

Решения и критерий за оценяване

Домашна работа № 1 по Висша алгебра 2 , спец. Математика, II курс
октомври 2013

Задача 1. Решете системата от сравнения:

$$\left| \begin{array}{l} 2x \equiv 1 \pmod{3} \\ 3x \equiv 4 \pmod{7} \\ 5x \equiv -2 \pmod{11} \end{array} \right.$$

Решение: Решаваме първото сравнение по метода на Ойлер:

$$\begin{aligned} 2x &= 1 + 3y \\ x &= y + \frac{y+1}{2} \\ y &= 2z - 1 \\ x &= 3z - 1. \end{aligned}$$

По същия начин, решавайки второто сравнение, достигаме до:

$$x = 7w - 1.$$

Сравнявайки двете решения и предвид на $[3, 7] = 21$, получаваме

$$\begin{aligned} x &= 3z - 1 \\ &= 7w - 1 \\ x &= 21u - 1. \end{aligned}$$

Замествайки това решение в третото сравнение имаме:

$$\begin{aligned} 5(21u - 1) &= 11v - 2 \\ v &= 9u + 3 \cdot \frac{2u-1}{11} \\ 2u &= 11k + 1 \\ u &= 5k + \frac{k+1}{2} \\ k &= 2m - 1 \\ u &= 11m - 5 \\ x &= 231v - 106. \end{aligned}$$

Отговор:

$$x \equiv -106 \pmod{231}$$

Задача 2. Да се намери остатъкът при деление на полинома $f(x) = x^n - 2x^{n-1} + 2x$ с полинома $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Решение: Разлагаме на множители полинома g :

$$g(x) = (x - 2)^2(x - 1).$$

Остатъкът при деление на f с g е полином от втора степен, т.е.,

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 1)q(x) + ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

където q е неизвестен полином, а a , b и c са търсените неизвестни коефициенти. Замествайки последователно x с $x = 1$ и $x = 2$ в това равенство получаваме две уравнения:

$$1 = a + b + c$$

$$4 = 4a + 2b + c.$$

Диференцирайки тъждеството (1) получаваме:

$$f'(x) = (x - 2)h(x) + 2ax + b,$$

където h е някакъв полином.

Заместваме $x = 2$ и получаваме:

$$2^{n-1} + 2 = 4a + b.$$

Получената система от 3 уравнения за три неизвестни

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 4a + b = 2^{n-1} + 2, \end{cases}$$

има решение:

$$a = 2^{n-1} - 1, \quad b = -3 \cdot 2^{n-1} + 6, \quad c = 2^n - 4.$$

Отговор:

$$r(x) = (2^{n-1} - 1)x^2 + (-3 \cdot 2^{n-1} + 6)x + 2^n - 4.$$

Задача 3. Да се изрази следната симетрична функция чрез елементарните симетрични полиноми σ_1 , σ_2 и σ_3 :

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 x_3} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{x_3 x_1}$$

Решение:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 x_3} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{x_3 x_1} \\ &= \frac{x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1^2 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{\sigma_3} \sum x_1^2 x_2. \end{aligned}$$

Оттук нататък прилагаме алгоритъма, произлизащ от Основната теорема за симетричните полиноми. Според лексикографската наредба, имаме следната пълна низходяща поредица от едночлени, започваща със старшия член на горния полином:

$$x_1^2 x_2 \succ x_1 x_2 x_3$$

и, следователно, търсим представяне от вида

$$\sum x_1^2 x_2 = \sigma_1 \sigma_2 + A \sigma_3.$$

Заместваме $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ и получаваме $A = -3$. В резултат имаме:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 - 3 \sigma_3}{\sigma_3}.$$

Отговор:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_3} - 3.$$

Задача 4. Нека α и β са комплексни числа.

1. За кои α и β полиномите $x - \alpha$ и $x - \beta$ са взаимно прости?
2. При какви условия за α и β е изпълнено:

$$\mathbb{C}[x] / \langle (x - \alpha)(x - \beta) \rangle \cong \mathbb{C}[x] / \langle (x - \alpha) \rangle \times \mathbb{C}[x] / \langle (x - \beta) \rangle \quad (2)$$

Изразете изоморфизма експлицитно.

3. Дайте пример за конкретни стойности на α и β , така че еквивалентността (2) не е изпълнена.

Решение:

1. Ако $\alpha \neq \beta$ полиномите $x - \alpha$ и $x - \beta$ са взаимно прости. Това се вижда, например, от тъждеството на Безу:

$$\frac{1}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \frac{1}{\alpha - \beta}(x - \beta) = 1. \quad (3)$$

Обратно, ако $\alpha = \beta$ то двата полинома съвпадат и не са взаимно прости.

2. В случая, когато $\alpha \neq \beta$, идеалите $I_1 = \langle (x - \alpha) \rangle$ и $I_2 = \langle (x - \beta) \rangle$ са взаимно прости. $I_1 + I_2 = R$ следва от тъждеството на Безу (3). Следователно, идеалът $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$ е съставен от полиноми които се делят едновременно на $x - \alpha$ и $x - \beta$ и е породен от най-малкото общо кратно на двата полинома, $(x - \alpha)(x - \beta)$. Изоморфността (2) следва според **Следствие 12**, което доказахме на упражненията,

$$\mathbb{C}[x] / I_1 I_2 \cong \mathbb{C}[x] / I_1 \times \mathbb{C}[x] / I_2$$

За фактор пръстена $R = \mathbb{C}[x]/I_1 I_2$ знаем, че произволен полином $f \in \mathbb{C}[x]$, принадлежи в същия съседен клас заедно с остатъка $ax + b$, който f дава при деление на $(x - \alpha)(x - \beta)$, т. е., имаме равенство на съседните класове:

$$[f] = [ax + b] \in R.$$

Изоморфизмът (2) се задава с изображението

$$\phi : R \longrightarrow \mathbb{C}[x]/I_1 \times \mathbb{C}[x]/I_2$$

$$\phi([ax + b]) = ([a\alpha + b], [a\beta + b]).$$

Забележка 5. Остатъкът на f при деление на $(x - \alpha)(x - \beta)$ се задава с уравнението на секущата, което познаваме от упражненията:

$$r(x) = ax + b = f(\beta) + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \beta)$$

Забележка 6. Ако се опитате да обърнете изоморфизма ϕ , получавате следния обратен морфизъм:

$$([f(\alpha), g(\beta)]) \mapsto g(\beta) + \frac{f(\alpha) - g(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \beta)$$

3. Например, ако $\alpha = \beta = 1$

$$\mathbb{C}[x]/\langle (x - 1)^2 \rangle \not\cong \mathbb{C}[x]/\langle (x - 1) \rangle \times \mathbb{C}[x]/\langle (x - 1) \rangle,$$

защото ненулевият остатък $[x - 1] \in \mathbb{C}[x]/\langle (x - 1)^2 \rangle$ се изобразява в неутралния елемент $([0], [0]) \in \mathbb{C}[x]/\langle (x - 1) \rangle \times \mathbb{C}[x]/\langle (x - 1) \rangle$.

Задача 7. Нека p е просто число и $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ е полином с коефициенти от полето на остатъците при деление с p , $f(x) = x^{p^n} - x$. Нека F е поле съдържащо всички корени на полинома f . ($\mathbb{Z}_p$ е подполе на F .)

1. Колко различни корена има полиномът f ?
2. Нека $K \subseteq F$ е множеството от корените на полинома f . Докажете, че K е подполе на F .

Решение:

1. Формалната производна на полинома f е:

$$f'(x) = -p^n x^{p^n-1} - 1 = -1,$$

тъй като съседният клас на $p^n \in \mathbb{Z}_p$ е 0. Това показва, че f няма кратни корени и, следователно има $\deg f = p^n$ различни корена.

2. Проверяваме, че K е затворено по отношение на аритметичните операции в F .

(а) Ако a и b са корени на f то $a + b$ също е корен. От доказаното на упражнения,

$$(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

Следователно,

$$f(a + b) = (a + b)^{p^n} - (a + b) = a^{p^n} + b^{p^n} - a - b = 0.$$

(б) Ако a и b са корени на f то $a \cdot b$ също е корен. От $f(a) = 0$ следва, че $a^{p^n} = a$. Аналогично, $b^{p^n} = b$.

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= (a \cdot b)^{p^n} - a \cdot b \\ &= a^{p^n} \cdot b^{p^n} - a \cdot b \\ &= a \cdot b - a \cdot b = 0. \end{aligned}$$

(в) Ако a е корен на f то $-a$ също е корен. Ако p е нечетно, от $f(a) = 0$ следва, че

$$f(-a) = (-a)^{p^n} - (-a) = -a^{p^n} + a = -f(a) = 0.$$

В случая на характеристика $p = 2$ забележете че $a = -a$ и няма нищо за доказване.

(г) Ако a е корен на f то a^{-1} също е корен. От $f(a) = 0$ следва, че

$$(a^{-1})^{p^n} = a^{-p^n} = (a^{p^n})^{-1} = a^{-1}.$$

Следователно, $f(a^{-1}) = 0$.