

Контролно упражнение 2
Специалност *Математика*, Втори курс
Вариант 1
18 декември, 2013 г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра λ , за които полиномите $f, g \in \mathbb{C}[x]$ имат общ корен

$$f(x) = x^3 - \lambda x + 2 \quad g(x) = x^2 + \lambda x + 2$$

Решение.

- Тъй като g е от по ниска степен, ще използваме формулата за резултантата:

$$R(f, g) = (-1)^{ns} b_0^n \prod_{j=1}^s f(\beta_j)$$

- Означаваме с β_1 и β_2 корените на g . Имаме $\beta_i^2 = -\lambda\beta_i - 2$.

$$\begin{aligned} f(\beta_i) &= \beta_i^3 - \lambda\beta_i + 2 = \beta(-\lambda\beta_i - 2) - \lambda\beta_i + 2 \\ &= \beta_i(-\lambda\beta_i - 2) - \lambda\beta_i + 2 = -\lambda\beta_i^2 - (\lambda + 2)\beta_i + 2 \\ &= -\lambda(-\lambda\beta_i - 2) - (\lambda + 2)\beta_i = (\lambda^2 - \lambda + 2)\beta_i + 2(\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1)[(\lambda - 2)\beta_i + 2]. \end{aligned}$$

- Целта ни е да решим уравнението $R(f, g) = 0$ за λ . Опростяваме:

$$\begin{aligned} R(f, g) &= f(\beta_1)f(\beta_2) \\ &= (\lambda + 1)^2[(\lambda - 2)\beta_1 + 2][(\lambda - 2)\beta_2 + 2] \\ &= (\lambda + 1)^2[(\lambda - 2)^2\beta_1\beta_2 + 2(\lambda - 2)(\beta_1 + \beta_2) + 4]. \end{aligned}$$

От формулите на Виет, $\beta_1\beta_2 = 2$ и $\beta_1 + \beta_2 = -\lambda$. Следователно,

$$\begin{aligned} R(f, g) &= (\lambda + 1)^2[2(\lambda - 2)^2 - 2\lambda(\lambda - 2) + 4] \\ &= -4(\lambda + 1)^2(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Отговор: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$.

Задача 2. Да се намери дискриминантата на полинома

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

Решение.

- Прилагаме формулата свързваща резултантата с дискриминантата:

$$D(f) = \frac{1}{a_0}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, f') = -R(f, f').$$

- Производната на $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ е $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Корените ѝ са $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = -2$.

•

$$R(f, f') = b_0^3(-1)^6 f(\beta_1)f(\beta_2) = 27f(0)f(-2) = 135.$$

Отговор: $D(f) = -135$.

Задача 3. Да се докаже, че всяка група G от ред $|G| = 21$ е циклична.

Решение. Както вече коментирахме, не всяка група от ред $|G| = 21 = 3 \cdot 7$ е абелева. Ще покажем това и, допълнително, ще се убедим, че от ред 21 има 6 различни (неизоморфни) групи, само една от които е циклична. Според Третата Теорема на Силов, за броя на Силовите 7-групи имаме:

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{и} \quad n_7 | 3.$$

Следователно, $n_7 = 1$ и единствената Силова 7-подгрупа е нормална $P_7 \triangleleft G$.

За броя на Силовите 3-подгрупи, аналогично имаме:

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{и} \quad n_3 | 7.$$

Това, обаче, разрешава две възможности $n_3 = 1$ или $n_3 = 7$.

- Ако $n_3 = 1$ тогава нека означим с P_3 единствената (и нормална) Силова 3-подгрупа на G . Поради това, че редът на всяка една от P_3 и P_7 е просто число, те са циклични и двете. Нека изберем пораждащи, $a \in P_3$ и $b \in P_7$. Тогава ab поражда G . Детайлите на този случай са аналогични на домашната задача.
- Ако $n_3 = 7$, т.е., имаме 7 спрегнати една с друга Силови 3-подгрупи, $P_3 = P_3^{(1)}, P_3^{(2)}, \dots, P_3^{(7)}$. Така, ако отново означим a и b пораждащите на $\langle a \rangle = P_3$ и $\langle b \rangle = P_7$, то $b^{-1}P_3b$ е някоя от групите $P_3^{(i)}$. В зависимост от това коя в коя група е изпраща под действието спрягане, имаме различни (неизоморфни) възможности за G .

Това, че възможностите са 6 се извлича най-лесно от факта, че $P_7 \triangleleft G$ е нормална подгрупа. Следователно,

$$a^{-1}ba = b^i, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Ако $i = 1$ то групата е абелева (и, следователно, циклична според Случай I).

Да обобщим, има 6 неизоморфни групи от ред 21, всяка от които се поражда от 2 елемента, задоволяващи уравнения:

$$G_i = \langle a, b | a^3 = 1, \quad b^7 = 1, \quad a^{-1}ba = b^i \rangle, \quad i = 1, \dots, 6.$$

От тях, само G_1 е циклична.

Задача 4. Разгледайте действието на групата от матрици:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

върху двумерното линейно пространство $\mathbb{R}^2$ зададено с умножение от ляво.

- (а) Разгледайте един вектор $v \in \mathbb{R}^2$ с координати $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и един елемент $g_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ на групата G . Изчислете $g_\alpha v$.

- (б) Намерете всички орбити на действието.

Решение.

- (а)

$$g_\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

- (б) За произволен вектор $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, орбитата му под действието на G е:

$$Orb_{(x,y)} = \left\{ \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ако $(x, y) \neq (0, 0)$ орбитата $Orb_{(x,y)}$ представлява права в координатната равнина минаваща през началото и през точката (x, y) . Ако (x, y) то орбитата $Orb_{(0,0)}$ съдържа само началото $(0, 0)$.

Контролно упражнение 2
Специалност *Математика*, Втори курс
Вариант 2
18 декември, 2013 г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра λ , за които полиномите $f, g \in \mathbb{C}[x]$ имат общ корен

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 9 \quad g(x) = x^3 + \lambda x - 3$$

Задача 2. Да се намери дискриминантата на полинома

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 2$$

Задача 3. Да се докаже, че всяка група G от ред $|G| = 132$ има нормална подгрупа.

Задача 4. Разгледайте действието на групата от матрици:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

върху тримерното линейно пространство $\mathbb{R}^3$ зададено с умножение от ляво.

(а) Разгледайте един вектор $v \in \mathbb{R}^3$ с цилиндрични координати

$$v = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \text{ и един елемент } g_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ на}$$

групата G . Изчислете $g_\alpha v$.

(б) Намерете всички орбити на действието.