

Контролно упражнение 1
Специалност *Математика*, Втори курс
Вариант 1
7 ноември, 2013 г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. Решете системата от сравнения:

$$\left| \begin{array}{l} 2x \equiv -1 \pmod{3} \\ 3x \equiv 1 \pmod{7} \end{array} \right.$$

Решение.

- Решаваме първото сравнение от системата по метода на Ойлер.

$$\begin{aligned} 2x &= 3y - 1 \\ x &= \frac{3y - 1}{2} = y + \frac{y - 1}{2} \\ y &= 2z + 1 \\ x &= 3z + 1. \end{aligned}$$

- Замсетваме решението във второто сравнение и решаваме по същия начин:

$$\begin{aligned} 3(3z + 1) &= 7k + 1 \\ k &= z + \frac{2z + 2}{7} \\ 2z + 2 &= 7u \\ z &= 3u - 1 + \frac{u}{2} \\ u &= 2m \\ z &= 7m - 1 \\ x &= 3(7m - 1) + 1 = 21m - 2. \end{aligned}$$

Отговор:

$$x \equiv -2 \pmod{21}.$$

Задача 2. Да се намери остатъкът при деление на полинома $f(x) = x^n - 3x^{n-1} - 3$ с полинома $g(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение.

- Търсеният остатък е полином от степен не по-висока от $\deg g - 1 = 2$, т. е.,

$$r(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Разлагаме делителя на множители:

$$g(x) = x^2(x - 3).$$

Разделяме с остатък f на g :

$$x^n - 3x^{n-1} - 3 = q(x)x^2(x - 3) + ax^2 + bx + c. \quad (1)$$

Диференцираме тъждеството (??) и получаваме:

$$nx^{n-1} - 3(n-1)x^{n-2} = h(x)x + 2ax + b \quad (2)$$

- Заместваме $x = 0$ в (??) и получаваме $c = -3$.
- Заместваме $x = 0$ в (??) и получаваме $b = 0$.
- Заместваме $x = 3$ в (??) и получаваме $9a + 3b + c = -3$.
- Решаваме получената система за неизвестните коефициенти:

$$\begin{cases} c = -3 \\ b = 0 \\ 9a + 3b + c = -3 \end{cases}$$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = -3.$$

Отговор:

$$r(x) = -3.$$

Задача 3. Да се изрази следната симетрична функция чрез елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и σ_4 :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_3 + x_2^2x_4 + x_2^2x_1 \\ & + x_3^2x_4 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2 + x_4^2x_3 \end{aligned}$$

Решение.

- Прилагаме алгоритъма произлизащ от класификационната теорема за симетричните полиноми. Според лексикографската наредба, имаме следната пълна низходяща поредица от едночлени, започваща със старшия член на горния полином:

$$x_1^2x_2 \succ x_1x_2x_3$$

- Следователно, търсим представяне от вида

$$\sum x_1^2 x_2 = \sigma_1 \sigma_2 + A \sigma_3.$$

- Заместваме $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$ и получаваме

$$\begin{aligned} F(1, 1, 1, 1) &= 12 \\ \sigma_1(1, 1, 1, 1) &= 4 \\ \sigma_2(1, 1, 1, 1) &= \binom{4}{2} = 6 \\ \sigma_3(1, 1, 1, 1) &= \binom{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

$$A = -3.$$

Отговор:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1 \sigma_2 - 3 \sigma_3.$$

Контролно упражнение 1
Специалност *Математика*, Втори курс
Вариант 2
7 ноември, 2013 г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. Решете системата от сравнения:

$$\begin{cases} 3x \equiv -1 \pmod{5} \\ 5x \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

Решение.

- Решаваме първото сравнение от системата по метода на Ойлер.

$$\begin{aligned} 3x &= 5y - 1 \\ x &= \frac{5y - 1}{3} = y + \frac{2y - 1}{3} \\ 2y - 1 &= 3z \\ y &= \frac{3z + 1}{2} = z + \frac{z + 1}{2} \\ z &= 2k - 1 \\ y &= 3k - 1 \\ x &= 5k - 2. \end{aligned}$$

- Замсетваме решението във второто сравнение и решаваме по същия начин:

$$\begin{aligned} 5(5k - 2) &= 6l + 1 \\ 25k - 10 &= 6l + 1 \\ l &= \frac{25k - 11}{6} = 4k - 2 + \frac{k + 1}{6} \\ k + 1 &= 6m \\ k &= 6m - 1 \\ k &= z + \frac{2z + 2}{7} \\ x &= 5(6m - 1) - 2 = 30m - 7 \end{aligned}$$

Отговор:

$$x \equiv -7 \pmod{30}.$$

Задача 2. Да се намери остатъкът при деление на полинома $f(x) = x^n - 3x^{n-1} - 3$ с полинома $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Решение.

- Търсеният остатък е полином от степен не по-висока от $\deg g - 1 = 2$, т. е.,

$$r(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Разлагаме делителя на множители:

$$g(x) = x(x - 3)^2.$$

Разделяме с остатък f на g :

$$x^n - 3x^{n-1} - 3 = q(x)x(x - 3)^2 + ax^2 + bx + c. \quad (3)$$

Диференцираме тъждеството (??) и получаваме:

$$nx^{n-1} - 3(n-1)x^{n-2} = h(x)(x-3) + 2ax + b \quad (4)$$

- Заместваме $x = 0$ в (??) и получаваме $c = -3$.
- Заместваме $x = 3$ в (??) и получаваме $6a + b = 3^{n-1}$.
- Заместваме $x = 3$ в (??) и получаваме $9a + 3b + c = -3$.
- Решаваме получената система за неизвестните коефициенти:

$$\begin{cases} c = -3 \\ 6a + b = 3^{n-1} \\ 9a + 3b + c = -3 \end{cases}$$

$$a = 3^{n-2}, \quad b = -3^{n-1}, \quad c = -3.$$

Отговор:

$$r(x) = 3^{n-2}x^2 - 3^{n-1}x - 3.$$

Задача 3. Да се изрази следната симетрична функция чрез елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и σ_4 :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_1 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 \\ & + x_3^2 x_1 x_2 + x_3^2 x_1 x_4 + x_3^2 x_2 x_4 + x_4^2 x_1 x_2 + x_4^2 x_1 x_3 + x_4^2 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Решение.

- Прилагаме алгоритъма произлизащ от класификационната теорема за симетричните полиноми. Според лексикографската наредба, имаме следната пълна низходяща поредица от едночлени, започваща със старшия член на горния полином:

$$x_1^2 x_2 x_3 \succ x_1 x_2 x_3 x_4$$

- Следователно, търсим представяне от вида

$$\sum x_1^2 x_2 x_3 = \sigma_1 \sigma_3 + A \sigma_4.$$

- Заместваме $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$ и получаваме

$$\begin{aligned} F(1, 1, 1, 1) &= 12 \\ \sigma_1(1, 1, 1, 1) &= 4 \\ \sigma_3(1, 1, 1, 1) &= \binom{4}{3} = 4 \\ \sigma_4(1, 1, 1, 1) &= 1 \end{aligned}$$

$$A = -4.$$

Отговор:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1 \sigma_3 - 4 \sigma_4.$$