

Решения на Домашно задание 2  
Специалност Математика, Втори Курс  
December 16, 2013

**Задача 1.** Да се намери резултантата на полиномите

$$f(x) = x^{2n+1} - 1 \quad g(x) = x^{6n+4} + x^{4n+3} + x^{2n+2} + 3$$

**Решение.** Ако  $\alpha$  е корен на  $f(x) = x^{2n+1} - 1$ , то  $\alpha^{2n+1} = 1$ . Следователно

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha^{3(2n+1)+1} + \alpha^{2(2n+1)+1} + \alpha^{(2n+1)+1} + 3 \\ &= \alpha\alpha^{3(2n+1)} + \alpha\alpha^{2(2n+1)} + \alpha\alpha^{(2n+1)} + 3 \\ &= 3\alpha + 3. \end{aligned}$$

Означаваме с  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}$  всички корени на  $f$  и изчисляваме:

$$\begin{aligned} R(f, g) &= g(\alpha_1) \dots g(\alpha_{2n+1}) \\ &= (3\alpha_1 + 3) \dots (3\alpha_{2n+1} + 3) \\ &= 3^{2n+1}(-1)^{2n+1}f(-1) = 2 \cdot 3^{2n+1}. \end{aligned}$$

**Отговор:**

$$R(f, g) = 2 \cdot 3^{2n+1}.$$

**Задача 2.** Да се намерят стойностите на параметъра  $\lambda$ , за които полиномът  $f \in \mathbb{C}[x]$  има кратни корени

$$f(x) = \lambda x^5 + 5x^2 - 5x + 1.$$

**Решение.** За  $\lambda = 0$  се изчислява директно, че няма кратни корени. От тук нататък допускаме, че  $\lambda \neq 0$ . Ако  $\beta_i$  е корен на производната  $f'(x) = 5\lambda x^4 + 10x - 5$ , то

$$\beta_i^4 = \frac{-2\beta_i + 1}{\lambda}.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} f(\beta_i) &= \lambda\beta_i \cdot \frac{-2\beta_i + 1}{\lambda} + 5\beta_i^2 - 5\beta_i + 1 \\ &= 3\beta_i^2 - 4\beta_i + 1 = (3\beta_i - 1)(\beta_i - 1). \end{aligned}$$

От тук получаваме:

$$\begin{aligned}
 D(f) &= \frac{1}{\lambda}(-1)^{\frac{5 \cdot 4}{2}} R(f, f') = \frac{1}{\lambda}(-1)^{5 \cdot 4} R(f', f) \\
 &= \frac{1}{\lambda}(5\lambda)^5 f(\beta_1) \dots f(\beta_4) \\
 &= 5^5 \lambda^4 [(3\beta_1 - 1) \dots (3\beta_4 - 1)] [(\beta_1 - 1) \dots (\beta_4 - 1)] \\
 &= 5^3 \lambda^2 [3^4 (-1)^4 f' \left( \frac{1}{3} \right)] [(-1)^4 f'(1)] \\
 &= 5^3 \lambda^2 3^4 \left( \frac{5\lambda}{3^4} + \frac{10}{3} - 5 \right) (5\lambda + 5) \\
 &= 5^5 \lambda^2 (\lambda - 27)(\lambda + 1).
 \end{aligned}$$

**Отговор:**

$$\lambda = 27 \quad \text{или} \quad \lambda = -1.$$

**Задача 3.** Докажете, че ако редът на групата  $|G| = 56$  е, то тя има нормална подгрупа.

**Решение.**

$$|G| = 56 = 7 \cdot 2^3.$$

За броя  $n_7$  на Силовите 7-подгрупи знаем:

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{и} \quad n_7 | 8.$$

Следователно:

$$n_7 = 1 \quad \text{или} \quad n_7 = 8.$$

Ако  $n_7 = 1$ , то  $P_7$  е нормална подгрупа на  $G$ .

Ако  $n_7 = 8$ , то в  $G$  има 8 циклически подгрупи ред 7,  $P_7^{(1)}, \dots, P_7^{(8)}$  които нямат други общи елементи освен идентитета  $1_G$ . Всяка  $P_7^{(i)}$  съдържа 6 елемента от ред 7. Общо  $4 \cdot 8 = 48$  елемента от ред 7. Тъй като 7 не дели 8, в никоя Силова 2-подгрупа (група от ред 8) не влиза нито един от тези елементи. Следователно, останалите  $56 - 48 = 8$  формират единствена Силова 2-подгрупа,  $P_2$ , която, следователно, е нормална.

**Задача 4.** Докажете, че всяка група от ред  $|G| = 35$  е абелева.

**Решение.**

$$|G| = 5 \cdot 7.$$

•

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{и} \quad n_7 | 5.$$

Следователно,  $n_7 = 1$ .

•

$$n_5 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{и} \quad n_5 | 7.$$

Следователно,  $n_5 = 1$ .

- Силовите подгрупи  $P_5$  и  $P_7$  са нормални и, понеже са от прост ред са циклични.
- Нека  $a$  и  $b$  са пораждащи на  $P_5 = \langle a \rangle$  и  $P_7 = \langle b \rangle$ , съответно. Директно се проверява, че  $aba^{-1}b^{-1} \in P_7 \cap P_5 = \{1\}$  и, следователно

$$ab = ba.$$

От това следва че  $G$  е абелева група.

*Забележка 1.* На упражненията показахме, че групата е циклична с пораждащ  $ab$ .

**Задача 5.** Разгледайте действието на групата от матрици:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

върху двумерното линейно пространство  $\mathbb{R}^2$  зададено с умножение от ляво.

- (а) Разгледайте един вектор  $v \in \mathbb{R}^2$  с координати  $v = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$  и един елемент  $g_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  на групата  $G$ . Изчислете  $g_\alpha v$ .

- (б) Намерете всички орбити на действието.

**Решение.**

- (а)

$$\begin{aligned} g_\alpha(v) &= \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \phi - r \sin \alpha \sin \phi \\ r \sin \alpha \cos \phi + r \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \phi) \\ r \sin(\alpha + \phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (б) От (а) става ясно, че произволен вектор се изобразява от произволен елемент на групата в друг вектор със същата дължина. От друга страна, ако разгледаме два вектора със същата дължина

$$v = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v_1 = \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$$

то съществува елемент  $g_{\psi-\phi} \in G$ , такъв че

$$g_{\psi-\phi} v = v_1.$$

Следователно,

$$Gv = \{u \in R^2 : |u| = r\}.$$

**Отговор:** Орбитите са окръжностите:

$$Orb_r = \{v = (x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

**Задача 6.** В равнината е зададен квадрат. Диедралната група  $D_4$  се дефинира като групата от равнинни симетрии които запазват предварително зададеният квадрат. Тази група има 8 елемента и може да се докаже, че се поражда от два елемента:

- Осева симетрия по отношение на диагонала на квадрата.
  - Ротация на 90 по отношение на центъра на квадрата.
- (а) Обозначете върховете на квадрата с числата  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Докажете, че това дефинира влягане на диедралната група  $D_4$  в симетричната група  $S_4$ . Колко такива влягания има? Експлицитно изразете всяко едно от тях.
- (б) Намерете всички Силови 2-подгрупи на симетричната група  $S_4$ . Експлицитно намерете списък на всички елементи за всяка група.

**Решение.**

- (а) Има 3 неизоморфни начина да се означат върховете на квадрата с числата 1, 2, 3 и 4. По този начин получаваме 3 различни влягания на  $D_4$  в  $S_4$ :

$$D_4^{(1)} = \{\epsilon, (1, 3), (2, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2)\}$$

$$D_4^{(2)} = \{\epsilon, (1, 2), (3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 4, 2, 3)\}$$

$$D_4^{(3)} = \{\epsilon, (1, 4), (2, 3), (1, 3)(2, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 4, 2)\}$$

(б)

$$|S_4| = 24 = 3 \cdot 2^3.$$

Следователно, всяка  $D_4^{(i)}$  е Силова 2-подгрупа в  $S_4$ . От третата теорема на Силев следва, че

$$n_2 \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{и} \quad n_2 | 3.$$

Следователно:

$$n_2 = 1 \quad \text{или} \quad n_2 = 3.$$

Тъй като вече имаме 3 намерени, то това означава, че сме намерили всички.