в някакъв интервал $(a,\ b)$ и $a_0(x)$ не е тъждествено равна на нула при $x \in (a,\ b)$.

Уравнението (1.118) се нарича ***линейно диференциално уравнения от n-ти ред***. Ако $g(x) \equiv 0$ в $(a,\ b)$ уравнението се нарича ***линейно хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред, (накратко ЛХДУ от n-ти ред),*** а в противен случай ***линейно нехомогенно диференциално уравнение от n-ти ред, (накратко ЛНХДУ от n-ти ред)***.

Определение 1.23 *Задачата за намиране на решение $y = y(x)$ на уравнението (1.116), удовлетворяващо началните условия*

$$(1.119) \qquad y = y_0,\ y' = y_0', \dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \textit{при} \quad x = x_0,$$

където $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ са зададени числа от дефиниционната област на (1.116) (начални данни)се нарича ***задача на Коши или начална задача*** *за това уравнение.*

Условията, които гарантират съществуване и единственост на решението на задачата на Коши са формулирани в един от следващите параграфи.

Поради това, че уравненията от втори ред са много важни за практиката, нека да разгледаме по-подробно този случай. За уравнение от втори ред, решено спрямо производната

$$(1.120) \qquad y'' = f(x, y, y')$$

задачата на Коши се състои в намиране на решение, удовлетворяващо началните условия $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, което геометрично означава, че се търси интегрална крива , минаваща през дадена точка $M_0(x_0, y_0)$ и освен това в тази точка е зададен и наклона на допирателната $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0) = y_0'$. (Чертеж!).

За да дадем механично тълкуване на задачана на Коши за уравнение от втори ред нека да разгледаме диференциалното уравнение, описващо движението на на материална точка с маса равна на единица, под действие на сила с направление по оста Ox. Уравнението има вида

$$(1.121) \qquad \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}).$$

В това уравнение независимата променлива t има смисъл на време, x е положението на материаната точка в момента t, а $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ са съответно скоростта и ускорението на същатата точка в този момент. Функцията $f(t, x, \dot{x})$ има смисъл на резултантната сила, действаща върху точката в момента t. Читателят вече навярно се досеща, че уравнение (1.121) не е нищо друго освен вторият принцип на Нютон, приложен за материалната точка. Решението на това уравнение е закона за движение на материалната точка, под действие на силата f, която считаме известна. Задачата на Коши в този случай е да се намери този закон за движение, който удовлетворява началните условия $x(t_0) = x_0-$ дадено начално положение на точката, а $x(\dot{t_0}) = \dot{x_0} = v_0-$ дадена начална скорост на точката. Т. е. за да определим еднозначно движението на една материална точка, движеща се под действието на някаква известна сила, трябва да знаем още от „къде е тръгнала точката „ и с каква начална скорост е „тръгнала „ да се движи.

По подобен начин, както при уравнение от първи ред (вж. уводната лекция) може да се въведе понятието ***общо решение*** на уравнението (1.116) само, че тук трябва де се вземе предвид, че общото решение зависи от n (колкото е реда на уравнението) произволни константи $C_1, C_2, \dots, C_n$ и има вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ и затова решението на дадачата на Коши води до решаването на ситема уравнения за неизвестните константи. Например, ако за уравнението(1.120) сме намерили общото решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, за неизвестните константи получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2) \end{array} \right. , \tag{1.122}$$

от която можем да определим еднозначно C_1 и C_2. Да напомним, също така, че решение на (1.116) или (1.117), във всяка точка на което задачата на Коши има единствено решение се нарича ***частно***. Ако функцията $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ е общо решение на (1.116) или (1.117), то всяко решение, получено от него при произволни допустими значения на константите, включително $\pm\infty$ е също частно решение. Решенията, във всяка точка на които се нарушава единствеността на решението на задачата на Коши се наричат ***особени***.

2. Диференциални уравнения от по-висок ред, които допускат понижение на реда. В много случаи уравненията от вида (1.116) или (1.117) допускат понижение на реда с няколко единици и свеждане до познати диференциални уравнения от първи ред. Тук са разгледани само някои от тях.

а) Уравнения от вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1.123}$$

Тук предполагме, че функцията е непрекъсната в даден итнервал $(a,\ b)$. За такива уравнения задачата на Коши има единствено решение (вж. следващата лекция) при произволни начални данни $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ и $x_0 \in (a,\ b)$. Общото решение на това уравнение може да се намери чрез последователно интегриране. От (1.123) следва, че

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,\ y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}(x)dx = \int\int f(x)dxdx + C_1x + C_2, \dots,$$

$$y(x) = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n \text{ пъти}} f(x)dxdx\ldots dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Като съобразим, че факторелите в знаменателите могат да бъдат „погълнати" от произволните константи, последното равенство може да бъде записано във вида

(1.124)

$$y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n \text{ пъти}} f(x)dxdx\ldots dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

което е и общото решение на даденото уравнение.

Пример 1.2.1 Да се намери общото решение на уравнението

$$y''' = xe^{2x}$$

и да се реши задачата на Коши при начални данни $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.

Последователно намираме:

$$y'' = \int y'''(x)dx = \int xe^{2x}dx = \tfrac{1}{2}\int xe^{2x}d2x = \tfrac{1}{2}\int xde^{2x} =$$

$$= \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}\int e^{2x}d2x = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + C_1,$$

$$y' = \int y''(x)dx = \tfrac{1}{2}\int xe^{2x}dx - \tfrac{1}{4}\int e^{2x}dx + \int C_1dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}) - \tfrac{1}{8}e^{2x} + C_1x + C_2 = \tfrac{1}{4}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2,$$

$$y = \int y'(x)dx = \tfrac{1}{4}\int xe^{2x}dx - \tfrac{1}{4}\int e^{2x}dx + C_1\int xdx + C_2\int 1dx + C_3,$$

$$y = \tfrac{1}{8}xe^{2x} - \tfrac{3}{16}e^{2x} + C_1\tfrac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3.$$

Последният ред в горната формула е общото решение на уравнението. Сега от началните данни , намираме $y(0) = C_3 = 1$, $y'(0) = C_2 = 0$ $y''(0) = C_1 = -2$. Следователно търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{8}xe^{2x} - \frac{3}{16}e^{2x} - x^2 + 1.$$

б) Уравнения от вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \ 1 \leq k < n. \tag{1.125}$$

Уравнения от посочения вид допускат понижение на реда с k единици като направим полагането $y^{(k)}(x) = z(x)$, където $z(x)$ е новата неизвестна функция. Очевидно

$$z'(x) = y^{(k+1)}(x), z''(x) = y^{(k+2)}(x), \ldots, z^{(n-k)}(x) = y^{(n)(x)}$$

и като заместим в (1.125) получаваме уравнението

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{1.126}$$

Ако последното уравнение може да бъде интегрирано и можем да намерим функцията $z = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ в явен вид, като се върнем към старата неизвестна функция, получаваме уравнението

$$y^{(k)} = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}), \tag{1.127}$$

което е уравнение от вида, разгледан в подточка а). Като частен случай на уравнение от вида (1.125), винаги може да бъде понижен реда на линейно уравнение от вида

$$y^{(n)} = a(x)y^{(n-1)} + b(x),$$

като положим $y^{(n-1)}(x) = z(x)$, получаваме линейно уравнение от първи ред:

$$z' = a(x)z + b(x).$$

Пример 1.2.2 Да се намери общото решение на уравнението

$$xy''' = y'' + x^2$$

Да положим $y''(x) = z(x)$.Тогава $y''' = z'$ и уравнението придобива вида

$$z' = \frac{1}{x}z + x,$$

което е линейно уравнение от първи ред. По фомулата за общото решение на линейно уравнение (вж. ...), получаваме

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx}[C + \int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx] = e^{\ln|x|}[C + \int xe^{-\ln|x|}dx],$$

$$z = |x|[C + \int \frac{x}{|x|}dx] = C_1x + x^2, \ C_1 = \pm C.$$

Получихме, че $y'' = C_1x + x^2$. Това е уравнение от вида разггледан в предишнатат подточка. Тогава

$$y' = \int x^2 dx + \int C_1 x dx + C_2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2,$$

и следователно общото решение е:

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{C_1}{6}x^2 + C_2x + C_3.$$

в) Уравнения не съдържащи независимата променлива. Всяко едно уравнение от този вид може да се запише така:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.128}$$

Тези уравненията допускат понижение на реда с единица, чрез полагането

$$y'(x) = z(y), \tag{1.129}$$

където z е новата неизвестна функция, а y считаме за независима променлива за независима променлива в новополученото уравнение. Чрез диференциране относно x, (разбира се тук $z = z(y(x))$ се разглежда като сложна функция та x), получаваме

$$y'' = (y')' = z'(y)y'(x) = z'z,$$

$$y''' = (y'')' = (z'(y)z)' = z''(y)y'(x)z + z'(y)z'(y)y'(x) = z''z^2 + z'^2 z$$

и т.н. Ясно е, че по този начин, $y^{(k)}(x)$ се изразява като някаква функция на $z^{(k-1)}(y),\ k = 1, 2, \dots, n$, което води до понижаване на реда на изходното уравнение с единица, т.е. получаваме уравнение от вида

$$\Phi(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0. \tag{1.130}$$

Пример 1.2.3 Да се намери общото решение на уравнението

$$1 + y'^2 = 2yy''.$$

Полагаме $y'(x) = z(y)$.Тогава $y'' = z'z$ от където следва, че

$$1 + z^2 = 2yz'z.$$

Получаваме уравнение с отделящи се променливи. След разделяне на променливите се получава

$\dfrac{2zdz}{1+z^2} = \dfrac{dy}{y}$, откъдето, след интегриране получаваме

$z = |x|[C + \int \frac{x}{|x|}dx] = C_1x + x^2,\ C_1 = \pm C.$

Получихме, че $y'' = C_1x + x^2$. Това е уравнение от вида разггледан в предишнатат подточка. Тогава

$$y' = \int x^2dx + \int C_1xdx + C_2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2,$$

и следователно общото решение е:

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{C_1}{6}x^2 + C_2x + C_3.$$

г) Уравнения, които са хомогенни относно неизвестната функция и нейните производни. Това са уравнения от вида (1.116) в които функцията F е хомогенна от степен $m \neq 0$ относно $y, y', \dots, y^{(n)}$. Това означава, че му лявата страна допуска представянето

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^m F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right). \tag{1.131}$$

С други думи, уравнението може да се запише по следният начин

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0. \tag{1.132}$$

При тези уравнения редът също може да бъде намален с единица, чрез полагането

$$y'(x) = y(x)z(x), \tag{1.133}$$

където $z(x)$ е новата неизвестна функция. Нека изразим y'' и y''' чрез $z(x)$ и нейните производни. Като диференцираме относно x последното равенство, получаваме

$$\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' &= y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''). \end{aligned} \tag{1.134}$$

Ясно е, че ако продължим по този начин, за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ можем да изразим k– тата проиводна на y чрез $k-1$–вата производна на z. След като заместим получените изрази за производните на y в изходното уравнение, получаваме уравнение от вида

$$G(x, z, z', \ldots, z^{(k-1)}) = 0, \tag{1.135}$$

което е уравнение от ред $n - 1$. Да предположим, че можем да намерим общото му решение $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$. Тогава, като заместим z с y'/y във последната формула

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

и интегрираме полученото уравнение с отделящи се променливи , получаваме

$$y = C_n e^{\displaystyle\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) dx}. \tag{1.136}$$

Формула (1.136) дава общото решение на разглежданото уравнение.

Пример 1.2.4 Да се намери общото решение на уравнението

$$x^2 y y'' = (y - xy')^2.$$

Уравнението е хомогенно относно y, y' и y'', защото функцията $F(x, y, y', y'') = x^2 y y'' - (y - xy')^2$ е хомогенна от степен две, относно y, y' и y''. След като разкрием скобите вдясно и разделим двете страни на $y^2 \neq 0$, получаваме

$$x^2 \frac{y''}{y} = 1 - 2x \frac{y'}{y} + x^2 \frac{y'^2}{y^2}$$

Полагаме $y'/y = z$. Съгласно формула (1.134), $y''/y = z^2 + z'$. Като заместим и преработим полученият израз, стигаме до уравнението

$$z' = -\frac{2}{x} z + \frac{1}{x^2},$$

което е линейно с неизвестна функция z. От фомулата за общото решение на линейно уравнение (вж. ...) следва, че

$$z = e^{-\int 2/x dx}[C_1 + \int \frac{1}{x^2} e^{\int 2/x dx} dx] = e^{-2\ln|x|}[C_1 + \int \frac{1}{x^2} e^{2\ln|x|} dx],$$

$$z = \frac{1}{x^2}[C_1 + \int 1 dx] = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Тогава

$$\frac{y'}{y} = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}, \text{ т.е. } \frac{dy}{y} = \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx.$$

След като интегрираме последното уравнение, получаваме

$$\ln|y| = -\frac{C_1}{x} + \ln|x| + C \text{ или } |y| = e^C e^{-C_1/x}|x|.$$

Общото решение можем да запишем във вида

$$y = C_2 x e^{-C_1/x}, \text{ където } C_2 = \pm e^C.$$

Остава да забележим, че $y = 0$ е също решение на даденото диференциално уравнение, при това частно (защо?).

Съществуват и други видове диференциални уравнения, на които може да бъде понижен реда и които могат да бъдат намерени в (цитат).

Литература