ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Любомир Петров   Донка Беева

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ. ФУРИЕ АНАЛИЗ. ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ. УРАВНЕНИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА

МОДУЛ 6

СБОРНИК ЗАДАЧИ

СОФИЯ · 2010

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
МОДУЛ 6

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ
ФУРИЕ АНАЛИЗ
ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ
УРАВНЕНИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА

Любомир Петров   Донка Беева

СОФИЯ • 2010

Предлаганият модул 6 **Комплексен анализ. Фурие анализ. Операционно смятане. Уравнения на математическата физика** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в двадесет и три глави, като във всяка от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е шеста част от **Сборник задачи по висша математика**, разработен от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на

проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

От авторите

***

СЪДЪРЖАНИЕ

УРАВНЕНИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА

ГЛАВА 1

БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ И РЕДОВЕ В КОМПЛЕКСНА ОБЛАСТ

А. Редици в комплексна област

Дефиниция 1 *Редицата*

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n, \dots, \tag{1.1}$$

където $z_n = x_n + iy_n$ са фиксирани комплексни числа, се нарича ***редица с комплексни членове*** *и я бележим със $\{z_n\}$.*

Ако означим множеството от комплексни числа $\mathbb{Z}$: $z_1, z_2, \dots, z_n$ тогава е установено *изображение* на множеството от естествените числа $\mathbb{N}$ върху $\mathbb{Z}$, т.е., $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$.

На редицата (1.1) съответстват две редици от реални числа

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n, \dots \qquad y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n, \dots \tag{1.2}$$

Дефиниция 2 ***ε-околност*** *на точка $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_0 \neq \infty$ наричаме множеството от точки $\{z\}$ в Гаусовата (комплексната) равнина (z), за които $|z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

Геометричен смисъл: От

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \Longrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2,$$

т.е. кръг с център $z_0(x_0, y_0)$ и радиус $r = \varepsilon$.

Дефиниция 3 ***ε-околност*** *на точка $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_0 = \infty$ наричаме множеството от точки $\{z\}$ в комплексната равнина (z), за които $|z| > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

Геометричен смисъл: От

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} > \varepsilon \Longrightarrow x^2 + y^2 > \varepsilon^2,$$

т.е. външната част на кръг с център $O(0, 0)$ и радиус $r = \varepsilon$.

Дефиниция 4 ***Точка на сгъстяване*** *на редицата (1.1) наричаме такава точка $z_0 = x_0 + iy_0$, във всяка околност на която има поне един член на (1.1), който е различен от z_0.*

Дефиниция 5 *Числото* $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_0 \neq \infty$ *е* ***граница на редицата*** *(1.1), ако* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ *така, че* $\forall n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$, *където* z_n *е общият член на редицата (ако при всяко* $\varepsilon > 0$, *съществува число* N, *евентуално зависещо от* ε, *така че при всяко* $n > N$ *да бъде изпълнено* $|z_n - z_0| < \varepsilon$*).*

Геометричен смисъл: За всеки кръг с център $z_0(x_0, y_0)$ и радиус $r = \varepsilon$ съществува $N(\varepsilon)$, от което нататък всички членове на редицата са вътре в кръга.

Дефиниция 6 *Редицата (1.1), която има граница* $z_0(x_0, y_0)$ *се нарича* ***сходяща*** *и означаваме* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Теорема 1 *Необходимо и достатъчно условие редицата (1.1) да е сходяща е да бъдат сходящи редиците (1.2).*

Дефиниция 7 *Редицата (1.1) се нарича* ***ограничена****, ако* $\exists M > 0$, $M = const.$ *така, че* $\forall n \Longrightarrow |z_n| \leq M$.

Теорема 2 (***на Болцано-Ваерщрас***) *Ако редицата (1.1) е ограничена, тя притежава поне една точка на сгъстяване.*

Теорема 3 (***общ критерий на Коши***) *Необходимо и достатъчно условие редицата (1.1) да бъде сходяща е за* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ *така, че* $\forall n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$.

Свойства на сходящите редици с комплексни членове:

1) Всяка сходяща редица има точно една граница.

2) Всяка сходяща редица е ограничена.

3) Всяка подредица на сходяща редица е сходяща и има същата граница.

4) Ако редиците $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$ са сходящи, съответно с граници z_0 и z'_0, то:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \{z_n \pm z'_n\} = z_0 \pm z'_0$;
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \{z_n z'_n\} = z_0 z'_0$;
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \{z_n / z'_n\} = z_0 / z'_0$, $z'_0 \neq 0$.

Б. Редове в комплексна област

Дефиниция 8 *Символът*

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_k + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n\,, \tag{1.3}$$

където $z_n = x_n + iy_n$ *са фиксирани комплексни числа, се нарича* ***ред с комплексни членове.***

Означаваме сумите:

$$\begin{cases} s_1 = z_1 \\ s_2 = z_1 + z_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n \,. \end{cases}$$

Дефиниция 9 *Редицата*

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \tag{1.4}$$

се нарича редица от ***парциалните*** *(частичните) суми на реда (1.3) или* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Очевидно* $s_n = s_{n-1} + z_n$.

Дефиниция 10 *Редът (1.3) се нарича* ***сходящ****, ако редицата (1.4) е сходяща, т.е. (1.3) е сходящ, ако* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$. *Числото* S *се нарича* ***сума*** *на реда.*

Теорема 4 *Необходимо условие редът (1.3) да е сходящ е* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *(общият член на реда да клони към нула).*

Следствие: Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, то (1.3) е **разходящ**.

Дефиниция 11 *Редът*

$$R_n = \sum_{m=1}^{\infty} z_{n+m} = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+m} + \dots \tag{1.5}$$

се нарича ***n-ти остатък*** *на сходящия ред (1.3). Очевидно* $S = s_n + R_n$.

Теорема 5 *Необходимо условие редът (1.3) да е сходящ е* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ *(n-тият остатък на реда да клони към нула).*

Теорема 6 *Редът* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, *където* $z_n = x_n + iy_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$ *е сходящ тогава и само тогава, когато са сходящи двата реални числови реда:*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{1.6}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{1.7}$$

Теорема 7 ***(общ критерий на Коши)*** *Необходимо и достатъчно условие редът (1.3) да е сходящ е за* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ *така, че* $\forall n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 12 *Редът (1.3) се нарича* ***абсолютно*** *(безусловно)* ***сходящ****, ако е сходящ редът*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \tag{1.8}$$

(условието е достатъчно).

Теорема 8 *Ако редът (1.8) е сходящ, редът (1.3) е* ***абсолютно сходящ****.*

Забележка. Редът (1.8) е ред с положителни членове и тогава за него са приложими критериите на Коши и Даламбер (вж. модул 1, стр. 11–15).

Теорема 9 *Ако редовете* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *са абсолютно сходящи, съответно със суми* S *и* S_0*, то редът-произведение на тези два реда (вж. модул 1, т.5, дефиниция 3) е абсолютно сходящ и неговата сума е* SS_0*.*

Пример 1.1. Изследвайте относно сходимост редицата с общ член

$$z_n = n + i\frac{(-1)^n}{n}.$$

Решение. От $z_n = n + i\dfrac{(-1)^n}{n}$ следва $x_n = n$, $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Означаваме търсената граница със $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогава $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n$, т.е. границата не съществува. По теорема 1 следва, че редицата е *разходяща*.

Пример 1.2 Да се изследва относно сходимост редицата с общ член z_n,

$$z_n = \sqrt[n]{n+1} + i\frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!},$$

и да се намери границата ѝ.

Решение. От

$$z_n = \sqrt[n]{n+1} + i\frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!} \Longrightarrow x_n = \sqrt[n]{n+1}, \qquad y_n = \frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!}.$$

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1; \quad y_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n-1} = 1.$$

Следователно, редицата е *сходяща* и границата и е $z_0 = 1 + i$.

Пример 1.3. Да се изследва относно сходимост редицата с общ член $z_n = 3 + i(-1)^n$

Решение. От $z_n = 3 + i(-1)^n \Longrightarrow x_n = 3; \qquad y_n = (-1)^n.$

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = 3, \quad y_0 = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{при } n\text{-нечетно}, \\ 1, & \text{при } n\text{-четно}. \end{cases}$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ не съществува. По теорема 1 редицата е *разходяща.*

Пример 1.4. Да се изследва относно сходимост редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + i}{n}$.

Решение. От $z_n = \dfrac{(-1)^n + i}{n} \Longrightarrow x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$.

Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ е сходящ алтернативен ред (доказва се с критерия на Лайбниц, вж. модул 1, стр. 15, Дефиниция 1, Теорема 1).

Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ е разходящ (хармоничен ред).

Следователно, според Теорема 6 даденият ред е *разходящ.*

Пример 1.5. Изследвайте относно сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2in)^n}{n!}$.

Решение. Общият член на реда е $z_n = \dfrac{(2in)^n}{n!}$. Според допълнението на критерия на Даламбер получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1} i^{n+1} (n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n i^n n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n 2 i^n i (n+1)^n (n+1) n!}{(n+1)! 2^n i^n n^n}\right|$$
$$= 2|i| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 2e > 1 \qquad (|i| = 1).$$

Следователно $\exists N > 0$ така, че $\forall n > N$ е изпълнено $z_{n+1} > z_n$, т.е. нарушено е необходимото условие за сходимост на ред ($\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$) и тогава даденият ред е *разходящ.*

Пример 1.6 Изследвайте относно сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(1+i)^n}{3^n}$.

Решение.

$$|z_n| = \left|\frac{n(1+i)^n}{3^n}\right| = \frac{n}{3^n}|1+i|^n.$$

От $\quad 1+i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) \Longrightarrow |1+i| = \sqrt{2} \Longrightarrow |1+i|^n = \sqrt{2^n}$

или $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{2^n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}u_n.$

Тогава $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\sqrt{2^{n+1}}\,3^n}{3^{n+1}n\sqrt{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\sqrt{2^n}\sqrt{2}\,3^n}{3^n 3n\sqrt{2^n}}\right|$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Следователно редът с общ член u_n е *сходящ*, а даденият ред е *абсолютно сходящ*.

Пример 1.7 Изследвайте относно сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

Решение.

$$|z_n| = \left|\frac{n^n}{n!(e-i)^n}\right| = \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{|e-i|^n}.$$

От $z = e - i \Longrightarrow x = e$, $y = -1$ и тогава $|z| = |e-i| = \sqrt{e^2+1}$.
Следователно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!\sqrt{(e^2+1)^n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^n(n+1)n!\sqrt{(e^2+1)^n}}{(n+1)!\sqrt{(e^2+1)^{n+1}}\,n^n}\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e^2+1}}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1.$$

Следователно редът с общ член u_n е *сходящ*, а даденият ред е *абсолютно сходящ*.

Пример 1.8 Изследвайте относно сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{i(n+i)}{2n}\right]^n$.

Решение. От

$$|z_n| = \left|\left[\frac{i(n+i)}{2n}\right]^n\right| = \left[\frac{1}{2n}\sqrt{n^2+1}\right]^n$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}=\frac{1}{2}<1.$$

Следователно редът с общ член u_n е *сходящ*, а даденият ред е *абсолютно сходящ*.

ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно *сходимост* и намерете *сумата* на редицата с общ член z_n:

а) $z_n=\dfrac{1-(-1)^n}{n}+i\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ Отг. сходяща, $z_0=\frac{1}{2}i$

б) $z_n=\dfrac{n+3}{2n+1}+i(1+\frac{1}{n})^n$ Отг. сходяща, $z_0=\frac{1}{2}+ie$

в) $z_n=n\sin\frac{1}{n}+i\dfrac{n^2+3}{4n^2+5}$ Отг. сходяща, $z_0=1+\frac{i}{4}$

г) $z_n=n\mathrm{tg}\frac{1}{n}+i\frac{n^5}{2^n}$ Отг. сходяща, $z_0=1$.

2. Изследвайте относно *сходимост* редовете:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+ni}{2^n}$ Отг. абсолютно сходящ

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos n+i\sin n)$ Отг. разходящ

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos n+i\sin n}{n^2}$ Отг. абсолютно сходящ

ГЛАВА 2

ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА: ДЕФИНИЦИЯ, ГРАНИЦА, НЕПРЕКЪСНАТОСТ ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТ

А. Функция на комплексна променлива: дефиниция

Нека в Гаусовата (комплексната) равнина (z) е дадено *множество от точки* M_z (точки от (z), обхванати от общ контур-линия γ).

Дефиниция 1 *Точка z_1 се нарича* ***вътрешна*** *за M_z, ако поне една нейна околност изцяло принадлежи на M_z.*

Дефиниция 2 *Точка z_2 се нарича* ***външна*** *за M_z, ако поне една нейна околност изцяло не принадлежи на M_z.*

Дефиниция 3 *Точка z_3 се нарича* ***гранична*** *за M_z, ако всяка нейна околност съдържа безброй точки, които принадлежат, и безброи точки, които не принадлежат на M_z.*

Дефиниция 4 *Множеството M_z се нарича* ***отворено****, ако всички негови точки са вътрешни.*

Дефиниция 5 *Множеството M_z се нарича* ***едносвързано*** *(непрекъснато), ако всеки две точки от M_z могат да се свържат с линия, чиито точки изцяло принадлежат на M_z.*

Дефиниция 6 *Всяко отворено и едносвързано множество от точки M_z се нарича* ***отворена област****.*

Забележка. $\bar{M} = M_z \cup \gamma$ е *затворена област*. Линията γ се нарича **контур на областта**.

Дефиниция 7 *Дадени са две области M_z и M_w, съответно в равнините $(z) : O_{xy}$ и $(w) : O'_{uv}$. Ако реализираме съответствие f, при което на $\forall z \in M_z$ да съответства точно една точка $w \in M_w$, казваме, че сме осъществили изображение $f : M_z \to M_w$ или дефинирана е* ***функция на една комплексна променлива*** *$w = f(z)$ с дефиниционна област M_z и област от стойности M_w на функцията.*

Забележка. От

$$w = f(z) \wedge z = x + iy \Longrightarrow w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

където $u(x, y) = \mathrm{Re}w$ и $v(x, y) = \mathrm{Im}w$, са реални функции на две променливи.

Пример. От $w = z^2$

$$\Longrightarrow w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy, \text{ т.е. } u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2xy.$$

Забележка. От $f : z \to w \Longrightarrow f : (x,y) \to (u,v)$ и за да изобразим съответствието $w = f(z)$ е необходимо четиримерно пространство.

Б. Граница на $w = f(z),\ z = x + iy$

Дадена е функция $w = f(z)$, $z \in M_z$ и точка на сгъстяване z_0 за $M_z (z_0 \in M_z \vee z_0 \notin M_z)$. Ако z_0 е точка на сгъстяване за множеството от точки M_z казваме, че $z \to z_0$, ако $\forall \delta > 0 \Longrightarrow |z - z_0| < \delta$.

Дефиниция 8 *(на Коши). Казваме, че $f(z)$ има за граница комплексното число $A \neq \infty$, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, че от*

$$(\forall z \in M_z \wedge 0 < |z - z_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(z) - A| < \varepsilon).$$

Дефиниция 9 *(на Хайне). Казваме, че $f(z)$ има за граница комплексното число $A \neq \infty$, ако при всеки избор на редицата от комплексни числа $\{z_n\}$ от*

$$\left(\forall z_n \in M_z,\ z_n \neq z_0 \wedge \lim_{n\to\infty} z_n = z_0\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A\right).$$

Забележки:

1. Двете дефиниции са еквивалентни.
2. От $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0 \wedge A = u_0 + iv_0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = A \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \wedge \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

3. Казваме, че функцията $f(z)$ има за граница числото $A = \infty$, ако $|f(z)|_{z\to z_0} \longrightarrow \infty$.

В. Непрекъснтост на $w = f(z),\ z = x + iy$

Дадена е функция $w = f(z)$, $z \in M_z$ и $z_0 \in M_z$ (z_0 е точка на сгъстяване за M_z или не е).

Дефиниция 10 *Ако z_0 е точка на сгъстяване за M_z, то функцията $f(z)$, дефинирана в z_0 и някаква нейна околност, се нарича* ***непрекъсната*** *в точката z_0, ако $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$ и $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Забележки:

1. Дефиниция 10 може да се изкаже в смисъл на Коши и Хайне.

2. Ако z_0 не е точка на сгъстяване за M_z, но $f(z)$ е дефинирана в точката z_0, приемаме, че $f(z)$ е непрекъсната в точката z_0.
3. Ако функцията $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е непрекъсната в точката $z_0 = x_0 + iy_0$, то функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ са непрекъснати относно двата си аргумента в точката (x_0, y_0).

Някои от теоремите за непрекъснатост в реалния анализ можем да перефразираме така:

Теорема 1 *Ако $f_1(z)$ и $f_2(z)$, $z \in M_z$ са непрекъснати в точката $z_0 \in M_z$, то непрекъснати са в същата точка и функциите: $f_1(z) \pm f_2(z)$; $f_1(z)f_2(z)$; $f_1(z)/f_2(z)$, $f_2(z) \neq 0$.*

Теорема 2 *Ако $f(z)$, $z \in M_z$ е непрекъсната в затворена област $\bar{M}$, тя е ограничена, т.е. $\exists K > 0$, $K \in \mathbb{R}$ така, че $\forall z$ е изпълнено неравенството $|f(z)| \leq K$.*

Теорема 3 *Ако $f(z)$, $z \in M_z$ е непрекъсната в $\bar{M}$, то $|f(z)|$ приема своята най-голяма и най-малка стойност в $\bar{M}$.*

Теорема 4 *Казваме, че $f(z)$, $z \in M_z$ е* ***равномерно непрекъсната****, ако при $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, че $\forall z_1, z_2$, $z_1 \neq z_2$, $|z_1 - z_2| < \delta \Longrightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.*

Г. Диференцируемост на $w = f(z), z = x + iy$

Означаваме:

$$\begin{cases} \Delta z = z - z_0 & \text{— нарастване на аргумента } z \text{ на } f(z) \\ \Delta w = f(z) - f(z_0) & \text{— нарастване на функцията } f(z). \end{cases}$$

От $\Delta z = z - z_0 = x + iy - x_0 - iy_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$

и $\Delta w = f(z) - f(z_0) = u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)$

$$= [u(x,y) - u(x_0,y_0)] + i[v(x,y) - v(x_0,y_0)] = \Delta u + i\Delta v$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0).$$

В този случай казваме,че $f(z)$ е *диференцируема* в точката z_0, а $f'(z_0)$ е *първата производна* на $f(z)$ в точката z_0.

От $f'(z) = \dfrac{df(z)}{dz} \Longrightarrow df(z) = f'(z)dz$ — *диференциал* на функцията $f(z)$.

Правила при диференциране:

1^0. $(f_1 \pm f_2)' = f_1' \pm f_2'$;

2^0. $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$;

3^0. $(\frac{f_1}{f_2})' = \dfrac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$, $f_2 \neq 0$.

Пример 2.1. Намерете реалната и имагинерната част на функцията $w = f(z)$, $z \in M_z$:

а) $w = z^3$ в) $w = |z|z$

б) $w = iz^2$ г) $w = z/(|z|\bar{z})$.

Решение:

а) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3+3ix^2y+3xi^2y^2+i^3y^3 = (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$.
И така $\mathrm{Re}w = u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $\mathrm{Im}w = v(x,y) = 3x^2y - y^3$;

б) $w = iz^2 = i(x+iy)^2 = ix^2 + 2i^2xy + i^3y^2 = -2xy + i(x^2 - y^2)$.
И така $u(x,y) = -2xy$, $v(x,y) = x^2 - y^2$;

в) $w = |z|z = \sqrt{x^2+y^2}\,(x+iy) = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2}$;
И така $u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$;

г) $$w = \frac{z}{|z|\bar{z}} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x-iy)} = \frac{(x+iy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

И така $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $v(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Пример 2.2. Намерете множествата от точки M_z в комплексната равнина (z), които удовлетворяват неравенствата:

а) $|z| < 1$ г) $|z+1+i| \le \sqrt{2}$

б) $|z-i| < 1,5$ д) $1 < |z| < 3$

в) $|z-2| \le \frac{1}{2}$ е) $\mathrm{Re}z^2 = a^2$, $a > 0$.

Решение:

а) $|z| < 1 \iff |x+iy| < 1 \iff \sqrt{x^2+y^2} < 1$.
И така $M_z : x^2+y^2 < 1^2$, т.е. M_z е вътрешността на кръг с център $O(0,0)$ и радиус $r = 1$;

б) $|z-i| < 1,5 \iff |x+iy-i| < 1,5 \iff \sqrt{x^2+(y-1)^2} < 1,5$.
И така $M_z : x^2+(y-1)^2 < 1,5^2$, т.е. M_z е вътрешността на кръг с център точката $(0,1)$ и радиус $r = 1,5(O \in M_z)$

в) $|z-2| \le \frac{1}{2} \iff |x+iy-2| \le \frac{1}{2} \iff \sqrt{(x-2)^2+y^2} \le \frac{1}{2}$.
И така $M_z : (x-2)^2+y^2 \le (\frac{1}{2})^2$, т.е. M_z е кръг с център точката $(2,0)$ и радиус $r = \frac{1}{2}$, включително точките на контура $(O \notin M_z)$

г) $|z+1+i| \le \sqrt{2} \Longleftrightarrow |x+iy+1+i| \le \sqrt{2} \Longleftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \le \sqrt{2}$.

И така $M_z : (x+1)^2+(y+1)^2 \le (\sqrt{2})^2$, т.е. M_z е кръг с център точката $(-1,-1)$ и радиус $r = \sqrt{2}$, включително точките на контура ($O \in M_z$).

д) $1 < |z| < 3 \Longleftrightarrow 1 < |x+iy| < 3 \Longleftrightarrow 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 3$.

И така $M_z : 1^2 < x^2+y^2 < 3^2$, т.е. M_z е венец от две концентрични окръжности с център $O(0,0)$ и радиуси $r_1 = 1, r_2 = 3$.

е) От $z = x+iy \Rightarrow z^2 = (x^2-y^2)+i2xy \Rightarrow \text{Re}z^2 = x^2-y^2$ и тогава $M_z : x^2-y^2 = a^2$, т.е. M_z се състои от точките на хипербола с това уравнение.

Пример 2.3 Какво множество от точки описва точка z в комплексната равнина (z), ако:

а) $z = t+it^2,\ 0 \le t < \infty$; б) $z = a(t+i-ie^{it}),\ a > 0,\ -\infty < t < \infty$.

Решение:

а) От
$$z = x+iy \Longrightarrow x+iy = t+it^2 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \Longrightarrow y = x^2. \end{array} \right.$$

И така дадената линия, зададена с комплексно параметрично уравнение, е *парабола* с връх O и ос $+\,Oy$. Множеството от точки, което описва точка z в равнината (z) е частта от тази парабола, разположена в първи квадрант $(0 \le t < +\infty)$;

б)
$$z = x+iy = a[t+i-i(\cos t+i\sin t)]$$
$$x+iy = a[(t+\sin t)+i(1-\cos t)] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a(t+\sin t) \\ y = a(1-\cos t). \end{array} \right.$$

И така множеството от точки, което описва точка z в равнината (z) е *циклоида*.

ЗАДАЧИ

1. Намерете *реалната* и *имагинерна* част на функцията $w = f(z),\ z \in M_z$:

а)	$w = z^2$	Отг. $u(x,y) = x^2-y^2$, $v(x,y) = 2xy$
б)	$w = i\bar{z}$	Отг. $u(x,y) = y$, $v(x,y) = x$
в)	$w = z\bar{z}$	Отг. $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$
г)	$w = z/\bar{z}$	Отг. $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$
д)	$w = e^z/z$	Отг. $u(x,y) = e^x\dfrac{x\cos y-y\sin x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = e^x\dfrac{x\sin y+y\cos y}{x^2+y^2}$.

2. Намерете *множествата* от точки M_z в комплексната равнина (z), които удовлетворяват неравенствата:

а) $|z| > 2$ Отг. $M_z : x^2 + y^2 > 2^2$

б) $|z-3| = 2$ Отг. $M_z : (x-3)^2 + y^2 = 1^2$

в) $|z-2-3i| < 4$ Отг. $M_z : (x-2)^2 + (y-3)^2 < 4^2$

г) $1 < |z| < 2$ Отг. $M_z : 1^2 < x^2 + y^2 < 2^2$

д) $\mathrm{Re}z > 0,\ \mathrm{Im}z < 2$ Отг. $M_z : x > 0,\ y < 2$

е) $\begin{cases} |\mathrm{Im}z| < 1 \\ 0 < \mathrm{Re}z < 1 \end{cases}$ Отг. M_z: правоъгълник $\begin{cases} x = 0,\ x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

3. Какво множество от точки описва точка z в комплексната равнина (z), ако

$$z = ae^{it} + \frac{1}{a}e^{-it}, \quad a > 1,\ 0 \le t \le 2\pi$$

и да се определи видът на линията, зададена с горното комплексно параметрично уравнение.

Отг. $\dfrac{x^2}{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2} = 1$, елипса.

ГЛАВА 3

ФУНКЦИОНАЛНИ И СТЕПЕННИ РЕДОВЕ. ОБЛАСТ И РАДИУС НА СХОДИМОСТ

А. Функционални редове в комплексна област. Сходимост.

Дефиниция 1 *Редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots , \tag{3.1}$$

членовете на който са функции на една независима променлива $z = x + iy$, $z \in M$ (област), се нарича ***функционален ред*** *в комплексна област.*

Дефиниция 2 *Сумата*

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z), \tag{3.2}$$

се нарича n-та ***парциална*** *(частична)* ***сума****, а редът*

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots , \tag{3.3}$$

се нарича n-ти ***остатък*** *на сходящия ред (3.1).*

Дефиниция 3 *Редът (3.1) е* ***сходящ*** *в областта M, ако редицата от неговите парциални суми*

$$s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots \tag{3.4}$$

е сходяща в M.

Теорема 1 *Необходимо условие редът (3.1) да е сходящ за $\forall z \in M$ — фиксирано е $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0$.*

Дефиниция 4 *Множеството D от стойности на $z \in M$, при които редът (3.1) е сходящ, се нарича* ***област на сходимост*** *на (3.1).*

Дефиниция 5 ***Сумата на реда*** *(3.1) се нарича функцията $S(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$, дефинирана $\forall z \in D$. Очевидно $S(z) = s_n(z) + R_n(z)$.*

Дефиниция 6 *Казваме, че редът (3.1) е* ***сходящ****, ако* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon, z)$ *така, че* $\forall n > N(\varepsilon, z) \Longrightarrow |s_n(z) - S(z)| < \varepsilon$.

Дефиниция 7 *Редът (3.1) се нарича* ***абсолютно сходящ****, ако е сходящ редът* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$.

Дефиниция 8 *Редът (3.1) се нарича* ***равномерно сходящ*** *в областта* D *със сума* $S(z)$, *ако* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, *но не зависи от* z *така, че* $\forall n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |s_n(z) - S(z)| < \varepsilon, \forall z \in D$.

Теорема 2 *Ако безкрайният числов ред* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ *е сходящ и* $|f_n(z)| \leq a_n$, *редът (3.1) е равномерно и абсолютно сходящ (мажорира се от сходящ числов ред).*

Б. Степенни редове в комплексиа област. Област и радиус на сходимост.

Дефиниция 9 *Функционален ред от вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - z_0)^n = a_0 + a_1(\xi - z_0) + \cdots + a_n(\xi - z_0)^n + \cdots \tag{3.5}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots , \tag{3.6}$$

където z_0 *и* a_k *са комплексни константи, а* z *и* ξ *— комплексни променливи, се нарича* ***степенен ред в комплексна област*** *(*$\xi - z_0 = z$, a_k *— коефициенти на реда).*

Дефиниция 10 *Редът (3.6) е* ***абсолютно сходящ****, ако е сходящ редът* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$.

Област на сходимост на степенен ред

Теорема 3 ***(Теорема на Абел).*** *Ако редът (3.6) е сходящ в точката* $z = z_0 \neq 0$, *то (3.6) е абсолютно сходящ* $\forall z$, *за които* $|z| < |z_0|$, *т.е. във вътрешността на кръг с радиус* $|z_0|$.

Следствие. Ако редът (3.6) е *разходящ* в точката $z = z_0 \neq 0$, то (3.6) е *разходящ* $\forall z$, за които $|z| > |z_0|$.

Радиус на сходимост на степенен ред

Дефиниция 11 *Числото* $|z_0| = R \geq 0$ *се нарича* ***радиус на сходимост*** *на реда (3.6), ако е изпълнено:*

$$\begin{cases} \text{при } |z| < R - \text{редът е сходящ;} \\ \text{при } |z| > R - \text{редът е разходящ;} \\ \text{при } |z| = R - \text{редът е сходящ или разходящ.} \end{cases}$$

Теорема 4 *Ако* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$ *или* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, *то* $R = \dfrac{1}{l}$. *Тогава*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.7}$$

Пример 3.1. Да се изследва *сходимостта* на степенния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^n(n+1)}.$$

Решение. Разглеждаме реда от модулите на членовете на дадения ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(z+1)^n}{3^n(n+1)}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(z+1)^n|}{3^n(n+1)},$$

за които прилагаме допълнението на критерия на Даламбер при общ член $u_n(z) = \dfrac{|(z+1)^n|}{3^n(n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(z+1)^{n+1}|3^n(n+1)}{3^{n+1}(n+2)|(z+1)^n|} = \frac{|z+1|}{3} < 1, \qquad \text{при} \quad |z+1| < 3.$$

От теоремата на Абел следва, че редът е *абсолютно сходящ* в кръга $|z+1| < 3$ и *равномерно сходящ* за $|z+2| \leq r < 3$.

За всяка точка от окръжността (c) : $|z+1| = 3$ от дадения ред получаваме числовия ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$, който е разходящ. Следователно по контура на областта редът е *разходящ*.

Пример 3.2. Изследвайте относно *сходимост* степенния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1-i)^n}.$$

Решение. Редът от модулите на членовете на дадения ред е $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(n+1)}{|(z+1-i)^n|}$.
Прилагаме допълнението на критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+2)|(z+1+i)^n|}{|(z+1-i)^{n+1}|2^n(n+1)} = \frac{2}{|z+1-i|} < 1,$$
$$\text{при} \quad |z+1-i| > 2.$$

Следователно редът е *абсолютно сходящ* в областта $|z+1-i| > 2$ и *равномерно сходящ* за $|z+1-i| \geq r > 2$.

За точките от окръжността $(c) : |z+1-i| = 2$ получаваме числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)$, който е разходящ. Следователно по контура на областта даденият ред е *разходящ*.

Пример 3.3. Определете *областта на сходимост* на степенния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{z}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{z}\right)^n \right].$$

Решение. Областта на сходимост на дадения ред е сечението на областите на сходимост на редовете

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n.$$

По допълнението на критерия на Даламбер определяме областите на сходимост на двата реда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|3^n}{3^{n+1}|z^n|} = \frac{|z|}{3} < 1 \Longrightarrow |z| < 3; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|z^n|}{|z^{n+1}|2^n} = \frac{2}{|z|} < 1 \Longrightarrow |z| > 2.$$

Следователно *областта на сходимост* е $2 < |z| < 3$.

Пример 3.4. Намерете *областта* и *радиуса* на сходимост на реда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n (z-i)^n$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} z^{2n-1}$.

Решение:

а) Общият член на реда е $u_n(z) = n!z^n$, а коефициентите $a_n = n!$. По формула (3.7) имаме

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

И така $R = 0$ или редът е *сходящ* само в точката $z = 0$.

б) От $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n!} \Longrightarrow a_n = \dfrac{1}{n!}$. Тогава

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

И така $R = \infty$, областта на сходимост е $|z| < \infty$, т.е. редът е *сходящ* в цялата комплексна равнина (z).

в) От $u_n(z) = \dfrac{n!}{n^n}z^n \Longrightarrow a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Тогава

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

И така $R = e$, а областта на сходимост е $|z| < e$.

г) Коефициентите на реда са $a_n = \dfrac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}$.

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^{n+1}(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)(1+i)^n}\right| = |1+i| = \sqrt{2} = l.$$

Тогава по Т4 радиусът на сходимост $R = 1/l = 1/\sqrt{2}$, а областта на сходимост е $|z-2| < 1/\sqrt{2}$.

д) Коефициентите на реда са $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n$.

$$\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right|^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{3} = \frac{2}{3} = l.$$

Тогава по Т4 радиусът на сходимост $R = 1/l = 3/2$, а областта на сходимост е $|z-i| < 3/2$.

е) Общият член на реда е $u_n(z) = \dfrac{n}{2^n}z^{2n-1}$, а коефициентите $a_n = \dfrac{n}{2^n}$. По формула (3.7) имаме

1^0. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n2^{n+1}}{2^n(n+1)}\right| = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 2.$

2^0. Прилагаме допълнението на критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(n+1)z^{2n+1}}{nz^{2n-1}2^{n+1}}\right| = \frac{|z|^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.$$

а) при $\dfrac{|z|^2}{2} < 1 \Longrightarrow |z|^2 < 2 \Longrightarrow |z| < \sqrt{2}$, редът е сходящ;

б) при $\dfrac{|z|^2}{2} > 1 \Longrightarrow |z|^2 > 2 \Longrightarrow |z| > \sqrt{2}$, редът е разходящ.

От а) и б) следва, че $R = \sqrt{2}$ (това е радиусът на сходимост, а не $R = 2$; това е така, защото степените в реда не следват последователно), $R \neq 1$.

3^0. От $z = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow u_n(z) = \pm\dfrac{n}{2^n}2^{(2n-1)/2} = \pm\dfrac{n}{2^n}2^n2^{-1/2} = \pm\dfrac{n}{\sqrt{2}}$,

т.е. редът е разходящ по контура на областта на сходимост.

Забележка. Т4 невинаги е приложима (вж. пр. е)).

Пример 3.5. Намерете *радиуса* и *областта на сходимост* на степенния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n.$$

Изследвайте поведението на реда по границата на неговия кръг на сходимост.

Решение. Коефициентите на реда са $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)![(n+1)!]^2}{(n!)^2(2n+2)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(n!)^2(n+1)^2}{(n!)^2(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4}.$$

И така $R = 1/4$, а областта на сходимост е $(c) : |z| < 1/4$.

Контурът на областта е централна окръжност (c) с радиус $R = 1/4$.

Като заместим $z = R = 1/4$, получаваме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$, който ще изследваме относно сходимост с допълнението на критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 4^n.(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!4^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2n+1) = \infty,$$

т.е. редът е *разходящ* по контура на областта.

ЗАДАЧИ

1. Намерете *областта* и *радиуса на сходимост* на реда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}(z-i)^n$ Отг. $|z-i| < \frac{2}{e}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{3^n(n+1)}$ Отг. $|z-2i| < 3$

3) $\sum_{n=0} \frac{(z+1+i)^n}{5^n(n-i)}$ Отг. $|z+1+i| < 5$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}$ Отг. $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$ Отг. $|z-i| < \sqrt{2}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{(z-1-3i)^n}$ Отг. $|z-1-3i| > 1$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{3^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z+i)^n}$ Отг. $1 < |z+i| < 3$

8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{5^n(1+ni)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1-i)^n}$ Отг. $2 < |z+1-i| < 5$.

ГЛАВА 4

НЯКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНА ОБЛАСТ И ТЕХНИТЕ ОБРАТНИ

А. Полиноми

Полином от n-та степен в комплексната област има вида

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n ,$$

т.е. полиномът е частен случай на степенен ред. При $n = 1$ получаваме *линейна функция*

$$P_1(z) = a_0 + a_1 z.$$

Рационална функция в комплексна област има вида

$$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k z^k}.$$

При $m = n = 1$ получаваме *дробна рационална функция*

$$\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}.$$

Б. Експоненциална функция, натурален логаритъм, степенна и показателна функция

I. *Експоненциална функция – дефиниция, свойства*

Известно е развитието на функцията e^x в степенен ред:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Дефиниция 1

$$w = e^z = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{4.1}$$

Редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z = x + iy$ *е сходящ* $\forall z \in \mathbb{C}$ *(вж. пр. 3.5, б), т.е.* $|z| < \infty$.

Свойства:

1^0. $e^z e^\xi = \sum\limits_0^\infty \frac{z^n}{n!} \cdot \sum\limits_0^\infty \frac{\xi^n}{n!} = \sum\limits_0^\infty \frac{(z+\xi)^n}{n!} = e^{z+\xi}$

2^0. $e^{iz} = \sum\limits_0^\infty \frac{(iz)^n}{n!} = \cos z + i \sin z$

3^0. $e^{-iz} = \sum\limits_0^\infty \frac{(-iz)^n}{n!} = \cos z - i \sin z$

4^0. $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$, $z \in \mathbb{Z}$.

Свойства 2^0 и 3^0 са формули на Ойлер. Свойство 4^0 показва, че експоненциалната функция e^z е периодична с период $T = 2\pi i$. Ако съберем и извадим 2^0 и 3^0 получаваме съответно

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{4.2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \qquad \operatorname{cotg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Забележка. От $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ и свойство $2^0 \Longrightarrow z = re^{i\theta}$. Така получихме Ойлеров (показателен) вид на комплексно число.

Пример 4.1. Запишете в показателен вид числото $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решение. От $z = 1 - i\sqrt{3}$, $(x = 1, y = -\sqrt{3})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$, $\operatorname{tg}\theta = y/x = -\sqrt{3}$ и точката $(1, -\sqrt{3})$ в четвърти квадрант $\Longrightarrow \theta = 5\pi/3$. Тогава

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

II. *Натурален логаритъм - степенна и показателна функции*

Дефиниция 2 *Числото $w = u + iv$ се нарича **натурален логаритъм** на z и бележим $w = Ln\, z$, ако е изпълнено $e^w = z$.*

Задача: *Пресметнете* $w = \operatorname{Ln} z = ?$

Решение. От $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv \wedge e^w = z$

$$\Longrightarrow e^{u+iv} = re^{i\theta} \Longrightarrow e^u e^{iv} = re^{i\theta} \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} e^u = r & \Longrightarrow u = \ln r = \ln|z| \\ v = \theta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Тогава от $w = u + iv = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \Longrightarrow$

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Забележки.

1) Ако $k = 0$ от (4.3) се получава главната част на $\operatorname{Ln} z$.

2) Ако $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\forall z \in \mathbb{C}$ е изпълнено

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \tag{4.4}$$

3) Ако $z, \xi \in \mathbb{C}$, то е изпълнено

$$z^{\xi} = e^{\xi \operatorname{Ln} z}. \tag{4.5}$$

Пример 4.2. Намерете модула r и главната стойност θ на аргумента на комплексното число:

а) $z_1 = e^{2-4i}$; б) $z_2 = e^{3+4i}$.

Решение.

а) От $z_1 = e^{2-4i} = e^2 e^{-4i} \Longrightarrow r = e^2,\ \theta = -4 + 2\pi$;

б) От $z_2 = e^{3+4i} = e^3 e^{4i} \Longrightarrow r = e^3,\ \theta = 4 + 2\pi$.

Пример 4.3. Пресметнете всички стойности на:

а) $\operatorname{Ln} 6$; б) $1^{\sqrt{2}}$; в) $\operatorname{Arccos} 2$.

Решение.

а) $\operatorname{Ln} 6 = \operatorname{Ln}[6(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)] = \ln 6 + i(0^\circ + 2k\pi) = \ln 6 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$, вж. (4.3);

б) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + 2k\pi i)} = e^{2\sqrt{2}k\pi i} =$
$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, вж. (4.3) и (4.4);

в) $\operatorname{Arccos} 2 = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{2^2 - 1}) = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3})$.
От $|2 \pm \sqrt{3}| = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$ или $|2 \pm \sqrt{3}| = 2 \pm \sqrt{3}$, $\arg(2 + \sqrt{3}) = 0$
$\Longrightarrow \operatorname{Arccos} 2 = \frac{1}{i}[\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(0^\circ + 2k\pi)] = 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$.

Пример 4.4. Пресметнете:

а) $\operatorname{Ln} i$; б) i^i; в) i^{i^i}.

Решение.

а) $\operatorname{Ln} i = \operatorname{Ln}(0 + 1i) = \operatorname{Ln}\left[1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\right] = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$, вж. (4.3);

б) $i^i = e^{i\mathrm{Ln}\, i} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, (вж. а);

в) $i^{(i^i)} = i^{e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}} = e^{e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\mathrm{Ln} i} = e^{[e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i]}$
$= \left[e^{(\frac{\pi}{2}+2m\pi)i}\right]^{e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}} = e^{i\frac{\pi}{2}e^{-(\frac{\pi}{2}+2m\pi)}}.$

В. Тригонометрични и обратни тригонометрични функции – дефиниция, свойства

Известно е развитието на функциите $\sin x$ и $\cos x$ в степенни редове:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad x \in \mathbb{R}.$$

Дефиниция 3

$$w = \sin z = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \tag{4.6}$$

$$w = \cos z = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \tag{4.7}$$

Редовете (4.6) и (4.7) са сходящи $\forall z \in \mathbb{C}$. Освен това

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Свойства:

- $\sin(-z) = -\sin z$;
- $\cos(-z) = \cos z$;
- $\sin(z+\xi) = \sin z \cos \xi + \sin \xi \cos z$;
- $\cos(z+\xi) = \cos z \cos \xi - \sin z \sin \xi$;
- $\left.\begin{array}{l} \sin(z+2\pi) = \sin z\,; \\ \cos(z+2\pi) = cos z\,; \end{array}\right\}$ периодични с период 2π
- $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$ – *не е вярно!*

Обратни тригонометрични функции

Дефиниция 4 *Ако $w = f(z)$, $z \in M_z$, т.е. $f : M_z \to M_w$ и изображението f е биективно, то съществува изображение $f^{-1} : M_w \to M_z$ и f^{-1} се нарича обратна функция на f.*

Задача: *Пресметнете* $w = \arccos z = ?$

Решение. От $w = \arccos z \Longrightarrow \cos w = z \Longrightarrow \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$
$\Longrightarrow (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0 \Longrightarrow e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$
$\Longrightarrow iw = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\,) \Longrightarrow w = \arccos z = -i\ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\,)$.

Аналогично получаваме:

$$\left|\begin{array}{ll} \arcsin z = -i\ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\,), & \arccos z = -i\ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\,), \\ \operatorname{arctg} z = -i\ln\sqrt{\dfrac{1 + iz}{1 - iz}}, & \operatorname{arccotg} z = -i\ln\sqrt{\dfrac{iz - 1}{iz + 1}} \end{array}\right. \tag{4.8}$$

Г. Хиперболични функции и техните обратни – дефиниции

Дефиниция 5

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad th\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad cth\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Тогава, като приложим (4.2), получаваме:

$$\left|\begin{array}{ll} \sin(iz) = \dfrac{e^{-z} - e^z}{2i} = \dfrac{-1}{i}\,\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = i\operatorname{sh} z, & \cos(iz) = \dfrac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{tg}(iz) = i\operatorname{th} z, & \operatorname{cotg}(iz) = -i\operatorname{cth} z. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Задача: *Пресметнете* $w = \operatorname{Argsh} z = ?$

Решение. От $w = \operatorname{Argsh} z \Longrightarrow \operatorname{sh} w = z \Longrightarrow \dfrac{e^w - e^{-w}}{2} = z \Longrightarrow (e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0 \Longrightarrow e^w = z \pm \sqrt{z^2 + 1} \Longrightarrow w = \operatorname{Argsh} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\,)$.

Аналогично получаваме:

$$\left|\begin{array}{ll} \operatorname{Argsh} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\,), & \operatorname{Argch} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\,), \\ \operatorname{Argth} z = \ln\sqrt{(1 + z)/(1 - z)}\,, & \operatorname{Argcth} z = \ln\sqrt{(z + 1)/(z - 1)}\,. \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Пример 4.5. Докажете тъждествата:

а) $\cos(-z) = \cos z$; б) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$.

Доказателство:

а) Като използваме формули (4.2) получаваме

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z\,.$$

б) По формули (4.2) получаваме последователно

$$
\begin{aligned}
&\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{2}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{2i}\frac{1}{2}(e^{iz_2} - e^{-iz_2})(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \\
&= \frac{1}{4i}\Big(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} \\
&\quad - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\Big) = \frac{1}{4i}(2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin(z_1 + z_2)\,.
\end{aligned}
$$

Пример 4.6. Изразете функцията $\cos z$ чрез тригонометрични и хиперболични функции, определете $\operatorname{Re}\cos z$, $\operatorname{Im}\cos z$ и $|\cos z|$.

Решение. Като използваме формула (4.9) получаваме

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y\,.$$

Тогава:

$$\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y\,, \qquad \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y\,,$$

$$
\begin{aligned}
|\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \cos^2 x)\operatorname{sh}^2 y} \\
&= \sqrt{\cos^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}\,.
\end{aligned}
$$

Пример 4.7. Намерете множеството от точки z в комплексната равнина (z), за които функцията $\cos z$ приема

а) само реални стойности; б) чисто имагинерни стойности.

Решение.

а) Само реалните стойности на $\cos z$ ще получим от условието $\operatorname{Im}\cos z = 0$. От пример 4.6 $\operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$. Тогава от

$$-\sin x \operatorname{sh} y = 0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \sin x = 0,\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sh} y = 0,\ \ y = 0. \end{array}\right.$$

Следователно $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Чисто имагинерни стойности на $\cos z$ ще получим от условието (вж. пример 4.6)

$$\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y = 0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}(2l + 1),\ l \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ch} y \neq 0. \end{array}\right.$$

Следователно $z = (2l + 1)\frac{\pi}{2} + iy$, $l \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧИ

1. Запишете в показателен вид числото:

а) $1+i$ Отг. $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

б) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha,\ 0<\alpha<2\pi$ Отг. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}e^{\frac{\alpha}{2}i}$.

2. Докажете тъждествата:

а) $\sin(-z)=-\sin z$;

б) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

3. Пресметнете всички стойности на:

а) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ Отг. $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}e^{(\frac{1}{4}-2k)\pi}$

б) $\mathrm{Arcsin}\dfrac{1}{2}$ Отг. $\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$.

4. Изследвайте относно сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin iz}{3^n}$

Отг. Абс. сходящ.

Упътване. Приложете критерия на Даламбер за реда от абсолютните стойности.

ГЛАВА 5

АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ И УСЛОВИЯ НА КОШИ-РИМАН. СВОЙСТВА

А. Аналитична функция в комплексна област и в точка

Дадена е функцията $w = f(z)$, $z = x + iy$, $z \in M_z$, която е диференцируема и еднозначна в дефиниционната си област M_z.

Дефиниция 1 *Функцията $f(z)$ се нарича* ***аналитична*** *(регулярна, холоморфна)* ***в областта*** *M_z и бележим $f(z) \in \boldsymbol{A}(M_z)$, ако $\forall z \in M_z$, $\exists f'(z) \in \boldsymbol{C}(M_z)$.*

Дефиниция 2 *Функцията $f(z)$ е* ***аналитична в точката*** *$z_0 \in M_z$, ако $f(z)$ е диференцируема в околност на z_0.*

Теорема 1 *Необходимо и достатъчно условие функцията $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ да бъде аналитична е функциите $\mathrm{Re}w = u(x,y)$ и $\mathrm{Im}w = v(x,y)$ да са диференцируеми и да са изпълнени условията на Коши-Риман:*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{array} \right. \tag{5.1}$$

Дефиниция 3 *Уравненията*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad и \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,,$$

получени от (5.1) посредством диференциране съответно по x и y, се наричат ***уравнения на Лаплас.***

Дефиниция 4 *Всяка функция $f(z)$, която удовлетворява уравнението на Лаплас, се нарича* ***хармонична*** *функция.*

Дефиниция 5 *Ако $f(z)$ е аналитична функция в M_z, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ са хармонични функции и се наричат* ***взаимноспрегнати.***

Б. Основни свойства на аналитичните функции

1^0. Ако $f_1(z)$, $f_2(z) \in \boldsymbol{A}(M_z)$, то $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ и $f_1(z)/f_2(z)$, $f_2(z) \neq 0$ са също аналитични в M_z.

2^0. Ако $w = \varphi(z)$, $\varphi : M_z \to M_w$, $\varphi(z) \in A(M_z)$ и $f(w) = A(M_w)$, то $f[\varphi(z)] \in A(M_z)$ и $\Big(f[\varphi(z)]\Big)' = f'(w)\varphi'(z)$.

3^0. Ако $w = f(z) \in A(M_z)$, $f'(z) \neq 0$, то $f^{-1}(w) \in A(M_z)$ и $(f^{-1}(w))' = \dfrac{1}{f'(z)}$.

4^0. Ако $w = f(z) \in A(M_z)$ и $\mathrm{Re}w = u(x,y)$ е известна, то $\mathrm{Im}w = v(x,y)$ се определя с точност до константа (ако $\mathrm{Im}w = v(x,y)$ е известна, $\mathrm{Re}w = u(x,y)$ се определя с точност до константа).

5^0. Всеки полином $P_n(z)$ е аналитична функция.

Пример 5.1. Аналитични ли са функциите:

а) $w = z^3$; б) $w = \bar{z}|z|$; в) $w = \dfrac{z}{\bar{z}|z|}$; г) $w = \cos z$; д) $w = e^z \sin z$.

Решение.

а) $\mathrm{Re}w = u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $\mathrm{Im}w = v(x,y) = 3x^2y - y^3$ (вж. пр. 2.1.)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогава $w = z^3$ (вж. (5.1)) е *аналитична функция* (всеки полином е аналитична функция).

б) $w = \bar{z}|z| = (x - iy)\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{x^2+y^2} - iy\sqrt{x^2+y^2}$
$\Longrightarrow \mathrm{Re}w = u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}w = v(x,y) = -y\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sqrt{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогава $w = \bar{z}|z|$ (вж. (5.1)) *не е аналитична функция.*

в) Функцията $w = \dfrac{z}{\bar{z}|z|}$ има за числител полином от първа степен, който е аналитична функция. Знаменатилят не е аналитична функция (вж. б)) и тогава $w = \dfrac{z}{\bar{z}|z|}$ *не е аналитична функция* (вж. свойство 1^0).

г) $w = \cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy)$
$= \cos x\mathrm{ch}\, y - i\sin x\mathrm{sh}\, y$ (вж. 4.6)
$\Longrightarrow \mathrm{Re}w = u(x,y) = \cos x\mathrm{ch}\, y$, $\mathrm{Im}w = v(x,y) = -\sin x\mathrm{sh}\, y$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\sin x\mathrm{ch}\, y\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sin x\mathrm{ch}\, y\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \cos x\mathrm{sh}\, y\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\cos x\mathrm{sh}\, y\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогава $w = \cos z$ (вж. (5.1)) е *аналитична функция.*

д) $w = e^z\sin z = e^{x+iy}\sin(x+iy) = e^x e^{iy}[\sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy)]$
$= e^x(\cos y + i\sin y)(\sin x\,\mathrm{ch}\, y + i\cos x\,\mathrm{sh}\, y)$
$= e^x(\sin x\cos y\mathrm{ch}y - \cos x\sin y\mathrm{sh}y) + ie^x(\sin x\sin y\mathrm{ch}y + \cos x\cos y\mathrm{sh}y)$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x(\ \sin x\cos y\mathrm{ch}\, y - \cos x\sin y\mathrm{sh}\, y\\ &\qquad + \cos x\cos y\mathrm{ch}\, y + \sin x\sin y\mathrm{sh}\, y)\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x(\ \sin x\cos y\mathrm{ch}\, y + \sin x\sin y\mathrm{sh}\, y\\ &\qquad - \cos x\sin y\mathrm{sh}\, y + \cos x\cos y\mathrm{ch}\, y)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= e^x(\ -\sin x\sin y\mathrm{ch}\, y + \sin x\cos y\mathrm{sh}\, y\\ &\qquad - \cos x\cos y\mathrm{sh}\, y - \cos x\sin y\mathrm{ch}\, y)\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x(\ \sin x\sin y\mathrm{ch}\, y + \cos x\cos y\mathrm{sh}\, y\\ &\qquad + \cos x\sin y\mathrm{ch}\, y - \sin x\cos y\mathrm{sh}\, y)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогава $w = e^z\sin z$ (вж. 5.1) е *е аналитична функция.*

Забележка. Може да се докаже, че $w_1 = e^z$ и $w_2 = \sin z$ са аналитични функции и тогава $w = e^z\sin z$ е аналитична функция по свойство 1^0.

Пример 5.2. Определете областта на аналитичност за функциите:

а) $\mathrm{Ln}\, z$; б) $z^2\bar{z}$; в) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$; г) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\, z + \mathrm{cotg}\, z}$.

Решение.

а) Функцията $f(z) = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ има реална част $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ и имагинерна част $v(x,y) = \mathrm{arctg}\,(y/x) + 2k\pi$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}\quad x^2+y^2\neq 0$$

Следователно условията на Коши са изпълнени за всяка двойка (x, y), когато $x^2 + y^2 \neq 0$. Тогава функцията $z = \operatorname{Ln} z$ *е аналитична* за всяко $z \neq 0$.

б) $f(z) = z^2\bar{z}$ е произведение от функциите $\varphi_1(z) = z^2$, която е аналитична (всеки полином е аналитична функция) и $\varphi_2(z) = \bar{z}$, която не е аналитична $\left(u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y,\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \dfrac{\partial u}{\partial y} \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$. Следователно дадената функция *не е аналитична.*

в) $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$ е частно на функциите $\varphi_1(z) = e^z + 1$ и $\varphi_2(z) = e^z - 1$. Разглеждаме $\psi(z) = e^z$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Longrightarrow u(x,y) = e^x \cos y,\ v(x,y) = e^x \sin y$$

$$\left|\begin{array}{ll} u_x = e^x \cos y, & v_x = e^x \sin y \\ u_y = -e^x \sin y, & v_y = e^x \cos y \end{array}\right\} \Longrightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Следователно $\psi(z) = e^z$ *е аналитична* функция в цялата комплексна равнина.

Функцията $\varphi_1(z) = e^z + 1$ е сума от аналитични функции (всяка константа е полином от нулева степен) и следователно *е аналитична* функция в цялата комплексна равнина.

Функцията $\varphi_2(z) = e^z - 1$ също е аналитична функция в цялата комплексна равнина. От свойство 1^0 следва, че $\varphi_2(z) = e^z - 1 \neq 0$, когато $e^z \neq 1 \Longrightarrow z \neq 0$.

Следователно дадената функция *е аналитична в цялата комплексна равнина с изключение на точката* $z = 0$.

г) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{cotg} z} = \dfrac{\sin z \cos z}{\sin^2 z + \cos^2 z} = \dfrac{1}{2} 2 \sin z \cos z = \dfrac{1}{2} \sin 2z,$

$$\begin{aligned} \sin 2z &= \sin 2(x + iy) = \sin 2x \cos 2iy + \cos 2x \sin 2iy \\ &= \sin 2x \operatorname{ch} 2y + i \cos 2x \operatorname{sh} 2y \end{aligned}$$

$\Longrightarrow u(x,y) = \sin 2x \operatorname{ch} 2y, \quad v(x,y) = \cos 2x \operatorname{sh} 2y\,.$

$$\left|\begin{array}{ll} u_x = 2\cos 2x \operatorname{ch} 2y, & v_x = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y \\ u_y = 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y, & v_y = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y \end{array}\right\} \Longrightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Следователно функцията *е аналитична* във всички точки от равнината, в които са дефинирани $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$ и $\operatorname{tg} z + \operatorname{cotg} z$:

- $\operatorname{tg} z$ е дефинирана за $\forall z \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$;
- $\operatorname{cotg} z$ е дефинирана за $\forall z \neq k\pi$;

- $\operatorname{tg} z + \operatorname{cotg} z$ е дефинирана за $\forall z \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Дадената функция *е аналитична за всички точки от комплексната равнина, различни от* $k\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 5.3. Намерете аналитична функция, за която $\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = -(e^x + 2\mathrm{ch}\, x)\sin y$ и $\mathrm{Im} f(z) = v(x,y) = (e^x + 2\mathrm{sh}\, x)\cos y$.

Решение. Частните производни на дадените функции са:

$$\left| \begin{array}{l} u_x = -(e^x + 2\mathrm{sh}\, x)\sin y, \;\; v_x = (e^x + 2\mathrm{ch}\, x)\cos y \\ u_y = -(e^x + 2\mathrm{ch}\, x)\cos y, \;\; v_y = -(e^x + 2\mathrm{sh}\, x)\sin y \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ условията на Коши-Риман $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ са изпълнени и *дадените функции могат да се разглеждат като реална и имагинерна части на аналитична функция*:

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= -e^x \sin y - 2\mathrm{ch}\, x \sin y + i(e^x \cos y + 2\mathrm{sh}\, x \cos y) \\ &= i^2 e^x \sin y + i e^x \cos y - 2\mathrm{ch}\, x \sin y + i 2\mathrm{sh}\, x \cos y \\ &= i e^x(\cos y + i \sin y) - 2(\cos ix \sin y - \sin ix \cos y) \end{aligned}$$
$$= ie^x e^{iy} - 2\sin(y - ix) = ie^{x+iy} + 2\sin(ix + i^2 y) = ie^{x+iy} + 2\sin i(x+iy)$$
$$\Longrightarrow f(z) = ie^z + 2\sin iz = ie^z + 2i\mathrm{sh}\, z\,.$$

Пример 5.4. Намерете аналитична функция $w = f(z)$, за която $\mathrm{Im} w = v(x,y) = x^2 - y^2$, ако $w(1) = i$.

Решение. Търсим аналитична функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и тогава за нея са изпълнени условията (5.1):

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x\,. \end{array} \right.$$

От първото условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y \Longrightarrow \int du = -2y \int dx + \varphi(y) \Longrightarrow u(x,y) = -2xy + \varphi(y).$$

При интегрирането $\varphi(y)$ е интеграционна константа. Заместваме във второто условие (възможно е да започнем с него):

$$\frac{\partial[-2xy + \varphi(y)]}{\partial y} = -2x \Longrightarrow -2x + \varphi'(y) = -2x \Longrightarrow \varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = c = \mathrm{const}.$$

Тогава $\mathrm{Re}w = u(x,y) = -2xy + c$, а търсената функция е

$$w = f(z) = (-2xy + c) + i(x^2 - y^2)\,.$$

Наличието на константата c показва, че има безброй такива функции. От допълнителното условие $w(1) = i \Longrightarrow z = 1$, а от

$$\left| \begin{array}{l} z = 1 = 1 + 0i \\ z = x + iy \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \right. .$$

Тогава $w(1) = (-2.1.0 + c) + i(1^2 - 0^2) = i \Longrightarrow c + i = i \Longrightarrow c = 0$. Като заместим, получаваме $w = f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2)$. Ако е възможно, изключваме x и y така:

$$\text{От} \quad \left| \begin{array}{l} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\Longrightarrow w = f(z) = -2\frac{z + \bar{z}}{2}\,\frac{z - \bar{z}}{2i} + i\left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2\right]$$

$$= \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) + i\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} = \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) + \frac{i}{2}(z^2 + \bar{z}^2) = iz^2\,,$$

т.е. търсената аналитична функция е $w = f(z) = iz^2$.

Забележка. Тъй като търсената функция е аналитична, за проверка на задачата можем да поставим *обратната задача*:

Дадена е функцията $w = iz^2$. Проверете дали е аналитична.

Пример 5.5. Намерете航аналатична функция $w = f(z)$, за която $\mathrm{Re}w = u(x,y) = \operatorname{arctg}(x/y)$, ако $w(i) = 0$, $z \neq 0$.

Решение. Търсената функция е $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, за която са изпълнени условията (5.1):

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\,\dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \\[3ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\left(\dfrac{-x}{y^2}\right) = \dfrac{-x}{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right. .$$

От първото условие

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \int dv = \int \frac{y\,dy}{x^2 + y^2} + \varphi(x)$$

$$\Longrightarrow v(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \varphi(x)),$$

където $\varphi(x)$ е интеграционна константа. Заместваме във второто условие

$$\frac{\partial\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(x)\right]}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\Longrightarrow\frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2}+\varphi'(x)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow\varphi'(x)=0\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=0\Longrightarrow\mathrm{d}\varphi(x)=0\Longrightarrow\varphi(x)=c=\text{const}.$$

И така, $w=f(z)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+i\Big(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c\Big)$. От $w(i)=0\Longrightarrow z=i$.

$$\text{От}\quad\left|\begin{array}{l}z=i=0+1.i\\ z=x+iy\end{array}\right.\quad\Longrightarrow\quad\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=1.\end{array}\right.$$

Тогава $w(i)=\operatorname{arctg}\dfrac{0}{1}+i\Big(\dfrac{1}{2}\ln 1+c\Big)=0\Longrightarrow c=0$

$$\Longrightarrow w=f(z)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{i}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{i}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}+i\Big(\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)=\frac{\pi}{2}+i(\ln|z|+i\arg z)=\frac{\pi}{2}+i\ln z.$$

Пример 5.6. Намерете аналитична функция, за която

$$\operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=2e^x\cos y+x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3,\qquad f(0)=1+2i.$$

*Решение.*За да бъде функцията аналитична, трябва да са изпълнени условията (5.1)

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2e^x\cos y+3x^2+12xy-3y^2,\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-2e^x\sin y+6x^2-6xy-6y^2.\end{array}\right.\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2e^x\sin y+6x^2-6xy-6y^2,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\cos y-3x^2-12xy+3y^2.\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int(-2e^x\sin y+6x^2-6xy-6y^2)\mathrm{d}x+\varphi(y)$$

$$=-2e^x\sin y+2x^3-3x^2y-6xy^2+\varphi(y)\,.$$

За намиране на интеграционната константа $\varphi(y)$ диференцираме получената функция $u(x,y)$ по аргумента на константата:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\cos y-3x^2-12xy+\varphi'(y)$$

$$\Longrightarrow-2e^x\cos y-3x^2-12xy+\varphi'(y)=-2e^x\cos y-3x^2-12xy+3y^2$$

$$\Longrightarrow\varphi'(y)=3y^2\,,\qquad\varphi(y)=\int 3y^2\mathrm{d}y=y^3+c$$

Тогава $\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = -2e^x \sin y + 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + c$.

От допълнителното условие $f(0) = 1 + 2i \Longrightarrow u(0,0) = 1$.

$$u(0,0) = c \Longrightarrow c = 1 \Longrightarrow$$

$$f(z) = -2e^x \sin y + 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + 1 + i(2e^x \cos y + x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3).$$

За да изключим x и y от получения израз, използваме следните зависимости:

$$(x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3\ ,$$

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad \text{(формула на Ойлер.)}$$

Използваме още, че $i^2 = -1$.

Групираме събираемите по следния начин:

$$(2i^2 e^x \sin y + 2ie^x \cos y) + (2x^3 + 6ix^2y - 6xy^2 - 2iy^3) + (ix^3 + 3i^2xy - 3ixy^2 - i^2y^3) + 1$$
$$= 2ie^x(\cos y + i \sin y) + 2(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + i(x^3 + 3ixy - 3xy^2 - iy^3)$$
$$= 2ie^x e^{iy} + 2(x+iy)^3 + i(x+iy)^3 + 1 = 2ie^{x+iy} + (2+i)(x+iy)^3 + 1$$
$$\Longrightarrow f(z) = 2ie^z + (2+i)z^3 + 1\,.$$

ЗАДАЧИ

Намерете *аналитична функция* $w = f(z)$ по зададена $\mathrm{Re}\, f(z)$ или $\mathrm{Im}\, f(z)$:

1) $v(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin 2y + 2xy$; $f(0) = 0$;

Отг. $f(z) = e^z \mathrm{sh} z + z^2 - \frac{1}{2}$

2) $u(x,y) = x \ln(x^2+y^2) - 2y \mathrm{arctg} \dfrac{y}{x} - \sin x \mathrm{sh} y$, $x^2 + y^2 \neq 0$;

Отг. $f(z) = 2z \ln z + i \cos z + ic$

3) $v(x,y) = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(1) = i - 2$;

Отг. $f(z) = 2i \ln z + z(i-2)$

4) $v(x,y) = 2xy + e^x \sin y - 2 \sin x \mathrm{sh} y$, $f(0) = 3$;

Отг. $f(z) = z^2 + e^z + 2\cos z$

5) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^x \sin y$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(1) = i$;

Отг. $f(z) = ie^z + 2 \ln z$

6) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 9x + y - e^x \cos y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(1) = 9 + i$

Отг. $f(z) = z^2 + (9-i)z - e^{-iz} - \frac{i}{z} + (3 - \sin 1)i$

7) $v(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(1) = i$;

Отг. $f(z) = (1+i)z^3 + \ln z$

8) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2(e^x \sin y + 1)$, $f(0) = 2 + 2i$;

Отг. $f(z) = z^3 - 2ie^z + 2 + 4i$.

ГЛАВА 6

КОНФОРМНО ИЗОБРАЖЕНИЕ

Дадени са две области $\mathfrak{D}_z$ и $\mathfrak{D}_w$ съответно в равнините $(z) : Oxy$ и $(w) : O'uv$, $\mathfrak{D}_z, \mathfrak{D}_w \in \mathbb{R}^2$. Разглеждаме изображение $f : \mathfrak{D}_z \to \mathfrak{D}_w$, т.е. дадена е функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, u)$, $z = x + iy$ с дефиниционна област $\mathfrak{D}_z$. Предполагаме, че $\exists f'(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \mathfrak{D}_z$.

$f'(z_0) = \text{const}$ е комплексно число, на което съответства точка в равнината (z) и $f'(z_0) = |f'(z_0)|[\cos(\arg f'(z_0)) + i \sin(\arg f'(z_0))]$.

Ще установим, че $|f'(z_0)|$ е *коефициент на разтягане или свиване на изображението f, определено от функцията $w = f(z)$.*

Доказателство.

1. На точката $z_0 \in (z)$, $z_0 \in \mathfrak{D}_z$ чрез f съответства точка $w_0 \in (w)$, $w_0 \in \mathfrak{D}_w$, т.е. $w_0 = f(z_0)$.
2. На гладка линия $(c) \in (z)$, $z_0 \in (c)$ чрез f съответства гладка линия $(\bar{c}) \in (w)$, $w_0 \in (\bar{c})$.
3. На точката $z = z_0 + \Delta z$, $z \in (c)$ чрез f съответства точка $w = w_0 + \Delta w$, $w \in (\bar{c})$.

$$\text{От} \quad \exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} \Longrightarrow |f'(z_0)| = \frac{|dw|}{|dz|}.$$

4. От $z = x + iy \Longrightarrow dz = dx + idy \Longrightarrow |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ (линеен елемент на (c) в z_0).

   От $w = u + iv \Longrightarrow dw = du + idv \Longrightarrow |dw| = \sqrt{du^2 + dv^2} = d\sigma$ (линеен елемент на $(\bar{c})$ в w_0).

И така, $|f'(z_0)| = \dfrac{d\sigma}{ds} = k$, т.е. $k = f'(z_0)$ може да се разглежда като коефициент на линейно преобразуване на равнината (w): когато $k > 1$ равнината (w) се разтяга, а при $0 < k < 1$ - равнината (w) се свива.

Може да се установи, че $\arg f'(z_0)$ е ъгълът, на който трябва да се завърти тангентата t в точката z_0 към (c), докато получи направлението на тангентата $\bar{t}$ в w_0 към $(\bar{c})$.

Дефиниция 1 *Изображението $w = f(z)$ се нарича **конформно**, когато запазва ъгъла между кривите в точката z_0 от (z) по посока и големина.*

Теорема 1 *Необходимо и достатъчно условие изображението $w = f(z)$ да бъде конформно в точката z_0 е:*

$$\begin{cases} f(z) \in A(\mathfrak{D}_z) \\ f'(z) \neq 0, \qquad \forall z \in \mathfrak{D}_z \,. \end{cases} \tag{6.1}$$

Пример. Докажете, че функцията $w = az + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$ определя конформно изображение на $\mathfrak{D}_z$ върху $\mathfrak{D}_w$.

Доказателство. От $w = az + b = a(x + iy) + b = (ax + b) + iay \Longrightarrow$ $\operatorname{Re} w = u(x, y) = ax + b$, $\operatorname{Im} w = v(x, y) = ay$. Условията (5.1) на Коши-Риман са изпълнени, защото

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = a \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \,. \end{array} \right.$$

Следователно $w(z) \in A(\mathfrak{D}_z)$, $w'(z) = a \neq 0$. Тогава от T1 $\Longrightarrow$ $w = az + b$ е конформно изображение.

Частни случаи.

1. $w = az + b$, $a = 1$, $b \in \mathbb{C}$.

   От $w = z + b$ и дефиницията за сума на две комплексни числа $\Longrightarrow$ точката w се получава чрез *транслация* с вектор $\vec{b}$.
2. $w = az + b$, $a = k$, $b = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

   От $w = kz = kre^{i\theta} \Longrightarrow |w| = kr$, $\arg z = \arg w$, т.е. точката w се получава чрез *централно подобие*.
3. $w = az + b$, $|a| = 1$, $b = 0$.

   От $a = 1e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $w = az = 1e^{i\alpha}re^{i\theta} = re^{i(\alpha+\theta)} \Longrightarrow |w| = r$, $\arg w = \alpha + \theta$, т.е. точката w се получава чрез *ротация*.

И така, най-общата линейна трансформация $w = az + b$ се свежда до извършване на три последователни трансформации: транслация, централно подобие и ротация.

Пример 6.1. С помощта на функцията $w = 1/z$, $z \neq 0$ намерете:

а) образите на точките $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ и $C(0, -2)$;
б) образа на линията $(c) : x = 4$;
в) образа на фамилията окръжности $x^2 + y^2 = ax$, $a \neq 0$.

Решение.

а) От $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$$\Longrightarrow \operatorname{Re} w = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} w = v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Условията (5.1) на Коши-Риман са изпълнени, защото

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{array} \right.$$

Следователно $w(z)$ е аналитична функция, $w' = -\dfrac{1}{z^2} \neq 0$, $z \neq 0$. Тогава от T1 $\Longrightarrow w = \dfrac{1}{z}$ е конформно изображение в равнината (z) без точката $O(0,0)$.

$$\bar{A}: \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2} \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \bar{A}\Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big).$$

От $B(2,4) \Longrightarrow z = 2+4i \Longrightarrow w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2+4i} = \dfrac{2-4i}{2^2+4^2} = \dfrac{2-4i}{20}$ $= \frac{1}{10} - i\frac{1}{5} \Longrightarrow \bar{B}\big(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\big)$.

От $C(0,-2) \Longrightarrow z = -2i \Longrightarrow w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{-1}{2i} = \dfrac{1}{2}i \Longrightarrow \bar{C}\big(0, \frac{1}{2}\big)$.

б) От $(c): x = 4$, като означим $\bar{c} = w(c)$, имаме

$$\bar{c}: \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{4}{16+y^2} \\ v = -\dfrac{y}{16+y^2} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{4}{u} = -\frac{y}{v} \Longrightarrow y = -\frac{4v}{u}.$$

Тогава от

$$u = \frac{4}{16 + \dfrac{16v^2}{u^2}} \Longrightarrow 4u^2 + 4v^2 = u \Longrightarrow (\bar{c}): \Big(u - \frac{1}{8}\Big)^2 + (v-0)^2 = \Big(\frac{1}{8}\Big)^2.$$

И така правата $x = 4$ от (z) посредством изображението $w = 1/z$ се трансформира в окръжност $\bar{c}$ от (w).

в) Като положим $x = yt$, t-параметър, получаваме параметричните уравнения на фамилията окръжности $(c_i): x^2+y^2 = ax$, $(c_i): \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at}{1+t^2}. \end{array} \right.$

Тогава

$$u = \frac{at^2/(1+t^2)}{a^2t^2/(1+t^2)} = \frac{1}{a}, \quad v = -\frac{at/(1+t^2)}{a^2t^2/(1+t^2)} = -\frac{1}{at}.$$

И така $(\bar{c}_i): \left| \begin{array}{l} u = 1/a \\ v = -1/(at) \end{array} \right.$ е образ на (c_i) при $w = 1/z$, т.е. фамилия от прави, които са успоредни на оста $O'v$ (без $O'v$).

Забележка: Фамилията окръжности $x^2 + y^2 = by$, $b \neq 0$, има за образ $(\bar{c}_i): \left|\begin{array}{l} u = t/b \\ v = -1/b \end{array}\right.$, или фамилия от прави, които са успоредни на оста $O'u$ (без $O'u$).

Пример 6.2. Чрез трансформацията $w = 2z + 1$ намерете образа на окръжността $(c) : x^2 + y^2 = 1$.

Решение. От $w = 2z + 1 = 2(x + iy) + 1 = (2x + 1) + i2y \Longrightarrow u = 2x + 1$, $v = 2y$. От условията (5.1) на Коши-Риман и Т1 следва, че $w = 2z + 1$ е конформно изображение (вж. пример 6.1).

$$\text{От} \quad \left|\begin{array}{l} u = 2x + 1 \\ v = 2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{u-1}{2} \\ y = \dfrac{v}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow (\bar{c}) : \left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1\,.$$

И така, образът е окръжност $(\bar{c}) : (u - 1)^2 + v^2 = 2^2$.

Пример 6.3. Чрез трансформацията $w = -z^2$ намерете образа на правата $(c) : x + y = 1$ в равнината (w).

Решение. От $w = -z^2 = -(x + iy)^2 = (y^2 - x^2) + i(-2xy) \Longrightarrow u = y^2 - x^2$, $v = -2xy$. Чрез условията (5.1) на Коши-Риман и Т1 установяваме, че $w = -z^2$ е конформно изображение (вж. пример 6.1).

Отрезите на правата (c) от координатните оси са $m = n = 1$, т.е. $(c) \bigcap Ox = A(1,0)$, $(c) \bigcap Oy = B(0,1)$.

От $A(1,0) \Longrightarrow \bar{A} : u = -1$, $v = 0$ или $\bar{A}(-1,0)$. От $B(0,1) \Longrightarrow \bar{B} : u = 1, v = 0$ или $\bar{B}(1,0)$. Образът на правата (c) е

$$(\bar{c}) : \left|\begin{array}{l} u = y^2 - x^2 = (1-x)^2 - x^2 = 1 - 2x \\ v = -2xy = -2x(1-x) = 2x^2 - 2x \end{array}\right. \Longrightarrow (\bar{c}) : v = \frac{u^2 - 1}{2}.$$

От $(\bar{c}) : v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$ при $u = 0 \Longrightarrow v = -\frac{1}{2}$, при $v = 0 \Longrightarrow u = \pm 1$ и тогава *търсеният образ е парабола* с връх $\bar{C}\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, ос $+Ov$ и минаваща през точките $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Пример 6.4. Ако z описва областта $\mathfrak{D}$, която е квадратът $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, намерете образа $\bar{\mathfrak{D}}$ при изображението $w = z^2$.

Решение. От $w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \Longrightarrow u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. От условията (5.1) на Коши-Риман и Т1 следва, че $w = z^2$ е конформно изображение (вж. пример 6.1). Означаваме върховете на квадрата: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$.

а) *върховете на квадрата при изображението*: $O(0,0) \to \bar{O}(0,0)$, $A(1,0) \to \bar{A}(1,0)$, $B(1,1) \to \bar{B}(0,2)$, $C(0,1) \to \bar{C}(-1,0)$.

б) *страните на квадрата при изображението*:

1. $$OA : y = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ v = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u \geq 0 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

или образът на правата OA е полуравнината в първи квадрант над $+O'u$ (вкл. $O'u$).

2. $$OC : x = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u = -y^2 \\ v = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u \leq 0 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

или образът на правата OC е полуравнината във втори квадрант над $-O'u$ (вкл. $-O'u$).

3. $$AB : x = 1 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u = 0,\ v = \pm 2 \\ v = 0,\ u = 1 \end{array} \right.$$

или образът на правата AB е парабола Π_1 с връх $\bar{A}(1,0)$, ос $-O'u$, която минава през точките $\bar{B}(0,2)$ и $(0,-2)$.

4. $$BC : y = 1 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{array} \right. \Longrightarrow u = \frac{v^2}{4} - 1 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u = 0,\ v = \pm 2 \\ v = 0,\ u = -1 \end{array} \right.$$

или образът на правата BC е парабола Π_2 с връх $\bar{C}(-1,0)$, ос $+O'u$, която минава през точките $\bar{B}(0,2)$ и $(0,-2)$.

И така, ако z описва областта $\mathfrak{D}$, заградена от квадрата $OABC$, образът $\bar{\mathfrak{D}}$ при $w = z^2$ е *криволинеен* $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, ограничен от двете параболи Π_1, Π_2 и оста $O'u$ (над $O'u$).

Пример 6.5. За изображението $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ намерете образа на областта $\mathfrak{D}$: $\mathrm{Re}z > 0$, $\mathrm{Im}z > 0$ ($\mathfrak{D}$: $x > 0$, $y > 0$ или $\mathfrak{D}$ е първи квадрант без точките на координатните оси).

Решение. От $w = \dfrac{z-i}{z+i} \Longrightarrow wz + wi = z - i \Longrightarrow z = \dfrac{i(1+w)}{1-w}$. Като вземем предвид, че $z = x + iy$ и $w = u + iv$, получаваме:

$$z = x + iy = \frac{i(1+u+iv)}{1-u-iv} = \frac{(i+iu-v)(1-u+iv)}{(1-u)^2+v^2} = \frac{-2v + i(1-u^2-v^2)}{(1-u)^2+v^2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-2v}{(1-u)^2+v^2}, \qquad y = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}.$$

От $\mathrm{Re}z > 0 \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow v < 0$ (полуравнината под $O'u$).

От $\mathrm{Im}z > 0 \Longrightarrow 1-u^2-v^2 > 0 \Longrightarrow u^2+v^2 < 1$ (вътрешността на централен кръг с радиус 1).

И така, $\bar{\mathfrak{D}}$: $|w| < 1$, $\mathrm{Im}w < 0$, т.е. *вътрешността на централен кръг* под оста $O'u$.

ЗАДАЧИ

1. С помощна на функцията $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ намерете:

   а) образите на линиите $y = x^2$ и $x + y = \frac{1}{4}$;

   Отг. $u^2 = -\dfrac{v^3}{1+v}$, т.е. цисоида; $(u-2)^2 + (v+2)^2 = 8$

   б) образа на снопа прави $y = kx$, $k \neq 0$.

   Отг. $v = -ku$,

   т.е. сноп прави през O (прави от първи и трети квадранти се преобразуват в прави от втори и четвърти квадрант и обратно).

2. Чрез трансформацията $w = iz + 1$ намерете образа на областта $\mathfrak{D}$ (триъгълника) $\{x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1\}$.

   Отг. $\bar{\mathfrak{D}} : \{v = 0,\ u = 1,\ v = u\}$.

3. Намерете образа на окръжността $(c) : |z| = r$ чрез трансформацията $w = z + \frac{1}{z}$.

   Отг. $(\bar{c}) : \dfrac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$

4. Дадена е функцията $w = z^2$.

   а) докажете, че w е аналитична и намерете онези стойности на z, за които изображението е конформно;

   Отг. Равнината (z) без точката $O(0,0)$;

   б) изобразете правите $x = 2$, $y = 1$ от (z) в (w);

   Отг. Параболи $u = -\dfrac{1}{16}v^2 + 4$, $u = \dfrac{1}{4}v^2 - 1$,

   минаващи през точките $(3, \pm 4)$;

   в) намерете образите на линиите $x + y = 1$, $y = x^2$.

   Отг. $(\bar{c}_1) : v = -\dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{2}$, $(\bar{c}_2) : u = \left(\dfrac{v}{2}\right)^{2/3} - \left(\dfrac{v}{2}\right)^{4/3}$

5. С помощта на трансформацията $w = iz + 1$ намерете образите на осите Ox и Oy в (w).

   Отг. $(\bar{c}_1) : u = 1,\ v = t$ (права, успоредна на Ov)

   $(\bar{c}_2) : u = 1 - t,\ v = 0$ (оста Ou)

ГЛАВА 7

ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

А. Дефиниция на интеграл от функция на комплексна променлива

Дадени са функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ с дефиниционна област $\mathfrak{D}_z \in (z)$ и *гладка* крива $(c) \in \mathfrak{D}_z$. Нека $f(z)$ е дефинирана и непрекъсната за точките на (c). Разглеждаме дъгата $\overset{\frown}{AB} \in (c)$.

1^0. *Разбиваме* $\overset{\frown}{AB}$ на n дъги с помощта на точки

$$A = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k, \ldots, z_n = B$$

и означаваме $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

2^0. *Избираме* точка $\xi_k \in (z_{k-1}, z_k)$ и *пресмятаме* $f(\xi_k)$.

3^0. *Образуваме* сумата (числото) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$, която се нарича *Риманова интегрална сума* на $f(z)$ по кривата (c) при това разбиване на $\overset{\frown}{AB}$ и при този избор на точките ξ_k.

При друго разбиване на $\overset{\frown}{AB}$ и при друг избор на точките ξ_k получаваме нова интегрална сума, т.е. налице е неизброимо множество от интегрални суми.

Дефиниция 1 *Функцията $f(z)$ с дефиниционна област $\mathfrak{D}_z$ се нарича **интегруема в Риманов смисъл**, ако*

$$\exists I = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\,,$$

при $\max \Delta z_k \to 0$ *и бележим* $f(z) \in \boldsymbol{R}[c]$.

Дефиниция 2 *Числото I се нарича **интеграл от фнукция на комплексна променлива** и бележим*

$$I = \int\limits_{(c)} f(z)dz\,. \tag{7.1}$$

Забележка. Ако приемем една от посоките на обхождане на линията (c) за положителна, а противната на нея за отрицателна, то имаме

$$\int\limits_{(c^+)} f(z)dz \quad \text{и} \quad \int\limits_{(c^-)} f(z)dz.$$

Теорема 1 *(за съществуване.) Ако линията* (c) *е гладка или по части гладка и има крайна дължина, а* $f(z) \in C[c]$*, то съществува (7.1), при това*

$$\int_{(c)} f(z)dz = \int_{(c)} udx - vdy + i \int_{(c)} vdx + udy \,. \tag{7.2}$$

Б. Свойства (*аналогични на тези при криволинеен интеграл*)

1^0. $\int\limits_{(c)} Af(z)dz = A\int\limits_{(c)} f(z)dz$, $A = \text{const}$, $f(z) \in R[c]$.

2^0. $\int\limits_{(c)} (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int\limits_{(c)} f_1(z)dz \pm \int\limits_{(c)} f_2(z)dz$, $f_1, f_2 \in R[c]$.

3^0. $\int\limits_{(c)=(c_1)\cup(c_2)} f(z)dz = \int\limits_{(c_1)} f(z)dz + \int\limits_{(c_2)} f(z)dz$, $f(z) \in R[c]$, $c_1 \cap c_2 = \emptyset$.

4^0. Ако $f(z) \in R[c]$, то $|f(z)| \in R[c]$ и $\left|\int\limits_{(c)} f(z)dz\right| \le \int\limits_{(c)} |f(z)|dz \le Ms$, където $|f(z)| \le M$, s - дължина на дъга от (c).

5^0. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$, $f(z) \in R[c]$.

6^0. Ако $(c) = (c_1) \cup (c_2) \cup \ldots \cup (c_n)$, $c_i \cap c_j = \emptyset$, $i \ne j$, то

$$\int_{(c)} = \int_{(c_1)} + \int_{(c_2)} + \ldots + \int_{(c_n)} \,.$$

7^0. Нека $(c) = (c_0) \cup (c_1) \cup (c_2) \cup \ldots \cup (c_n)$, където (c_0) е затворен контур, обхващащ затворените контури (c_1), $(c_2), \ldots, (c_n)$, (c_0) е ориентиран положително (обратно на часовниковата стрелка), а останалите - по часовниковата стрелка, тогава:

$$\int_{(c)} f(z)dz = \oint_{(c_0^+)} + \oint_{(c_1^-)} + \oint_{(c_2^-)} + \cdots + \oint_{(c_n^-)} = \oint_{(c_0^+)} - \sum_{j=1}^{n} \oint_{(c_j^+)} \,.$$

В. Пресмятане (два начина)

I начин. По формула (7.2)

$$\int_{(c)} f(z)dz = \int_{(c)} udx - vdy + i\int_{(c)} vdx + udy = I_1 + iI_2\,,$$

където I_1 и I_2 са от вида $\int\limits_{(c)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, т.е. реални криволинейни интеграли от втори род.

И така, интеграл от функция на комплексна променлива *се дефинира* като криволиннен интеграл, а *се изучава* посредством два реални интеграла.

II начин. Нека

$$(c):\ \left|\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{array}\right. \qquad \alpha \le t \le \beta \quad \text{или}$$

$$(c):\ z(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}\,.$$

Тогава $dz(t) = z'(t)dt$ и

$$\int_{(c)} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt\,. \tag{7.3}$$

Разглеждаме $I = \int\limits_{(c)} f(z)dz$, $f(z) \in A[\mathfrak{D}]$. Тогава интегрирането не зависи от пътя на интегриране.

Дефиниция 3 *Непрекъсната крива без точки на самопресичане се нарича* ***проста*** *(Жорданова) крива.*

Дефиниция 4 *Една област $\mathfrak{D}$ се нарича* ***едносвързана****, ако всяка Жорданова затворена крива определя област, която изцяло принадлежи на $\mathfrak{D}$.*

Теорема 2 *(на Коши за едносвързана област.) Ако $f(z) \in A[\mathfrak{D}]$, където $\mathfrak{D}$ е едносвързана област, то за всяка затворена Жорданова крива (c) е изпълнено $\oint\limits_{(c)} f(z)dz = 0$ (интеграл от аналитична функция по затворен контур е винаги нула).*

Следствие I. За всяка двойка криви (c_1) и (c_2) с общо начало точка z_0 и общ край точка z е в сила

$$\int_{(c_1)} f(z)dz = \int_{(c_2)} f(z)dz\,.$$

Следователно, интегралът не зависи от пътя на интегриране, а само от точките z_0 и z и бележим $I = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ (интегралът като функция на горната си граница).

Дефиниция 5 *Функцията $F(z)$, $F'(z) = f(z)$ се нарича **примитивна** на $f(z)$.*

Следствие II. Ако $F_1(z) \neq F_2(z)$ са примитивни функции на $f(z)$, то $F_2(z) - F_1(z) = C = \text{const}$.

Дефиниция 6 *Множеството от всички примитивни функции на $f(z)$ се нарича **неопределен интеграл от** $f(z)$ и се бележи $\int\limits_{(c)} f(z)dz = F(z) + C$, $C = const$.*

Нека $F(z) \neq \Phi(z)$ са примитивни функции на $f(z)$. Според следствие 2 $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi - \Phi(z) = C$ и като положим $z = z_0$ получаваме $C = -\Phi(z_0)$ или

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z} \tag{7.4}$$

(формула на *Нютон-Лайбниц*).

Теорема 3 *(на Коши за многосвързана област.) Ако $f(z) \in A[\mathfrak{D}]$, $\mathfrak{D}$ е многосвързана област с контур (c), избрана положителна посока върху него и затворените Жорданови криви $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, където (c_0) е обхващащ контур за останалите контури и $\tilde{\mathfrak{D}}$ се състои от точките на контурите $(c_1), (c_2), \ldots, (c_n)$ и вън от тях в (c_0), то $f(z) \in A[\tilde{\mathfrak{D}}]$ и е изпълнено*

$$\oint\limits_{(c)} f(z)dz = \oint\limits_{(c_0^+)} + \oint\limits_{(c_1^-)} + \oint\limits_{(c_2^-)} + \cdots + \oint\limits_{(c_n^-)} = 0 \quad \text{или} \quad \oint\limits_{c_0^+} = \sum_{j=1}^{n} \oint\limits_{(c_j^+)} .$$

Пример 7.1. Решете интеграла

$$\int\limits_{(c)} z^3 dz,$$

където $(c)\colon x = y^2$, от $z_0 = 0$ до $z_1 = 1 + i$.

Решение.

I начин. От $z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \Longrightarrow u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. Тогава по формула (7.2) имаме

$$I = \int\limits_{(c)} (x^3 - 3xy^2)dx - (3x^2y - y^3)dy + i\int\limits_{(c)} (3x^2y - y^3)dx + (x^3 - 3xy^2)dy\,.$$

Пътят, по който интегрираме, е дъга от параболата $(c): x = y^2$ от точка $O(0,0)$ до точка $A(1,1)$ върху нея (параболата има връх O и ос $+Ox$). Ще параметризираме (c):

$$\text{От}\quad (c): \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} dx = 2tdt \\ dy = dt\,, \end{array} \right. \quad t_1 \le t \le t_2.$$

$$\text{От}\quad \left| \begin{array}{lllll} z_0 = 0 & \Longrightarrow 0 = x+iy & \Longrightarrow (x=0, y=0) & \Longrightarrow t_1 = 0 \\ z_1 = 1+i & \Longrightarrow 1+i = x+iy & \Longrightarrow (x=1, y=1) & \Longrightarrow t_2 = 1\,. \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow I = \int\limits_0^1 (2t^7 - 6t^5 - 3t^5 + t^3)dt + i\int\limits_0^1 (6t^6 - 2t^4 + t^6 - 3t^4)dt$$

$$= \left(\frac{2t^8}{8} - \frac{9t^6}{6} + \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 + i\left(\frac{6t^7}{7} - \frac{5t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = -1 + i\left(\frac{7}{7} - \frac{5}{5}\right) = -1\,.$$

II начин. Подинтегрална функция $f(z) = z^3$ е аналитична(вж. пример 5.1.а). Тогава

$$I = \int\limits_0^{1+i} z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^4}{4} = \frac{(1+2i+i^2)^2}{4} = \frac{4i^2}{4} = -1\,.$$

Пример 7.2. Решете $\int\limits_{(c)} (1 + i - 2\bar{z})dz$ по отсечката $(c):\ z_0z_1 \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = 1+i \end{cases}$

Решение. Пътят, по който интегрираме е отсечка от ъглополовящата на първи и трети квадрант $(c)\ :\ \ y = x$ от точка $O(0,0)$ до точка $A(1,1)$. Ще параметризираме (c):

$$\text{От}\quad (c): \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array} \right. \Longrightarrow z(t) = x(t) + iy(t) = t + it \Longrightarrow dz = (1+i)dt, \quad \bar{z} = t - it\,.$$

Освен това $0 \le t \le 1$ (вж. пример 7.1.). Тогава

$$I = \int_0^1 [1 + i - 2(t - it)](1 + i)dt = (1 + i) \int_0^1 [(1 - 2t) + i(1 + 2t)]dt$$

$$= (1 + i)(t - t^2)\Big|_0^1 + i(1 + i)(t + t^2)\Big|_0^1 = 0 + 2i(1 + i) = 2(i - 1).$$

Пример 7.3. Решете $\int\limits_{(c)} z^2 dz$, $(c):\ x^{2/3} + y^{2/3} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Решение. Подинтегралната функция $f(z) = z^2$ е аналитична (дефинирана е еднозначно и съществува $f'(z)$). Следователно интегралът не зависи от интеграционния път.

Кривата (c) е известна (*астроида*), която пресича координатните оси в точките $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. От $x \ge 0$, $y \ge 0$ (първи квадрант) следва, че интегрирането ще стане по 1/4 дъга на астроидата от точка $z_0 = 1$ до точка $z_1 = i$. Тогава

$$I = \int_1^i z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_1^i = \frac{1}{3}(i^3 - 1) = -\frac{1}{3}(i + 1).$$

Пример 7.4. Решете $\int\limits_{(c)} |z| dz$, където (c) е границата на областта G, заградена от полуокръжността $|z| = 1$ и оста Oy, т.е. G: $|z| < 1$, $\mathrm{Re} z > 0$.

Решение. Окръжността $(c) : |z| = 1$ пресича оста Oy в точките $A(0, -1)$ и $B(0, 1)$. Интегрирането ще извършим по контура $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \cup \bar{AB}$ на областта G.

1. От $(c)\colon |z| = 1 \Longrightarrow (c)\colon \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right., \quad t_1 \le t \le t_2$.

$$\overset{\frown}{AB}\colon \left| \begin{array}{ll} \text{от } A(0,-1) & \Longrightarrow 0 = \cos t, -1 = \sin t \Longrightarrow t = 1, t = -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{от } B(0,1) & \Longrightarrow 0 = \cos t, 1 = \sin t \quad \Longrightarrow t = 1, t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

От $z = x + iy = \cos t + i \sin t = e^{it} \Longrightarrow |z| = 1,\ dz = ie^{it}dt$ $(dz = de^{it})$. Тогава по формула (7.3) имаме

$$I_1 = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} |z| dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ie^{it}dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} de^{it} = e^{it}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i} = 2i \sin\frac{\pi}{2} = 2i.$$

2. $\overline{AB}: \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t\,, \end{array} \right.,\qquad t_1 \le t \le t_2$

$$\overline{AB}: \left| \begin{array}{lll} \text{от} & A(0,-1) \Longrightarrow 0=0, -1=t \Longrightarrow t_1=-1 \\ \text{от} & B(0,1) \Longrightarrow 0=0, 1=t \Longrightarrow t_2 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow -1 \le t \le 1.$$

От $z = x + iy = 0 + it = it \Longrightarrow |z| = |t| = \pm t$, $dz = idt$ $(dz = dit)$. Тогава по формула (7.3) имаме

$$I_2 = \int\limits_{\overline{AB}} |z|dz = i\int\limits_{-1}^{1} |t|dt = i\int\limits_{-1}^{0} |t|dt + i\int\limits_{0}^{1} |t|dt$$

$$= -i\int\limits_{-1}^{0} tdt + i\int\limits_{0}^{1} tdt = i\Big(-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{1}\Big) = i\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big) = i\,.$$

И така, $I = \int\limits_{(c)} |z|dz = I_1 + I_2 = 3i$.

Забележка. Подинтегралната функция $f(z) = |z|$ не е аналитична. Тогава $I_1 = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} |z|dz$ и $I_2 = \int\limits_{\overline{AB}} |z|dz$ имат различни стойности.

Пример 7.5. Решете $\int\limits_{(c)} z\sin z dz$, $(c): \left| \begin{array}{l} y^2 - y - x = 0 \\ x \le 0, y \ge 0\,. \end{array} \right.$.

Решение. Подинтегралната функция е $f(z) = z\sin z$. Функцията $w_1 = \sin z$ е аналитична функция (вж. пример 5.1.г), а $w_2 = z$ е полином (аналитична функция). Тогава $f(z)$ е аналитична функция (като произведение на две аналитични функции). Следователно интегралът не зависи от интеграционния път.

От уравнението на линията $(c): \ y^2 - y - x = 0 \Longrightarrow x = y^2 - y$, $x' = 2y - 1$.

От уравнението на оста $Oy: \ x = 0 \Longrightarrow 0 = y^2 - y \Longrightarrow y_1 = 0$, $y_2 = 1$, т.е. линията (c) пресича Oy в точки $O(0,0)$ и $B(0,1)$.

От $x' = 0 \Longrightarrow 0 = 2y - 1 \Longrightarrow y = 1/2$ и тогава $x = 1/4 - 1/2 = -1/4$, т.е. точката $A(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \in (c)$.

От $x \le 0$, $y \ge 0$ следва, че ще интегрираме върху дъгата $\overset{\frown}{OAB}$ от (c) във втори квадрант или от точката $z_0 = 0$ до точката $z_1 = i$. Тогава

$$I = -\int\limits_{0}^{i} zd\cos z = -z\cos z\Big|_{o}^{i} + \int\limits_{0}^{i} \cos zdz = -i\cos i + \sin z\Big|_{0}^{i} = -i\cos i + \sin i$$

$$= -i(\cos i + i\sin i) = -ie^{ii} = -\frac{i}{e}\,.$$

Пример 7.6. Решете $\oint\limits_{(c)} \frac{dz}{z-4}$, $(c)\colon \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Решение. Линията (c) е централна елипса с полуоси $a = 3$, $b = 2$. Подинтегралната функция $f(z) = \frac{1}{z-4}$ е аналитична в цялата равнина (z) с изключение на точката $z = 4$, която е вън от областта $\mathfrak{D}$, заградена от (c).

Функцията $f(z)$ е аналитична в областта, заградена от елипсата, включително контура и следователно

$$\int\limits_{(c)} \frac{dz}{z-4} = 0$$

(според T2).

Пример 7.7. Решете $\int\limits_{(c)} \frac{\ln^3 z}{z} dz$, $(c)\colon |z| = 1, \mathrm{Re}z \geq 0, \mathrm{Im}z \geq 0.$

Решение. Може да се докаже, че $f(z) = \frac{\ln^3 z}{z}$ е аналитична функция (вж. пример 5.1). Линията (c) пресича осите Ox и Oy в първи квадрант ($\mathrm{Re}z \geq 0$, $\mathrm{Im}z \geq 0$) съответно в точките $z_0 = 1$ и $z_1 = i$. Тогава

$$I = \int\limits_1^i \ln^3 z d\ln z = \frac{\ln^4 z}{4}\Big|_1^i = \frac{1}{4}(\ln^4 i - \ln^4 1) = \frac{1}{4}\left(\ln 1 + \frac{\pi}{2}i\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

Забележка. $\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i$ (вж. 4.7.a).

ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

1. $\int\limits_{(c)} e^z dz$ по отсечката $(c)\colon z_0z_1 \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = 1+i \end{cases}$ Отг. $e(e^i - 1)$.

2. $\oint\limits_{(c)} \bar{z}|z|dz$, $(c)\colon |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$ Отг. 0.

3. $\int\limits_{(c)} z\cos z dz$, $(c)\colon \left| \begin{array}{l} y^2 - y - x = 0 \\ x \leq 0, y \geq 0 \end{array} \right.$. Отг. $1 - \frac{1}{e}$.

4. $\displaystyle\int_{(c)} e^z dz$, (c) е начупена линия, съединяваща точките $z_0 = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$.

Отг. $e^{i+1} - 1$.

5. $\displaystyle\int_{(c)} (x^2 + iy^2)dz$, $(c)\colon A(1+i), B(2+3i)$. Отг. $-\dfrac{19}{3} + 9i$.

6. $\displaystyle\oint_{(c)} \frac{1+z}{1+2z^2}dz$, $(c)\colon |z| = 1$. Отг. 0.

7. $\displaystyle\int_{(c)} \frac{zdz}{\bar{z}}$, $(c)\colon \left| \begin{array}{l} |z| = 2 \\ 0 \le \arg z \le \pi \end{array} \right.$. Отг. 8/3.

8. $\displaystyle\int_1^{1+i} z^2 dz$ Отг. $-1 + \frac{2}{3}i$.

9. $\displaystyle\int_1^{i} (3z^4 - 2z^3)dz$ Отг. $\frac{3}{5}(i-1)$.

10. $\displaystyle\int_1^{i} z \sin z dz$ Отг. $\cos 1 - \sin 1 - \frac{i}{e}$.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz$ Отг. $1 + i \operatorname{sh} i$.

ГЛАВА 8

ОСНОВНА ФОРМУЛА НА КОШИ И ФОРМУЛА ЗА ПРОИЗВОДНИТЕ

Дадена е едносвързана област $\mathfrak{D}$ с гладък контур (c), върху който е избрана положителна посока на обхождане.

Теорема 1 *Ако $f(z)$ е аналитична функция в затворената едносвързана област $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cup (c)$ и $z_0 \in \mathfrak{D}$ е вътрешна точка за $\mathfrak{D}$, то*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c)} \frac{f(z)}{z - z_0} d_z \tag{8.1}$$

(основна формула на Коши).

Забележка: Ако $f(z)$ е *аналитична функция в многосвързана област* $\bar{\mathfrak{D}}$, ограничена от сложния контур $(c) : c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$, върху (c) е избрана положителна посока на обхождане, а (c_0) обхваща $c_1, c_2, \cdots, c_n$ и $f(z) \in C(\mathfrak{D})$, то за $\forall z \in \mathfrak{D}$ е изпълнено

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d_\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c_0^+)} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c_1^-)} + \cdots + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c_n^-)} \tag{8.2}$$

Теорема 2 *Ако $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, където $\mathfrak{D}$ е област с контур (c) и избрана положителна посока върху него и $f(z) \in C(\bar{\mathfrak{D}})$, $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cup (c)$, то за $\forall z \in \mathfrak{D}$ функцията $f(z)$ има производни от произволен ред и в сила е*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{8.3}$$

(формула за производните).

И така:

От (8.1) $\Longrightarrow \oint\limits_{(c)} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$,

От (8.3) $\Longrightarrow \oint\limits_{(c)} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$,

където $f(z)$ е аналитична функция, а $z_0 \in \mathfrak{D}$ е вътрешна точка за $\mathfrak{D}$.

Пример 8.1. Решете $I = \oint\limits_{(c)} \dfrac{dz}{z^2+9}$, ако :

а) (c) е контур, който загражада само точката $z_1 = 3i$;

б) (c) е контур, който загражда само точката $z_2 = -3i$;

в) (c) е контур, който загражда точките z_1 и z_2.

Решение:

а) $I = \oint\limits_{(c)} \dfrac{dz}{(z-3i)(z+3i)} = \oint\limits_{(c)} \dfrac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i} dz$

Функцията $f_1(z) = \dfrac{1}{z+3i}$ е аналитична, като частно на два полинома, а точката $z_1 = 3i$ е вътрешна за областта $\mathfrak{D}$ с контур (c) и тогава по (8.1) имаме:

$$I = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3};$$

б) $I = \oint\limits_{(c)} \dfrac{1/(z-3i)}{z+3i} dz$. Функцията $f_2(z) = \dfrac{1}{z-3i}$ е аналитична, точката $z_2 = -3i$ е вътрешна за $\mathfrak{D}$ и отново по (8.1) имаме:

$$I = 2\pi i f(-3i) = 2\pi i \frac{1}{-6i} = -\frac{\pi}{3};$$

в) Линията (c) е произволна, заграждаща точките z_1 и z_2. Заграждаме тези точки съответно с произволни линии в $\mathfrak{D}$, например окръжности c_1 и c_2 с достатъчно малки радиуси. Тогава по формула (8.2) и резултатите от а) и б) имаме:

$$I = \oint\limits_{(c_1^+)} \frac{dz}{z^2+9} + \oint\limits_{(c_2^+)} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

Пример 8.2. Решете $I = \oint\limits_{(c)} \dfrac{\sin z dz}{e^z(z-3)}$, $(c)\colon |z-2| = 2$.

Решение:

1) Линията (с) е окръжност с център $(2,0)$ и $r = 2$, а областта заградена от (c) означаваме с $\mathfrak{D}$.

2) Намираме нулите на знаменателя:

   От $e^z(z-3) = 0 \Longrightarrow z = 3$ е проста нула на знаменателя, която е вътрешна за $\mathfrak{D}$.

3) По формула (8.1) имаме:

$$I = \oint\limits_{(c)} \frac{(\sin z)/e^z}{z-3} dz = 2\pi i \frac{\sin 3}{e^3}$$

   (функцията $f_1(z) = \dfrac{\sin z}{e^z}$ е аналитична).

Пример 8.3. Решете $I = \oint\limits_{(c)} \dfrac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, $(c) : |z-2| = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

1) Линията (c) е окръжност с център $(2,0)$ и $r = \dfrac{1}{2}$, а областта заградена от (c) означаваме с $\mathfrak{D}$.

2) Намираме нулите на знаменателя на $f(z)$: От $(z-1)(z-2)^2 = 0 \Longrightarrow z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, при това $z_1 = 1$ е външна точка за $\mathfrak{D}$, а $z_2 = 2$ е вътрешна.

3) По формула (8.3) имаме:

$$I = \oint\limits_{(c)} \frac{\frac{z}{z-1}}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(2) = 2\pi i \frac{z-1-z}{(z-1)^2}\bigg|_{z=2} = 2\pi i \frac{-1}{(2-1)^2} = -2\pi i$$

   (функцията $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$ е аналитична).

Пример 8.4. Пресметнете $\oint\limits_{(c)} \dfrac{e^z}{(z+2)^4}$, ако (c) е контур, който загражда точката $z = -2$.

Решение. Функцията $f(z) = e^z$ е аналитична, а точката $z = -2$ е вътрешна за областта $\mathfrak{D}$ с контур (c) и тогава по (8.3) имаме:

$$I = \frac{2\pi i}{3!} f'''(-2) = \frac{\pi i}{3} e^z \bigg|_{z=-2} = \frac{\pi i}{3e^2}$$

Пример 8.5. Решете $I = \oint\limits_{(c)} \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $(c) : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

Решение.

1) Начертаваме линията (c):

$$(c)\colon x^2-2x+1-1+y^2-2y+1-1 = 0 \Longrightarrow (c)\colon (x-1)^2+(y-1)^2 = (\sqrt{2}\,)^2.$$

И така, (c) е окръжност с център $(1, 1)$ и $r = \sqrt{2}$, при това $O \in (c)$, а областта заградена от (c) означаваме с $\mathfrak{D}$.

2) Намираме нулите на знаменателя на $f(z)$:

От $(z-1)^2(z^2+1) = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = 1$, $z_{3,4} = \pm i$, при това $z_1 = 1$ е двукратна нула, вътрешна за $\mathfrak{D}$, $z_3 = i$ е вътрешна за $\mathfrak{D}$, а $z_4 = -i$ е външна точка за $\mathfrak{D}$. Заграждаме z_1 и z_3 съответно с окръжности (c_1) и (c_2) в $\mathfrak{D}$ с достатъчно малки радиуси.

3) По формула (8.2) имаме:

$$I = \oint\limits_{(c_1^+)} \frac{\frac{1}{z^2+1}}{(z-1)^2}dz + \oint\limits_{(c_2^+)} \frac{\frac{1}{(z+i)(z-1)^2}}{z-i}dz$$

Функциите $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ и $f_2(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-1)^2}$ са аналитични, като частно на полиноми и тогава по (8.3) и (8.1) съответно имаме:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{1!} f_1'(1) + 2\pi i f_2(i) = 2\pi i\Big(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=1} + \frac{1}{2i(i-1)^2}\Big) \\ &= 2\pi i\big(\frac{-2}{4} + \frac{1}{4}\big) = \frac{-\pi i}{2}. \end{aligned}$$

Пример 8.6. Решете $\oint\limits_{(c)} \dfrac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz$, $(c) : |z+i+1| = 2$.

Решение.

1) Начертаваме линията (c):

$$\begin{aligned} & (c) : |x+iy+i+1| = 2 \Longrightarrow |(x+1)+i(y+1)| = 2 \\ \Longrightarrow\quad & (c) : \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 2 \Longrightarrow (c) : (x+1)^2+(y+1)^2 = 2^2. \end{aligned}$$

И така, (c) е окръжност с център $(-1, -1)$ и $r = 2$, а областта, заградена от (c) означаваме с $\mathfrak{D}$.

2) Намираме нулите на знаменателя:

   От $(z+1)^2(z-2)=0 \Longrightarrow z_{1,2}=-1$ е двукратна нула и вътрешна за $\mathfrak{D}$, а $z_3=2$ е външна точка за $\mathfrak{D}$.

3) По формула (8.3) имаме:

$$I=\oint\limits_{(c)}\frac{\frac{\cos z}{z-2}}{(z+1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(-1)=2\pi i\frac{-\sin z(z-2)-\cos z}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}$$
$$=\frac{-2\pi i}{9}(3\sin 1+\cos 1).$$

Функцията $f_1(z)=\dfrac{\cos z}{z-2}$ е аналитична, защото $\cos z$ е аналитична (вж. пр. 5.1.2), а $(z-2)$ е аналитична функция, като полином.

Пример 8.7. Решете $\displaystyle\oint\limits_{(c)}\frac{e^{iz}+1}{(z-\pi)(z-1)^2}dz$, $(c):|z-2|=2$.

Решение.

1) От уравнението на контура $(c):|z-2|=2$ получаваме $(x-2)^2+y^2=2^2$. Следователно (c) е окръжност с център $(2,0)$ и радиус 2. Нека означим областта, заградена от (c) с $\mathfrak{D}$.

2) Нулите на знаменателя са $z_1=\pi$ (еднократна, вътрешна за $\mathfrak{D}$) и $z_{2,3}=1$ (двукратна, вътрешна за $\mathfrak{D}$).

3) По формула (8.2) имаме:

$$I=\oint\limits_{(c)}\frac{e^{iz}+1}{(z-\pi)(z-1)^2}dz=\oint\limits_{(c_1^+)}\frac{\frac{e^{iz}+1}{(z-1)^2}}{z-\pi}dz+\oint\limits_{(c_2^+)}\frac{\frac{e^{iz}+1}{z-\pi}}{(z-1)^2}dz.$$

Функциите $f_1(z)=\dfrac{e^{iz}+1}{(z-1)^2}$ и $f_2(z)=\dfrac{e^{iz}+1}{z-\pi}$ са аналитични.

$$I=2\pi i f_1(\pi)+\frac{2\pi i}{1!}f_2'(1)=2\pi i\frac{e^{i\pi}+1}{(\pi-1)^2}+2\pi i\frac{ie^{iz}(z-\pi)-e^{iz}-1}{(z-\pi)^2}\Bigg|_{z=1}$$
$$=2\pi i\frac{\cos\pi+i\sin\pi+1}{(\pi-1)^2}+2\pi i\frac{ie^i(1-\pi)-e^i-1}{(1-\pi)^2}=\frac{2\pi i}{(1-\pi)^2}\left[e^i(i-\pi i-1)-1\right].$$

Пример 8.8. Да се реши $\oint\limits_{(c)} \frac{1-\cos z}{z^3(z-2)}dz$, $(c): |z-2| = 3$.

Решение. От уравнението на контура $(c): |z-2| = 3$ получаваме $(x-2)^2 + y^2 = 3^2$, т.е. (c) е окръжност с център $(2,0)$ и радиус 3, заграждаща областта $\mathfrak{D}$.

Нулите на знаменателя са $z_1 = 0$ - трикратна нула и $z = 2$ - еднократна нула, вътрешни за $\mathfrak{D}$.

По формула (8.2) за дадения интеграл получаваме:

$$I = \oint\limits_{(c)} \frac{1-\cos z}{z^3(z-2)}dz = \oint\limits_{(c_1^+)} \frac{(1-\cos z)/(z-2)}{z^3}dz + \oint\limits_{(c_2^+)} \frac{(1-\cos z)/z^3}{(z-2)} = I_1 + I_2.$$

Интеграла I_1 ще решим по два начина.

I начин. Прилагаме формула (8.3)

$I_1 = \oint\limits_{(c_2^+)} \frac{(1-\cos z)/(z-2)}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f_1''(0)$, $f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z-2}$ е аналитична функция.

$$I_1 = \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{\sin z(z-2) - 1 + \cos z}{(z-2)^2}\right]'\Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\frac{(\cos z(z-2) + \sin z - \sin z)(z-2)^2 - 2(z-2)(\sin z(z-2) - 1 + \cos z)}{(z-2)^4}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi i}{2}.$$

II начин. Преобразуваме $\varphi(z) = 1-\cos z$, като за $\cos z$ използваме развитие в ред на Маклорен:

$$\varphi(z) = 1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)$$

$$= \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots = z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)$$

Тогава

$$I_1 = \oint\limits_{(c^+)} \frac{z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)}{z^3(z-2)}\mathrm{d}z = \oint\limits_{(c^+)} \frac{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)}{z(z-2)}\mathrm{d}z$$

$$= \oint\limits_{(c^+)} \frac{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)/(z-2)}{z}\mathrm{d}z.$$

Функцията $f_1^*(z) = \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots\right)/(z-2)$ е аналитична и за решаването на интеграла ще приложим формула (8.1):

$$I_1 = 2\pi i f_1^*(0) = 2\pi i \frac{\frac{1}{2!}}{-2} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Интегралът I_2 се решава по формула (8.1):

$$I_2 = \oint\limits_{(c_2^+)} \frac{(1-\cos z)/z^3}{z-2} dz = 2\pi i f_2(2),$$

където $f_2(z) = (1-\cos z)/z^3$ е аналитична функция.

$$I_2 = 2\pi i \frac{1-\cos 2}{8} = \frac{\pi i(1-\cos 2)}{4}$$

$$\Longrightarrow I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i(1-\cos 2)}{4} = -\frac{\pi i}{2}\cos^2 1$$

Пример 8.9. Да се реши интегралът $\oint\limits_{(c)} \frac{e^z - 1}{z\cos z} dz$, $(c) : |z| = 4$.

Решение. Контурът (c) е централна окръжност с радиус 4. Нулите на знаменателя са $z_1 = 0$ и $z_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Точките $z_1 = 0$ и $z_{2,3} = \pm\pi/2$ са вътрешни за $\mathfrak{D}$. Формулите (8.1) и (8.3) не могат да се приложат директно. Развиваме функцията $e^z - 1$ в ред на Маклорен:

$$e^z - 1 = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = z\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$\Longrightarrow I_1 = \oint\limits_{(c_1^+)} \frac{e^z - 1}{z\cos z} dz = \oint\limits_{(c_1^+)} \frac{z\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right)}{z\cos z} dz = \oint\limits_{(c_1^+)} \frac{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots}{\cos z} dz = 0,$$

защото подинтегралната функция е аналитична в (c_1^+), който загражда само точката $z_1 = 0$.

За решаване на интегралите $I_2 = \oint\limits_{(c_2^+)} f(z)\mathrm{d}z$ и $I_3 = \oint\limits_{(c_3^+)} f(z)\mathrm{d}z$ ((c_2^+) загражда точката $z_2 = \frac{\pi}{2}$, а (c_3^+) загражда точката $z_3 = -\frac{\pi}{2}$) използваме разложението на функцията $\cos z$ по степените на $z-\frac{\pi}{2}$ и $z+\frac{\pi}{2}$ (Тейлорово развитие).

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = -\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{(z-\frac{\pi}{2})}{1!} + \frac{(z-\frac{\pi}{2})^3}{3!} - \frac{(z-\frac{\pi}{2})^5}{5!} + \cdots$$
$$= (z-\frac{\pi}{2})(-1 + \frac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{3!} - \frac{(z-\frac{\pi}{2})^4}{5!} + \cdots).$$

$$\Longrightarrow I_2 = \oint\limits_{(c_2^+)} \frac{e^z-1}{z\cos z}dz = \oint\limits_{(c_2^+)} \left[\frac{\frac{e^z-1}{z(-1+\frac{z-\pi/2}{3!}-\frac{(z-\pi/2)^4}{5!}+\cdots)}}{z-\pi/2}\right]dz = 2\pi i f_2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

където $f_2(z) = \dfrac{e^z-1}{z\left(-1+\dfrac{z-\pi/2}{3!}-\dfrac{(z-\pi/2)^4}{5!}+\cdots\right)}$ е аналитична в (c_2^+).

$$I_2 = 2\pi i\frac{e^{\pi/2}-1}{-\pi/2} = 4i\left(1-e^{\pi/2}\right)$$

$$\cos z = -\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{z+\pi/2}{1!} + \frac{(z+\pi/2)^3}{3!} - \frac{(z+\pi/2)^5}{5!} + \cdots$$
$$= \left(z+\frac{\pi}{2}\right)\left(-1+\frac{(z+\pi/2)^2}{3!} - \frac{(z+\pi/2)^4}{5!} + \cdots\right).$$

$$\Longrightarrow I_3 = \oint\limits_{(c_3^+)} \frac{e^z-1}{z\cos z}dz = \oint\limits_{(c_3^+)} \left[\frac{\frac{e^z-1}{z(-1+\frac{z+\pi/2}{3!}-\frac{(z+\pi/2)^4}{5!}+\cdots)}}{z+\pi/2}\right]dz$$

$$f_3(z) = \frac{e^z-1}{z\left(-1+\dfrac{(z+\pi/2)^2}{3!}-\dfrac{(z+\pi/2)^4}{5!}+\cdots\right)}$$ е аналитична в (c_3^+).

$$I_3 = 2\pi i f_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i\frac{e^{-\pi/2}-1}{-\frac{\pi}{2}(-1)} = 4i\left(e^{-\pi/2}-1\right)$$
$$\Longrightarrow I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 4i(1-e^{\pi/2}) + 4i(e^{\pi/2}-1) = -8i\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}.$$

ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

1. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, ако

   а) контурът (c) загражда само точката $z=1$; Отг. $\dfrac{3\pi i}{8}$

   б) (c) загражда само $z=-1$; Отг. $-\dfrac{3\pi i}{8}$

   в) (c) загражда точките $z=\pm 1$. Отг. 0

2. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{2z-1}{(z^2+1)(z-1)^2}dz$, $(c): |z|=2$ Отг. 0

3. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{zdz}{z^4-1}$, $(c): |z+1+i|=\sqrt{2}$ Отг. 0

4. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{\operatorname{ch} zdz}{z^4-1}$, $(c): |z-2|=2$ Отг. $\dfrac{\pi i}{3}$

5. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{\sin\pi(z-1)}{z^2-2z+2}dz$, $(c): |z-1-i|=1$ Отг. $\pi\sin\pi i$

6. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{\sin z}{z^2+4}dz$, $(c): x^2+y^2+6y=0$ Отг. $-\dfrac{1}{2}i\pi\operatorname{sh}2$

7. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{e^z dz}{(z+i)^3}$, $(c): |z|=2$ Отг. $\pi i e^{-1}$

8. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{z^3+3z^2}{z^4-2z^3+2z^2-2z+1}dz$, $(c): |z-1|=3$ Отг. $2\pi i$

9. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz$, $(c): |z+i|=3$ Отг. $\dfrac{-4i(\pi^2-4)}{\pi^2}$

10. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{z^3}{(e^{z^2}-1)(z+1)^2}dz$, $(c): |z+2|=3$ Отг. $2\pi i\dfrac{e-3}{(e-1)^2}$

11. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{e^z}{(z^2+1)(z-2)^2}dz$, $(c): |z-2+i|=\sqrt{5}$ Отг. $2\pi i\left[\dfrac{e^2}{25}+\dfrac{e^{-i}(3i+2)}{26}\right]$

12. $\oint\limits_{(c)} \dfrac{e^{iz}+1}{(z-\pi)(z+1)^2}dz$, $(c): |z|=4$ Отг. $-\dfrac{e^i(i+\pi i+1)+1}{(1+\pi)^2}$

ГЛАВА 9

РЕД НА ТЕЙЛОР И РЕД НА ЛОРАН. НУЛИ И ИЗОЛИРАНИ ОСОБЕНИ ТОЧКИ

А. Ред на Тейлор

Дадена е едносвързана област $\mathfrak{D}$ с контур (c) и избрана положителна посока върху него.

Дефиниция 1 *Степенен ред от вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{9.1}$$

се нарича ***ред на Тейлор****, ако неговите коефициенти $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n = const.$ се пресмятат по формулата*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,.$$

Теорема 1 ***(теорема на Тейлор)*** *Ако $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, то $\forall z_0 \in \mathfrak{D}$, $\exists U(z_0,\rho))$ където функцията $f(z)$ се развива по единствен начин по формула*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots \tag{9.2}$$

Б. Ред на Лоран

Дефиниция 2 *Ред от вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\,, \tag{9.3}$$

където z_0 е фиксирано, а $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n = const.$, се нарича ***реда на Лоран***. *Или*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{9.4}$$

Тези два реда се наричат съответно *главна част* и *правилна част* на (9.3), а сечението от областите на сходимост на двата реда определя областта на сходимост на (9.3).

Областта на сходимост на (9.3) е *венец* от две концентрични окръжности (c_1) и (c_2) с център точката z_0 и радиуси R_1 и R_2:

$$\left| \begin{array}{l} (c_1):\ |z-z_0| > R_1 \\ (c_2):\ |z-z_0| < R_2\,, \end{array} \right. \qquad R_1 < R_2\,.$$

Теорема 2 ***(теорема на Лоран)*** *Ако $f(z) \in A[R_1 < |z-z_0| < R_2]$, то $\forall z$ от венеца функцията $f(z)$ се развива в Лоранов ред, и то по единствен начин с коефициенти*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,$$

където (c) е концентрична окръжност, лежаща във венеца.

В. Нули на аналитична функция

Дефиниция 3 *Точката (числото) $z_0 \in \mathfrak{D}$ се нарича* ***нула*** *на $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, ако $f(z_0) = 0$.*

Дефиниция 4 *Точката $z_0 \in \mathfrak{D}$ се нарича* ***n-кратна нула*** *на $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, ако*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Теорема 3 *Необходимо и достатъчно условие точката $z_0 \in \mathfrak{D}$ да бъде n-кратна нула на $f(z) \in A(\mathfrak{D})$ е*

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z), \qquad \varphi(z) \in A(\mathfrak{D}), \quad \varphi(z_0) \neq 0\,.$$

Г. Изолирани особени точки на аналитична функция

Дефиниция 5 *Точката $z_0 \in \mathfrak{D}$ се нарича* ***изолирана*** *особена точка на $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, ако $f(z) \in A[0 < |z-z_0| < \delta,\ \delta > 0]$ или $f(z) \in A[\overset{\circ}{U}(z_0,\delta)]$, където $\overset{\circ}{U}(z_0,\delta)$ е δ-околност на точката z_0* ***без*** *точката z_0.*

Видове особни точки:

Ако $f(z) \in A[\overset{\circ}{U}(z_0,\delta)]$ и построим околност на точката z_0 с радиус $R = \rho$, $0 < \rho < \delta$, то $\forall z$ от венеца функцията $f(z)$ притежава Лораново развитие (9.3) с коефициенти

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\,.$$

Тогава:

1^0. Ако $\forall a_{-n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$ точката z_0 се нарича *отстранима* изолирана особена точка на аналитичната функция $f(z)$. В този случай $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$ (крайна граница).

2^0. Ако $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-m} \neq 0\,(m < n)$, а $a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \ldots = 0$ (само краен брой коефициенти a_{-m} са различни от нула), точката z_0 се нарича *полюс* на аналитичната функция $f(z)$. В този случай $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

3^0. Ако $\forall a_{-n} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ или безброй много коефициенти са различни от нула, точката z_0 се нарича *съществена* изолирана особена точка за аналитичната функция $f(z)$. В този случай $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не съществува.

При развитие на функции в ред на Лоран или Тейлор се използва маклореновото развитие на някои елементарни функции. Редовете на елементарните функции могат да се диференцират или интегрират. Рационалните функции се развиват в ред, като предварително се разложат в сума от елементарни дроби.

а) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $|z| < \infty$;

б) $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$;

в) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$;

г) $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$;

д) $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$;

е) $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n}$, $|z| < 1$;

ж) $(1+z)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{z^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, $|z| < 1$;

з) при $\alpha = -1$: $\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z| < 1$;

и) $\operatorname{arctg} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$.

Пример 9.1. Развийте функцията $f(z) = \operatorname{sh} az$ в Тейлоров ред в околността на точката $z_0 = 0$.

Решение. Функцията $\operatorname{sh} az = \frac{1}{2}(e^{az} - e^{-az})$ е аналитична в цялата комплексна равнина (z) и следователно се развива в сходящ степенен ред:

$$\operatorname{sh} az = \sum_0^\infty a_n (z-0)^n = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\operatorname{sh} az = \frac{1}{2}(e^{az} - e^{-az}) \to \operatorname{sh} a0 = 0$$

$$(\operatorname{sh} az)' = \frac{a}{2}(e^{az} - (-1)e^{-az}) \to (\operatorname{sh} a0)' = a$$

$$(\operatorname{sh} az)'' = \frac{a^2}{2}(e^{az} - (-1)^2 e^{-az}) \to (\operatorname{sh} a0)'' = 0$$

$$(\operatorname{sh} az)''' = \frac{a^3}{2}(e^{az} - (-1)^3 e^{-az}) \to (\operatorname{sh} a0)''' = a^3$$

....

$$(\operatorname{sh} az)^{(n)} = \frac{a^n}{2}(e^{az} - (-1)^n e^{-az}) \to (\operatorname{sh} a0)^{2n+1} = a^{2n+1}$$

(формулата за n-тата производна на $\operatorname{sh} az$ може да се докаже по метода на пълната математична индукция)

$$\Longrightarrow \operatorname{sh} az = \sum_0^\infty \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Пример 9.2. Развийте функцията $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$ в Тейлоров ред в околността на точката $z_0 = 0$.

Решение. Разлагаме $f(z)$ в сума от елементарни дроби:

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1}, \qquad A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{4}.$$

Известно е, че редът $\sum\limits_0^\infty \xi^n$ е сходящ при $|\xi| < 1$ и неговата сума е $\dfrac{1}{1-\xi}$. Тогава:

1) $\dfrac{1}{z-3} = -\dfrac{1}{3-z} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}, \quad \left|\dfrac{z}{3}\right| < 1 \Longrightarrow |z| < 3.$

2) $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{1-(-z)}, \ |-z| < 1 \Longrightarrow |z| < 1.$

Сечението $|z| < 3 \cap |z| < 1$ е $|z| < 1$, т.е. $f(z)$ е аналитична функция в $|z| < 1$ и

$$f(z) = \frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)\sum_0^\infty \frac{z^n}{3^n} + \frac{1}{4}\sum_0^\infty (-1)^n z^n = \frac{1}{4}\sum_0^\infty [(-1)^n - 3^{-n}] z^n.$$

Пример 9.3. Да се развие в Лоранов ред в околността на точките $z_0 = 0$ и $z_0 = -2$ функцията $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$.

Решение. Разлагаме $f(z)$ в сума от елементарни дроби:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{(z+2)-z}{2z(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2}.$$

Особени точки за $f(z)$ са $z = 0$ и $z = -2$ и тогава функциите $\dfrac{1}{z}$ и $\dfrac{1}{z+2}$ *не са аналитични* саответно за $z = 0$ и $z = -2$.

а) Нека $z_0 = 0$. Тогава

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-z/2)} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^n}{2^n}.$$

Този ред е сходящ при $\left|-\dfrac{z}{2}\right| < 1 \Longrightarrow |z| < 2 \Longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{2z} + \displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$, сходящ ред за $0 < |z| < 2$, т.е. областта на сходимост е кръг с радиус 2 с изключение на центъра.

И така, точката $z_0 = 0$ е *полюс* на $f(z)$ и то еднократен, тъй като Лорановото развитие на $f(z)$ съдържа само z^{-1}.

б) Нека $z_0 = 2$. Тогава

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+2-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(z+2)/2} = -\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(z+2)^n}{2^n}.$$

Този ред е сходящ при $\left|\dfrac{z+2}{2}\right| < 1 \Longrightarrow |z+2| < 2$

$$\Longrightarrow f(z) = -\frac{1}{2(z+2)} - \sum_0^\infty \frac{(z+2)^n}{2^{n+2}},$$

сходящ ред за $0 < |z+2| < 2$, като точката $z_0 = -2$ е еднократен *полюс* на $f(z)$.

Пример 9.4. Развийте в ред на Лоран функцията $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, ако

а) $|z| < 1$; б) $1 < |z| < 2$.

Решение.

а) Разлагаме $f(z)$ в сума от елементарни дроби:

$$f(z) = \frac{(z-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_0^\infty z^n - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{z^n}{2^n}$$

$$= (1 + z + z^2 \ldots + z^n + \ldots) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^n} + \ldots\right).$$

От $|z| < 1$ и $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Longrightarrow |z| < 1$ и $|z| < 2 \Longrightarrow |z| < 1$.

Получените два реда са абсолютно сходящи и членовете им можем да комбинираме по произволен начин.

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \ldots$$

Полученият ред е сходящ за $|z| < 1$ и от Лораново развитие на $f(z)$ се превърна в Тейлорово развитие.

б) $$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^n} + \ldots\right) - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots\right)$$
$$= \ldots - \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^n} - \ldots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z - \frac{1}{2^3}z^2 - \ldots - \frac{1}{2^{n+1}}z^n - \ldots$$

Полученият ред е *истинско* Лораново развитие на $f(z)$, при това от $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ и $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Longrightarrow |z| < 2$ и $|z| > 1$, т.е. този ред е сходящ при $1 < |z| < 2$.

Забележка. Коефициентът a_{-1} пред z^{-1} се нарича *резидуум* на $f(z)$ и бележим $\operatorname{Res} f(z)$. В случая $a_{-1} = -1$ (това е начин за пресмятане на $\operatorname{Res} f(z)$, вж. глава 10, дефиниция 1).

Пример 9.5. Да се разложи в ред на Тейлор в околността на точката $z_0 = 0$ функцията $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$.

Решение. Разлагаме функцията в сума от елементарни дроби:

$$\frac{z}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{-2/9}{z+1} + \frac{1/3}{(z+1)^2} + \frac{2/9}{z-2} - \frac{2}{9}\frac{1}{z+1}$$
$$= -\frac{2}{9}\frac{1}{1-(-z)} = -\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z| < 1;$$
$$\frac{2}{9}\frac{1}{z-2} = -\frac{2}{9}\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1, |z| < 2;$$
$$\frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right]' = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Следователно

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^{n+1}(3n+5)-1]z^n, \qquad |z|<1.
\end{aligned}
$$

Пример 9.6. Да се разложи по степените на $(z+3)$ функцията

$$f(z) = \ln(2-5z).$$

Решение.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \ln(2-5z) = \ln[2-5(z+3)+15] = \ln[17-5(z+3)] \\
&= \ln 17\Big(1-\frac{5(z+3)}{17}\Big) = \ln 17 + \ln\Big[1-\frac{5(z+3)}{17}\Big].
\end{aligned}
$$

Прилагаме развитието на функцията $\ln(1+z)$:

$$
\begin{aligned}
& f(z) = \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}\Big(\frac{5(z+3)}{17}\Big)^n, \qquad \Big|\frac{5(z+3)}{17}\Big|<1 \\
\Longrightarrow\ & f(z) = \ln 17 - \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{5}{17}\Big)^n\frac{(z+3)^n}{n}, \qquad |z+3|<\frac{17}{5}.
\end{aligned}
$$

Пример 9.7. Да се развие по степените на z в ред на Лоран функцията

$$f(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$$

и да се определи областта на сходимост на получения ред.

Решение. Използваме маклореновите развития на функциите $\sin z$ и $\cos z$:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n)!(2n+1)}\Big]z^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2nz^{2n-1}}{(2n+1)!}, \qquad |z|<\infty.
\end{aligned}
$$

Пример 9.8. Определете вида на изолираните особени точки на функцията

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^3}.$$

Решение. От

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^3} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)^3(z+i)^3}$$

следва, че нулите на знаменателя (изолирани особени точки на $f(z)$) са $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$, които *не са нули* на числителя.

От $\lim\limits_{\substack{z\to\pm1 \\ z\to\pm i}} \frac{z}{(z^2-1)(z^3+1)^3} = \infty$ следва, че $z = \pm1$ са еднократни (прости) полюси, а $z = \pm i$ са трикратни полюси на $f(z)$. Функцията $f(z)$ е аналитична, като частно на полиноми.

Пример 9.9. Определете вида на изолираните особени точки на аналитичната функция $f(z) = \frac{z}{\sin^3 z}$.

Решение. От $\sin^3 z = 0 \Longrightarrow \sin z = 0 \Longrightarrow z_0 = 0$ и $z_k = k\pi$, $k = \pm1, \pm2\dots$ са нулите на знаменателя (изолирани особени точки на $f(z)$).

$$\lim_{z\to0} \frac{z}{\sin^3 z} = \lim_{z\to0} \frac{z}{\sin z} \lim_{z\to0} \frac{1}{\sin^2 z} = 1 \lim_{z\to0} \frac{1}{\sin^2 z} = \infty .$$

Следователно $z_0 = 0$ е двукратен полюс на $f(z)$.

От $\lim\limits_{z\to k\pi} \frac{z}{\sin^3 z} = \infty$ и това, че $z_k = k\pi$, $k = \pm1, \pm2, \dots$ *не са нули* на числителя $\Longrightarrow z_k = k\pi$, $k = \pm1. \pm 2\dots$ са *трикратни полюси* на $f(z)$.

Забележка. Функцията $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ не е дефинирана при $z = 0$. Ще я додефинираме:

$$f(z) = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\Big(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots\Big) = 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \dots$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to0} \frac{\sin z}{z} = 1 \qquad (\lim_{z\to0} \frac{z}{\sin z} = 1) .$$

Пример 9.10. Докажете, че $z_0 = 0$ е отстранима изолирана особена точка на аналитичната функция $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$.

Доказателство.

$$\lim_{z\to0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2}}{4.\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{2}\Bigg[\lim_{z\to0} \frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\Bigg]^2 = \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2} \text{ (крайна граница).}$$

Пример 9.11. Определете вида на особените точки на аналитичната функция

$$f(z) = z\sin\frac{1}{z}.$$

Решение. Границата $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(1/z)}{(1/z)}$ *не съществува.* Следователно $z_0 = 0$ е *съществена* особена точка на $f(z)$.

Лорановият ред на функцията $\sin\frac{1}{z}$ в околността на точката $z_0 = 0$ е $\sin\xi = \sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|\xi| < \infty$. Като положим $\xi = \frac{1}{z}$ получаваме:

$$f(z) = z\sin\frac{1}{z} = z\Big[\sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}\Big] = \sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n}},$$

т.е. безброй много коефициенти с отрицателен индекс са различни от нула и тогава $z_0 = 0$ е *съществена* изолирана точка на $f(z)$.

ЗАДАЧИ

1. Развийте *в ред на Тейлор или Лоран по степените на* z в посочената област функциите:

а) $f(z) = \frac{1}{3-z}$, $|z| > 3$ Отг. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$

б) $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$, $|z| < 1$ Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n i^{n+1} z^{n-1}$

в) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$, $1 < |z| < 2$ Отг. $\frac{1+2i}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{(-1)^n z^n}{2^n i^n}\right)$

г) $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$,
1) $|z| < 2$
2) $2 < |z| < 3$
3) $|z| > 2$

Отг. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$

2) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$

Упътване. $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{p+n}^{p} z^n$, $|z| < 1$.

2. Развийте в *ред на Тейлор или Лоран в околността на точката* z_0 функциите:

а) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, 1) $z_0 = 0$, 2) $z_0 = 1$ Отг. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ 2) $\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1}$

б) $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0 = i$ Отг. $\dfrac{1}{2(z-i)} + \dfrac{i}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$

в) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3iz - 2}$, $z_0 = 2i$ Отг. $-\dfrac{i}{z-2i} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(z-2i)^n}{i^n}$

г) $f(z) = \ln z$, $z_0 = a \neq 0$ Отг. $\ln a + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(z-a)^n}{na^n}$

д) $f(z) = (1-z)e^z$, $z_0 = 0$ Отг. $1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n(n-2)!}$.

3. Определете *вида на точката* z_0 за функциите:

а) $f(z) = \sin z + 3\sin^2 z$, $z_0 = k\pi$ Отг. проста (еднократна нула)

б) $f(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{(z^2-4)^2(z-1)^3}$, $z_0 = 2$, $z_0 = 1$ Отг. $z_0 = 2$ - прост полюс
$z_0 = 1$ - двукратен полюс

в) $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z) + 1}{(z^2 - z - 2)^3}$, $z_0 = -1$, $z_0 = 2$ Отг. $z_0 = -1$ - прост полюс
$z_0 = 2$ - трикратен полюс.

4. Докажете, че точката z_0 *е съществена особена точка* за функциите

а) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} + e^{1/(z-i)}$, $z_0 = i$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4}e^{\frac{1}{z+2}}$, $z_0 = -2$.

5. Намерете особените точки за следните функции и определете вида им:

а) $f(z) = \dfrac{z^5 + 3z + 1}{(z-i)^2(z^2+4)}$ Отг. $z = 1$ - двукратен полюс
$z = \pm 2i$ - прости полюси

б) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 + 1}$ Отг. $\left.\begin{array}{l} z = -1, \\ z = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ - прости полюси

в) $f(z) = \dfrac{z+1}{\sin z}$ Отг. $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ - прости полюси

г) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$ Отг. $z = \pm i$ - прости полюси

д) $f(z) = e^{\frac{1}{z} + \cos z}$ Отг. $z = 0$ - съществена особена точка

е) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{z(1-e^{-z})}$ Отг. $z = 0$ - прост полюс

ж) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{\sin z}$ Отг. $z = 0$ - отстранима особена точка
$z = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ -прости полюси.

ГЛАВА 10

РЕЗИДУУМИ. ТЕОРЕМА ЗА РЕЗИДУУМИТЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Резидууми

Дадена е функция $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, където $\mathfrak{D}$ е едносвързана област с граница линията (c), върху която е избрана положителна посока на обхождане.

Нека точка $z_0 \in \mathfrak{D}$ с обхващащ контур—почасти гладка Жорданова крива $(\gamma) \in \mathfrak{D}$.

Дефиниция 1
$$\underset{z_0}{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(\gamma)} f(z)dz = a_{-1} \tag{10.1}$$

Забележка. От Df1, гл. 9 имаме $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c)} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

и при $n = -1$ *получаваме* $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(c)} f(z)dz.$

Коефициентът a_{-1} в Лорановото развитие на функцията $f(z)$ се нарича ***резидуум на $f(z)$ в точката z_0*** *и се бележи* $\underset{z=z_0}{Res} f(z) = a_{-1}$.

От Т1, гл.8 следва, че (10.1) не зависи от (γ) и тогава нека $(\gamma) : |z - z_0| = \rho$ е окръжност. Чрез (10.1) не винаги могат да се пресмятат резидууми и затова:

1) Ако точката z_0 е *отстранима* изолирана особена точка на $f(z)$, т.е. $\forall a_{-n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, то от $a_{-1} = 0$ следва, че $\underset{z_0}{\mathrm{Res}} f(z) = 0$.
2) Ако z_0 е *m-кратен полюс* $(m > 1)$, доказва се, че:

$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big[f(z)(z-z_0)^m \Big]$$

или

$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big[f(z)(z-z_0)^m \Big]^{(m-1)} \tag{10.2}$$

Частни случаи:

а) Ако z_0 е *прост* (еднократен) *полюс* $(m = 1)$ от (10.2) получаваме:

$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}} f(z) = \lim_{z \to z_0} \Big[f(z)(z-z_0) \Big] \tag{10.3}$$

б) нека отново z_0 е *прост полюс* и $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Тогава $\psi(z_0) = 0$,

$\psi'(z_0) \neq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$. От (10.3) $\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z - z_0)\right] =$

$\lim_{z\to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$. И така,

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \tag{10.4}$$

3) Ако точката z_0 е *съществена* изолирана особена точка на $f(z)$, т.е. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ не съществува, то $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)$ намираме чрез развитие на $f(z)$ в ред на Лоран, като коефициент a_{-1} пред $(z - z_0)^{-1}$.

Б. Основна теорема за резидуумите

Теорема 1 *Нека $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, където $\mathfrak{D}$ е област с граница линията (c), върху която е избрана положителна посока на обхождане и ако $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathfrak{D}$ са изолирани особени точки на $f(z)$, то*

$$I = \oint_{(c)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) \tag{10.5}$$

Доказателство. Заграждаме точките $z_1, z_2, \cdots, z_n$ с достатъчно малки кръгчета $(c_1), (c_2), \cdots, (c_n)$ в $\mathfrak{D}$, които не се пресичат помежду си и са обратно ориентирани на (c). Според (8.2) имаме:

$$\oint_{(c)} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{(c_k)} f(z)dz \Bigg| \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c_k)} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z)$$

$$\Longrightarrow \oint_{(c)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z).$$

В. Приложение на резидуумите за решаване на някои класове реални интеграли

I клас: Решете $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$, R – реална функция.

Решение. Полагаме $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $z = x + iy$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Тогава според (4.4) имаме:

$$\left|\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \end{array}\right.$$

От $z = e^{i\theta} \Longrightarrow dz = i.e^{i\theta}d\theta \Longrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$.

От $z = e^{i\theta} \Longrightarrow |z| = 1$, т.е. точката z описва (в положителна посока) окръжност $(c) : |z| = 1$.

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} R\Big[\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big]\frac{dz}{z}, \tag{10.6}$$

при това:

1) ако $f(z)$ има изолирани особени точки, то $I = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\limits_{z_k} f(z)$;

2) ако $f(z)$ няма изолирани особени точки, то $I = 0$.

II клас. Решете $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Формално заместваме реалната променлива x с комплексната променлива $z = x + iy$. Тогава $f(x) = f(z) = f(x + iy)$ и предполагаме, че $|f(z)| \leq \dfrac{K}{|z|^{1+\delta}}$, $K = \text{const.}$, $\delta > 0$.

Теорема 2 *Ако $f(z)$ има изолирани особени точки $z_1, z_2, \cdots, z_n$ над оста Ox, то:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f(z). \tag{10.7}$$

Пример 10.1. Намерете резидуумите на следните функции:

а) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3(z-3)}$; б) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 \cos z}$; в) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

Решение.

а) Нулите на знаменателя са $z_1 = 3$ и $z_{2,3,4} = 0$. От

$$\lim_{\substack{z\to 3\\ z\to 0}} \frac{z+1}{z^3(z-1)} = \infty \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 & \textit{еднократен полюс} \text{ на } f(z), \\ z_2 = 0 & \textit{трикратен полюс} \text{ на } f(z). \end{cases}$$

1. Разглеждаме $z_1 = 3$. По формула (10.3) имаме:

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3}\left[\frac{z+1}{z^3(z-3)}(z-3)\right] = \frac{4}{27}.$$

или по формула (10.4) имаме:

$$\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \frac{z+1}{3z^2(z-3)+z^3}\bigg|_{z=3} = \frac{4}{27}.$$

2. Разглеждаме $z_2 = 0$. По формула (10.2) имаме:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{z+1}{z^3(z-3)}(z-0)^3\right]'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{z-3-z-1}{(z-3)^2}\right]' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{8}{(z-3)^3} = -\frac{4}{27}.\end{aligned}$$

б) Нулите на знаменателя са $z_{1,2} = 0$ и $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Разглеждаме $z = 0$. От

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2z\cos z - z^2\sin z} = \frac{1}{0} = \infty$$
$$\Longrightarrow z = 0 \text{ е } \textit{полюс, при това еднократен},$$

защото $\varphi(0) = 0$, но $\varphi'(0) = 1 \neq 0$ (разликата от кратностите на нулата на знаменателя и числителя).

$$\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z-1}{z^2\cos z}(z-0)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{\cos z - z\sin z} = 1.$$

2. Разглеждаме $z_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$. От

$$\lim_{z\to(2k+1)\frac{\pi}{2}}\frac{e^z-1}{z^2\cos z} = \infty \Longrightarrow z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ са } \textit{еднократни полюси.}$$

Тогава

$$\operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{e^z - 1}{2z\cos z - z^2 \sin z}\bigg|_{z=z_k} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}\left(e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - 1\right).$$

в) Особена точка за $f(z)$ е $z = 0$ ($\lim\limits_{z\to 0} z^2 \sin(1/z)$ не съществува, т.е. $z = 0$ е *съществена* изолирана особена точка). Търсим $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) =?$ Полагаме $1/z = u$ и тогава от

$$u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots \Longrightarrow \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots$$

$$f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!}.\frac{1}{z} + \frac{1}{5!z^3} - \ldots$$

$$\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Пример 10.2. Намерете резидуумите на функцията $f(z) = \dfrac{z^4}{z^4+1}$.

Решение. Нулите на знаменателя се намират от

$$z^4 + 1 = 0 \Longrightarrow z^4 + 1 + 2z^2 - 2z^2 = 0 \Longrightarrow (z^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,z)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow (z^2 - \sqrt{2}\,z + 1)(z^2 + \sqrt{2}\,z + 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \\ z_{3,4} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

От $\lim\limits_{\substack{z\to z_k \\ k=\overline{1,4}}} \dfrac{z^4}{z^4+1} = \infty \Longrightarrow z = z_k$ са еднократни полюси.

1. Разглеждаме $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$. По формула (10.3) имаме:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{z^4\left(z - \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(z - \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

Аналогично постъпваме със $z_{2,3,4}$. Или

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k, k=\overline{1,4}} f(z) = \operatorname*{Res}_{z_k} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{z^4}{4z^3}\bigg|_{z=z_k} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$$

Забележка. От $z^4 + 1 = 0$

$$\Longrightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, 3,$$

т.е. $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$, $z_4 = e^{i7\pi/4} \Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = \dfrac{1}{4z_k^3}$, $k = \overline{1,4}$.

Пример 10.3. Намерете резидуума на функцията $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

Решение. Точката $z = 1$ е съществена изолирана особена точка на $f(z)$, защото $\lim\limits_{z\to 1} e^{\frac{z}{1-z}} = \begin{cases} +\infty, & z \to 1_- \\ 0, & z \to 1_+ \end{cases}$, т.е. $\lim\limits_{z\to 1} f(z)$ не съществува. Лорановият ред на $f(z)$ в околността на точката $z = 1$ се получава от $e^{\xi} = \sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\xi^n}{n!}$, сходящ при $|z| < \infty$, а $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = a_{-1}$. От

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z-1+1}{1-z} = -1 + \frac{1}{1-z} \Longrightarrow e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1}e^{\frac{-1}{z-1}}$$

и при $\xi = \dfrac{-1}{z-1}$

$$\Longrightarrow f(z) = e^{-1}\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2e}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{6e}\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots,$$

т.е. $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = a_{-1} = e^{-1}$.

Пример 10.4. Намерете резидуума на функцията $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

*Решение.*Точката $z = 0$ е отстранима изолирана особена точка на $f(z)$, защото $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$ (крайна граница) $\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

Лорановият ред на $f(z)$ в околността на точката $z = 0$ се получава от $\sin z = \sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, сходящ при $|z| < \infty$, а $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1}$. Следователно

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots \Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = 0.$$

Пример 10.5. Намерете резидуумите на функцията $f(z) = \mathrm{tg}2z$.

Решение. $f(z) = \mathrm{tg}2z = \dfrac{\sin 2z}{\cos 2z}$ и $\cos 2z = 0$

$$\Longrightarrow 2z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1) \Longrightarrow z_k = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in \mathbb{N}$$

са изолирани особени точки на $f(z)$ при това еднократни (прости) полюси. Тогава

$$\operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = \left.\frac{\sin 2z}{-2\sin 2z}\right|_{z=z_k} = -\frac{(-1)^{k+1}}{2}.$$

Пример 10.6. Намерете резидуумите на функцията $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$.

Решение. Нулите на знаменателя са $z_{1,2,3} = 0$ и $z_4 = 3$. От

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)} = \lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{4(\frac{z}{2})^2 z(z-3)} = \left[\lim_{z\to 0}\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right]^2 \cdot \lim_{z\to 0}\frac{1}{2z(z-3)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$\Longrightarrow z_0 = 0$ е *еднократен полюс* на $f(z)$,

защото $z = 0$ е трикратна нула на знаменателя, но двукратна нула на числителя ($\varphi(0) = 1 - \cos z = 0$, $\varphi'(z) = \sin z$, $\varphi''(z) = \cos z$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1 \neq 0$). Тогава

1. Разглеждаме $z = 0$. По формула (10.3) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z=0}\left[\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}(z-0)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{4(\frac{z}{2})^2(z-3)} = -\frac{1}{6}.$$

2. Разглеждаме $z = 3$ (еднократен полюс за $f(z)$). По формула (10.3) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3}\left[\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}(z-3)\right] = \lim_{z\to 3}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^3} = \frac{2}{27}\sin^2\frac{3}{2}$$

или

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \left.\frac{1-\cos z}{3z^2(z-3)+z^3}\right|_{z=3} = \frac{2\sin^2\frac{3}{2}}{27}.$$

Пример 10.7. Пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{2z-1}{(z^2+1)(z-3)}dz$, $(c) : |z-3| = 1$; б) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{e^z dz}{z^2-1}$, $(c) : |z-1-i| = \sqrt{2}$;

в) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{e^z-1}{z(z-1)}dz$, $(c) : |z| = 4$; г) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{\sin z}{z^3-13z^3}dz$, (c): $|z+1| + |z-1| = 3$;

д) $\oint\limits_{(c)} \frac{2dz}{z(z-1)^2(z+3)}$, $(c)\colon x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$;

е) $\oint\limits_{(c)} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, $(c) : 2 < |z| < 4$; ж) $\oint\limits_{(c)} \frac{e^z dz}{z^3+z}$, $(c) : |z-1| = 2$

Решение.

а) Начертаваме

$$(c)\colon |z-3| = 1 \Longleftrightarrow |x+iy-3| = 1 \Longleftrightarrow |(x-3)+iy| = 1$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 1 \Longrightarrow (c)\colon (x-3)^2 + (y-0)^2 = 1^2,$$

т.е. окръжност (c) с център $(3,0)$ и $r = 1$, която загражда област $\mathfrak{D}$. Особени точки на $f(z)$ са $z_1 = 3$ и $z_{2,3} = \pm i$. Функцията $f(z)$ е аналитична в $\mathfrak{D}$ с изключение на точката $z_1 = 3$ ($z_{2,3} = \pm i$ са *външни точки* за $\mathfrak{D}$).

От $\lim\limits_{z\to 3} \frac{2z-1}{(z^2+1)(z-3)} = \frac{5}{0} = \infty \Longrightarrow z = 3$ е *еднократен полюс* на $f(z)$. Тогава по формула (10.3) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3} \left[\frac{2z-1}{(z^2+1)(z-3)}(z-3)\right] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$
$$\text{От T1} \Longrightarrow I = \oint\limits_{(c)} \frac{(2z-1)dz}{(z^2+1)(z-3)} = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i;$$

б) Начертаваме

$$(c)\colon |z-1-i| = \sqrt{2} \Longleftrightarrow |x+iy-1-i| = \sqrt{2}$$
$$\Longleftrightarrow |(x-1)+i(y-1)| = \sqrt{2} \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\Longrightarrow (c) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2,$$

т.е. окръжност (c) с център $(1,1)$ и $r = \sqrt{2}$, която загражда област $\mathfrak{D}$, $O \in (c)$. Особените точки на $f(z)$ са $z_{1,2} = \pm 1$. Функцията $f(z)$ е аналитична в $\mathfrak{D}$ (частно на две аналитични функции) с изключение на точката $z_1 = 1$ ($z_2 = -1$ е *външна* за $\mathfrak{D}$).

От $\lim\limits_{z\to 1} \frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e}{0} = \infty \Longrightarrow z = 1$ е *еднократен полюс* на $f(z)$. Тогава по формула (10.3) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{e^z}{z^2-1} = \lim_{z\to 1} \left[\frac{e^z(z-1)}{(z-1)(z+1)}\right] = \frac{e}{2}.$$
$$\text{От T1} \Longrightarrow I = 2\pi i \frac{e}{2} = e\pi i;$$

в) Начертаваме

$$(c)\colon |z| = 4 \iff |x+iy| = 4 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 4 \Longrightarrow (c): x^2+y^2 = 4^2,$$

т.е. (c) е централна окръжност с $r = 4$, която загражда област $\mathfrak{D}$. Особените точки на $f(z)$ са $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. Функцията $f(z)$ е аналитична в $\mathfrak{D}$ (частно на две аналитични функции) с изключение на точките $z_{1,2}$ *вътрешни* за $\mathfrak{D}$.

От $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z-1}{z(z-1)} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z}{z-1+z} = -1$ (постоянно число) следва, че $z_1 = 0$ е *отстранима* изолирана особена точка на $f(z)$ и тогава $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = 0$.

От $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{e^z-1}{z(z-1)} = \dfrac{e-1}{0} = \infty \Longrightarrow z = 1$ е *еднократен полюс* на $f(z)$.
Тогава по формула (10.4) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{e^z-1}{z(z-1)} = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \left.\frac{e^z-1}{z-1+z}\right|_{z=1} = e-1.$$

$$\text{От T1} \Longrightarrow I = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)) = 2\pi i(e-1);$$

г) Начертаваме

$$(c)\colon |z+1| + |z-1| = 3 \iff \sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 3$$

$$\iff 20x^2+36y^2 = 45 \Longrightarrow (c)\colon \frac{x^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5}/2)^2} = 1,$$

т.е. (c) е *елипса* с полуоси $a = 3/2$ и $b = \sqrt{5}/2$, която загражда област $\mathfrak{D}$. Особените точки на $f(z)$ са $z_{1,2} = 0$ и $z_3 = 13$. Функцията $f(z)$ е аналитична в $\mathfrak{D}$ (частно на две аналитични функции) с изключение на точката $z_1 = 0$ ($z = 13$ е *външна* точка за $\mathfrak{D}$).

От $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z^3-13z^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cos z}{3z^2-26z} = \dfrac{1}{0} = \infty \Longrightarrow z = 0$ е *еднократен полюс* на $f(z)$, защото $z = 0$ е двукратна нула на знаменателя, но еднократна нула на числителя ($\varphi(0) = \sin z = 0$, $\varphi'(z) = \cos z$, $\varphi'(0) = 1 \neq 0$). Тогава по формула (10.3) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^3-13z^2} = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\sin z}{z^2(z-13)}(z-0)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z-13+z} = \frac{-1}{13}.$$

$$\text{От T1} \Longrightarrow I = 2\pi i(-\frac{1}{13}) = -\frac{2\pi i}{13}.$$

д) Линията (c) е позната (*астроида*) с графика—симетрична относно координатните оси и пресечни точки с тях $x = \pm 2$, $y = \pm 2$. Особени точки на

$f(z)$ са $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -3$. Функцията $f(z)$ е аналитична в областта $\mathfrak{D}$, заградена от (c), с изключение на точките $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ ($z_3 = -3$ е *външна* за $\mathfrak{D}$).

От $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\to 1}} \dfrac{2}{z(z-1)^2(z+3)} = \dfrac{2}{0} = \infty \Longrightarrow z_1 = 0$ е *еднократен полюс*, а $z = 1$ - *двукратен полюс* на $f(z)$. Тогава по формули (10.4) и (10.2) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{2}{(z-1)^2(z^2+3z)} = \frac{2}{2(z-1)(z^2+3z)+(z-1)^2(2z+3)}\bigg|_{z=0} = \frac{2}{3},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{2}{z(z-1)^2(z+3)} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[\frac{2}{z(z-1)^2(z+3)}(z-1)^2\right]'$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{-2(2z+3)}{z^2(z+3)^2} = -\frac{5}{8}.$$

$$\text{От T1} \Longrightarrow I = 2\pi i(\frac{2}{3}-\frac{5}{8}) = \frac{2\pi i}{24} = \frac{\pi i}{12}.$$

e) Линията (c) загражда *венец* от две централни концентрични окръжности с $r_1 = 2$ и $r_2 = 4$, а областта на венеца означаваме с $\mathfrak{D}$. Особени точки на $f(z)$ са $z_{1,2} = \pm 1$ и $z_3 = 3$. Функцията $f(z)$ е аналитична в $\mathfrak{D}$ с изключение на точката $z = 3$ ($z_{1,2} = \pm 1$ са *външни* точки за $\mathfrak{D}$).

От $\lim\limits_{z\to 3}\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = \dfrac{1}{0} = \infty \Longrightarrow z = 3$ е двукратен полюс на $f(z)$.

Тогава по формула (10.2) имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 3}\left[\frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}(z-3)^2\right]' = \lim_{z\to 3}\frac{-4z}{(z^2-1)^3} = -\frac{3}{2.64}$$

$$\text{От T1} \Longrightarrow I = 2\pi i(\frac{-3}{2.64}) = \frac{-3\pi i}{64}.$$

Пример 10.8. Решете интеграла $\oint\limits_{(c)} \dfrac{e^z}{z\cos z}dz$, $(c) : |z| = \pi$.

Решение. Начертаваме $(c) : |z| = \pi \Longleftrightarrow (c) : x^2 + y^2 = \pi^2$, т.е. централна окръжност (c) с $r = \pi$, загражда област $\mathfrak{D}$. Особените точки на $f(z)$ са $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Функцията $f(z)$ е аналитична в $\mathfrak{D}$ (частно на две аналитични функции) с изключение на точките $z_{1,2,3}$.

От $\lim\limits_{z\to z_{1,2,3}} \dfrac{e^z}{z\cos z} = \infty \Longrightarrow z_{1,2,3}$ са еднократни полюси на $f(z)$. Тогава:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{e^z}{\cos z - z\sin z}\Big|_{z=0} = \frac{e^0}{1} = 1,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi/2} f(z) = \frac{\varphi(\pm\frac{\pi}{2})}{\psi'(\pm\frac{\pi}{2})} = \frac{e^z}{\cos z - z\sin z}\Big|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \mp\frac{2}{\pi}e^{\pm\frac{\pi}{2}}$$

От T1 $\Longrightarrow I = 2\pi i(1-\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi}{2}}) = 2\pi i - 2\pi i\frac{4}{\pi}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} = 2\pi i - 8i\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}.$

Пример 10.9. Решете интеграла

$$\oint\limits_{(c)} \left[\frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z^2+3z+2)} + z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z}\right]dz, \qquad (c)\colon |z+1| = 2.$$

Решение. Контурът $(c) : |z+1| = 2 \Longleftrightarrow (c) : (x+1)^2 + y^2 = 2^2$, т.е. окръжност с център $(-1,0)$ и радиус $r = 2$ загражда област $\mathfrak{D}$.

Даденият интеграл е сума от два интеграла

$$I_1 = \oint\limits_{(c)} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z^2+3z+2)}dz \quad \text{и} \quad I_2 = \oint\limits_{(c)} z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z}.$$

Разглеждаме интеграла I_1. Особените точки на $f_1(z) = \dfrac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z^2+3z+2)}$ са $z_1 = 0$, $z_2 = -1$ и $z_3 = -2$. Функцията $f_1(z)$ е аналитична в областта $\mathfrak{D}$, заградена от (c), с изключение на точките $z_1 = 0$, $z_2 = -1$ и $z_3 = -2$.

От $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \dfrac{\operatorname{sh}1}{0} = \infty \Longrightarrow z_1 = 0$ е *двукратен полюс.*

От $\lim\limits_{z\to -1} \dfrac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{z\to -1} \dfrac{1}{z^2(z+2)} \lim\limits_{z\to -1} \dfrac{\operatorname{ch}(z+1)}{1} = 1 \Longrightarrow$ $z_2 = 1$ е *отстранима особена точка.*

От $\lim\limits_{z\to -2} \dfrac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \dfrac{-\operatorname{sh}1}{0} = \infty \Longrightarrow z_3 = -2$ е *прост полюс.*

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)}\right]'$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{ch}(z+1)(z+1)(z+2) - \operatorname{sh}(z+1)(2z+3)}{(z+1)^2(z+2)^2} = \frac{2\operatorname{ch}1 - 3\operatorname{sh}1}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \lim_{z\to -2}\frac{(z+2)\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \frac{\operatorname{sh}1}{4}.$$

От T1$\Longrightarrow I_1 = 2\pi i\left(\dfrac{2\text{ch}1 - 3\text{sh}1}{4} + \dfrac{\text{sh}1}{4}\right) = \dfrac{\pi i}{e}$.

Разглеждаме интеграла I_2. Особената точка на $f_2(z) = z^2\text{sh}\dfrac{1}{z}$ е $z_1 = 0$. Функцията $f_2(z)$ е аналитична в областта $\mathfrak{D}$, заградена от (c) с изключение на точката $z_1 = 0$.

Границата $\lim\limits_{z\to 0} z^2\text{sh}\dfrac{1}{z}$ не съществува, следователно $z_1 = 0$ е *съществена изолирана особена точка* на функцията.

Редът на Лоран за $f_2(z)$ в околността на точката $z = 0$ ще получим от развитието на $\text{sh}\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{\xi}{1!} + \dfrac{\xi^3}{3!} + \cdots + \dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

При $\xi = \dfrac{1}{z} \Longrightarrow \text{sh}\dfrac{1}{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}$.

$$f_2(z) = z^2\text{sh}\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!z^{2n-1}} = z + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} + \ldots$$

$$\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} z^2\text{sh}\frac{1}{z} = a_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

$$\Longrightarrow I_2 = \frac{\pi i}{3} \Longrightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi i}{e} + \frac{\pi i}{3} = \frac{\pi i(3+e)}{3e}.$$

Пример 10.10. Решете $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Решение. Полагаме $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, (вж. т.В, I клас). От $z = e^{i\theta} \Longrightarrow |z| = 1$, т.е. точката z описва окръжност $(c): |z| = 1$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ или $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$ и заместваме

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{z}}{2 + \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \frac{2}{i}\oint\limits_{|z|} \frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Особени точки за $f(z)$ са $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Функцията $f(z)$ е аналитична в областта $\mathfrak{D}$, заградена от (c) (частно на две аналитични функции) с изключение на $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ ($z_2 = -2 - \sqrt{3}$ е *външна* точка за $\mathfrak{D}$).

От $\lim\limits_{z_1\to -2+3^{1/2}} \dfrac{1}{z^2+4z+1} = \infty \Longrightarrow z = -2 + \sqrt{3}$ е *еднократен полюс* на

$f(z)$. Тогава

$$\operatorname*{Res}_{z_1=-2+3^{1/2}} f(z) = \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} = \frac{1}{2z+4}\bigg|_{z_1=-2+3^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{От T1} \implies I = 2\pi i \frac{2}{i}\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Пример 10.11. Решете $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение. Формално заместваме променливата x с комплексната променлива $z = x + iy$ и тогава $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$.

Особените точки на $f(z)$ са $z_{1,2} = \pm i$ от които само $z_1 = i$ е над оста Ox (вж. T2).

От $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{1}{(1+z^2)^2} = \infty \implies z = i$ е *двукратен полюс* на $f(z)$.

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}(z-i)^2\right]'$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{-2(z+i)}{(z+i)^4} = \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}, \quad i^3 = -i.$$

$$\implies \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 10.12. Решете интеграла $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx$.

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2-5z+6}$, която има прости полюси $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$ на реалната ос.

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{ze^{iz}}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z\to 2}\frac{(z-2)z.e^{iz}}{(z-2)(z-3)} = -2e^{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{ze^{iz}}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z\to 3}\frac{(z-3)z.e^{iz}}{(z-2)(z-3)} = 3e^{3i}.$$

Тогава

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x.e^{ix}}{(x-2)(x-3)}dx = \frac{1}{2}2\pi i(-2e^{2i}+3e^{3i})$$

$$= \pi i(-2\cos 2 - 2i\sin 2 + 3\cos 3 + 3i\sin 3)$$

$$= \pi(2\sin 2 - 3\sin 3) + \pi i(3\cos 3 - 2\cos 2).$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x.e^{ix}}{x^2-5x+6}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-5x+6}dx$$

$$= \pi(2\sin 2 - 3\sin 3) + i[\pi(3\cos 3 - 2\cos 2)].$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx = \pi(2\sin 2 - 3\sin 3).$$

Забележка. Когато особените точки на подинтегралната функция са на реалната ос, резидуумите им участват във формула (10.7) с коефициент 1/2.

Пример 10.13. Решете интеграла на Дирихле $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$, която има един прост полюс $z = 0$ на реалната ос.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} = \lim_{z\to 0} e^{iz} = 1. \Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2}2\pi i.1 = \pi i\,.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx \Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}dx = 0,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

Но $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx \left(\frac{\sin x}{x} \text{ е четна ф-ия}\right) \Longrightarrow \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$

ЗАДАЧИ

1. Намерете *резидуумите* на функцията:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z-z^3}$; Отг. $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1,\ \operatorname*{Res}_{z=\pm 1} f(z) = -\dfrac{1}{2}$

б) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3-z^2}$; Отг. $\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=2$, $\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-1$

в) $f(z)=\dfrac{1}{z^4-3z^3+3z^2-z}$; Отг. $\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-1$, $\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=1$

г) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$; Отг. $\operatorname*{Res}_{z_k}f(z)=\dfrac{1}{4z_k^3}$, $k=\overline{1,4}$ (вж. пример 10.2)

д) $f(z)=\dfrac{z^2+2z}{z^3+3z^2-4}$ Отг. $\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname*{Res}_{z=-2}f(z)=\dfrac{2}{3}$

е) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^3(z+4)}$ Отг. $\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=0$, $\operatorname*{Res}_{z=-4}f(z)=-\dfrac{\cos 4-1}{64}$

ж) $f(z)=\sin\dfrac{4}{z-1}$ Отг. $\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=4$

з) $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$ Отг. $\operatorname*{Res}_{z=-2}f(z)=1$

и) $f(z)=\sin z\sin\dfrac{1}{z}$ Отг. 0

к) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-e^z)}$ Отг. 1

2. С помощта на *теоремата за резидуумите* пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{2z+1}{z(z-1)}dz$, $(c):|z|=3$ Отг. $4\pi i$

б) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{3z+5}{z(z-3)^3}dz$, $(c):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ Отг. 0

в) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{z.dz}{(z-1)(z-2)^2}$, $(c):|z-2|=\dfrac{1}{2}$ Отг. $-2\pi i$

г) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{dz}{z^2+9}$, $(c):|z|=\dfrac{7}{2}$ Отг. 0

д) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{dz}{(z-1)(z^2+1)}$, $(c):x^2+y^2=2(x+y)$ Отг. $\dfrac{\pi}{2}(i-1)$

е) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{e^z dz}{z^3+z}$, $(c):|z-1|=2$ Отг. $2\pi i(1-\cos 1)$

ж) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{(z-1)dz}{z(z^2+1)^2}$, $(c):|z-i|=\dfrac{3}{2}$ Отг. $\pi(\dfrac{1}{2}-i)$

з) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{dz}{(z^4-1)^2}$, $(c):|z+10|+|z-10|=20,05$ Отг. 0

и) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{(z^2+1)dz}{z^2(2z+3)^2}$, $(c):x^2+4y^2=4$ Отг. $-\dfrac{4\pi i}{27}$

к) $\displaystyle\oint_{(c)}\frac{dz}{(z-i)(z-1)^2(z-2+i)}$, $(c):x^2+y^2+2y=4x$ Отг. $\dfrac{-\pi(1-i)}{4}$

л) $\oint\limits_{(c)} \frac{9(z+1)dz}{(2+z+i)(z+2)^2(z-1)}$, $(c) : |z+2+i| = 3$ Отг. $\frac{-2\pi(1+3i)}{5}$

м) $\oint\limits_{(c)} \frac{\operatorname{tg} z dz}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}$, $(c) : |z| = \frac{\pi}{3}$ Отг. $\frac{16i}{\pi^2}(3\pi-4)$

н) $\oint\limits_{(c)} \frac{e^z-1}{z^2\cos z}dz$, $(c) : |z| = 4$ Отг. $2\pi i - \frac{16i}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$

о) $\oint\limits_{(c)} \frac{dz}{z\sin z}$, $(c) : |z-4| = 4,5$ Отг. $-i$

п) $\oint\limits_{(c)} \frac{e^z-1}{(z-1)^2\sin z}dz$, $(c) : |z| = 2$ Отг. $\frac{2\pi i}{\sin^2 1}[e(\sin 1 - \cos 1) + \cos 1]$

р) $\oint\limits_{(c)} \left[\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^3} + (z+1)e^{\frac{1}{z}}\right]dz$, $(c) : |z+1| = 3/2$ Отг. $\frac{3\pi i}{16}(\pi+8)$

с) $\oint\limits_{(c)} \left[\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} + z\cos^2\frac{1}{z}\right]dz$, $(c) : |z+1| = 3/2$ Отг. $\frac{-2\pi i}{e}$

т) $\oint\limits_{(c)} \left[\frac{e^{iz}+1}{z-\pi} + \sin\frac{4}{z-1}\right]dz$, $(c) : |z-i| = 3$ Отг. $-8\pi i$

у) $\oint\limits_{(c)} \left[\frac{e^z-1}{z^2-z} + z^3\cos\frac{1}{z+2}\right]dz$, $(c) : |z+1| = 3$ Отг. $\frac{\pi i}{12}(e-167)$

ф) $\oint\limits_{(c)} \left[\frac{1}{z(1-e^{2z})} + e^{\frac{1}{z+2}}\right]dz$, $(c) : |z+i| = 3$ Отг. $3\pi i$

х) $\oint\limits_{(c)} \left[\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2} + \cos\frac{z}{z-i}\right]dz$, $(c) : 9x^2+4y^2=36$ Отг. $2\pi i\left(\frac{16}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi^2}{16} - i\sin 1\right)$

3. Пресметнете *интегралите*:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$, Отг. 2π

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$ Отг. $\frac{10\pi}{27}$

в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}}$ Отг. $\frac{32\pi}{15}$

4. Пресметнете *несобствените интеграли*:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ Отг. $\dfrac{3\pi}{8}$

б) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ Отг. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2ix+5)^2}$ Отг. $\dfrac{\pi}{24\sqrt{6}}$

г) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2}$ Отг. $\dfrac{\pi}{2a.e^a}$

д) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}dx$ Отг. $\dfrac{\pi}{2}$

е) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)^2}$ Отг. $\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{3}{2e})$

ж) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$ Отг. $\dfrac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)$.

ГЛАВА 11

РЕД НА ФУРИЕ И УСЛОВИЯ ЗА НЕГОВАТА СХОДИМОСТ

А. Ред на Фурие за периодична функция с период $T = 2\pi$

Дефиниция 1 *Функцията $f(x)$ се нарича **периодична**, ако $\exists T > 0$ така,че $f(x+T) = f(x)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. **Най-малкото** положително число с горното свойство се нарича **период** на $f(x)$.*

Дефиниция 2 *Ако $f(x)$ е дефинирана за $x \in (a, a+T)$, $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, то **периодично продължение** на $f(x)$ наричаме функцията*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, a+T) \\ f(x-kT), & x \in (a+kT, a+(k+1)T), k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{11.1}$$

Очевидно $F(x+T) = F(x)$, $\forall z \in \mathbb{R}$, т.е. графиката на $f(x)$, $x \in (a, a+T)$ се премества успоредно по оста Ox на разстояние kT, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1 *Ако $f(x+T) = f(x)$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.*

Дефиниция 3 *Функционен ред*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{11.2}$$

*където $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ се нарича **тригонометричен ред**.*

Парциалните (частичните) суми $s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x)$ на (11.2) са линейни комбинации от функциите $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$. Тези функции образуват **основна тригонометрична система** (ОТС).

Свойства на ОТС:

1) Интеграл от произведението на *две различни функции* на ОТС в интервала $(-\pi, \pi)$ е винаги *равен на нула.*

2) Интеграл от произведението на *две еднакви функции* на ОТС в интервала $(-\pi, \pi)$ е винаги *различен от нула.*

Като използваме горните две свойства, за коефициентите на реда (11.2) получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11.3}$$

Дефиниция 4 *Тригонометричен ред (11.2), чиито коефициенти се пресмятат по формули (11.3) се нарича ред на Фурие.*

От известната формула

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(-x) = -f(x) \\ 2\int_0^a f(x)dx, & f(-x) = f(x) \end{cases}$$

получаваме:

1) Ако $f(-x) = f(x) \bigwedge f(x + 2\pi) = f(x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{11.4}$$

(*развитие на $f(x)$ само по косинуси*).

2) Ако $f(-x) = -f(x) \bigwedge f(x + 2\pi) = f(x)$, то

$$a_0 = a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{11.5}$$

(*развитие на $f(x)$ само по синуси*).

Б. Условия за сходимост на реда на Фурие

Дефиниция 5 *Казваме, че $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле, ако са изпълнени:*

1) $f(x+2\pi) = f(x)$ е непрекъсната или има краен брой точки на прекъсване от първи род, т.е. ако x_0 е точка на прекъсване за $f(x)$, то $\exists f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$.

2) $f(x)$ има краен брой екстремуми или краен брой интервали на монотонност, т.е. ако разбием интервала $(-\pi,\pi)$ на подинтервали, то във всеки един от тях функцията $f(x)$ е монотонна.

Теорема 2 *(на Дирихле) Ако $f(x)$ е дефинирана за всяко x, $f(x+2\pi) = f(x)$ и $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле, то $f(x)$ се развива в ред на Фурие, който е сходящ за всяко x и неговата сума*

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ е точка на непрекъснатост за } f(x) \\ \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, & x_0 \text{ е точка на прекъсване за } f(x). \end{cases}$$

Пример 11.1. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0,\pi), f(x+2\pi) = f(x). \end{cases}$$

Решение. В интервала $(-\pi,\pi)$ функцията $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле: 1) има една точка на прекъсване $x = 0$ от първи род; 2) има краен брой интервали на монотонност. Освен това $f(x)$ е периодична с период 2π. Следователно $f(x)$ се развива в ред на Фурие за $\forall x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Графиката на $f(x)$ не е симетрична относно оста Oy или O и тогава $f(x)$ е нито четна, нито нечетна. Според (11.3) и (11.2) имаме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3dx = \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0} + 3x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(\pi+3\pi) = 4;$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos kx dx + \frac{3}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{3}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\pi}\right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin kx dx + 3\int_{0}^{\pi}\sin kx dx\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{3}{k}\cos kx\Big|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}(1-(-1)^k) + \frac{3}{k}((-1)^k - 1)\right] \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k}\right)(1-(-1)^k) \\ &= \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k) = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Longrightarrow b_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n-1 & \Longrightarrow b_{2n-1} = \dfrac{4}{(2n-1)\pi}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{4}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}0\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x$$

$$=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=2+\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right),\forall x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Забележка. При решението се използва, че $\sin k\pi=0$, $\cos k\pi=(-1)^k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 11.2. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0)\\ 1, & x\in(0,\pi), f(x+2\pi)=f(x).\end{cases}$$

Решение. Функцията $f(x)$ е периодична с период 2π и в интервала $(-\pi,\pi)$ удовлетворява условията на Дирихле, при това $f(-x)=-f(x)$, т.е. *нечетна* (графиката е симетрична спрямо O). Тогава по (11.5) имаме:

$$a_0=a_k=0,\quad k\in\mathbb{N};$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx dx=\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kx d(kx)=-\frac{2}{k\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{k\pi}[(-1)^k-1]=\begin{cases}\text{при } k=2n & \Longrightarrow b_{2n}=0\\ \text{при } k=2n-1 & \Longrightarrow b_{2n-1}=\dfrac{4}{(2n-1)\pi}, n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right).$$

Забележка. Функцията $f(x)$ е *нечетна* и в ред на Фурие се развива *само по синуси.*

Пример 11.3. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{x}{\pi}), & -\pi\leq x\leq 0\\ \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{x}{\pi}), & 0<x<\pi\end{cases},\quad f(x+2\pi)=f(x).$$

Решение. Зададената периодична функция с период 2π отговаря на условията на Дирихле. Тя е *нечетна* (графиката е симетрична спрямо т.О) и следователно коефициентите в реда на Фурие се изчисляват по формули (11.5).

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\frac{x}{\pi})\sin kx dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi}-1)d\cos kx$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[(\frac{x}{\pi}-1)\cos kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right] = \frac{1}{k\pi}\Big(0+1-\frac{1}{k\pi}\sin kx\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{\pi}\Big(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\Big).$$

Пример 11.4. Намерете Фуриеровото развитие на функцията

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

С помощта на получения ред намерете сумите:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}; \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Решение. Периодичната функция $f(x) = x^2$ с период 2π удовлетворява условията на Дирихле, при това $f(x) = f(-x)$, т.е. тя е *четна* (графиката е симетрична спрямо оста Oy). Тогава по формули (11.4) получаваме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\sin kx = \frac{2}{k\pi}\Big(x^2\sin kx\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin kx dx\Big)$$

$$= \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} x d\cos kx = \frac{4}{k^2\pi}\Big(x\cos kx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos kx dx\Big) = \frac{4}{k^2\pi}\pi(-1)^k$$

$$= \frac{4(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

1) От получения ред при $x = 0 \Longrightarrow \cos 0 = 1$ получаваме:

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{но } f(0) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}; \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2) При $x = \pi$, $\cos k\pi = (-1)^k$ и от получения ред получаваме:

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k, \quad \text{но } f(\pi) = \pi^2$$

$$\Longrightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2/3}{4} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Забележка. Периодична функция с период 2π притежава свойството: интеграл от периодична функция по произволна отсечка, дължината на която е 2π, има една и съща стойност (вж. T1), т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx.$$

Пример 11.5. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = x$, $x \in (0, 2\pi]$ и $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Решение. Правата $y = f(x) = x$ е ъглополовяща на първи и трети квадранти, като в $(0, 2\pi]$ е отсечка от правата. Тази отсечка не е симетрична нито спрямо Oy, нито спрямо O и тогава $f(x)$, която е периодична с период 2π е *нито четна, нито нечетна.* Тогава по (11.3) и (11.2) имаме (вж. *забележката*):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} x d\sin kx = \frac{1}{k\pi}\left(x\sin kx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx dkx\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(0 + \frac{1}{k}\cos kx\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{k\pi}(1 - 1) = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin kx dx = -\frac{1}{k\pi}\int\limits_0^{2\pi} x d\cos kx = -\frac{1}{k\pi}\left(x\cos kx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi}\cos kx dkx\right)$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left(2\pi - 0 - \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \pi + \sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{2}{k})\sin kx = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right).$$

Пример 11.6. С помощта на реда на Фурие да се намери едно частно решение на уравнението: $y'' - 2y = f(x)$, където $f(x)$ е периодична функция с период 2π, зададена в интервала за $x \in (0; 2\pi)$ с равенството $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Решение. Развиваме в ред на Фурие *нечетната* функция $f(x)$.

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin kx dx = \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^{\pi}(x - \pi) d\cos kx = \frac{1}{k\pi}\left[(x - \pi)\cos kx\Big|_0^{\pi}\right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\pi}\cos kx dx\right] = \frac{1}{k\pi}\left(\pi - \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{k\pi}\pi = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Търсим решението на уравнението във вид на тригонометричен ред:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx);$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k\sin kx + b_k k\cos kx);$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k^2\cos kx - b_k k^2\sin kx).$$

Заместваме в уравнението $y'' - 2y = f(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k^2\cos kx - b_k k^2\sin kx) - 2\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-a_k(k^2 + 2)\cos kx - b_k(k^2 + 2)\sin kx\right] - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} -a_0 = 0 \\ -a_k(k^2+2) = 0 \\ -b_k(k^2+2) = \dfrac{1}{k} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_k = 0 \\ b_k = -\dfrac{1}{k(k^2+2)}, \quad k \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow y = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k^2+2)}, x \neq 2n\pi.$$

ЗАДАЧИ

Да се развият в *ред на Фурие* функциите:

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -2, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

2) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0, \pi) \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $1 + \dfrac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

3) $f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi], f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\dfrac{4\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k^2} - 2\pi \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$ (вж. пр. 11.4.)

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

С помощта на получения ред да се намери сумата на реда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$

Отг. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}.$

5) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2; \pi/2] \\ 0, & x \in [\pi/2; \frac{3\pi}{2}] \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{1}{2} \cos x + 2 \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2-1}$

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\dfrac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(1+e^{-\pi}(-1)^{k+1})}{k^2+1} (\cos kx + k \sin kx)$

7) $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x \in (-\pi, \pi) \\ \mathrm{ch}\pi, & x = \pm\pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\dfrac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi} \left[\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right].$

ГЛАВА 12

КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА РЕДА НА ФУРИЕ. РЕД НА ФУРИЕ ЗА ФУНКЦИЯ С ПРОИЗВОЛЕН ПЕРИОД

А. Комплексна форма на реда на Фурие.

Ако

$$f(x+2\pi)=f(x),\quad f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx(k=0,1,2,\ldots)\,,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx(k\in\mathbb{N})$$

и заместим $\cos kx=\dfrac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx=\dfrac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$, получаваме

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}, \tag{12.1}$$

т.е. *ред на Фурие в комплексна форма*, при това:

1) Ако $\quad k>0,\quad c_k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx$ (12.2)

2) Ако $\quad k<0,\quad c_{-k}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx$ (12.3)

3) $f(x)\sim\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k(e^{ix})^k$ и като положим $z=e^{ix}$, т.е. $z\in(c):|z|=1$ получаваме, че редовете на Фурие са Лоранови редове върху единична окръжност.

Б. Ред на Фурие за периодична функция с произволен период ($2l\neq2\pi$).

Теорема 1 *Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:*

а) $f(x)$ е дефинирана за $x\in(-l,l)$;

б) $f(x+2l)=f(x)$, $T=2l\neq2\pi$;

в) $f(x)$ е по части гладка и по части непрекъсната.

Тогава посредством субституцията $x=\dfrac{l}{\pi}\xi$ функцията $f(x)$ се представя с ред на Фурие по следния начин:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{12.4}$$

където

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx, a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{12.5}$$

В зависимост от това дали $f(x)$ е четна или нечетна получаваме:

1) Ако $f(-x) = f(x) \wedge f(x+2l) = f(x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{12.6}$$

(развитие на $f(x)$ само по косинуси).

2) Ако $f(-x) = -f(x) \wedge f(x+2l) = f(x)$, то

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{12.7}$$

(развитие на $f(x)$ само по синуси).

Пример 12.1. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = |x|$, $x \in [-l, l]$, като $f(x+2l) = f(x)$. Като използвате полученото развитие намерете сумата на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решение. От $y = f(x) = |x| \Longrightarrow y = \pm x$, т.е. графиката на функцията се състои от ъглополовящите на първи и трети, втори и чевърти квадранти, а следователно в $[-l, l]$- две отсечки, симетрични относно Oy, т.е. $f(x)$ е *четна* *функция* ($b_k = 0$). Тогава по (12.6) имаме:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x dx = \frac{2}{l}\frac{x^2}{2}\Big|_0^l = l;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\frac{l}{k\pi}\int_0^l x d\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(x\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{l}{k\pi}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}d\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{2}{k\pi}\left(0 + \frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l\right)$$

$$= \frac{2l}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Longrightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n-1 \Longrightarrow a_{2n-1} = -\dfrac{4l}{(2n-1)^2\pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow |x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

При $x = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Пример 12.2. Да се развие в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, \ x \in (0,2), \ b > 0 \\ 0, \ x \in (2,4). \end{cases}$$

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 4$, т.е. $l = 2$ е *нито четна, нито нечетна*. Тогава:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 bdx + \frac{1}{2}\int_0^4 0dx = \frac{b}{2}x\Big|_0^2 = b;$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{b}{2}\int_0^2 \cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{b}{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{b}{k\pi}(\sin k\pi - \sin 0) = 0, k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{b}{2}\frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}d\frac{k\pi x}{2}$$

$$= -\frac{b}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{b}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{b}{k\pi}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Longrightarrow b_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n-1 \Longrightarrow b_{2n-1} = \dfrac{2b}{(2n-1)\pi}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Пример 12.3. Функцията $f(x) = x$, $x \in (-1, 1)$ да се развие в *ред на Фурие*.

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 2$, т.е. $l = 1$ е нечетна ($a_0 = a_k = 0$). Тогава по формула (12.7) имаме:

$$b_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin\frac{k\pi x}{1}dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 xd\cos k\pi x$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(x\cos k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dk\pi x\right)$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(\cos k\pi - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right) = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x.$$

Пример 12.4. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x; & -1 \le x < 0 \\ -x; & 0 \le x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 2$ ($l = 1$) е *нито четна, нито нечетна.*

Прилагаме формули (12.5) за изчисляване на коефициентите:

$$a_0 = \frac{1}{1}\Big[\int_{-1}^{0}\frac{1}{4}xdx + \int_0^1(-x)dx\Big] = \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8};$$

$$a_k = \frac{1}{1}\Big[\int_{-1}^{0}\frac{1}{4}x\cos k\pi x - \int_0^1 x\cos k\pi x dx\Big] = \frac{1}{k\pi}\Big[\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} xd\sin k\pi x - \int_0^1 xd\sin k\pi x\Big]$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}x\sin k\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{0}\sin k\pi x dx - x\sin k\pi x\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1}\sin k\pi x dx\right]$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}\cos k\pi x\Big|_{-1}^{0} - \cos k\pi x\Big|_{0}^{1}\right] = \frac{1}{k^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}(1-(-1)^k) - ((-1)^k - 1)\right]$$

$$= \frac{5}{4k^2\pi^2}[1-(-1)^k] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Longrightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n-1 & \Longrightarrow a_{2n-1} = \dfrac{10}{4(2n-1)^2\pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{1}\left[\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{0} x\sin k\pi x dx - \int\limits_{0}^{1} x\sin k\pi x dx\right] = -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{0} xd\cos k\pi x - \int\limits_{0}^{1} xd\cos k\pi x\right]$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}\left(x\cos k\pi x\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0}\cos k\pi x dx\right) - x\cos k\pi x\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1}\cos k\pi x dx\right]$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}(-1)^k - (-1)^k\right] = \frac{3(-1)^k}{4k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = -\frac{5}{16} + \frac{5}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{3}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n}.$$

Пример 12.5. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} x+2; & -2 < x < 0 \\ x-2; & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$

Решение. Дадената периодична функция е *нечетна* с период $2l = 4 \Longrightarrow l = 2$. По формули (12.7) изчисляваме коефициентите:

$$a_0 = a_k = 0, \qquad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_{0}^{2}(x-2)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = -\frac{2}{k\pi}\int\limits_{0}^{2}(x-2)d\cos\frac{k\pi x}{2}$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[(x-2)\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \int\limits_{0}^{2}\cos\frac{k\pi x}{2}dx\right] = -\frac{2}{k\pi}(2-0) = \frac{-4}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

Пример 12.6. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = |\cos x|$.

Решение. Функцията $f(x) = |\cos x|$ е периодична функция с период $2l = \pi \Longrightarrow l = \pi/2$.

Развиваме периодична функция с произволен период $2l \neq 2\pi$.

Функцията е *четна* ($b_k = 0$) и коефициентите се изчисляват по формули (12.6):

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x dx = \frac{4}{\pi}\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}\,;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2kx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\cos(2kx - x) + \cos(2kx + x)]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2k-1}\int_0^{\pi/2}\cos(2k-1)xd(2k-1)x + \frac{1}{2k+1}\int_0^{\pi/2}\cos(2k+1)xd(2k+1)x\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}(-2k - 1 + 2k - 1) = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx\,.$$

Забележка.

$$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = -\cos k\pi = (-1)^{k+1} = -(-1)^k\,,$$

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-k\pi)\right) = \cos(-k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k\,.$$

Пример 12.7. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2\,, \\ 3 - x, & 2 \le x < 3 \end{cases} \quad f(x+3) = f(x)\,.$$

Решение. Дадената функция е *четна* ($b_k = 0$). Изчисленията могат да се направят в симетричния интервал $[-3/2, 3/2]$ по формулите за четна периодична функция с период $2l = 3 \Longrightarrow l = 3/2$ по (12.6):

$$a_0 = \frac{2}{3/2}\Big[\int_0^1 x dx + \int_1^{3/2} 1 dx\Big] = \frac{4}{3}\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_1^{3/2}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{4}{3};$$

$$a_k = \frac{4}{3}\Big[\int_0^1 x\cos\frac{2k\pi x}{3}dx + \int_1^{3/2}\cos\frac{2k\pi x}{3}dx\Big] = \frac{4}{3}\frac{3}{2k\pi}\Big[\int_0^1 x d\sin\frac{2k\pi x}{3} + \sin\frac{2k\pi x}{3}\Big|_1^{\frac{3}{2}}\Big]$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Big[x\sin\frac{2k\pi x}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin\frac{2k\pi x}{3}dx - \sin\frac{2k\pi}{3}\Big]$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Big[\sin\frac{2k\pi}{3} + \frac{3}{2k\pi}\cos\frac{2k\pi x}{3}\Big|_0^1 - \sin\frac{2k\pi}{3}\Big]$$

$$= \frac{3}{k^2\pi^2}\Big[\cos\frac{2k\pi}{3} - 1\Big] = -\frac{6}{k^2\pi^2}\sin^2\frac{k\pi}{3}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k\pi/3)}{k^2}\cos\frac{2k\pi x}{3}.$$

Пример 12.8. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1, & -\pi < x \le 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Дадената функция е четна ($b_k = 0$). От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$. По формули 12.6) за коефициентите на Фурие имаме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{2}{\pi}x + 1\Big)dx = -\frac{\Big(-\frac{2}{\pi}x+1\Big)^2}{2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{2}{\pi}x + 1\Big)\cos kx dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{2x}{\pi}+1\Big)d\sin kx$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Bigg[\Big(-\frac{2}{\pi}x+1\Big)\sin kx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx dx\Bigg] = -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}, & \text{при } k = 2n-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Пример 12.9. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = e^x$, $x \in (0, 2\pi)$.

Решение. Функцията е нито четна, нито нечетна. От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$.

По формули (12.5) пресмятаме коефициентите на Фурие:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}e^x\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\,;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx = \frac{1}{k\pi}\Big(e^x \sin kx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx\Big)$$

$$= \frac{1}{k^2\pi}\Big(e^x \cos kx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx\Big) = \frac{1}{k^2\pi}(e^{2\pi}-1) - \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx\,,$$

$$\Longrightarrow a_k + \frac{1}{k^2}a_k = \frac{e^{2\pi}-1}{k^2\pi} \Longrightarrow a_k = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx = -a_k k \Longrightarrow b_k = \frac{-k(e^{2\pi}-1)}{\pi(k^2+1)}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx - k \sin kx}{k^2+1}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Пример 12.10. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l\,, \quad b > 0\,. \end{cases}$$

Решение. Функцията е нито четна, нито нечетна. Периодът на функцията е $2l$. По формули (12.5) за коефициентите на реда на Фурие получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{l} b dx = \frac{b}{l}x\Big|_0^{l} = b,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{l} b \cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{b}{l}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_0^l b\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{b}{l}\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l$$

$$= -\frac{b}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n, \\ \dfrac{2b}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[((2n-1)\pi x)/l]}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 12.11. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = |\cos x|$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Решение. Функцията $f(x) = |\cos x|$ е четна за $x \in (-\pi, \pi)$. От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$, а от $f(x) = |\cos x| \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases}$

По формули (12.6) за коефициентите на реда имаме $b_k = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} - \cos x dx\Big] = \frac{2}{\pi}\Big(\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}(1+1) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos kx dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos x\cos kx dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\cos(k-1)x dx$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/2}\cos(k+1)x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos(k-1)x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos(k+1)x dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$- \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{-2\cos k\pi/2}{k-1} + \frac{2\cos k\pi/2}{k+1}\Big)$$

$$= \frac{-4\cos k\pi/2}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} \dfrac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n+1,\ k \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Коефициента a_1 изчисляваме отделно

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 x dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos 2x)dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - x\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = 0\,.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Пример 12.12. Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция с период π:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Решение. От $2l = \pi \Longrightarrow l = \pi/2$. По формула (12.2) имаме:

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-k\pi x i/l}dx \Longrightarrow c_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi}\cos x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} d\sin x = \frac{1}{\pi}\left(e^{-2kxi}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x e^{-2kxi}(-2ki)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^{-k\pi i} - 2ki\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} d\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[e^{-k\pi i} - 2ki\left(e^{-2kxi}\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos x e^{-2kxi}(-2ki)dx\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-k\pi i}}{\pi} + \frac{2ki}{\pi} + \frac{4k^2}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi}\cos x dx$$

$$\Longrightarrow c_k - 4k^2 c_k = \frac{e^{-k\pi i} + 2ki}{\pi}$$

$$c_k = \frac{\cos k\pi - i\sin k\pi + 2ki}{\pi(1-4k^2)} = \frac{(-1)^k + 2ki}{\pi(1-4k^2)}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k + 2ki}{1-4k^2}e^{2kix}\,.$$

Пример 12.13. Да се напише комплексната форма на реда на Фурие за 2π-периодичната функция $f(x)$, зададена в $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \operatorname{ch}\pi, & x = \pm\pi, . \end{cases}$$

Решение. По формула (12.2) за коефициентите на Фурие получаваме:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-ik)} e^{(1-ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)}$$

$$= \frac{e^{\pi}(\cos k\pi - i\sin k\pi) - e^{-\pi}(\cos k\pi + i\sin k\pi)}{2\pi(1-ik)} = \frac{(-1)^k e^{\pi} - (-1)^k e^{-\pi}}{2\pi(1-ik)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)}\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}\pi}{\pi(1-ik)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-ik}e^{kxi}.$$

Пример 12.14. Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция $f(x) = e^{-x}$ с период $2l = 4$. Като се използва полученият резултат, да се напише тригонометричният ред на Фурие за функцията.

Решение. По формула (12.2) за коефициентите на Фурие имаме:

$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-x} e^{-k\pi xi/2} dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-(2+k\pi i)x/2} dx$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{2}{2+k\pi i}e^{-(2+k\pi i)x/2}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2(2+k\pi i)}\left(e^{-2-k\pi i} - e^{2+k\pi i}\right)$$

$$= \frac{e^2(\cos k\pi + i\sin k\pi) - e^{-2}(\cos k\pi - i\sin k\pi)}{2(2+k\pi i)} = \frac{(-1)^k(e^2 - e^{-2})}{2(2+k\pi i)}.$$

$$\Longrightarrow c_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2}{2+k\pi i}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \operatorname{sh} 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2+k\pi i}e^{\frac{k\pi xi}{2}}.$$

Коефициентите на тригонометричния ред на Фурие могат да се изчислят от тези в комплексната форма на реда по два начина:

I начин. Чрез формулите $\frac{a_0}{2} = c_0$, $a_k = 2\mathrm{Re}(c_k)$, $b_k = -2\mathrm{Im}(c_k)$. При $k = 0$ за c_0 получаваме

$$c_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-x}dx = -\frac{1}{4}e^{-x}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{4}(e^{-2} - e^2) = \frac{\operatorname{sh}2}{2} \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh}2}{2}.$$

От

$$c_k = \frac{(-1)^k\operatorname{sh}2}{2+k\pi i} = \frac{(-1)^k\operatorname{sh}2(2-k\pi i)}{4+k^2\pi^2} = \frac{2(-1)^k\operatorname{sh}2}{4+k^2\pi^2} - i\frac{(-1)^k k\pi\operatorname{sh}2}{4+k^2\pi^2}.$$

$$\Longrightarrow a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = \frac{4(-1)^k\operatorname{sh}2}{4+k^2\pi^2}; \quad b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = \frac{(-1)^k 2k\pi\operatorname{sh}2}{4+k^2\pi^2}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sh}2}{2} + 2\operatorname{sh}2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(2\cos\frac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right)}{4+k^2\pi^2}.$$

II начин. От $f(x) = \operatorname{sh}2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^k e^{\frac{k\pi x}{2}i}}{2+k\pi i} \Longrightarrow$ при $k = 0 \Longrightarrow c_0 = \frac{\operatorname{sh}2}{2}$.

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sh}2}{2} + \operatorname{sh}2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{e^{\frac{k\pi x}{2}i}}{2+k\pi i} + \frac{e^{-\frac{k\pi x}{2}i}}{2-k\pi i}\right) = \frac{\operatorname{sh}2}{2}$$

$$+\operatorname{sh}2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[(2-k\pi i)\left(\cos\frac{k\pi x}{2}+i\sin\frac{k\pi x}{2}\right)+(2+k\pi i)\left(\cos\frac{k\pi x}{2}-i\sin\frac{k\pi x}{2}\right)\right]}{4+k^2\pi^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sh}2}{2} + \operatorname{sh}2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4+k^2\pi^2}\left(2\cos\frac{k\pi x}{2} + 2i\sin\frac{k\pi x}{2} - ik\pi\cos\frac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{k\pi x}{2} - 2i\sin\frac{k\pi x}{2} + ik\pi\cos\frac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh}2}{2} + \operatorname{sh}2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4+k^2\pi^2}\left(4\cos\frac{k\pi x}{2} + 2k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh}2}{2} + 2\operatorname{sh}2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(2\cos\frac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right)}{4+k^2\pi^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Развийте в ред на Фурие функцията:

1. $f(x) = |x|,\ x \in [-\pi, \pi],\ f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2. $f(x) = x^2,\ x \in [-1, 1],\ f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \cos k\pi x}{k^2}$.

3. $f(x) = |\sin 2x|$ Отг. $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 4nx}{1-4n^2}$.

4. $f(x) = x^2 - x,\ x \in (-1, 1),\ f(x+2) = f(x)$

Отг. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{2\cos k\pi x}{k^2 \pi} + \dfrac{\sin k\pi x}{k} \right)$.

5. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0, 2\pi),\ f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$.

6. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le l/2 \\ l - x, & l/2 < x < l \end{cases},\ f(x+l) = f(x)$

Отг. $\dfrac{l}{4} - \dfrac{2l}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{2(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$ Отг. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

8. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Отг. $\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx - \dfrac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

9. $f(x) = x \sin x,\ x \in [-\pi, \pi]$ Отг. $1 - \dfrac{1}{2}\cos x + 2 \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2 - 1} \cos kx$.

ГЛАВА 13

РАЗВИТИЕ В РЕД НА ФУРИЕ НА ФУНКЦИЯ $f(x)$, ДЕФИНИРАНА В ИНТЕРВАЛА $(0,l), l>0$, САМО ПО СИНУСИ ИЛИ САМО ПО КОСИНУСИ

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал $(0,l)$, тя може да се додефинира в интервала $(-l,0)$ така, че да бъде четна или нечетна, т.е. да се развие *само по синуси или по косинуси.* В този случай казваме, че функцията е продължена нечетно или четно:

1) Ако $f(x)$, $x\in(0,l)$ трябва да се развие *само по синуси*, разглеждаме функция $F(x)\equiv f(x)$, $x\in(0,l)$ и $F(-x)=-f(x)$, $x\in(-l,0)$. Тогава

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{13.1}$$

2) Ако $f(x)$, $x\in(0,l)$ трябва да се развие *само по косинуси*, разглеждаме функция $F(x)\equiv f(x)$, $x\in(0,l)$ и $F(-x)=f(x)$, $x\in(-l,0)$. Тогава

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l},\ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k=1,2,\ldots \tag{13.2}$$

Пример 13.1. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x)=2x$ в интервала $(0,1)$ а) *по синуси*, б) *по косинуси.*

Решение. а) *Развитие само по синуси*: графиката на $f(x)$ е *права*, която минава през точките $O(0,0)$ и $A(1,2)$, а в интервала $(0,1)$ — *отсечката* OA. Необходимо е да продължим $f(x)$ *нечетно*, като я додефинираме в интервала $(-1,0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо 0. Тогава $a_0=a_k=0$. От $2l=2\Longrightarrow l=1$ и пресмятаме

$$\begin{aligned}
b_k&=\frac{2}{1}\int_0^1 2x\sin\frac{k\pi x}{1}dx=-\frac{4}{k\pi}\int_0^1 xd\cos k\pi x\\
&=-\frac{4}{k\pi}\left(x\cos k\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_0^1\cos k\pi x dk\pi x\right)\\
&=-\frac{4}{k\pi}\left(\cos k\pi-0-\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right)=-\frac{4}{k\pi}(-1)^k+\frac{4}{k^2\pi^2}0=\frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x)=2x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin k\pi x}{k}.$$

б) *Развитие само по косинуси*: Необходимо е да продължим $f(x)$ *четно*, като я додефинираме в интервала $(-1,0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо Oy. Тогава $b_k=0$, а от $2l=2 \Longrightarrow l=1$ и пресмятаме

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 2x dx = 4\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 2\,.$$

$$a_k=\frac{2}{1}\int_0^1 2x\cos\frac{k\pi x}{1}dx=\frac{4}{k\pi}\int_0^1 x d\sin k\pi x$$

$$=\frac{4}{k\pi}\left(x\sin k\pi x\bigg|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_0^1\sin k\pi x dk\pi x\right)$$

$$=\frac{4}{k\pi}\left(0+\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\bigg|_0^1\right)=\frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi-\cos 0)$$

$$=\frac{4}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]\Longrightarrow-\begin{cases}\text{при } k=2n & \Longrightarrow a_{2n}=0\\ \text{при } k=2n-1 & \Longrightarrow a_{2n-1}=\dfrac{-8}{(2n-1)^2\pi^2}\,.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ f(x)=2x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}\,.$$

Пример 13.2. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x)=\begin{cases}a, & x\in[0,1)\\ 0, & x\in(1,2), \qquad a>0\end{cases}$$

а) само по синуси, б) само по косинуси.

Решение. Графиката на функцията $f(x)$ е *права*, успоредна на оста Ox: в интервала $[0,1)$ е $y=a$, а в интервала $(1,2)$ е $y=0$.

а) Необходимо е да продължим *нечетно* $f(x)$, като я додефинираме в интервала $(-2,0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спряма O.

От $2l=4 \Longrightarrow l=2$.

$$b_k=\frac{2}{2}\int_0^1 a\sin\frac{k\pi x}{2}dx=-a\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^1=-\frac{2a}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{2}-1\right].$$

При $k=2n \Longrightarrow b_{2n}=-\dfrac{a}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2p\\ \dfrac{2a}{(2p-1)\pi}, & n=2p-1\,.\end{cases}$

При $k = 2n - 1 \Longrightarrow b_{2n-1} = \dfrac{2a}{(2n-1)\pi}$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2a}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{2(2p-1)\pi x}{2}}{2p-1} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}.$$

б) За развитие *само по косинуси* продължаваме $f(x)$ *четно*, като я додефинираме в интервала $(-2, 0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо Oy. От $2l = 4 \Longrightarrow l = 2$.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 a\,dx = ax\Big|_0^1 = a.$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^1 a\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{2a}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2a}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \dfrac{2a(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}.$$

Пример 13.3. Да се развие *по синуси* в интервала $0, \pi$ функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \sin x, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията е отсечка от правата $y = 0$ в интервала $[0, \pi/2]$ и част от синусоида в интервала $(\pi/2, \pi)$. Додефинираме функцията в интервала $(-\pi, 0)$, като продължаваме графиката *нечетно*, т.е. симетрично спрямо O. От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$. Изчисляваме b_k:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(k-1)x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(k+1)x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos k\pi/2}{k-1} + \frac{\cos k\pi/2}{k+1}\Big]$$

$$= \frac{2k\cos k\pi/2}{(k^2-1)\pi} = \begin{cases} \dfrac{4n(-1)^n}{(4n^2-1)\pi} & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n-1, \end{cases} \quad \text{за } k \ge 2.$$

При $k=1$:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin x\sin x dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{\pi}\Big(x\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big)=\frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin 2nx}{4n^2-1}.$$

Пример 13.4. Да се разложи в ред на Фурие *по косинуси* в интервала $(0,\pi)$ функцията

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}x, & 0\le x\le \pi/2\\ \frac{\pi}{4}(\pi-x), & \pi/2<x\le\pi\,.\end{cases}$$

Решение. Построяваме *четно* продължение на графиката на $f(x)$ в интервала $(-\pi,0)$: пренасяме графиката симетрично спрямо Oy. От $2l=2\pi\Longrightarrow l=\pi$.

Изчисляваме коефициентите a_0 и a_k:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\pi x}{4}dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{4}(\pi-x)dx\Big]=\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{(\pi-x)^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big)=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\pi x}{4}\cos kx dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{4}(\pi-x)\cos kx dx\Big]$$

$$=\frac{1}{2k}\Big(\int\limits_0^{\pi/2}x d\sin kx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)d\sin kx\Big)$$

$$=\frac{1}{2k}\Big(x\sin kx\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi/2}+(\pi-x)\sin kx\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big)$$

$$=\frac{1}{2k}\Big(\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k}(-1)^k+\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}\Big)$$

$$=\frac{1}{2k^2}\Big[2\cos\frac{k\pi}{2}-1-(-1)^k\Big]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n-1}{4n^2}, & k=2n\\ 0, & k=2n-1.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n-1]\cos 2nx}{n^1}.$$

ЗАДАЧИ

1. Развийте в *ред на Фурие* само по *синуси* и само по *косинуси* функцията $f(x) = 2x$, $x \in [0, \pi]$. Отг. $4 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}$; $\pi - \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
2. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* и по *косинуси* функцията $f(x) = x^2$, $x \in (0, \pi)$.

   Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2\pi}{2n-1} - \dfrac{8}{\pi(2n-1)^2}\right] \sin(2n-1)x - \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2nx}{n}$;

   $\dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \cos kx}{k^2}$.
3. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* и по *косинуси* функцията $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi/2)$. Отг. $\dfrac{8}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{1-4k^2} \sin 2kx$; $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2kx}{1-4k^2}$.
4. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2. \end{cases}$

   Отг. $-\frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$.
5. Развийте в *ред на Фурие* само по *косинуси* функцията $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

   Отг. $\dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
6. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x) = -x$, $x \in [0, 1]$.

   Отг. $\frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \sin k\pi x}{k}$.
7. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = -x$, $x \in [0, 2]$.

   Отг. $-1 + \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$.
8. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = x - 1$, $x \in (0, 2)$.

   Отг. $-\frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$.
9. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* и по *косинуси* функцията $f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in (0, \pi/2)$. Отг. $\dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2(2n-1)x}{(2n-1)^3}$; $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 4nx}{n^2}$.
10. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = |\pi - x|$, $x \in (-\pi, 0]$.

    Отг. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
11. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$, $x \in [0, \pi)$.

    Отг. $\dfrac{1}{\pi} \sin x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1-(-1)^n}{2\pi n(n+1)} \sin(2n-1)x$.
12. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$, $x \in [0, \pi)$.

Отг. $\dfrac{3\pi}{4}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{(2n-1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(-1)^n-1]\cos 2nx}{\pi n^2}.$

13. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \pi/2 \\ \pi-x, & \pi/2\le x\le \pi \end{cases}.$

Отг. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

14. Развийте в *ред на Фурие* а) по *синуси*; б) по *косинуси* функцията

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases},\ x\in(0,2].$$

Отг. а) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi}{2}-1\right)\sin\dfrac{k\pi x}{2}$

б) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-\cos\dfrac{k\pi}{2}}{k^2}\cos\dfrac{k\pi x}{2}.$

ГЛАВА 14

ИНТЕГРАЛ И ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ФУРИЕ

А. Интеграл на Фурие.

Дефиниция 1 *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана $\forall x \in \mathbb{R}$, т.е. $x \in (-\infty, +\infty)$ и удовлетворява условията:*

*а) $f(x)$ удовлетворява **условията на Дирихле** за всеки краен интервал $(-l, l) \subset (-\infty, +\infty)$;*

*б) $f(x)$ е **абсолютно интегруема** в $(-\infty, +\infty)$, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = A$*

*(**сходящ несобствен итеграл**).*

Нека $\forall l > 0$ в интервала $(-l, l)$ функцията $f(x)$ се развива в ред на Фурие, $T = 2l$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\,.$$

Като заместим

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi, k = 0, 1, 2, \ldots \text{ и } b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi,\ k \in \mathbb{N},$$

получаваме

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)d\xi + \int\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi - x)d\xi\,.$$

При $l \to +\infty$ и условието б) следва, че $\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\xi)d\xi = 0$. Като положим $\frac{k\pi}{l} = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$ и означим $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ (при $l \to +\infty \Longrightarrow \Delta\lambda_k \to 0$), получаваме интегрална сума, която дефинира интеграла на Фурие:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\Big]d\lambda \qquad (14.1)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\Big]\cos\lambda x d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\Big]\sin\lambda x d\lambda$$
$$= I_1 + I_2.$$

Б. Интеграл на Фурие за четна и нечетна функция – косинус и синус трансформации на Фурие

1^0. Нека $f(x)$ е дефинирана за $x \in (0,+\infty)$. Функцията $f(x)$ додефинираме в $(-\infty,0)$, като положим $f(-x) = f(x)$. Тогава $I_2 = 0$ и $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\Big]\cos\lambda x d\lambda$. Полагаме

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi \tag{14.2}$$

(*права косинус трансформация* (образ)).

Тогава

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda \tag{14.3}$$

(*обратна трансформация* (оригинал)).

2^0. Нека $f(x)$ е дефинирана за $x \in (0,+\infty)$. Функцията $f(x)$ додефинираме в $(-\infty,0)$, като положим $f(-x) = -f(x)$. Тогава $I_1 = 0$ и $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\Big]\sin\lambda x d\lambda$. Полагаме

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \tag{14.4}$$

(*права синус трансформация* (образ)).

Тогава

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\lambda)\sin\lambda x d\lambda \tag{14.5}$$

(*обратна трансформация* (оригинал)).

В. Интеграл на Фурие в комплексна форма. Обща трансформация на Фурие

От

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi\Big]d\lambda \\ 0 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(\xi-x)d\xi\Big]d\lambda \end{aligned}\right| \begin{matrix} + \\ \cdot i \end{matrix}$$

получаваме интеграла на Фурие в комплексна форма:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi\Big]e^{-i\lambda\xi}d\lambda\,.$$

Полагаме

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi \tag{14.6}$$

(*права трансформация на Фурие* (образ)). Тогава

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{14.7}$$

(*обратна трансформация на Фурие* (оригинал)).

Пример 14.1. Да се представи с интеграл на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1 \\ 0, & x < 0, x > 1\,. \end{cases}$$

Решение. От $f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi\Big]d\lambda$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cos\lambda(\xi-x)d\xi + \int\limits_{0}^{1} 1\cos\lambda(\xi-x)d\xi + \int\limits_{1}^{\infty} 0\cos\lambda(\xi-x)d\xi\,,$$

имаме

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_0^1 \cos\lambda(\xi - x)d\xi\Big]d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\sin\lambda(\xi - x)\Big|_0^1 d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}[\sin\lambda(1-x) + \sin\lambda x]d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{(1-2x)\lambda}{2}d\lambda\,.$$

Пример 14.2. Намерете косинус и синус трансформациите на функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1\,. \end{cases} \qquad \text{(вж. пр. 14.1.)}$$

Решение. По формули (14.2) и (14.4) имаме:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 1\cos\lambda\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 1\sin\lambda\xi d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^1$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}.$$

Тогава:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1\,. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x d\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1\,. \end{cases}$$

Пример 14.3. Да се представи с интеграл на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & -2 < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \\ 0, & |x| > 2\,. \end{cases}$$

Решение. Тъй като функцията е нечетна, ще приложим синус-трансформацията на Фурие (формули (14.4) и (14.5)):

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

$$\Longrightarrow F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big[\int_0^1 \xi \sin \lambda\xi d\xi + \int_1^2 (-\xi + 2) \sin \lambda\xi d\xi \Big]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(-\frac{1}{\lambda} \Big) \Big[\int_0^1 \xi d \cos \lambda\xi + \int_1^2 (-\xi + 2) d \cos \lambda\xi \Big]$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(\xi \cos \lambda\xi \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \lambda\xi d\xi + (-\xi + 2) \cos \lambda\xi \Big|_1^2 + \int_1^2 \cos \lambda\xi d\xi \Big)$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big[\cos\lambda - \cos\lambda - \frac{1}{\lambda} \sin\lambda + \frac{1}{\lambda} (\sin 2\lambda - \sin\lambda) \Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin\lambda (1 - \cos\lambda)}{\lambda^2}$$

$$\Longrightarrow F_s(\lambda) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\lambda(1 - \cos\lambda)}{\lambda^2}.$$

Тогава

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin\lambda(1 - \cos\lambda)}{\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\lambda(1 - \cos\lambda)}{\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda\,.$$

Пример 14.4. Намерете синус-трансформацията за нечетната функция

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}, \qquad \alpha > 0.$$

Решение. По формули (14.4) и (14.5) имаме:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi \sin \lambda\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi.$$

Интеграла $I = \int_0^\infty \frac{\xi \sin \lambda\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi$ ще решим чрез теоремата за резидуумите (приложението ѝ за решаване на несобствени интеграли от реална променлива - вж. раздел I, глава 10).

$$I = \int_0^\infty \frac{\xi \sin \lambda\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\xi \sin \lambda\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi\,;$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{i\lambda\xi}}{\xi^2+\alpha^2} d\xi = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\alpha} f(z)\,, \qquad f(z) = \frac{z e^{i\lambda z}}{z^2+\alpha^2}$$

($z = i\alpha$ е единствен полюс за функцията в полуравнината $\text{im}z > 0$.)

$$\operatorname*{Res}_{z=i\alpha} f(z) = \lim_{z\to i\alpha} \frac{(z-i\alpha)ze^{i\alpha z}}{(z-i\alpha)(z+i\alpha)} = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{2}$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{2\pi i e^{-\lambda\alpha}}{2} = \pi i e^{-\lambda\alpha}\,.$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\,\text{Im} I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda\alpha}\,.$$

$$\Longrightarrow F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\pi}{2} e^{-\lambda\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\lambda\alpha}\,.$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda)\sin\lambda x d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\sin\lambda x d\lambda\,.$$

Пример 14.5. Да се реши интегралното уравнение

$$\int_0^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin\lambda, & 0 \le \lambda \le \pi \\ 0, & \lambda > \pi\,. \end{cases}$$

Решение. За $0 \le \lambda \le \pi$ имаме:

$$\int_0^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt = \frac{\pi}{2}\sin\lambda\,.$$

Умножаваме двете страни на равенството с $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \neq 0$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sin\lambda\,.$$

Лявата част на полученото равенство е точно синус-трансформацията на функцията $f(t)$.

$$\Longrightarrow F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sin\lambda$$

$$\Longrightarrow f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sin\lambda\sin\lambda t d\lambda$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin\lambda \sin\lambda t d\lambda = \frac{1}{2}\Big[\int\limits_0^\pi \cos(t-1)\lambda d\lambda - \int\limits_0^\pi \cos(t+1)\lambda d\lambda\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(t-1)\lambda}{t-1}\Big|_0^\pi - \frac{\sin(t+1)\lambda}{t+1}\Big|_0^\pi\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(t-1)\pi}{t-1} - \frac{\sin(t+1)\pi}{t+1}\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{\sin\pi t}{t-1} + \frac{\sin\pi t}{t+1}\Big) = \frac{\sin\pi t}{2}\,\frac{-t-1+t-1}{t^2-1} = -\frac{\sin\pi t}{t^2-1}$$
$$\Longrightarrow f(t) = \frac{\sin\pi t}{1-t^2}\,.$$

Пример 14.6. Намерете образите на $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$ при а) косинус-трансформацията и б) синус-трансформацията на Фурие.

Решение. а) По формула (14.2) имаме:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\cos\lambda\xi d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \cos\lambda\xi de^{-\xi}$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\xi}\cos\lambda\xi\Big|_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\lambda(-\sin\lambda\xi)d\xi$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(0-1) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sin\lambda\xi d^{-\xi}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\xi}\sin\lambda\xi\Big|_0^\infty - \lambda^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\cos\lambda\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \lambda^2 F_c(\lambda)\,.$$

Тогава от $F_c(\lambda) + \lambda^2 F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Longrightarrow F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\lambda^2}$.

б) По формула (14.4) имаме:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\sin\lambda\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,I\,.$$

$$I = -\int\limits_0^\infty \sin\lambda\xi de^{-\xi} = -e^{-\xi}\sin\lambda\xi\Big|_0^\infty + \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\cos\lambda\xi d\xi$$
$$= 0 - \lambda\int\limits_0^\infty \cos\lambda\xi de^{-\xi} = -\lambda e^{-\xi}\cos\lambda\xi\Big|_0^\infty - \lambda^2\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\sin\lambda\xi d\xi = \lambda - \lambda^2 I\,.$$

Тогава от $I + \lambda^2 I = \lambda \Longrightarrow I = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2} \Longrightarrow F_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$.

По формули (14.3) и (14.5) имаме (обратна трансформация на Лаплас):

$$1.\ f(x) = e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \textit{(интеграл на Лаплас).}$$

$$2.\ f(x) = e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\sin\lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \textit{(интеграл на Лаплас).}$$

Пример 14.7. Докажете, че косинус-преобразуването на Фурие за функцията $f(x) = e^{-x^2/2}$ съвпада с $f(x)$.

Решение. По формула (14.2) имаме:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\cos\lambda\xi d\xi\,.$$

Диференцираме горния израз по параметъра λ и получаваме:

$$\frac{dF_c(\lambda)}{d\lambda} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}\sin\lambda\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\xi de^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\lambda\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\cos\lambda\xi d\xi = 0 - \lambda F_c(\lambda)\,.$$

От $\dfrac{dF_c(\lambda)}{d\lambda} = -\lambda F_c(\lambda) \Longrightarrow \dfrac{dF_c(\lambda)}{F_c(\lambda)} = -\lambda d\lambda \Longrightarrow \ln|F_c(\lambda)| = \ln c - \dfrac{\lambda^2}{2}$

$\Longrightarrow |F_c(\lambda)| = ce^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

Но $F_c(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\frac{\xi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$.

От $F_c(0) = c = 1 \Longrightarrow |F_c(\lambda)| = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ (което трябваше да докажем).

Забележка. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*Интеграл на Поасон*).

ЗАДАЧИ

1. Да се представи с интеграл на Фурие функцията:

а) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ Отг. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos \lambda}{\lambda} \right) \sin \lambda x d\lambda,\ x \neq \pm 1.$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = -1,\ x = 0,\ x = 1 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

Отг. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} \right) \cos \lambda x d\lambda.$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$ Отг. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \lambda\pi/2}{1 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$

г) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ Отг. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \lambda\pi}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda.$

2. Решете интегралните уравнения:

а) $\int\limits_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \frac{1}{1 + \lambda^2},\ -\infty < \lambda < +\infty$ Отг. $f(t) = e^{-t},\ t \geq 0.$

б) $\int\limits_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = e^{-\lambda},\ 0 < \lambda < \infty$ Отг. $f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1 + t^2},\ t \geq 0.$

3. Намерете косинус- и синус-трансформациите за функцията:

а) $f(x) = e^{-x},\ x \geq 0$ Отг. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda;$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda.$$

б) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$ Отг. $f(x) = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin 4\lambda - 4\lambda \cos^2 2\lambda}{\lambda^3} \cos \lambda x d\lambda;$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{4\lambda \cos^2 2\lambda - \sin 4\lambda}{\lambda^3} \sin \lambda x d\lambda.$$

ГЛАВА 15

ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ЛАПЛАС ФУНКЦИЯ-ОРИГИНАЛ И ФУНКЦИЯ-ОБРАЗ ОБРАЗ НА ПРОИЗВОДНА И ИНТЕГРАЛ

А. Трансформация на Лаплас

Дефиниция 1 *Функцията $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ще наричаме **функция-оригинал**, ако са изпълнени условията:*

а) $f(t) = 0$, *при* $t < 0$;

б) функцията $f(t)$ има краен брой точки на прекъсване от първи род (по части непрекъсната) и съществува $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, като интервалът (t_1, t_2) е краен;

в) $\forall t\ \exists M,\ \sigma_0,\ M > 0,\ \sigma_0 \in \mathbb{R}$ *така, че* $|f(t)| \le Me^{\sigma_0 t}$, *т.е. функцията $f(t)$ расте не по-бързо от експоненциалната функция.*

*Реалното число σ_0 се нарича **показател на растене** на $f(t)$.*

Дефиниция 2 *Функцията*

$$F(p) = \bar{f}(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad (\textbf{\textit{интеграл на Лаплас}}), \tag{15.1}$$

*където $p = \sigma + i\tau$, се нарича **образ** на функцията $f(t)$.*

От (15.1) получаваме

$$\begin{aligned} F(p) &= \int\limits_0^\infty f(t)e^{-(\sigma+i\tau)t}dt \\ &= \int\limits_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\cos(\tau t)dt - i\int\limits_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\sin(\tau t)dt \end{aligned} \tag{15.2}$$

Следователно $F(p)$ е комплексна функция на комплексен аргумент.

Означаваме с T *множеството от всички функции-оригинали.* Тогава $f(t) \in T$ се чете "$f(t)$ е функция-оригинал".

Теорема 1 *Ако $f(t) \in T$, то $F(p)$ е единствен образ на $f(t)$ и съществува в полуравнината $\sigma > \sigma_0$ ($Re\, p > \sigma_0$), където σ_0 е показател на растене на $f(t)$.*

Теорема 2 *Ако $f(t) \in T$, съществува функцията $F'(p)$, която е непрекъсната.*

Дефиниция 3 *Функцията $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ се нарича финкция на* ***Хевисайт*** *(тя е функция-оригинал).*

Б. Намиране на образи на някои функции-оригинали

Означения: $\mathcal{L}[f(t), p]$ - Лапласов образ на $f(t)$
$f(t) \risingdotseq F(p)$ - $f(t)$ има за образ $F(p)$
$F(p) \fallingdotseq f(t)$ - $F(p)$ е образ на $f(t)$.

1.
$$\mathcal{L}[\eta(t), p] = \int_0^\infty 1.e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p} \quad (15.3)$$

2.
$$\mathcal{L}[t^\alpha, p] \overset{\alpha \geq 0}{=} \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} dt.$$

Полагаме $pt = \xi$, $t = \xi/p$, $dt = d\xi/p$, $0 \leq t < \infty$, $0 \leq \xi < \infty$.

$$\mathcal{L}[t^\alpha, p] = \int_0^\infty \left(\frac{\xi}{p}\right)^\alpha e^{-\xi} \frac{d\xi}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty \xi^\alpha e^{-\xi} d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad (15.4)$$

$\left(\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx\right.$ - гама-функция, $\left.\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \Gamma(n+1) = n!\right)$.

При $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ получаваме

$$t^n \risingdotseq \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (15.5)$$

3. $$\mathcal{L}[e^{\alpha t}, p] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{-1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}. \quad (15.6)$$

$$4.\mathcal{L}[\cos t, p] = \int_0^\infty \cos t e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} d \sin t = \sin t e^{-pt}\Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \sin t e^{-pt} dt$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[\cos t, p] = p\mathcal{L}[\sin t, p].$$

Аналогично $\mathcal{L}[\sin t, p] = 1 - p\mathcal{L}[\cos t, p]$. От получената система уравнения следва:

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}, \qquad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}. \tag{15.7}$$

В. Образ на производна и интеграл

1. *Образ на производна (диференциране на оригинал)*

Теорема 3 *Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Re\, p > \max(\sigma_0, 0)$ *и* $f(t)$ *е непрекъсната функция, то* $f'(t) \in T$ *и* $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

Аналогично: $f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$,
$f'''(t) \risingdotseq p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$.

2. *Образ на интеграл (интегриране на оригинал)*

Теорема 4 *Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F)p)$, $\int_0^\infty |f(t)|dt < +\infty$ *и* $Re\, p > \sigma_0$, *то*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \in T, \quad \varphi(0) = 0 \text{ и } \mathcal{L}\Big[\int_0^t f(\tau)d\tau, p\Big] = \bar{\varphi}(p) = F'(p)/p.$$

3. *Диференциране на образ*

Теорема 5 *Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $Re\, p > \sigma_0$, *то* $F(p) \fallingdotseq (-t)f(t)$.

Аналогично: $F''(p) \fallingdotseq (-t)^2 f(t), \ldots,\ F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.

4. *Интегриране на образ*

Теорема 6 *Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $Re\, p > \max(\sigma_0, 0)$, *то*

$$\int_q^\infty F(p)dp \fallingdotseq \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-qt} dt.$$

Пример 15.1. Докажете, че функцията

$$f(t) = \begin{cases} e^{5t}\sin(3t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

е *функция-оригинал.*

Доказателство: а) $f(t) = 0$, $t < 0$; б) $f(t) = e^{5t}\sin(3t)$ е непрекъсната и n-пъти диференцируема $\forall t$, $n \in \mathbb{N}$; в) $|f(t)| = |e^{5t}\sin(3t)| \leq |e^{5t}.1| \leq e^{5t}$, т.е. съществуват числата $M = 1 > 0$ и $\sigma_0 = 5 \in \mathbb{R}$ (вж. Деф.1).

Пример 15.2. Намерете образа на функцията-оригинал

а) $f(t) = \cos^3 t$; б) $f(t) = e^t\cos^2 t$; в) $f(t) = t\operatorname{ch} t$;

г) $f(t) = \operatorname{sh}(at)\sin(bt)$; д) $f(t) = e^{-4t}\sin(3t)\cos(2t)$.

Решение:

а) Функцията $f(t)$ написваме в друг вид:

$$f(t) = \cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3it} + 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it})$$
$$= \frac{1}{4}\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[\cos^3 t, p] = \bar{f}(p) = \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}$$

(вж. таблицата).

б) Написваме функцията $f(t)$ в друг вид:

$$f(t) = e^t\cos^2 t = e^t\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^t(e^{2it} + 2 + e^{-2it})$$
$$= \frac{1}{2}e^t\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} + \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{2}e^t$$
$$\Longrightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{2}\frac{p-1}{(p-1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} = \frac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^2-2p+5)}.$$

в) От $f(t) = t\operatorname{ch} t = t\dfrac{e^t+e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}te^{-t}$

$$\Longrightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2} = \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}.$$

г) От $\operatorname{sh}(at) = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2} \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2}e^{at}\sin(bt) - \frac{1}{2}e^{-at}\sin(bt)$. Тогава

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2}\frac{b}{(p-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\frac{b}{(p+a)^2+b^2} = \frac{2abp}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}.$$

д) Преобразуваме функцията $f(t)$:

$$f(t) = e^{-4t}\sin 3t\cos 2t = \frac{1}{2}e^{-4t}(\sin t + \sin 5t) = \frac{1}{2}e^{-4t}\sin t + \frac{1}{2}e^{-4t}\sin 5t$$

$$\Longrightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{2[(p+4)^2+1]} + \frac{5}{2[(p+4)^2+25]}$$

(вж. таблицата).

Пример 15.3. Намерете образа на функцията-оригинал, решение на диференциалното уравнение

$$x''' - 2x'' + x' = 4; \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2.$$

Решение. По теоремата за диференциране на оригинал (Т3) за образите на производните на търсената функция имаме:

$$x'(t) = p\bar{x} - x(0) = p\bar{x} - 1,$$
$$x''(t) = p^2\bar{x} - px(0) - x'(0) = p^2\bar{x} - p - 2,$$
$$x'''(t) = p^3\bar{x} - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3\bar{x} - p^2 - 2p + 2,$$

където $\mathcal{L}[x(t), p] = \bar{x}$.

Като използваме свойството линейност на трансформацията на Лаплас, получаваме:

$$p^3\bar{x} - p^2 - 2p + 2 - 2(p^2\bar{x} - p - 2) + p\bar{x} - 1 = 4/p$$
$$\bar{x}(p^3 - 2p^2 + p) = p^2 + 2p - 2 - 2p - 4 + 1 + 4/p$$
$$\bar{x}p(p-1)^2 = \frac{p^3 - 5p + 4}{p} \Longrightarrow \bar{x} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2}.$$

Пример 15.4. Намерете образите на функциите-оригинали:

а) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau$; б) $f(t) = \operatorname{sh} t/t$; в) $f(t) = t^2\operatorname{ch} t$.

Решение.

а) По теоремата за интегриране на оригинал (Т4) получаваме:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[t^2e^{-t}] = \frac{1}{p}\frac{2!}{(p+1)^3} = \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

б) По теоремата за интегриране на образ (Т6) имаме:

$$\bar{f}(p) = \int_p^\infty \frac{1}{q^2-1}dq = \frac{1}{2}\int_p^\infty \frac{1-q+1+q}{(q-1)(q+1)}dq$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{q-1}{q+1}\bigg|_p^\infty = -\frac{1}{2}\ln\frac{p-1}{p+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}.$$

в) Образът на функцията $f(t) = t^2\operatorname{ch} t$ може да се намери по два начина:

I начин:

$$f(t) = t^2\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}t^2(e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{2}t^2e^{-t}$$
$$\Longrightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{2}\frac{2!}{(p-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{2!}{(p+1)^3}$$
$$= \frac{p^3+3p^2+3p+1+p^3-3p^2+3p-1}{(p^2-1)^3} = \frac{2(p^3+3p)}{(p^2-1)^3}$$

II начин: Използваме формулата от таблицата: $\mathcal{L}[t^nf(t)] = \dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$ (теорема за диференциране на образ).

$$\Longrightarrow \bar{f}(p) = \left(\frac{p}{p^2-1}\right)'' = \left[\frac{p^2-1-2p^2}{(p^2-1)^2}\right]' = -\left[\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}\right]'$$
$$= -\frac{2p(p^2-1)^2 - 2(p^2-1)2p(p^2+1)}{(p^2-1)^4} = -\frac{2p(p^2-1-2p^2-2)}{(p^2-1)^3}$$
$$= \frac{2(p^3+3p)}{(p^2-1)^3}.$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете образите на функциите:

а) $\sin^2 at$; Отг. $\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$;

б) $t^2\cos t$; Отг. $\dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$;

в) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t)$; Отг. $\dfrac{p^2}{p^4+4}$;

г) $3t^3 e^{-t} + 2t^2 - 1$; Отг. $\dfrac{18}{(p+1)^4} + \dfrac{4}{p^3} - \dfrac{1}{p}$;

д) $(t+1)\sin 2t$; Отг. $\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

2. Като използвате теоремите на операционното смятане, намерете образите на функциите:

а) $\dfrac{1-e^{at}}{te^t}$; Отг. $\ln \dfrac{p+1-a}{p+1}$;

б) $\frac{1}{t}\sin 7t \sin 3t$; Отг. $\frac{1}{4}\ln \dfrac{p^2+100}{p^2+16}$;

в) $\dfrac{1-\cos t}{t}$; Отг. $\ln \dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$;

г) $\dfrac{\sin^2 t}{t^2}$; Отг. $\frac{1}{4}\ln \dfrac{p^2+64}{p^2+4}$;

д) $\displaystyle\int_0^t \cos^2 a\tau d\tau$; Отг. $\dfrac{p^2+2a^2}{p^2(p^2+4a^2)}$;

е) $\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau - 1}{\tau} d\tau$; Отг. $\frac{1}{p}\ln \dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}$;

ж) $\displaystyle\int_0^t (\tau-1)\cos\tau d\tau$; Отг. $\dfrac{p^3+p^2+p-1}{p(p^2+1)^2}$;

3. Намерете образа на функцията $x(t)$, решение на уравнението:

а) $x'' + x = t\cos 2t,\ x(0) = x'(0) = 0$; Отг. $\dfrac{p^2-4}{(p^2+1)(p^2+4)^2}$;

б) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x + 1 = 0,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;
Отг. $\dfrac{1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$;

ГЛАВА 16

ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ОПЕРАЦИОННОТО СМЯТАНЕ

Трансформацията на Лаплас притежава *свойството линейност*:
Ако $f_1(t), f_2(t) \in T$, $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)\,. \tag{16.1}$$

Теорема 1 *(за подобие). Ако $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\mathcal{L}[f(\beta t), p] = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right)$, $\beta = const$, $\beta > 0$.*

Пример 16.1. От (15.7) $\mathcal{L}[\cos t, p] = \dfrac{p}{p^2+1}$, а от T1 $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[\cos \beta t, p] = \frac{1}{\beta}\frac{p/\beta}{1+p^2/\beta^2} = \frac{p}{p^2+\beta^2}\,. \tag{16.2}$$

Пример 16.2. От (15.7) $\mathcal{L}[\sin t, p] = \dfrac{1}{p^2+1}$, а от T1 $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[\sin \beta t, p] = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+p^2/\beta^2} = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}\,. \tag{16.3}$$

Теорема 2 *(за преместване). Ако $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, то*

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t), p] = F(p+\alpha), \quad \alpha = const., \quad \alpha > 0.$$

Пример 16.3. От (16.2) $\mathcal{L}[\cos \beta t, p] = \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$, а от T2 $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cos \beta t, p] = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\,. \tag{16.4}$$

Пример 16.4. От (16.3) $\mathcal{L}[\sin \beta t, p] = \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$, а от T2 $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\sin \beta t, p] = \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\,. \tag{16.5}$$

Пример 16.5. От (15.3) $\mathcal{L}[\eta(t), p] = \frac{1}{p}$, а от T2 $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\eta(t), p] = \mathcal{L}[e^{-\alpha t}, p] = \frac{1}{(p+\alpha)}\,. \tag{16.6}$$

Пример 16.6. От $\mathcal{L}[\operatorname{ch}\alpha t, p] = \left[\dfrac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}, p\right]$ и от (16.1), (16.6) $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[\operatorname{ch}\alpha t, p] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{\alpha t}, p] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-\alpha t}, p]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}. \quad (16.7)$$

Пример 16.7. От $\mathcal{L}[\operatorname{sh}\alpha t, p] = \left[\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}, p\right]$ и от (16.1), (16.6) $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sh}\alpha t, p] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}. \quad (16.8)$$

Теорема 3 *(за закъснение). Ако $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\mathcal{L}[f(t-a), p] = e^{-pa}F(p)$, $a = const$, $a > 0$.*

Пример 16.8. От (15.3) $\mathcal{L}[\eta(t), p] = \dfrac{1}{p}$, а от Т3 $\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}[\eta(t-a), p] = e^{-pa}\frac{1}{p}. \quad (16.9)$$

Пример 16.9. Да се намери образът на по части непрекъснатата функция:

а) $f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > t_0 \end{cases}, a > 0;$ б) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t < 0 \text{ и } t \ge 2 \end{cases}.$

Решение: а) Записваме функцията $f(t)$ чрез обобщената единична функция:

$$f(t) = a[\eta(t) - \eta(t-t_0)].$$

Прилагаме Теорема 3 (за закъснението):

$$\bar{f}(p) = a\left[\frac{1}{p} - e^{-t_0 p}\frac{1}{p}\right] = \frac{a(1-e^{-t_0 p})}{p}.$$

б) Запиосваме $f(t)$ чрез обобщената единична функция и преработваме, за да приложим Теорема 3 (за закъснението):

$$\begin{aligned} f(t) &= t[\eta(t) - \eta(t-1)] + (2-t)[\eta(t-1) - \eta(t-2)] \\ &= t\eta(t) - t\eta(t-1) + 2\eta(t-1) - t\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2) \\ &= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2). \end{aligned}$$

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2} \Rightarrow \bar{f}(p) = \left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^2.$$

Теорема 4 *(за изпреварване). Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то* $\mathcal{L}[f(t+a), p] = e^{pa}\Big(F(p) - \int\limits_0^a f(t)e^{-pt}dt\Big)$, $a = const$, $a > 0$.

Дефиниция 1 *Свиване (конволюция) на функциите* $f(t)$ *и* $\varphi)t)$, $0 \le t < +\infty$ *се нарича функцията:*

$$\psi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = f(t) \circ \varphi(t)\,.$$

Теорема 5 *(за свиване). Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq \bar{f}(p)$ *и* $\varphi(t) \in T$, $\varphi(t) \risingdotseq \bar{\varphi}(p)$, *то*

$$\mathcal{L}\Big[\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau, p\Big] = \bar{f}(p) \circ \bar{\varphi}(p)\,.$$

Забележка. Резултатите от глава 1, 2 нанасяме в таблица (оригиналите и съответните образи), която можем да наречем "таблица при операционното смятане".

ГЛАВА 17

ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ НА ОРИГИНАЛ ПО ИЗВЕСТЕН НЕГОВ ОБРАЗ

А. Непосредствено намиране на оригинал по даден негов образ

Задача. Нека $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$ и *образът* $F(p)$ е даден. Да се намери *оригиналът* $f(t)$ на $F(p)$.

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

е уравнение с едно неизвестно (*интегрално уравнение* относно $f(t)$).

От свойството *линейност* на Лапласовата трансформация имаме:

1^0. Ако $F(p) \fallingdotseq f(t)$, то $cF(p) \fallingdotseq cf(t)$, $c = \text{const}$, $c \in \mathbb{C}$.

2^0. Ако $F(p) \fallingdotseq f(t)$ и $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \cdots + F_n(p)$, то $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$.

Пример 17.1. Намерете оригинала $f(t) \in T$ с даден образ:

а) $F(p) = \dfrac{1}{p^3 - p^2 + p - 1}$,

б) $F(p) = \dfrac{p^2 + p + 16}{p^3 + 16p}$,

в) $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 2p + 5}$.

Решение. а) Образът $F(p)$ е рационална функция, която разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\text{От } F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$$
$$\Longrightarrow 1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1)\,.$$

Полагаме $p = 1 \Longrightarrow 1 = 2A \Longrightarrow A = \dfrac{1}{2}$.

Полагаме $p = i \Longrightarrow 1 = (Bi + C)(i - 1) \Longrightarrow$

$$1 + 0i = (-B - C) + i(C - B) \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} -B - C = 1 \\ C - B = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow B = C = -\frac{1}{2}.$$

Тогава по "таблицата при операционното смятане"от

$$F(p) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\Big)$$
$$\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t);$$

б) Аналогично, както в а), от

$$F(p) = \frac{p^2+p+16}{p(p^2+16)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+16} \Longrightarrow p^2+p+16 = A(p^2+16)+p(Bp+C).$$

Полагаме $p = 0 \Longrightarrow 16 = 16A \Longrightarrow A = 1$.

Полагаме $p = 4i \Longrightarrow 0 + 4i = -16B + 4Ci \Longrightarrow \left|\begin{array}{r} -16B = 0 \\ 4C = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow$
$B = 0,\ C = 1$.

Тогава от

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{4}\frac{1}{p^2+4^2} \Longrightarrow f(t) = \eta(t) + \frac{1}{4}\sin 4t\,;$$

в) От $F(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+5} = \dfrac{2}{2}\dfrac{1}{(p+1)^2+2^2}$ и таблицата

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\,.$$

Б. Теорема за разлагане

Теорема 1 *Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $F(p) = \dfrac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, $\varphi(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$ *и* $\psi(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \cdots + b_m$, $b_m \in \mathbb{C}$, $m \le n+1$, *то*

1^0. *Нека* $F(p) = \dfrac{A_1}{p} + \dfrac{A_2}{p^2} + \dfrac{A_3}{p^3} + \cdots + \dfrac{A_n}{p^n} + \cdots$, *т.е.* $p = 0$ *е* ***n-кратна нула*** *на* $\psi(p)$. *Тогава от* $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}} \Longrightarrow$

$$f(t) = A_1\eta(t) + A_2\frac{t}{1!} + A_3\frac{t^2}{2!} + \cdots \tag{17.1}$$

2^0. *Нека* $\psi(p) = (p-\alpha)^k(p-\beta)^l(p-\gamma)^S$, $k+l+s = m$, *т.е.* α, β, γ *са съответно* k, l, ***s-кратни нули*** *на* $\psi(p)$. *Тогава от*

$$F(p) = \frac{A_1}{p-\alpha} + \frac{A_2}{(p-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(p-\alpha)^k} + \frac{B_1}{p-\beta} + \frac{B_2}{(p-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(p-\beta)^l}$$
$$+ \frac{C_1}{p-\gamma} + \frac{C_2}{(p-\gamma)^2} + \cdots + \frac{C_s}{(p-\gamma)^s}$$

$$\Longrightarrow f(t) = A_1e^{\alpha t} + A_2\frac{t}{1!}e^{\alpha t} + \cdots + A_k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t} + B_1e^{\beta t} + B_2\frac{t}{1!}e^{\beta t}$$

$$+ \cdots + B_l\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}e^{\beta t} + C_1e^{\gamma t} + C_2\frac{t}{1!}e^{\gamma t} + \cdots + C_s\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\gamma t} \quad (17.2)$$

В. Формула за обръщане на Риман-Мелин

Теорема 2 *Ако* $f(t) \in T$, $f(t) \risingdotseq F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, $p = x - iy$, $Rep = x > \sigma_0$, *то*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i(\infty)}^{x+i(\infty)} F(p)e^{pt}dy \quad (17.3)$$

Пример 17.2. Намерете функцията-оригинал $f(t)$ на образа

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p^4+6p^3+11p^2+6p}.$$

Решение. Образът $F(p)$ е рационална функция. Нулите на знаменателя ся прости: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, $p_4 = -3$. Разлагаме $F(p)$ в сума от елементарни дроби:

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3};$$
$$p^2+1 = A(p+1)(p+2)(p+3)+Bp(p+2)(p+3)+Cp(p+1)(p+3)+Dp(p+1)(p+2).$$

Като положим последователно $p = 0, -1, -2, -3$ получаваме $A = \frac{1}{6}$, $B = -1$, $C = \frac{5}{2}$, $D = -\frac{5}{3}$. Тогава от

$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{p+2} - \frac{5}{3}\frac{1}{p+3} \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-3t}.$$

Пример 17.3. Намерете функцията-оригинал, записана в степенен ред:

а) $F(p) = \frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$; б) $F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)}$.

Решение. а)

$$F(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{p^{2n+2}}.$$

Полученият ред е сходящ $\forall p$, за което $|p| \geq \delta > 0$.

$$\Longrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n+1)!]^2} t^{2n+1}, \quad t > 0\,.$$

б) $$F(p) = \frac{1}{p^5} \frac{1}{1-(-1/p^4)} = \frac{1}{p^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(p^4)^n}.$$

Полученият ред е сходящ при $\left|\frac{1}{p^4}\right| < 1$, т.е. $|p| > 1$.

$$\Longrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n+4}}{(4n+4)!} = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \frac{t^{16}}{16!} + \cdots$$

Пример 17.4. Чрез *теоремата за свиването* да се намери оригиналът на функцията $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Решение. $F(p) = \dfrac{1}{p-1}\dfrac{1}{p^2+1} = \bar{f}(p)\bar{\varphi}(p)$ като

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p-1} \leftarrow\!\!\cdot\, e^t, \qquad \bar{\varphi}(p) = \frac{1}{p^2+1} \leftarrow\!\!\cdot\, \sin t\,.$$

От теоремата за свиването

$$F(p) = \bar{f}(p)\bar{\varphi}(p) \leftarrow\!\!\cdot \int_0^t \sin\tau e^{t-\tau} d\tau = I\,.$$

$$I = -\int_0^t \sin\tau d e^{t-\tau} = -\sin\tau e^{t-\tau}\Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau}\cos\tau d\tau = -\sin t - \int_0^t \cos\tau d e^{t-\tau}$$

$$= -\sin t - \cos\tau e^{t-\tau}\Big|_0^t - \int_0^t \sin\tau e^{t-\tau} d\tau\,.$$

$$\Longrightarrow I = -\sin t - \cos t + e^t - I \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{1}{2}(e^t - \sin t - \cos t) = f(t)\,.$$

Пример 17.5. Като използвате *теоремите за диференциране и интегриране на оригинал* намерете образите на изразите:

а) $y''(t) - y'(t) - y(t)$, ако $y(0) = y'(0) = 0$ и $\bar{y}(p) \leftarrow\!\!\cdot\, y(t)$;

б) $x'(t) + x(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau$, ако $x(0) = 1$ и $\bar{x}(p) \leftarrow\!\!\cdot\, x(t)$.

Решение. а) От т. В, гл. 1 имаме:

$$y'(t) \leftrightarrow p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}$$
$$y''(t) \leftrightarrow p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y}$$
$$\Longrightarrow y''(t) - y'(t) - y(t) \leftrightarrow p^2\bar{y} - p\bar{y} - \bar{y} = (p^2 - p - 1)\bar{y}\,;$$

б) От т. В, гл. 1 имаме:

$$x'(t) \leftrightarrow p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x} - 1$$
$$\int\limits_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{\bar{x}(p)}{p} = \frac{\bar{x}}{p}$$
$$\Longrightarrow x'(t) + x(t) + \int\limits_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow p\bar{x} - 1 + \bar{x} + \frac{\bar{x}}{p} = \frac{(p^2+p+1)\bar{x}}{p} - 1\,.$$

Пример 17.6. Намерете конволюцията на функциите оригинали $f(t) * \varphi(t)$, ако:

а) $f(t) = e^t$, $\varphi(t) = t^2$;

б) $f(t) = \sin t$, $\varphi(t) = \cos t$.

Решение. По теоремата за конволюция на функции $\mathcal{L}[f(t) * \varphi(t), p] = \bar{f}(p)\bar{\varphi}(p)$.

а) $f(t) = e^t \to \bar{f}(p) = \dfrac{1}{p-1}$; $\varphi(t) = t^2 \to \bar{\varphi}(p) = \dfrac{2}{p^3}$.

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[f(t) * \varphi(t), p] = \frac{1}{p-1}\frac{2}{p^3} = \frac{2}{p^3(p-1)}\,.$$

Образът е правилна рационална дроб.

Намирането на оригинала на функция, чийто образ е правилна рационална дроб, може да стане освен по разгледаните досега начини и като се изполдва следната теорема: *Ако образът на функцията $f(t)$ е правилна рационална дроб, то*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{p_k}\,[\bar{f}(p)e^{pt}]\,,$$

където p_k, $k = \overline{1,m}$ са полюси на $f(p)$.

Функцията $\dfrac{2}{p^3(p-1)}$ има два полюса: $p_1 = 1$ - еднократен полюс и $p = 0$ - трикратен полюс.

$$\operatorname*{Res}_{p=1}\left(\frac{2e^{pt}}{p^3(p-1)}\right) = 2e^t\,;$$

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p=0}\left(\frac{2e^{pt}}{p^3(p-1)}\right) &= \frac{2}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)''\\
&= \lim_{p\to 0}\left(\frac{te^{pt}(p-1)-e^{pt}}{(p-1)^2}\right)' = \lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}(tp-t-1)}{(p-1)^2}\right)'\\
&= \lim_{p\to 0}\frac{[te^{pt}(tp-t-1)+te^{pt}](p-1)^2-2(p-1)e^{pt}(tp-t-1)}{(p-1)^4}\\
&= \lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}(t^2p^2-4tp+t^2+2t+2)}{(p-1)^3} = -t^2-2t-2\\
&\Longrightarrow f(t)*\varphi(t) = 2e^t - t^2 - 2t - 2\,.
\end{aligned}$$

б) $f(t)=\sin t \to \bar{f}(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$; $\varphi(t)=\cos t \to \bar{\varphi}(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$.

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[f(t)*\varphi(t),p] = \frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{2p}{(p^2+1)^2} \Longrightarrow f(t)*\varphi(t) = \frac{1}{2}t\sin t\,.$$

Пример 17.7. Намерете оригинала на функцията $f(t)$, чийто образ е

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2}.$$

Решение. Написваме образа $\bar{f}(p)$ по следния начин:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2ap}\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a}\frac{\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}}{p}\,,$$

където $\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$ е образ на $t\sin at$.

Прилагаме свойството линейност и теоремата за интегриране на оригинал:

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \tau\sin a\tau d\tau = -\frac{1}{2a^2}\int_0^t \tau d\cos a\tau = -\frac{1}{2a^2}\left(\tau\cos a\tau\Big|_0^t - \int_0^t \cos a\tau d\tau\right)$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\left(t\cos at - \frac{1}{a}\sin a\tau\Big|_0^t\right) = \frac{1}{2a^3}\sin at - \frac{t}{2a^2}\cos at\,.$$

Пример 17.8. Намерете оригинала на функцията, ако образът ѝ е

$$\bar{f}(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4p+8)^2}.$$

Решение: Рационалната функция $\bar{f}(p) = \dfrac{2p+3}{(p^2+4p+8)^2}$ има два двукратни полюса $p_{1,2} = -2 \pm 2i$. Аналогично на пример 17.6,б

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{p=-2-2i} \bar{f}(p)e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-2+2i} \bar{f}(p)e^{pt}$$

$$\operatorname*{Res}_{-2-2i} \bar{f}(p)e^{pt} = \frac{1}{1!} \lim_{p\to -2-2i} \left[\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p+2-2i)^2}\right]'$$

$$= \lim_{p\to-2-2i} \frac{[2e^{pt} + te^{pt}(2p+3)](p+2-2i)^2 - 2(p+2-2i)e^{pt}(2p+3)}{(p+2-2i)^4}$$

$$= \lim_{p\to-2-2i} \frac{e^{pt}[(2+t(2p+3))(p+2-2i) - 4p - 6]}{(p+2-2i)^3}$$

$$= \frac{e^{-2t}e^{-2it}[-4i(2+t(-1-4i)) + 2 + 8i]}{6-4i} = \frac{e^{-2t}e^{-2it}[1-2t(4-i)]}{32i}$$

$$\operatorname*{Res}_{-2+2i} \bar{f}(p)e^{pt} = \frac{1}{1!} \lim_{p\to -2+2i} \left[\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p+2+2i)^2}\right]'$$

$$= \lim_{p\to-2+2i} \frac{e^{pt}[(2+t(2p+3))(p+2+2i) - 4p - 6]}{(p+2+2i)^3} = \frac{e^{-2t}e^{2it}[1-2t(4+i)]}{-32i}$$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{e^{-2t}}{32i}\left[e^{-2it}(1-2t(4-i)) - e^{2it}(1-2t(4+i))\right]$$

$$= \frac{e^{-2t}}{32i}\left[-(e^{2it} - e^{-2it}) + 8t(e^{2it} - e^{-2it}) + 4it(e^{2it} + e^{-2it})\right]$$

$$= \frac{e^{-2t}}{32i}(-2i\sin 2t + 16ti\sin 2t + 4it\cos 2t)$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{8}t\cos 2t - \frac{1}{16}\sin 2t\right).$$

Пример 17.9. Намерете функцията оригинал на образа

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2-4}.$$

Решение: Наличието на множител e^{-pa} изисква прилагането на Теорема 3 за закъснението.

$$F(p) = e^{-1.p}\,\frac{1}{p^2-1} + e^{-2.p}\,\frac{p}{p^2-4}$$

$$\Rightarrow f(t) = \operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1) + \operatorname{ch}[2(t-2)]\eta(t-2).$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете функцията-оригинал $f(t)$ на образа $F(p)$:

а) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 2p + 5}$ Отг. $f(t) = e^t\left(\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$

б) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$ Отг. $f(t) = \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

в) $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p-1)}$ Отг. $f(t) = -t - 1 + e^t$

Упътване. Приложете теоремата за свиването.

г) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)^2}$ Отг. $f(t) = e^t + e^{2t}(t-1)$

д) $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$ Отг. $f(t) = \dfrac{1}{6} - e^{-t} + \dfrac{5}{2}e^{-2t} - \dfrac{5}{3}e^{-3t}$

е) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$ Отг. $f(t) = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{2e^t}{3} + \dfrac{e^{-2t}}{12}$

ж) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$ Отг. $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t}(t^2 - 4t + 6) - e^t(t-3)$

з) $F(p) = \dfrac{p}{p^3+1}$ Отг. $f(t) = -\dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}e^{t/2}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$
$+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$

и) $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2-1)^3}$ Отг. $f(t) = \dfrac{t^2-1}{8}\mathrm{sh}t + \dfrac{t}{8}\mathrm{ch}t$

к) $F(p) = \dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$ Отг. $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{[(2n)!]^2}$

л) $F(p) = \dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$ Отг. $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

ГЛАВА 18

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ОПЕРАЦИОННОТО СМЯТАНЕ

А. Решаване на диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Задача. Решете *уравнението*

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t)$$

ако $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = y_1$, a, b, y_0, y_1 са константи, а $f(t) \in T$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Решение. Да решим уравнението означав да намерим неизвестната функция $y(t)$. От

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y(t),p] = \bar{y}(p) = \bar{y}\\
&\mathcal{L}[\dot{y}(t),p] = p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - y_0\\
&\mathcal{L}[\ddot{y}(t),p] = p^2\bar{y}(p) - py(0) - \dot{y}(0) = p^2\bar{y} - py_0 - y_1\\
&\int_0^\infty \ddot{y}(t)e^{-pt}dt + a\int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-pt}dt + b\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\\
&\Longrightarrow p^2\bar{y} - py_0 - y_1 + ap\bar{y} - ay_0 + b\bar{y} = F(p) \quad (\textit{операторно уравнение})\\
&\Longrightarrow \bar{y}(t) = \frac{F(p) + (a+p)y_0 + y_1}{p^2 + ap + b}.
\end{aligned}$$

По известните от глава 17 методи, от $\bar{y}(p)$ намираме $y(t)$.

Б. Решаване на системи обикновеии диферевциални уравнения от първи ред

Задача. Решете *системата*

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} + a_{11}x + a_{12}y = f_1(t)\\ \dot{y} + a_{21}x + a_{22}y = f_2(t)\end{array}\right., \quad \text{ако} \left|\begin{array}{l} x(0) = x_0\\ y(0) = y_0,\end{array}\right. \quad a_{ij} = \text{const.}, \quad i,j = \overline{1,2},$$

а $f_1(t) \in T$, $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$ и $f_2(t) \in T$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$.

Решение. Да решим системата означава да намерим неизвестната наредена двойка $(x(t), y(t))$. От

$$\left|\begin{array}{l} x(t) \risingdotseq \bar{x}(p) = \bar{x}\\ y(t) \risingdotseq \bar{y}(p) = \bar{y}\end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} \dot{x}(t) \risingdotseq p\bar{x} - x_0\\ \dot{y}(t) \risingdotseq p\bar{y} - y_0\end{array}\right., \text{ и } \left|\begin{array}{l} f_1(t) \risingdotseq F_1(p)\\ f_2(t) \risingdotseq F_2(p)\end{array}\right.,$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} p\bar{x} - x_0 + a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} = F_1(p)\\ p\bar{y} - y_0 + a_{21}\bar{y} + a_{22}\bar{y} = F_2(p)\end{array}\right., \quad \Longrightarrow \quad (\bar{x}(p), \bar{y}(p)).$$

По известните от глава 17 методи от $(\bar{x}(p), \bar{y}(p))$ намираме $x(t), y(t))$.

В. Решаване на итегро-диференциални уравнения

Задача. Решете *уравнението*

$$\dot{y} + ay + b\int_0^t y(\tau)d\tau = f(t)\,,$$

ако $y(0) = y_0$, a, b са константи, а $f(t) =\in T$ и $f(t) \fallingdotseq F(p)$.

Решение. Търсим неизвестната функция $y(t)$. От

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{L}[y(t),p] = \bar{y}(p) = \bar{y} \\ \mathcal{L}[\dot{y}(t),p] = p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - y_0 \\ \mathcal{L}[f(t),p] = F(p) \\ l\left[\int_0^t y(\tau)d\tau, p\right] = \dfrac{\bar{y}}{p} \quad \text{вж. глава 15, Т4} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow p\bar{y} - y_0 + a\bar{y} + b\frac{\bar{y}}{p} = F(p) \Longrightarrow \bar{y}(p) = \frac{p[F(p) + y_0]}{p^2 + ap + b}\,.$$

По известните от глава 17 методи от $\bar{y}(p)$ намираме $f(t)$.

Решаване на интеграли

Задача. Решете *интеграла*

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{t^2}dt\,.$$

Решение. По формула (15.1) имаме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I(x),p] &= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dt\Big)e^{-px}dx = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\Big[\int_0^\infty (1-\cos xt)e^{-px}dx\Big]dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\Big(\int_0^\infty 1e^{-px}dx - \int_0^\infty \cos xte^{-px}dx\Big)dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+t^2}\Big)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\frac{p^2+t^2-p^2}{p(p^2+t^2)}dt = \frac{p}{p^3}\int_0^\infty \frac{d(t/p)}{1+(t/p)^2} = \frac{1}{p^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{p}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}\frac{1}{p^2}\,. \end{aligned}$$

От $\mathcal{L}[I(x),p] = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{p^2} \Longrightarrow I(x) = \dfrac{\pi}{2}x.$

Пример 18.1 Решете *диференциалните уравнения*:

а) $y'' + 4y = 2\cos 2t$, ако $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$, ако $y(0) = y'(0) = 0$;

в) $x'' - x = 0$, ако $x(0) = x'(0) = 1$.

г) $x'' - x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\ t > 2 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1, t < 2 \end{cases}$, ако $x(0) = x'(0) = 1$.

Решение. а) От т. В, гл. 15 имаме:

$$y(t) \leftarrow\!\!\cdot\, \bar{y}(p) = \bar{y}$$
$$y''(t) \leftarrow\!\!\cdot\, p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y} - 4$$
$$\cos 2t \leftarrow\!\!\cdot\, \frac{p}{p^2+4}\,.$$

Тогава *операторното* уравнение е

$$p^2\bar{y} - 4 + 4\bar{y} = \frac{2p}{p^2+4} \Longrightarrow (p^2+4)\bar{y} = \frac{2p}{p^2+4} + 4$$
$$\Longrightarrow \bar{y}(p) = \frac{p}{p^2+4}\frac{2}{p^2+4} + 2\frac{2}{p^2+4}.$$
$$\Longrightarrow y(t) = \int_0^t \cos 2\tau \sin 2(t-\tau)d\tau + 2\sin 2t = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(2t-4\tau) + \sin 2t]d\tau + 2\sin 2t$$
$$= -\frac{1}{8}\int_0^t \sin(2t-4\tau)d(2t-4\tau)d\tau + \frac{1}{2}\sin 2t\int_0^t d\tau + 2\sin 2t$$
$$= \frac{1}{8}\cos(2t-4\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{2}t\sin 2t + 2\sin 2t = \frac{1}{8}(\cos 2t - \cos 2t) + \frac{1}{2}t\sin 2t + 2\sin 2t$$
$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}(t+4)\sin 2t\,.$$

б) От т. В, гл. 15 имаме:

$$y(t) \leftarrow\!\!\cdot\, \bar{y}(p) = \bar{y}$$
$$y'(t) \leftarrow\!\!\cdot\, p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}$$
$$y''(t) \leftarrow\!\!\cdot\, p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y}$$
$$e^{3t} \leftarrow\!\!\cdot\, \frac{1}{p-3}\,.$$

Тогава *операторното* уравнение е

$$p^2\bar{y} - 2p\bar{y} - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3}\,.$$

Тогава $\bar{y} = \dfrac{1}{(p-3)(p^2-2p-2)} = \dfrac{1}{(p-3)^2(p+1)}$ разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{(p-3)^2(p+1)} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1},$$
$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{16}, \quad C = \frac{1}{16}.$$

От $\bar{y}(p) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(p-3)^2} - \dfrac{1}{16}\dfrac{1}{p-3} + \dfrac{1}{16}\dfrac{1}{p+1} \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \dfrac{1}{16}e^{3t} + \dfrac{1}{16}e^{-t}$;

в) От т. В, гл. 15 имаме:

$$x(t) \leftarrow\!\!\!\cdot\, \bar{x}(p) = \bar{x}$$
$$x''(t) \leftarrow\!\!\!\cdot\, p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2\bar{x} - p - 1$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}[x'' - x, p] = \mathcal{L}[x'', p] - \mathcal{L}[x, p] = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[x'', p] = \mathcal{L}[x, p] \Rightarrow p^2\bar{x} - p - 1 = \bar{x}$$
$$\Rightarrow \bar{x}(p) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow x(t) = e^t.$$

г) От т. В, гл. 15 имаме:

$$x(t) \leftarrow\!\!\!\cdot\, \bar{x}(p) = \bar{x}$$
$$x''(t) \leftarrow\!\!\!\cdot\, p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2\bar{x} - p - 1.$$

От Теорема 3, гл. 16 за $f(t)$ имаме (вж. пример 16.9):

$$f(t) = 1.[\eta(t) - \eta(t-1)] - 1.[\eta(t-1) - \eta(t-2)];$$
$$\bar{f}(p) = 1\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) - 1\left(\frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-2p}}{p}\right)$$
$$= \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p}.$$

Операторното уравнение на даденото диференциално уравнение е:

$$p^2\bar{x} - p - 1 - \bar{x} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{p-1} + \frac{(1-e^{-p})^2}{p(p^2-1)}.$$

* $\dfrac{1}{p(p^2-1)} = \dfrac{1-p^2+p^2}{p(p^2-1)} = \dfrac{p}{p^2-1} - \dfrac{1}{p}$;

* $\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p(p^2-1)} = \dfrac{p}{p^2-1} - \dfrac{1}{p} - 2\dfrac{p}{p^2-1}e^{-p} + 2\dfrac{1}{p}e^{-p} + \dfrac{p}{p^2-1}e^{-2p} - \dfrac{1}{p}e^{-2p}$;

* $\bar{x} = \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{p}{p^2-1} - \dfrac{1}{p} - 2\dfrac{p}{p^2-1}e^{-p} + 2\dfrac{1}{p}e^{-p} + \dfrac{p}{p^2-1}e^{-2p} - \dfrac{1}{p}e^{-2p}$.

Като използваме основната таблица на операторното смятане и Теорема 3 за закъснението, намираме оригинала:

$$x(t) = e^{-t} + \operatorname{ch} t - 1 - 2\operatorname{ch}(t-1)\eta(t-1) + 2\eta(t-1) + \operatorname{ch}(t-2)\eta(t-2) + \eta(t-2).$$

Пример 18.2. Решете *системата диференциални уравнения*

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \quad \text{ако} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = 5\,. \end{array}\right.$$

Решение. От т. В, гл. 15 имаме:

$$\left|\begin{array}{l} x(t) \leftarrow\!\!\cdot\, \bar{x}(p) = \bar{x} \\ y(t) \leftarrow\!\!\cdot\, \bar{y}(p) = \bar{y}\,, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \dot{x}(t) \leftarrow\!\!\cdot\, p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x} \\ \dot{y}(t) \leftarrow\!\!\cdot\, p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - 5\,. \end{array}\right.$$

Като решим *операторната* система, намираме $\bar{x}, \bar{y}$:

$$\left|\begin{array}{l} p\bar{x} = \bar{x} + 2\bar{y} \\ p\bar{y} - 5 = 2\bar{x} + \bar{y} + \frac{1}{p}, \quad 1 \leftarrow\!\!\cdot\, \frac{1}{p}\,, \end{array}\right.$$

$$\bar{x} = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}\,, \qquad \bar{y} = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)}\,.$$

От $\bar{x} = \dfrac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \dfrac{A_1}{p} + \dfrac{A_2}{p+1} + \dfrac{A_2}{p-3}$ намираме коефициентите $A_1 = -\dfrac{2}{3}$, $A_2 = -2$, $A_3 = \dfrac{8}{3}$ и тогава $x(t) = -\dfrac{2}{3}1 - 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}$.

От $\bar{y} = \dfrac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)} = \dfrac{B_1}{p} + \dfrac{B_2}{p+1} + \dfrac{B_3}{p-3}$ намираме коефициентите $B_1 = \dfrac{1}{3}$, $B_2 = 2$, $B_3 = \dfrac{8}{3}$ и тогава $y(t) = \dfrac{1}{3}1 + 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}$.

Следователно наредената двойка $[x(t), y(t)]$ е решение на системата.

Пример 18.3. Решете интегралното уравнение

$$1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)y(\tau)d\tau\,.$$

Решение. Написваме операторното уравнение, като намираме образа на интеграла по теоремата за конволюция:

$$\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2-1}\bar{y}(p) \Longrightarrow \bar{y}(p) = \frac{(p^2+1-p^2)(p^2-1)}{p^2(p^2+1)} = \frac{p^2-1}{p^2(p^2+1)}\,.$$

Оригинала $y(t)$ ще намерим непосредствено (чрез разлагане на сума от елементарни дроби):

$$\frac{p^2-1}{p^2(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}, \quad A = C = 0;\ B = -1;\ D = 2$$

$$\Longrightarrow \bar{y}(p) = 2\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2} \Longrightarrow y(t) = 2\sin t - t\,.$$

Пример 18.4. Решете интегралното уравнение

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)d\tau\,.$$

Решение. Операторното уравнение на даденото ще напишем, като приложим теоремата за интегриране на оригинал:

$$\bar{y} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p}\bar{y} \Longrightarrow \bar{y}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \frac{1}{p^2+1} \Longrightarrow \bar{y} = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}\,.$$

Аналогично на пример 18.4:

$$\bar{y} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t + \sin t)\,.$$

Пример 18.5. Решете интегро-диференциалното уравнение:

$$x''(t) + \int_0^\infty \sin(t-\tau)[x''(\tau) + x(\tau)]d\tau = 2\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0\,.$$

Решение. Записваме уравнението по следния начин

$$x''(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)x''(\tau)d\tau + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau = 2\cos t\,.$$

Прилагаме теоремите за диференциране на оригинал и за конволюция:

$$p^2\bar{x} - px(0) - x'(0) + \frac{1}{p^2+1}(p^2\bar{x} - px(0) - x'(0)) + \frac{1}{p^2+1}\bar{x} = \frac{2p}{p^2+1}$$

$$p^2\bar{x} + \Big(\frac{p^2}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\Big)\bar{x} = \frac{2p}{p^2+1}$$

$$(p^2+1)\bar{x} = \frac{2p}{p^2+1} \Longrightarrow \bar{x} = \frac{2p}{p^2+1}\,.$$

Образът се възстановява непосредствено (вж. таблицата):

$$x(t) = t \sin t\,.$$

Пример 18.6. Решете системата интегро-диференциални уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} 2x'(t) + x(t) - 2y(t) + \int\limits_0^t (1 + t - \tau)y(\tau)d\tau = 0 \\ x'(t) - y'(t) + x(t) + \int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau = 0, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1\,. \end{array}\right.$$

Решение. Написваме системата, като преобразуваме първото уравнение:

$$\left|\begin{array}{l} 2x' + x - 2y + \int\limits_0^t y(\tau)d\tau + \int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = 0 \\ x' - y' + x + \int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau = 0\,. \end{array}\right.$$

Операторната система на дадената е (след прилагане на теоремите за диференциране на оригинал, интегриране на оригинал и за конволюцията):

$$\left|\begin{array}{l} 2p\bar{x} + \bar{x} - 2\bar{y} + \frac{1}{p}\bar{y} + \dfrac{1}{p^2}\bar{y} = 0 \\ p\bar{x} - p\bar{y} + 1 + \bar{x} + \dfrac{1}{p-1}\bar{x} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \bar{x}(2p+1) + \bar{y}\left(\dfrac{1+p-2p^2}{p^2}\right) = 0 \\ \bar{x}\dfrac{p^2}{p-1} - p\bar{y} = -1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \bar{x} = \dfrac{1}{p^2} \\ \bar{y} = \dfrac{1}{p-1} \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x = t \\ y = e^t\,. \end{array}\right.$$

ЗАДАЧИ

1. Решете *диференциалните уравнения*:

а) $x' + x = e^t$, ако $x(0) = 0$ Отг. $x(t) = \operatorname{sh} t$;

б) $x' - 3x = \cos t$, ако $x(0) = 0$ Отг. $\dfrac{1}{10}(3e^{-3t} - 3\cos t + \sin t)$;

в) $x'' + x = 1$, ако $x(0) = x'(0) = 0$ Отг. $x(t) = 1 - \cos t$;

г) $x'' + 2x' + x = t^2$, ако $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ Отг. $6 - 4t + t^2 - 5e^{-t} - te^{-t}$;

д) $3y' + y = e^{-t} + 5$, ако $y(0) = 0$ Отг. $y(t) = 5 - \dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{9}{2}e^{-t/3}$;

е) $y'' - 7y' + 12y = e^{2t}$, ако $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ Отг. $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} - 2e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^{4t}$;

ж) $y'' - y' - 6y = 2$, ако $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ Отг. $y(t) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{15}e^{3t} + \dfrac{4}{5}e^{-2t}$;

з) $y'' - 4y' + 4y = 1$, ако $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ Отг. $y(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{5}{2}te^{2t}$;

и) $y''' - 3y' + 2y = 5te^t$, ако $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Отг. $y(t) = \frac{5e^t}{6}(-4t^3 - t^2 + 2t - 2) + \frac{5}{81}e^{-2t}$;

к) $x''' - 2x'' + x' = 4$, ако $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$ Отг. $x(t) = 1 + 4t - 2e^t$;

л) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, ако $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = -3$

Отг. $y(t) = t(\sin t + \cos t)$;

м) $x'' + x = t\cos 2t$, ако $x(0) = x'(0) = 0$ Отг. $x(t) = \frac{4}{9}\sin 2t - \frac{5}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos 2t$;

н) $x'' - 3x' + 2x = e^t$, ако $x(0) = x'(0) = 0$ Отг. $x(t) = e^{2t} - e^t(t+1)$;

о) $x''' + x = \frac{1}{2}t^2e^t$, ако $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Отг. $x(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{t/2}$;

п) $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}$, ако $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ Отг. $x(t) = \frac{t^4e^{-t}}{4!}$;

р) $x^{IV} - x = \operatorname{sh} t$, ако $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 1$

Отг. $x(t) = \frac{1}{4}(t\operatorname{sh} t - \sin t)$;

с) $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$, ако $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$

Отг. $x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t)$;

т) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$, ако $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Отг. $x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^t$;

у) $x'' + x = \cos t + \sin 2t$, ако $x(0) = x'(0) = 0$

Отг. $x(t) = \frac{1}{6}(3t\sin t - 2\sin 2t + 4\sin t)$.

2. Решете *интегралните уравнения*:

а) $y(t) = \sin t + \int\limits_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ Отг. $y(t) = \frac{1}{5}(e^{2t} - \cos t + 3\sin t)$;

б) $\sin^2 t = \int\limits_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t$;

в) $t^2e^t = \int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = (2t - t^2)e^t$;

г) $1 - \cos t = \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = 2\cos t - 1$;

д) $\operatorname{sh} t - \sin t = \int\limits_0^t (t-\tau)^2y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$;

е) $y(t) = \sin t + \int\limits_0^t y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t)$;

ж) $y(t) = t + \int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \operatorname{sh} t$;

з) $y(t) = \cos 3t + \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$;

и) $y(t) = \frac{t^2}{2} + \int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$

Отг. $y(t) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{8}t + \frac{3}{8}t^2 + \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{1}{12}t^3)$;

к) $y(t) = t + 2\int\limits_0^t [(t-\tau) - \sin(t-\tau)]y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \frac{1}{3}\left(2\operatorname{sh} t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\sqrt{2}\right)$;

л) $y(t) = at + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = at + \frac{at^3}{3!}$;

м) $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \int\limits_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau$ Отг. $y(t) = \frac{1}{8}(e^{2t} - 2t + 2t^2 - 1)$.

3. Решете *интегро-диференциалните уравнения*:

а) $y' - \int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = \cos t$, ако $y(0) = 1$ Отг. $y(t) = \frac{1}{2}(e^t + \cos t + \sin t)$;

б) $y' - 2\int\limits_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = 0$, ако $y(0) = 1$ Отг. $y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} + 2e^{-t})$;

в) $y'' + \int\limits_0^t [y''(\tau) + y(\tau)]\sin(t-\tau)d\tau = 2\cos t$, ако $y(0) = y'(0) = 0$

Отг. $y(t) = t\sin t$;

г) $x'' + x = \sin t + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau - 0$, ако $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ Отг. $x(t) = t$;

д) $x'' - x' + e^t(1 - \cos t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin(t-\tau)x(\tau)d\tau$, ако $x(0) = x'(0) = 1$

Отг. $x(t) = e^t$;

е) $x'' - 2\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau = 0$, ако $x(0) = 3$, $x'(0) = 7$

Отг. $x(t) = 4e^t - e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t$;

ж) $y' + y + \int\limits_0^t (t-\tau+1)y(\tau)d\tau = t$, ако $y(0) = 3$ Отг. $y(t) = 2e^{-t} + \cos t - \sin t$.

4. Решете *системите уравнения*:

а) $\left|\begin{array}{l} x'' - 3y + 3x = 0 \\ x - y - y'' = 0, \end{array}\right.$ ако $\left|\begin{array}{l} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right.$ Отг. $\left|\begin{array}{l} x(t) = 3 - \cos 2t \\ y(t) = 3 + \cos 2t \end{array}\right.$;

б) $\left|\begin{array}{l} 2\dot{x} + 3\dot{y} = e^{-2t} \\ 3\dot{x} - 5\dot{y} = e^t, \end{array}\right.$ ако $x(0) = y(0) = 0$ Отг. $\left|\begin{array}{l} x(t) = -\frac{1}{38} + \frac{3e^t}{19} - \frac{5e^{-2t}}{38} \\ y(t) = \frac{7}{38} - \frac{2e^t}{19} - \frac{3e^{-2t}}{38} \end{array}\right.$;

в) $\left|\begin{array}{l} \dot{x} + 2\dot{y} = e^{2t} \\ \dot{x} + 3\dot{y} = e^{3t}, \end{array}\right.$ ако $x(0) = y(0) = 0$ Отг. $\left|\begin{array}{l} x(t) = -\frac{5}{6} + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{3t} \\ y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t} \end{array}\right.$;

г) $\left|\begin{array}{l} \dot{x} - \dot{y} = 2x - 2y - 2t + 1 \\ \ddot{x} + 2\dot{y} = -x, \end{array}\right.$ ако $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = 0$

Отг. $\left|\begin{array}{l} x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}) \\ y(t) = 2 - t^2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} \end{array}\right.$;

д) $\left|\begin{array}{l} x'' + x' + y'' - y = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \end{array}\right.$ ако $\left|\begin{array}{l} x(0) = 0, \ x'(0) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$

Отг. $\left|\begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{4}(\operatorname{sh} t + 3te^{-t}) \\ y(t) = \frac{3}{4}t\operatorname{sh} t \end{array}\right.$;

е) $\left| \begin{array}{l} x'' + y' = \operatorname{sh} t - \sin t - t \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t \,, \end{array} \right.$ ако $\left| \begin{array}{l} x(0) = 0, x'(0) = 2 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{array} \right.$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x(t) = t + \operatorname{sh} t \\ y(t) = \cos t - \dfrac{1}{2}t^2 \end{array} \right.$;

ж) $\left| \begin{array}{l} 2x'' + x + y' = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \,, \end{array} \right.$ ако $\left| \begin{array}{l} x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{array} \right.$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x(t) = t\cos t \\ y(t) = -t\sin t \end{array} \right.$;

з) $\left| \begin{array}{l} x' = 2x - y + z \\ y' = x + z \\ z' = -3x + y - 2z \,, \end{array} \right.$ ако $\left| \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{array} \right.$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x(t) = 2 - e^t \\ y(t) = 2 - e^t \\ z(t) = 2(e^{-t} - 1) \end{array} \right.$;

и) $\left| \begin{array}{l} x = 2 - \int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau - 4\int\limits_0^t y(\tau)d\tau \\ y = 1 - \int\limits_0^t x(\tau)d\tau + \int\limits_0^t (1 + t - \tau)y(\tau)d\tau \end{array} \right.$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x(t) = 2e^{-t}(1-t) \\ y(t) = e^{-t}(1-t) \end{array} \right.$;

к) $\left| \begin{array}{l} x = e^t + \int\limits_0^t x(\tau)d\tau - \int\limits_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau \\ y = -t - \int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau + \int\limits_0^t y(\tau)d\tau \end{array} \right.$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{2t}) \end{array} \right.$;

4. Решете *интегралите*:

а) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos x}{1 + x^2}dx$ Отг. $\dfrac{\pi e^{-1}}{2}$

б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$ Отг. $\dfrac{\pi}{2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ

N	$f(t)$ при $t>0$	$F(p)=\bar{f}(p)$	N	$f(t)$ при $t>0$	$F(p)=\bar{f}(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	9.	$e^{at}\operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{(p-a)^2-b^2}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	10.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
3.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	11.	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
4.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	12.	$t\sin bt$	$\frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}$
5.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13.	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6.	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	14.	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7.	$e^{at}\operatorname{ch} bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-b^2}$	15.	c	$c\frac{1}{p}$
8.	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	16.	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$

ТЕОРЕМИ: $\mathcal{L}[F(t),p]=\bar{f}(p)=F(p)$

1.	За подобие	$\mathcal{L}[f(at),p]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
2.	За преместване	$\mathcal{L}[f(t)e^{-at},p]=F(p+a)$
3.	За закъснение	$\mathcal{L}[f(t-a),p]=e^{-pa}F(p);\ a>0$
4.	За изпреварване	$\mathcal{L}[f(t+a),p]=e^{pa}\left[F(p)-\int\limits_0^a f(\zeta)e^{-p\zeta}d\zeta\right]$
5.	За свиване	$\mathcal{L}\left[\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau,p\right]=\bar{f}(p)\bar{\varphi}(p)$
6.	Диференциране на оригинал	$\mathcal{L}[f'(t),p]=p\bar{f}(p)-f(0)$ $\mathcal{L}[f''(t),p]=p^2\bar{f}(p)-pf(0)-f'(0)$
7.	Интегриране на оригинал	$\mathcal{L}\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau,p\right]=\frac{F(p)}{p}$
8.	Диференциране на образ	$\bar{f}^{(n)}(p)=\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t),p]$
9.	Интегриране на образ	$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t},p\right]=\int\limits_p^\infty \bar{f}(q)dq;\ \frac{f(t)}{t}$ - оригинал

ГЛАВА 19

КЛАСИФИКАЦИЯ НА ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД

Дефиниция 1 *Уравнение от вида*

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{19.1}$$

където $u(x,y)$ е непозната функция, а коефициентите са функции $a_{ij} = a_{ij}(x,y)$ или константи, се нарича ***линейно частно диференциално уравнение от втори ред.***

Уравнението (19.1) може да се напише във вида:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x,y) \tag{19.2}$$

като (19.2) е *хомогенно*, ако $f(x,y) = 0$.

Ако коефициентите a_{ij} зависят още и от функциите u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, уравнението (19.1) се нарича *квазилинейно.*

Дефиниция 2 *Два пъти диференцируемата функция $u(x,y)$ се нарича* ***решение*** *на (19.1), ако заместена в уравнението го превръща в тъждество, по отношение на аргументите x и y.*

Чрез подходяща смяна на двойката (x,y) с двойката (ξ,η) уравнението (19.1) може да бъде приведено в каноничен вид, като са възможни три случая.

Дефиниция 3 *Трансформация от вида $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ се нарича* ***регулярна****, ако:*

1. *Функциите $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ са непрекъснати и диференцируеми в отворена област $M \subset \mathbb{R}^2$.*
2. *Трансформацията е еднозначно обратима.*
3. *Якобианът* $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$, $\forall (x,y) \in M$.

Дефиниция 4 *Уравнение от вида*

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \,|\, : dx^2 \neq 0 \tag{19.3}$$

или $a_{11}y'^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0$ ($\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ – дискриминанта) се нарича ***характеристично уравнение*** *на (19.1), а кривите $\varphi(x,y) = c_1$, $\psi(x,y) = c_2$ –* ***характеристики*** *на (19.1).*

Уравнението (19.1) се *канонизира* посредством регулярна смяна в един от трите случая:

I. Уравнението (19.1) е от **хиперболичен тип** в точка $P \in D \subset \mathbb{R}^2$ или в цялата област $D_1 \subset D$, ако $\Delta > 0$. Характеристичното уравнение (19.3) се разпада на две обикновени диференциални уравнения с общи интеграли $\varphi(x,y) = c_1$, $\psi(x,y) = c_2$, а регулярната смяна е $\varphi(x,y) = \xi$, $\psi(x,y) = \eta$. В този случай $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22} = 0$, $\overline{a}_{12} \neq 0$ ($\overline{a}_{11} = -\overline{a}_{22} \neq 0$, $\overline{a}_{12} = 0$), а каноничният вид е:
$$\overline{a}_{12}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \xi \partial \eta} = f_1\Big(\xi, \eta, \overline{u}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}\Big). \tag{19.4}$$

II. Уравнението(19.1) е от **параболичен тип** в точка $P \in D \subset \mathbb{R}^2$ или в областта $D_2 \subset D$, ако $\Delta = 0$. Общите интеграли на (19.3) съвпадат ($\varphi(x,y) = c_1$), а регулярната смяна е $\varphi(x,y) = \xi$, $\psi(x,y) = \eta$, където $\psi(x,y)$ е произволна функция, функционално независима с $\varphi(x,y)$. В този случай $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{12} = 0$, $\overline{a}_{22} \neq 0$ ($\overline{a}_{12} = -\overline{a}_{22} = 0$, $\overline{a}_{11} \neq 0$), а каноничният вид е:
$$\overline{a}_{22}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \eta^2} = f_2\Big(\xi, \eta, \overline{u}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}\Big). \tag{19.5}$$

III. Уравнението (19.1) е от **елиптичен тип** в точка $P \in D \subset \mathbb{R}^2$ или в областта $D_3 \subset D$, ако $\Delta < 0$. Общите интеграли на (19.3) са комплексно спрегнати от вида $\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, $\psi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y)$, а регулярната смяна е $\alpha(x,y) = \xi$, $\beta(x,y) = \eta$. В този случай $\overline{a}_{12} = 0$, $\overline{a}_{11} \neq 0$, $\overline{a}_{22} \neq 0$, а каноничният вид е:
$$\overline{a}_{11}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \xi^2} + \overline{a}_{22}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \eta^2} = f_3\Big(\xi, \eta, \overline{u}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}\Big). \tag{19.6}$$

Пример 19.1 Определете типа на уравнението и го приведете в каноничен вид:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0;$

б) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 7\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} - 4u + 3 = 0.$

Решение: а) В даденото уравнение $a_{11} = 1$, $a_{12} = -3$ и $a_{22} = 5$. Характеристичното уравнение е
$$dy^2 + 6dxdy + 5dx^2 = 0 \Leftrightarrow y'^2 + 6y' + 5 = 0,\ \Delta = 9 - 5 = 4 > 0.$$

От $\Delta > 0$ следва, че уравнението е от *хиперболичен вид* в цялата равнина.
Решаваме характеристичното уравнение:

$$dy^2 + 6dxdy + 5dx^2 = 0| : dx^2 \neq 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\frac{dy}{dx} + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2.$$

Тогава $\dfrac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow y + x = c_1$ и $\dfrac{dy}{dx} = -5 \Leftrightarrow y + 5x = c_2$.

Каноничния вид на уравнението ще получим чрез регулярна смяна $\xi = y + 5x$, $\eta = y + x$.

Пресмятаме частните производни:

* $\xi_x = 5$; $\xi_y = 1$; $\xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$,
* $\eta_x = \eta_y = 1$; $\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$,
* $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 5u_\xi + u_\eta$,
* $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$,
* $u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + u_{\eta\eta}{\eta_x}^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = 25u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 10u_{\xi\eta}$,
* $u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + u_{\eta\eta}{\eta_y}^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}$,
* $u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = 5u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 6u_{\xi\eta}$.

Правим смяната в уравнението:

$$25u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 10u_{\xi\eta} - 6(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 6u_{\xi\eta}) + 5(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}) + \\ +4(5u_\xi + u_\eta) - 3(u_\xi + u_\eta) + u = 0 \Leftrightarrow$$

$$-16u_{\xi\eta} + 17u_\xi + u_\eta + u = 0.$$

Следователно, каноничният вид на даденото уравнение е

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 17u_\xi + u_\eta + u;$$

б) Характеристичното уравнение на даденото е ($a_{11} = x^2$, $a_{12} = xy$ и $a_{22} = y^2$):

$$x^2dy^2 - 2xydxdy + y^2dx^2 = 0,\ \Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0.$$

Следователно уравнението е от *параболичен тип* в цялата равнина.
Решаваме характеристичното уравнение:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = \ln x + \ln c_1 \Leftrightarrow \ln\frac{y}{x} = \ln c_1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = c_1.$$

Правим смяната $\dfrac{y}{x} = \xi$, $\eta = x$ и намираме частните производни:

* $\xi_x = -\frac{y}{x^2}$; $\xi_y = \frac{1}{x}$; $\xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}$; $\xi_{yy} = 0$; $\xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}$,
* $\eta_x = 1$; $\eta_y = 0$; $\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$,
* $u_{xx} = u_{\xi\xi}\frac{y^2}{x^4} + u_{\eta\eta} - \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\xi$,
* $u_{yy} = u_{\xi\xi}\frac{1}{x^2}$,
* $u_{xy} = u_{\xi\xi}\Big(-\frac{y}{x^3}\Big) + u_{\xi\eta}\frac{1}{x} + u_\xi\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)$.

Заместваме в уравнението:

$$x^2\Big(\frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\xi\Big) + 2xy\Big(-\frac{y}{x^3}u_{\xi\xi} + \frac{1}{x}u_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2}u_\xi\Big) + $$
$$+y^2\frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} = 0 \Leftrightarrow x^2u_{\eta\eta} = 0.$$

Като използваме, че $x = \eta$, получаваме каноничния вид на уравнението:

$$\eta^2 u_{\eta\eta} = 0;$$

в) В даденото уравнение $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$ и $a_{22} = 10$, а характеристичното уравнение е:

$$dy^2 - 6dxdy + 10dx^2 = 0,\ \Delta = 9 - 10 = -1 < 0.$$

Уравнението е от *елиптичен тип* в цялата равнина.

Решаваме характеристичното уравнение:

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 6\frac{dy}{dx} + 10 = 0 \Leftrightarrow \Big(\frac{dy}{dx}\Big)_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i.$$

Тогава $\frac{dy}{dx} = 3 + i \Leftrightarrow y - (3+i)x = c_1$ и $\frac{dy}{dx} = 3 - i \Leftrightarrow y - (3-i)x = c_2 \Leftrightarrow$

$$c_{1,2} = y - 3x \pm ix.$$

Правим смяната $\xi = y - 3x$ и $\eta = x$ и намираме частните производни:
* $\xi_x = -3$, $\xi_y = 1$, $\xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$,
* $\eta_x = 1$, $\eta_y = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$,
* $u_x = -3u_\xi + u_\eta$, $u_y = u_\xi$,
* $u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$,
* $u_{yy} = u_{\xi\xi}$, $u_{xy} = -3u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$.

След заместване в уравнението получаваме:

$$9u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 6u_{\xi\eta} - 18u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 10u_{\xi\xi} + 21u_\xi - 7u_\eta + 5u_\xi - 4u + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 26u_\xi - 7u_\eta - 4u + 3 = 0.$$

Каноничният вид на уравнението е:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -26u_\xi + 7u_\eta + 4u - 3.$$

Пример 19.2 Приведете в каноничен вид и намерете общото решение на уравнението:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; б) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Решение:

а) Характеристичното уравнение на даденото е ($a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{22}=-1$):

$$dy^2 - dx^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0,\ \Delta = 1.$$

Следователно, уравнението е от *хиперболичен тип* в цялата равнина.

* $\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx \Rightarrow x - y = c_1$,
* $\dfrac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow x + y = c_2$.

Полагаме $\xi = x - y$, $\eta = x + y$. Частните производни са:

* $\xi_x = 1$, $\xi_y = -1$, $\xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$,
* $\eta_x = \eta_y = 1$, $\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$,
* $z_{xx} = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}$,
* $z_{yy} = z_{\xi\xi} - 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}$.

След заместване в уравнението получаваме:

$$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} - z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} - z_{\eta\eta} = 0.$$

Каноничният вид на уравнението е $4z_{\xi\eta} = 0$ или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

За да намерим общото решение на уравнението го записваме във вида: $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0$ и означаваме $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = F$, тогава $\dfrac{\partial F}{\partial \xi} = 0$ и следователно $F = F(\eta)$, а ξ е параметър.

Нека $F = f_1(\eta)$. От $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = f_1(\eta)$ следва, че $z = f(\eta) + g(\xi)$.

Тогава общото решение е:

$$z = f(x + y) - g(x - y),$$

където f и g са два пъти диференцируеми функции на x и y;

б) Записваме характеристичното уравнение ($a_{11}=x^2$, $a_{12}=-xy$ и $a_{22}=y^2$):

$$x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0.$$

Уравнението е от *параболичен тип.*

От $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dx}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln y + \ln x = \ln c_1 \Leftrightarrow xy = c_1$.

Полагаме $\xi = xy$, $\eta = y$ и намираме частните производни:

$* \, \xi_x = y, \, \xi_y = x, \, \xi_{xx} = \xi_{yy} = 0, \, \xi_{xy} = 1,$
$* \, \eta_y = 1, \, \eta_x = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$
$* \, z_x = yz_\xi, \, z_y = xz_\xi + z_\eta, \, z_{xx} = y^2 z_{\xi\xi},$
$* \, z_{yy} = x^2 z_{\xi\xi} + 2xz_{\xi\eta} + z_{\eta\eta},$
$* \, z_{xy} = xyz_{\xi\xi} + yz_{\xi\eta} + z_\xi.$

След заместване в уравнението получаваме:

$$\begin{gathered} x^2y^2 z_{\xi\xi} - 2x^2y^2 z_{\xi\xi} - 2xy^2 z_{\xi\eta} - 2xyz_\xi + x^2y^2 z_{\xi\xi} \\ +2xy^2 z_{\xi\eta} + y^2 z_{\eta\eta} + xyz_\xi + xyz_\xi + yz_\eta = 0 \\ \Leftrightarrow y^2 z_{\eta\eta} + yz_\eta = 0 \Leftrightarrow \eta^2 z_{\eta\eta} + \eta z_\eta = 0 \;\; (y = \eta). \end{gathered}$$

Окончателно, каноничният вид на уравнението е

$$\eta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Записваме уравнението във вида: $\eta \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0$ и полагаме $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = F$, като $F = F(\eta)$, а ξ е параметър. Получаваме $\eta \dfrac{\partial F}{\partial \eta} + F = 0$, което е диференциално уравнение от първи ред (с отделени променливи) и намираме решението му:

$$\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + F = 0 \Leftrightarrow \frac{dF}{F} + \frac{d\eta}{\eta} = 0 \Leftrightarrow \ln F + \ln \eta = \ln(f(\xi)) \Leftrightarrow F\eta = \alpha(\xi),$$

където $\ln(\alpha(\xi))$ е интеграционната константа, зависеща от ξ.

От $F\eta = f(\xi)$ имаме $\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\eta = f(\xi)$ и отново интегрираме по η:

$$dz = \frac{d\eta}{\eta} f(\xi) \Leftrightarrow z = f(\xi)\ln(\eta) + g(\xi).$$

Общото решение е:

$$z = f(xy)\ln y + g(xy).$$

Пример 19.3 Дадено е уравнението $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$.

а) Да се определи типът на уравнението;
б) Да се канонизира;
в) Да се намери общото му решение;
г) Да се намери частно решение при условие

$$u|_{y=\sin x} = x^2, \;\; u_y|_{y=\sin x} = x.$$

Решение:

а) Уравнението има характеристично уравнение

$$dy^2 - 2\cos x dx dy - \sin^2 dx^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\cos x\left(\frac{dy}{dx}\right) - \sin^2 x dx^2 = 0,\ \Delta = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 > 0.$$

Следователно уравнението е от *хиперболичен* тип;

б) Решението на характеристичното уравнение е $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \cos x \pm 1$.

* $\frac{dy}{dx} = \cos x + 1 \Leftrightarrow y = \sin x + x + c_1 \Leftrightarrow y - \sin x - x = c_1$,

* $\frac{dy}{dx} = \cos x - 1 \Leftrightarrow y = \sin x - x + c_2 \Leftrightarrow y - \sin x + x = c_2$.

Полагаме $\xi = y - \sin x - x$, $\eta = y - \sin x + x$ и намираме частните производни:

* $\xi_x = -\cos x - 1$, $\xi_y = 1$, $\xi_{xx} = \sin x$, $\xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$,

* $\eta_y = 1$, $\eta_x = -\cos x + 1$, $\eta_{xx} = \sin x$, $\eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$,

* $u_y = u_\xi + u_\eta$,

* $u_{xx} = (\cos x + 1)^2 u_{\xi\xi} - 2\sin^2 x u_{\xi\eta} + (1 - \cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x(u_\xi + u_\eta)$,

* $u_{xy} = -(1 + \cos x)u_{\xi\xi} + (-1 - \cos x + 1 - \cos x)u_{\xi\eta} + (1 - \cos x)u_{\eta\eta}$,

* $u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$.

След заместване в уравнението и преработване, получаваме:

$$\begin{gathered}(\cos x + 1)^2 u_{\xi\xi} - 2\sin^2 x u_{\xi\eta} + (1 - \cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x(u_\xi + u_\eta) \\ -2\cos x(1 + \cos x)u_{\xi\xi} - 4\cos^2 x u_{\xi\eta} + 2\cos x(1 - \cos x)u_{\eta\eta} \\ -\sin^2 x u_{\xi\xi} - 2\sin^2 x u_{\xi\eta} - \sin^2 x u_{\eta\eta} - \sin x(u_\xi + u_\eta) = 0 \\ \Leftrightarrow -4u_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0,\end{gathered}$$

което е каноничният вид на уравнението;

в) Общото решение на уравнението е

$$u = f(\eta) + g(\xi) \Leftrightarrow u = f(y - \sin x + x) + g(y - \sin x - x)$$

(вж. решението на Пример 19.2.а);

г) Допълнителните условия за търсената функция $u(x, y)$ ни определят равенствата:

$$\left|\begin{array}{l} f(\sin x - \sin x + x) + g(\sin x - \sin x - x) = x^2 \\ f'(\sin x - \sin x + x) + g'(\sin x - \sin x - x) = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} f(x) + g(-x) = x^2 \\ f'(x) + g'(-x) = x. \end{array}\right.$$

От първото равенство след диференциране получаваме: $f'(x) - g'(-x) = 2x$. Решаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} f'(x) - g'(-x) = 2x \\ f'(x) + g'(-x) = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{3x}{2} \\ g'(x) = \dfrac{x}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{3x^2}{4} \\ g(x) = \dfrac{x^2}{4}. \end{array}\right.$$

Следователно, частното решение на уравнението е:

$$u(x,y) = \frac{3}{4}(y - \sin x + x)^2 + \frac{1}{4}(y - \sin x - x).$$

ЗАДАЧИ

1. Определете *типа* на уравнението:

а) $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} = 0$ Отг. хиперболичен;

б) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_x = 0$ Отг. хиперболичен;

в) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ Отг. параболичен;

г) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$ Отг. хиперболичен;

д) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$, $x \neq 0, y \neq 0$ Отг. елиптичен.

2. *Канонизирайте* уравненията:

а) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$, $x \neq 0, y \neq 0$ Отг. $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2\xi}u_\eta = 0$;

б) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$ Отг. $u_{\xi\eta} + \dfrac{\xi + \eta}{32}(u_\xi + u_\eta) = 0$;

в) $\sin^2 x u_{xx} - 2y \sin x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ Отг. $u_{\eta\eta} - \dfrac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}u_\xi = 0$;

г) $\operatorname{tg}^2 x u_{xx} - 2y \operatorname{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg}^2 x u_x = 0$ Отг. $u_{\eta\eta} - \dfrac{2\xi}{\eta^2}u_\xi = 0$;

д) $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$, $x > 0, y > 0$ Отг. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \dfrac{1}{\xi}u_\xi - \dfrac{1}{\eta}u_\eta = 0$;

е) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$ Отг. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{2\eta}u_\eta + \dfrac{1}{\xi + \eta}u_\xi = 0$.

3. Намерете *общите решения* на уравненията:

а) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ Отг. $u(x,y) = yf\left(\dfrac{y}{x}\right) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

б) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$ Отг. $u(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}f(xy) + g\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

в) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$ Отг. $u(x,y) = e^{\frac{y-3x}{2}} f(x + y) + g(y - 3x)$;

г) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ Отг. $u(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)\sqrt{xy} + g(xy)$;

д) $2xz_x + x^2 z_{xx} - x^2 z_{yy} = 0$, $x \neq 0$ Отг. $z(x,y) = \dfrac{1}{x}f(x - y) + \dfrac{1}{x}g(x + y)$;

е) $z_{xx} - 2\sin x z_{xy} - \cos^2 x z_{yy} - \cos x z_y = 0$
Отг. $z(x,y) = f(\cos x - x - y) + g(\cos x + x - y)$;

ж) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$
Отг. $u(x,y) = f(x + y - \cos x) + g(-x + y - \cos x)$.

4. Да се намери *частното решение* за уравнението при дадени начални условия:

а) $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0$, $u(x,0) = 3x^2$, $u_y(x,0) = 0$
Отг. $u(x,y) = \dfrac{1}{6}(y - 3x)^2 + \dfrac{3}{10}(y + 2x)^2$;

б) $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$, $x \neq 0$, $u|_{x=1} = 2y + 1$, $u_x|_{x=1} = y$
Отг. $u(x,y) = 1 + 2y + y\ln|x|$;

в) $u_{xx} - u_{yy} = 0$, $u(0,y) = \sin y$, $u_x(0,y) = y$ Отг. $u(x,y) = xy + \sin x \cos y$.

ГЛАВА 20

ОБЩО РЕШЕНИЕ НА ВЪЛНОВОТО УРАВНЕНИЕ. БЯГАЩИ ВЪЛНИ. ЗАДАЧА НА КОШИ И ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ. ФОРМУЛА НА ДАЛАМБЕР

А. Уравнение на струната

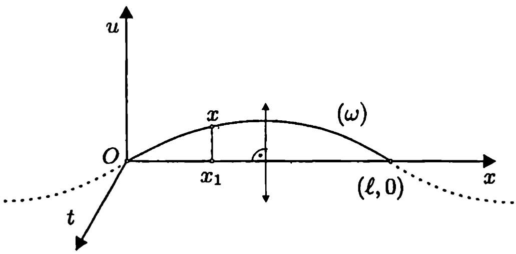
Дефиниция 1 *Струна* (ω) *се нарича тънка, опъната, неразтеглива материална нишка с определени свойства, която извършва малки напречни трептения (колебания) в равнината* Oxu.

За равновесно положение на струната се приема абсцисната ос Ox.

Дефиниция 2 *Казваме, че струната извършва равнинно напречно трептене, ако са изпълнени условията:*

а) ако струната се изведе от положението на равновесие, тя трепти в равнината Oxu*;*

б) всяка точка от струната трепти перпендикулярно на оста Ox *(фиг. 20.1).*



Фигура 20.1.

Нека означим с u отклонението на точка x от струната от равновесното ѝ положение x_1. Отклонението u зависи както от точката x, така и от времето на трептене t и тогава $u = u(x,t)$.

Функцията на две променливи $u = u(x,t)$ е решение на уравнението

$$(\omega): \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad a^2 = \frac{T}{\rho}, \tag{20.1}$$

където T е сила на опъване на струната, а ρ - плътност на струната и се нарича *вълново уравнение* (уравнение на струната).

Б. Общо решение на уравнението на струната

Разглеждаме уравнение (20.1), като $x, t \in \mathbb{R}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. струната (ω) има безкрайна дължина.

Съответното *характеристично* уравнение е

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx + a dt)(dx - a dt) = 0, \tag{20.2}$$

а общото решение на (20.1) е $x + at = c_1$, $x - at = c_2$. За да канонизираме (20.1), извършваме смяната:

$$\pm\left|\begin{array}{l} x + at = \xi \\ x - at = \eta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\xi+\eta}{2} \\ t = \dfrac{\xi-\eta}{2a} \end{array}\right. \Rightarrow u(x,t) = \bar{u}(\xi,\eta). \tag{20.3}$$

Намираме $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = a$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = -a$ и като диференцираме (20.3) по x и t, получаваме

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = a\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - a\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}. \end{array}\right.$$

Отново диференцираме по x и t

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2a^2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \end{array}\right.$$

и заместваме в (20.1)

$$a^2\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\right) = -4a^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Решаваме полученото хиперболично уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = f_1(\xi) \Rightarrow \bar{u} = \int f_1(\xi)d\xi + g(\eta)$$

$$\bar{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \Rightarrow u(x,t) = f(x+at) + g(x-at). \tag{20.4}$$

Получената функция (20.4) дава общото решение на (20.1), където f и g са произволни два пъти диференцируеми функции.

Функциите $u_1(x,t) = f(x+at)$, $u_2(x,t) = g(x-at)$ са също решения на (20.1).

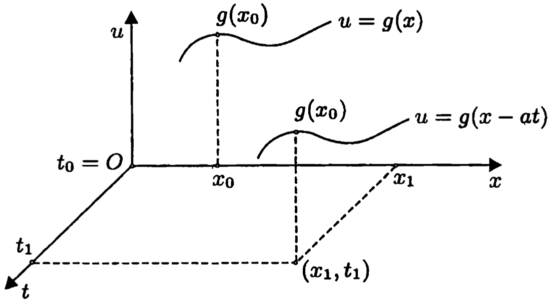
В. Бягащи вълни (права и обратна)

а) Разглеждаме решението $u_2(x,t) = g(x - at)$ на (20.1):

— при $t = t_0 = 0$ и съответно $x_0 \Rightarrow u_2(x_0, t_0) = u_2(x_0, 0) = g(x_0)$;

— при $t = t_1 \neq 0$ и съответно $x_1 \Rightarrow u_2(x_1, t_1) = g(x_1 - at_1) = g(x_0 + at_1 - at_1)$ $= g(x_0)$.

Извод: За да намерим положението на струната в момента t_1, построяваме линията $u = g(x)$ и я преместваме *надясно*, успоредно на Ox със скорост a (фиг. 20.2).



Фигура 20.2.

Дефиниция 3 *Решението $u_2(x,t) = g(x - at)$ се нарича* ***права бягаща вълна.***

б) Аналогично решението $u_1(x,t) = f(x + at)$ се нарича **обратна бягаща вълна**, т.е. за да намерим положението на струната в момента $t_2 \neq 0$, построяваме линията $u = f(x)$ и я преместваме *наляво*, успоредно на оста Ox, със скорост a.

Г. Задача на Коши за вълновото уравнение

За да намерим напълно определено решение на уравнението (20.1), са необходими допълнителни условия - *гранични* и *начални*:

а) *Гранични условия* за решението $u(x,t)$: закрепваме струната (ω) в точките $(0,0)$ и $(l,0)$, $l \neq 0$ (закрепването не се отразява съществено върху трептенето на струната). Тогава $u(0,t) = 0$; $u(l,t) = 0$;

б) *Начални условия* за решението $u(x,t)$: търсим такова решение на (20.1), което удовлетворява равенствата:

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \text{ - начално отклонение на точка } x, \\ u_t(x,0) = \psi(x) \text{ - начална скорост на трептене на всяка частица.} \end{array} \right.$$

Задача на Коши: Да се намери решение на (20.1), което отговаря на началните условия.

Д. Метод на Даламбер за вълновото уравнение

Диференцираме (20.4) относно t:

$$u_t(x,t) = af'(x+at) - ag'(x-at)$$

и посредством началните условия (Г. б)) получаваме:

$$\left| \begin{aligned} & u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ & u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} & f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ & f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau + C \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} & f(x) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x) + \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau\Big] + \frac{C}{2} \\ & g(x) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau\Big] - \frac{C}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} & f(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\tau)d\tau + \frac{C}{2} \\ & g(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\tau)d\tau - \frac{C}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

$$= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau. \qquad (20.5)$$

Така решението на (20.1) е намерено по *формулата* (20.5) *на Даламбер* (решение на задачата на Коши).

Пример 20.1 Да се намери частното решение на уравнението $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ при начални условия $u(x,0) = x^3$ и $u_t(x,0) = e^x$.

Решение: Трябва да решим задачата на Коши за уравнението на струната. Решението ѝ се дава с формулата на Даламбер (20.5) при дадените начални условия

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x+at)^3 + (x-at)^3\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} e^\tau d\tau = x^3 + 3a^2xt^2 + \frac{1}{2}\left(e^{x+at} - e^{x-at}\right).$$

И така $u(x,t) = x^3 + 3a^2xt^2 + \frac{e^x}{a}\operatorname{sh} at$.

Пример 20.2 Да се намери решението на уравнението $u_{tt} - 4u_{xx} = x^2t^3$ при условия $u(x,0) = 0$ и $u_t(x,0) = x^2$.

Решение: Решението $u(x,t)$ търсим като сума от решението на две задачи:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \qquad \text{където}$$

* $v(x,t)$ е решение на уравнението $v_{tt} - 4v_{xx} = 0$ при начални условия $v(x,0) = 0$, $v_t(x,0) = x^2$;
* $w(x,t)$ е решение на нехомогенното уравнение $w_{tt} - 4w_{xx} = x^2t^3$ при хомогенни начални условия $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = 0$.

По формулата на Даламбер (20.5) намираме функцията $v(x,t)$ ($\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^2$, $a = 2$):

$$v(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \tau^2 d\tau = \frac{1}{4}\,\frac{\tau^3}{3}\bigg|_{x-2t}^{x+2t} \Leftrightarrow v(x,t) = x^2t + \frac{4}{3}t^2.$$

Функцията $w(x,t)$ ще намерим по формулата за решаване на уравнението $u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t)$ при хомогенни начални условия $u(x,0) = 0$ и $u_t(x,0) = 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz.$$

$$w(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} z^2\tau^3 dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \tau^3\frac{[x+2(t-\tau)]^3 - [x-2(t-\tau)]^3}{3}d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^t \tau^3\Big(3x^2(t-\tau) + 4(t-\tau)^3\Big)d\tau = \frac{x^2t^5}{20} + \frac{t^7}{105}.$$

Окончателно, $u(x,t) = x^2t + \frac{4t^3}{3} + \frac{x^2t^5}{20} + \frac{t^7}{105}$.

ЗАДАЧИ

Намерете решенията на задачите на Коши с помощта на формулата на Даламбер:

1. $u_{tt} = u_{xx}$, $\quad u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 0$ Отг. $u(x,t) = x^2 + t^2$.
2. $u_{tt} = u_{xx}$, $\quad u(x,0) = \ln x$, $u_t(x,0) = 1/x$ Отг. $u(x,t) = \ln(x+t)$.
3. $u_{tt} = 9u_{xx}$, $\quad u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = \cos x$

   Отг. $u(x,t) = \sin x \cos 3t + \dfrac{\sin 3t \cos x}{3}$.
4. $u_{tt} = 9u_{xx} + e^t \sin x$, $\quad u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$

   Отг. $u(x,t) = x^2 + 9t^2 + xt + \dfrac{e^t}{30} \sin x - \dfrac{3\sin x \cos 3t + \sin x \sin 3t}{30}$.

ГЛАВА 21

ПЪРВА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА ВЪЛНОВОТО УРАВНЕНИЕ ПО МЕТОДА НА ФУРИЕ. СТОЯЩИ ВЪЛНИ

А. Първа гранична задача за вълновото уравнение по метода на Фурие

* *Разглеждаме* струна (ω) с крайна дължина ($0 \le x \le \ell$, $t > 0$, фиг. 20.1) с уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (21.1)$$

чието решение $u(x,t)$ удовлетворява съответно *гранични* и *начални* условия:

$$\text{а)} \left| \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(\ell,t) = 0 \end{array} \right., \qquad \text{б)} \left| \begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array} \right. .$$

* *Търсим нетривиално* (ненулево) решение $u(x,t)$ с отделени променливи на (21.1) от вида:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0. \qquad (21.2)$$

* *Заместваме* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT''$ в (21.1) и получаваме:

$$XT'' - a^2 X''T = 0 \Big| : XT \neq 0 \Rightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda = \text{const.} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - a^2 \lambda T = 0 \end{array} \right. .$$

* От (21.2) и граничните условия а) имаме

$$\left| \begin{array}{l} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(\ell,t) = X(\ell)T(t) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{array} \right., \ (T(t) \neq 0).$$

Така се оформя *задачата на Щурм–Лиувил*:

$$\left| \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - a^2 \lambda T = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

I. Решаваме обикновеното диференциално уравнение $X'' - \lambda X = 0$. Ако съществува числото λ, то се нарича *собствена стойност* на уравнението, а функцията $X(x)$ - *собствена функция* на уравнението

1°. $\boxed{\lambda = 0} \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X' = C_1 \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$.

$$\text{От} \quad \left| \begin{array}{l} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1\ell + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow X(x) = 0 \ (\textit{невъзможно}).$$

2°. $\boxed{\lambda > 0}$, т.е. $\lambda = \mu^2 > 0$. Тогава $r^2 - \lambda = 0$ е съответното характеристично уравнение с корени $r_{12} = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\mu$. Тогава $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$.

$$\text{От} \quad \left| \begin{array}{l} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 e^{\mu\ell} + C_2 e^{-\mu\ell} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} C_2 = -C_1 \\ C_1(e^{\mu\ell} - e^{-\mu\ell}) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X(x) = 0 \ (\textit{невъзможно}).$$

3°. $\boxed{\lambda < 0}$, т.е. $\lambda = -\mu^2 < 0$. Тогава $r^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow r_{12} = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\sqrt{-\mu^2} = \pm i\mu$. Тогава $X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$.

$$\text{От} \quad \left| \begin{array}{l} X(0) = C_1 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \cos \mu\ell + c_2 \sin \mu\ell = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_2 \sin \mu\ell = 0 .$$

Търсим ненулево решение на (21.1), тогава трябва

$$C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \mu\ell = 0 \Leftrightarrow \mu\ell = k\pi \Rightarrow \mu_k = k\pi/\ell, \ k \in \mathbb{N},$$

като $k = 0$ е невъзможно. И така

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x \qquad \text{е търсеното решение I.}$$

II. Решаваме обикновеното диференциално уравнение $T'' - a^2\lambda T = 0$, като $\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 < 0$. Тогава $T'' + \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 T = 0$ има характеристично уравнение $r^2 + \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow r_{12} = \pm i\frac{k\pi a}{\ell}$, откъдето намираме

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} at + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} at - \text{решение II.}$$

Като заместим $C_k = 1$, чрез непосредствена проверка установяваме, че

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} at + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} at\right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \qquad (21.3)$$

са частни решения на уравнението (21.1).

Определянето на коефициентите a_k и b_k ще извършим посредством началните условия а).

* Образуваме сумата

$$u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\frac{k\pi}{\ell}at+b_k\sin\frac{k\pi}{\ell}at\Big)\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,, \tag{21.4}$$

като предполагаме, че редът (21.4) е сходящ и неговата сума $u(x,t)$ е два пъти диференцируема. От

$$u_k(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x=\varphi(x)$$

следва, че функцията $\varphi(x)$ е развита в ред на Фурие само по синуси. Считаме, че $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ и е преиодична с период $T=2\ell\neq 2\pi$ и тогава

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\,. \tag{21.5}$$

* Диференцираме (21.4) относно t и получаваме

$$u_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-a_k\frac{k\pi a}{\ell}\sin\frac{k\pi}{\ell}at+b_k\frac{k\pi a}{\ell}\cos\frac{k\pi}{\ell}at\Big)\sin\frac{k\pi}{\ell}x$$

$$\Rightarrow u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{k\pi a}{\ell}\sin\frac{k\pi}{\ell}x=\psi(x)\,.$$

Така функцията $\psi(x)$ е развита в ред на Фурие само по синуси. Считаме, че $\psi(-x)=-\psi(x)$ и е периодична с период $T=2\ell\neq 2\pi$ и тогава

$$b_k\frac{k\pi a}{\ell}=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi d\xi \Leftrightarrow b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\,. \tag{21.6}$$

* Заместваме (21.5) и (21.6) в (21.4) и получаваме общото решение на (21.1) по метода на Фурие.

Б. Стоящи вълни

Написваме (21.3) във вида

$$u_k(x,t)=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\Big(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\cos\frac{k\pi}{\ell}at+\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\sin\frac{k\pi}{\ell}at\Big)\sin\frac{k\pi}{\ell}x$$

и като означим

$$\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}} = \sin\varphi_k, \qquad \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}} = \cos\varphi_k,$$

$$\sqrt{a_k^2+b_k^2} = N_k, \qquad \operatorname{tg}\varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \left(\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}\right),$$

получаваме

$$u_k(x,t) = N_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\left(\varphi_k + \frac{k\pi at}{\ell}\right). \tag{21.7}$$

Дефиниция 1 *Решенията (21.7) на уравненията (21.1) се наричат* ***стоящи вълни****.*

а) *Възел на стояща вълна.* При трептенето на струната точките, които остават в покой, се получават от условието $\sin\frac{k\pi x}{\ell} = 0$, т.е. точките $x = \frac{\ell}{k}, \frac{2\ell}{k}, \frac{3\ell}{k}, \dots, \frac{k\ell}{k}, \dots$ са *възли* на стояща вълна.

б) *Гребен на стояща вълна.* При трептенето на струната точките, които извършват максимално отклонение се получават от условието $\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \pm 1$, т.е. точките $x = \frac{\ell}{2k}, \frac{3\ell}{2k}, \frac{5\ell}{2k}, \dots$ са *гребени* на стояща вълна.

Пример 21.1 Да се намери решението на уравнението $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 \le x \le \ell$, $t \ge 0$, удовлетворяващо следните начални и гранични условия:

$$u(x,0) = \frac{x(\ell - x)}{\ell^2}, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \quad u_t(\ell,t) = 0.$$

Решение: Решението на задачата се дава с формула (21.4), като коефициентите a_k и b_k се изчисляват по формулите (21.5) и (21.6):

$$* \quad a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \frac{\xi(\ell-\xi)}{\ell^2}\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi = \frac{2}{k\pi\ell^2}\int_0^\ell (\xi^2 - \ell\xi)d\cos\frac{k\pi\xi}{\ell}$$

$$= \frac{2}{k\pi\ell^2}\left[(\xi^2-\ell\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{\ell}\Big|_0^\ell - \int_0^\ell (2\xi - \ell)\cos\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\right]$$

$$= \frac{-2}{k^2\pi^2\ell}\int_0^\ell (2\xi-\ell)d\sin\frac{k\pi\xi}{\ell} = \frac{-2}{k^2\pi^2\ell}\left[(2\xi-\ell)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}\Big|_0^\ell - 2\int_0^\ell \sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\right]$$

$$= -\frac{4}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi\xi}{\ell}\Big|_0^\ell = \frac{4}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k] = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \dfrac{8}{(2n-1)^3\pi^3}, & k = 2n-1; \end{cases}$$

$$* \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^{\ell} 0.\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi = 0.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi}{\ell}at\sin\frac{(2n-1)\pi}{\ell}x\,.$$

Пример 21.2 Хомогенна струна е закрепена в краищата ѝ $x = 0$ и $x = \ell$. В началния момент тя има форма на парабола с ос, минаваща през точката $(x = \ell/2, y = h)$ от струната. Да се определят трептенията на струната, ако началната ѝ скорост е равна на нула.

Решение: Трябва да се реши уравнението на струната при нулеви гранични и начални условия $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x) = 0$.

* Функцията $\varphi(x)$, съгласно условието на задачата, е парабола от вида $y = ax^2 + bx + c$, минаваща през точките $(0,0)$, $(\ell/2,h)$ и $(\ell,0)$. Определяме коефициентите a, b и c от системата

$$\left|\begin{array}{l} c=0 \\ \dfrac{a\ell^2}{4}+\dfrac{b\ell}{2}+c=h \\ a\ell^2+b\ell+c=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} a=-\dfrac{4h}{\ell^2} \\ b=\dfrac{4h}{\ell} \\ c=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \varphi(x) = \frac{4hx}{\ell^2}(\ell - x).$$

Решението на задачата се получава по формула (21.4), като коефициентите са:

$$* \qquad a_k = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\frac{4h\xi}{\ell^2}(\ell-\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi = \begin{cases} 0, & k=2n, \\ \dfrac{32h}{(2n-1)^3\pi^3}, & k=2n-1; \end{cases}$$

$$* \qquad b_k = 0.$$

Заместваме коефициентите и получаваме решението:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi}{\ell}at\sin\frac{(2n-1)\pi}{\ell}x\,.$$

Пример 21.3 Да се реши диференциалното уравнение $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $0 \le x \le \ell$, $t \ge 0$ при начални и гранични условия $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$, $u_x(0,t) = 0$ и $u_x(\ell,t) = 0$.

Решение: Тъй като граничните условия в задачата не съвпадат с тези на уравнение (21.1), не можем да приложим формули (21.4), (21.5), (21.6).

Търсим неизвестната функция във вида:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

След отделяне на променливите в уравнението стигаме до две обикновени диференциални уравнения:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad \text{и} \qquad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \tag{21.8}$$

с гранични условия

$$X'(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad X'(\ell) = 0\,. \tag{21.9}$$

Търсим нетривиални решения на (21.8) за съответните стойности на λ.

Общият интеграл на уравнението $X'' + \lambda^2 X = 0$ е

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x\,.$$

Съгласно с граничните условия (21.9) получаваме:

$$\begin{aligned}
&X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x\\
&X'(0) = C_2 \lambda = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0\\
&X'(\ell) = -\lambda C_1 \sin \lambda \ell = 0 \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow C_1 \neq 0,\ \lambda \neq 0,\ \sin \lambda \ell = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{\ell},\ k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Собствените функции на уравнението са

$$X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{\ell}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad C_1 = 1.$$

При намерените собствени стойности ($\lambda_k = k\pi/\ell$) общият интеграл на уравнението $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$ е

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell}\,.$$

Тогава решението $u(x,t)$ търсим във вид на безкраен ред:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right). \tag{21.10}$$

Коефициентите A_0, A_k и B_k определяме от началните условия:

* $u(x,0) = A_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos\dfrac{k\pi x}{\ell} = \varphi(x)$, като $\varphi(x)$ за $x \in [0,\ell]$ представяме в ред на Фурие:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)dx, \qquad a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} A_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ A_k = a_k \end{array} \right. .$$

Следователно

$$A_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)dx, \qquad A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx\,. \tag{21.11}$$

* От второто начално условие $u_t(x,0) = \psi(x)$, като се разложи функцията $\psi(x)$ в ред на Фурие по косинуси за $x \in [0,\ell]$, получаваме

$$B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx\,. \tag{21.12}$$

За решаване на конкретната задача ще приложим директно формули (21.10), (21.11) и (21.12), kato $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = x$.

* $$A_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell x^2 dx = \frac{\ell^2}{3};$$

* $$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell x^2\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^\ell x^2 d\sin\frac{k\pi x}{\ell} = -\frac{4}{k\pi}\int_0^\ell x\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

$$= \frac{4\ell}{k^2\pi^2}\int_0^\ell x d\cos\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{4\ell^2(-1)^k}{k^2\pi^2};$$

$$* \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell x\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

$$= \frac{2\ell^2}{k^3\pi^3 a}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ -\dfrac{4\ell^2}{(2n-1)^3\pi^3 a}, & k = 2n-1 \end{cases}.$$

Заместваме коефициентите във формула (21.10) и получаваме решението:

$$u(x,t) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi a t}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}$$
$$- \frac{4\ell^2}{\pi^3 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi a t}{\ell}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}. \quad (21.13)$$

ЗАДАЧИ

1. Да се намерят отместванията на точките на струна от равновесното им положение, ако началните им скорости са равни на нула. Струната е с дължина 4 единици, хомогенна и е закрепена в двата края. В началния момент има форма на парабола, симетрична относно перпендикуляра, издигнат в средата (при $x = 2$) с максимално отклонение 1/128 от дължината ѝ в равновесно положение.

Упътване: Решете уравнението

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = \frac{x(4-x)}{128}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

Отг. $u(x,t) = \frac{1}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\cos\frac{2m-1}{4}\pi a t\sin\frac{2m-1}{4}\pi x$

2. Хомогенна струна с дължина 16 cm е закрепена неподвижно в краищата $x = 0$ и $x = 16$. В началния момент тя лежи на бедрата на равнобедрен триъгълник с основа 16 cm и височина 1 cm. Да се определи процесът на трептенията на струната, ако началната ѝ скорост е 0.

Отг. $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{16}\cos\frac{(2n-1)\pi a t}{16}$

ГЛАВА 22

ЗАДАЧА НА КОШИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ТОПЛОПРОВОДИМОСТТА. ПЪРВА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ПО МЕТОДА НА ФУРИЕ

А. Задача на Коши за уравнението на топлопроводимостта

Да се намери непрекъсната функция $u(x,t)$ в областта $\mathfrak{D} : -\infty < x < +\infty$, $t > 0$, която удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{22.1}$$

при допълнително условие $u(x,0) = \varphi(x)$, където функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната и ограничена за $\forall x$ (разглеждаме прът с безкрайна дължина, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$).

$*$ **Изхождаме** от *общата* трансформация на Фурие (вж. (14.6) и (14.7), където $\Phi(\lambda)$ е образ, а $f(x)$ - оригинал):

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, \tag{22.2}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \tag{22.3}$$

$*$ **Означаваме** *образа* на $u(x,t)$ с $v(\lambda,t)$, който ще намерим от формула (22.2) или

$$v(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \tag{22.4}$$

$*$ **Диференцираме** (22.4) по t и заместваме $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ от (22.1), като интегрираме по части ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$):

$$v_t' = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} e^{i\lambda\xi} d\xi =$$

$$
=\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} d\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial u}{\partial\xi}e^{i\lambda\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a^2 i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}du(\xi,t)
$$

$$
= -\frac{a^2 i\lambda}{\sqrt{2\pi}}u(\xi,t)e^{i\lambda\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} + a^2 i^2\lambda^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)e^{i\lambda\xi}d\xi = -a^2\lambda^2 v(\lambda,t).
$$

Полученото диференциално уравнение $v' = -a^2\lambda^2 v$ е линейно от първи ред и неговото решение е

$$
v(\lambda,t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{22.5}
$$

От (22.4), (22.5) и допълнителното условие $u(x,0) = \varphi(x)$, т.е. $t = 0$ получаваме

$$
v(\lambda,0) = C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\xi,0)e^{i\lambda\xi}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi = \Phi(\lambda).
$$

От $\Phi(\lambda) = C$ и (22.5) за образа на $u(x,t)$ имаме

$$
v(\lambda,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi\,. \tag{22.6}
$$

* От (22.3) за оригинала $u(x,t)$ получаваме

$$
u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-i\lambda x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda
$$

$$
= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t - i\lambda(x-\xi)}d\lambda.
$$

Посредством *субституцията* $2a^2\lambda t + i(x-\xi) = 2\mu\sqrt{t}$ заменяме старата променлива λ с нова променлива μ, като $\lambda = \dfrac{2\mu\sqrt{t} - i(x-\xi)}{2a^2 t}$, $d\lambda = \dfrac{d\mu}{a^2\sqrt{t}}$, $\dfrac{\lambda \mid -\infty\ \infty}{\mu \mid -\infty\ \infty}$ и тогава $-a^2\lambda^2 t - i\lambda(x-\xi) = -\dfrac{\mu^2}{a^2} - \dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}$.

И така *решението* на задачата на Коши за уравнението на топлопроводимостта е:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\frac{d\mu}{a^2\sqrt{t}}\\
=& \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{\mu}{a}\right)^2}d\left(\frac{\mu}{a}\right)\\
=& \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.
\end{aligned}
\tag{22.7}
$$

$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{\mu}{a}\right)^2}d\left(\frac{\mu}{a}\right)=\sqrt{\pi}\right.$ е от вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ - интеграл на Поасон$\Big)$.

Б. Първа гранична задача по метода на Фурие

Да се намери непрекъсната функция $u(x,t)$ в областта $\mathfrak{D}: 0 \le x \le l,\ t > 0$, която удовлетворява уравнението (22.1), ако $u(x,0)=\varphi(x)$, където функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната и ограничена за $\forall x$ и $u(x,t)$ удовлетворява граничните условия $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$.

Търсим ненулево решение на (22.1) от вида (вж. Глава 21, А.)

$$u(x,t)=X(x)T(t),\ X(x)\neq 0,\ T(t)\neq 0.$$

Отново решаваме задачата на Щурм-Лиувил: $X''-\lambda X=0$, $T'-a^2\lambda T=0$, $X(0)=X(l)$ само при $\lambda=-\mu^2<0$. Решението на $X''-\lambda X=0$ е $X_k(x)=c_k\sin\frac{k\pi}{l}x$, $k\in\mathbb{N}$ (вж. Глава 21, А, I).

Решаваме обикновеното диференциално уравнение

$$
\begin{aligned}
T'-a^2\lambda T=0 \Leftrightarrow \frac{dT}{dt}=a^2\lambda T \Leftrightarrow \int\frac{dT}{T}=a^2\lambda\int dt+\ln b\\
\Leftrightarrow \ln\frac{T}{b}=a^2\lambda t \Rightarrow T=be^{a^2\lambda t},\ \lambda=-\mu^2=-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\\
\Rightarrow T_k(t)=b_ke^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2t}.
\end{aligned}
$$

Чрез непосредствена проверка установяваме, че

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=c_kb_ke^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{22.8}$$

са частни решения на (22.1).

Образуваме сумата ($c_k b_k = a_k$)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{22.9}$$

като предполагаме, че този ред е сходящ и тогава неговата сума $u(x,t)$ е решение на (22.1). От началното условие $u(x,0) = \varphi(x)$, т.е. при $t = 0$ имаме $u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x)$ или $\varphi(x)$ е развита в ред на Фурие само по синуси. Считаме, че $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ е периодична с период $T = 2l \neq 2\pi$. Тогава $a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$ (22.10), а решението на първа гранична задача на Коши по метода на Фурие е

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int\limits_0^l \frac{2}{l}\varphi(\xi)\left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right] d\xi \\ &= \int\limits_0^l \frac{2}{l}\varphi(\xi)\Gamma(x,\xi,t)d\xi\,. \end{aligned} \tag{22.10}$$

Функцията $\Gamma(x,\xi,t)$ е известната *функция на Грийн.*

Пример 22.1 Да се намери законът за разпределение на температурата $u(x,t)$ в дълъг еднороден прът, изолиран от околната среда и известно начално разпределение на температурата $u(x,0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$.

Решение: В случая имаме задача на Коши за уравнението $u_t = a^2 u_{xx}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, при начално условие $u(x,0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$.

Търсим решение от вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, като изходното уравнение се преобразува във

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2.$$

Решаваме обикновените диференциални уравнения, получени от тези равенства:

* $X'' + \lambda^2 X = 0 \Leftrightarrow X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,$
* $T' + a^2\lambda^2 T = 0 \Leftrightarrow T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$

Следователно едно частно решение е

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x].$$

Ако $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ са абсолютно интегруеми за $\lambda \in [0; \infty)$, то интегралът

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\lambda(x,t)d\lambda = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

може да се диференцира по x и t и получаваме:

$$u_t(x,t) = -a^2 \int_0^\infty \lambda^2 e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

$$u_{xx}(x,t) = -\int_0^\infty \lambda^2 e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda.$$

Тези производни удовлетворяват даденото уравнение.

Коефициентите $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ са:

$$* \qquad A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi(\tau)\cos\lambda\tau d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}\cos\lambda\tau d\tau$$

$$* \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi(\tau)\sin\lambda\tau d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}\sin\lambda\tau d\tau.$$

Следователно, търсеното решение се дава с функцията:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda \int_0^\infty \varphi(\tau)[\cos\lambda x\cos\lambda\tau + \sin\lambda x\sin\lambda\tau]d\tau \\ =& \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos(x-\tau)\lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Тук ще използваме, че $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$ и при $\alpha = a^2 t$ и $\beta = x - \tau$, получаваме:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos(x-\tau)\lambda d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}$$

Следователно

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\tau^2 + \frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}\right)}d\tau.$$

Пример 22.2 Даден е тънък еднороден прът с дължина l, изолиран от околната среда. Началната температура на пръта е $f(x) = \dfrac{cx(l-x)}{l^2}$. Краищата на пръта се поддържат при нула градуса. Да се определи:

а) температурата на пръта в даден момент t;

б) температурата в средата на прът с дължина $l = 20$ при $t = 1$.

Решение: а) Уравнението на температурата на пръта е $u_{xx} = a^2 u_t$ с гранични условия $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ и начални условия $u(x,0) = \dfrac{cx(l-x)}{l^2}$.

Търсим нетривиално решение във вида

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Намираме частните производни u_{xx} и u_t и заместваме в уравнението:

$$u_x = X'T,\ u_{xx} = X''T;\ u_t = XT'$$
$$\Rightarrow X''T = a^2XT' \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = a^2\frac{T'}{T} = -\lambda^2.$$

От последното равенство получаваме две обикновени диференциални уравнения:

$$a^2T' + \lambda^2T = 0 \Leftrightarrow T(t) = C_1e^{-\frac{\lambda^2}{a^2}t};$$
$$X'' + \lambda^2X = 0 \Leftrightarrow X(x) = C_2\cos\lambda x + C_3\sin\lambda x.$$

Тогава общото решение на уравнението е

$$u(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)e^{-\frac{\lambda^2}{a^2}t};\ A = C_1C_2;\ B = C_1C_3.$$

Коефициентите A и B ще намерим от граничните условия на задачата.

$$u(0,t) = 0 \Leftrightarrow Ae^{-\frac{\lambda^2}{a^2}t} = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$
$$u(l,t) = 0 \Leftrightarrow B\sin\lambda l\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{a^2}t} = 0 \Leftrightarrow \lambda l = k\pi \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{l}.$$

Тогава $u_k(x,t) = B_k\sin\dfrac{k\pi}{l}x\cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2l^2}t}$, $k = 1,\ 2, \dots,$ l е едно частно решение на уравнението.

Друго решение на уравнението ще бъде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin\frac{k\pi}{l}x\,e^{-\left(\frac{k\pi}{al}\right)^2t}.$$

Константите B_k определяме, като използваме началното условие $u(x,0)=\dfrac{cx(l-x)}{l^2}$:

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x\cdot e^0=\frac{cx(l-x)}{l^2}$$

$$\Leftrightarrow B_k=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{cx(l-x)}{l^2}\sin\frac{k\pi}{l}x dx=-\frac{4c}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right]=\begin{cases}0, & k=2n\\ \dfrac{8c}{\pi^3(2n-1)^3}, & k=2n-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^3}e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{al}\right]^2 t};$$

б) За частния случай $l=20$, $\dfrac{l}{2}=10$ и $t=1$ имаме:

$$u(10,1)=\frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{20}}{(2n-1)^3}e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{20a}\right]^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се реши диференциалното уравнение

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t\geq 0$$

при гранични условия $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ и при начално условие

$$u(x,0)=\begin{cases}x, & 0<x\leq\dfrac{l}{2}\\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x<l\end{cases}$$

Отг: $u(x,t)=\dfrac{4l}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-\frac{\pi^2a^2(2n-1)^2}{l^2}t}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$

2. Да се определи законът за разпределение на температурата в хомогенен прът, чиито краища се поддържат при температура 0° (т.е. $u(0,t)=u(l,t)=0$), а началната температура на пръта се дава с функцията $f(x)=x(l-x)$, $l>0$.

Отг: $u(x,t)=\dfrac{8l^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2k-1}{l}\pi x\cdot e^{-\left[\frac{(2n-1)a\pi}{l}\right]^2 t}}{(2n-1)^3}$

ГЛАВА 23

УРАВНЕНИЕ НА ЛАПЛАС. ХАРМОНИЧНИ ФУНКЦИИ. ПЪРВА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ЛАПЛАС В КРЪГОВА ОБЛАСТ

А. Уравнение на Лаплас. Хармонични функции

Дефиниция 1 *Уравнението*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{23.1}$$

където $u = u(x, y)$*, се нарича* ***уравнение на Лаплас.***

Очевидно (23.1) е частно диференциално уравнение от втори ред - елиптичен вид, а $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ се нарича *оператор на Лаплас.*

Дефиниция 2 *Всяка еднозначна и непрекъсната функция* $u(x, y)$ *с непрекъснати частни производни от втори ред, която удовлетворява (23.1), се нарича* ***хармонична функция.***

Разглеждаме равнинна отворена област $\mathfrak{D}$ с гладък затворен контур $(\varGamma)$, като $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cup \varGamma$ е затворена област. Ще отбележим две *свойства* на хармоничните функции:

а) Ако $u(x, y)$ е хармонична функция в $\bar{\mathfrak{D}}$, то $u(x, y)$ приема своята най-голяма и най-малка стойност на границата $(\varGamma)$ на областта;

б) Ако познаваме стойността на хармонична функция $u(x, y)$ по контура $(\varGamma)$ на областта $\mathfrak{D}$, можем да пресметнем стойността ѝ в коя да е точка от $\mathfrak{D}$.

Задача: Докажете, че функцията $v(x, y) = \ln(1/R)$ е фундаментално решение на (23.1), където $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $M_0(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}$ - фиксирана точка, а $M(x, y) \in (\varGamma)$ - текуща точка, $M_0M = R$.

Доказателство.

$$v_x = R\Big(-\frac{1}{R^2}\Big)\frac{2(x - x_0)}{2R} = -\frac{x - x_0}{R^2},$$

$$v_{xx} = -\frac{R^2 - (x - x_0)2R\dfrac{2(x - x_0)}{2R}}{R^4} = -\frac{1}{R^2} + \frac{2(x - x_0)^2}{R^4}.$$

Аналогично

$$v_{yy} = -\frac{1}{R^2} + \frac{2(y-y_0)^2}{R^4}$$

и заместваме в (23.1). Тогава

$$v_{xx} + v_{yy} = -\frac{2}{R^2} + \frac{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}{R^4} = -\frac{2}{R^2} + \frac{2R^2}{R^4} = 0.$$

Следователно $v(x,y) = \ln(1/R)$ е хармонична функция, която удовлетворява уравнението (23.1).

Б. Основни гранични задачи за уравнението на Лаплас

За да намерим конкретното решение на (23.1), са необходими допълнителни гранични условия за хармоничната функция $u(x,y)$.

Нека разгледаме областта $\mathfrak{D}$ с граница (Γ) и непрекъснатите функции $\varphi_i(P)$, $i = \overline{1,3}$, $P \in (\Gamma)$.

Първа гранична задача (на Дирихле): Да се намери хармонична функция $u(x,y)$ в $\mathfrak{D}$, която на границата (Γ) изпълнява условието $u(x,y)\Big|_{(\Gamma)} = \varphi_1(P)$, $P \in (\Gamma)$.

Втора гранична задача (на Нойман): Да се намери хармонична функция $u(x,y)$ в $\mathfrak{D}$, която изпълнява условието $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{(\Gamma)} = \varphi_2(P)$, $P \in (\Gamma)$, където n е външната нормала за (Γ).

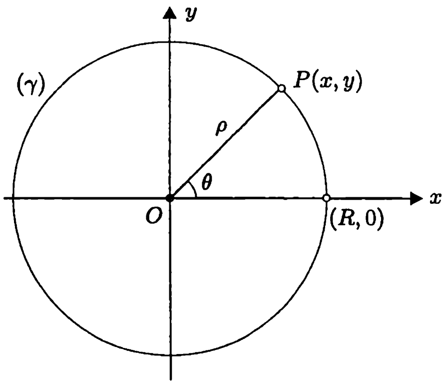
Трета гранична задача: Да се намери хармонична функция $u(x,y)$ в $\mathfrak{D}$, която изпълнява условието $\left[\alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u\right]_{(\Gamma)} = \varphi_3(P)$, $P \in (\Gamma)$, където функциите $\alpha(P)$ и $\beta(P)$ са непрекъснати.

В. Задача на Дирихле в кръгова област за уравнението на Лаплас (метод на Фурие)

Да се намери функция $u(x,y)$, която удовлетворява (23.1) в отворения кръг $x^2 + y^2 < R^2$ и е непрекъсната в затворения кръг $x^2 + y^2 \leq R^2$, при това $u(x,y)\Big|_{\gamma: x^2+y^2=R^2} = \varphi(\theta)$.

Точката $P(x,y)$, $P(\rho,\theta)$ има съответно декартови и полярни координати спрямо $K_2 : Oxy$, като $P \in (\gamma)$.

Предполагаме, че функцията $\varphi(\theta)$ удовлетворява условията $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2k\pi)$, $\varphi(\theta) \in C\,[0, 2\pi]$, т.е. $\varphi(\theta)$ е периодична и непрекъсната.



Фигура 23.1.

Написваме уравнение (23.1) в *полярен вид* посредством смяната:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array},$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{array} \right. \Rightarrow u(x,y) = u[\rho(x,y), \theta(x,y)],$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{x}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

Отново диференцираме по x и y и заместваме в (23.1):

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{23.2}$$

Търсим решение на (23.2) от вида:

$$u(\rho,\theta) = X(\rho)Y(\theta), \qquad X(\rho) \neq 0, \quad Y(\theta) \neq 0. \tag{23.3}$$

От $\dfrac{\partial u}{\partial\rho} = X'Y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = X''Y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = XY''$, като заместим в (23.3), получаваме

$$\rho^2 X''Y + \rho X'Y + XY'' = 0 \Big| : XY \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 X'' + \rho X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda = \text{const.}$$

I. Решаваме обикновеното диференциално уравнение $Y'' + \lambda Y = 0$. Съответното характеристично уравнение $r^2 + \lambda = 0$ има решение $r_{12} = \pm i\sqrt{\lambda}$, но $Y(\theta) = Y(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогава $\lambda = k^2 \Rightarrow r_{12} = \pm ik$. Тогава

$$Y_k(\theta) = A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta\,.$$

II. Решаваме обикновеното диференциално уравнение от Ойлеров тип $\rho^2 X'' + \rho X' - \lambda X = 0$. Полагаме $\rho = e^t$, $\dot{\rho} = e^t$, тогава $X' = \dfrac{\dot{X}}{\dot{\rho}} = e^{-t}\dot{X}$ и диференцираме по t. Получаваме

$$X''\dot{\rho} = \ddot{X}e^{-t} - e^{-t}\dot{X} \Leftrightarrow X'' = e^{-2t}(\ddot{X} - \dot{X})$$

и заместваме в уравнението

$$e^{2t}e^{-2t}(\ddot{X} - \dot{X}) + e^t e^{-t}\dot{X} - k^2 X = 0 \Leftrightarrow \ddot{X} - k^2 X = 0, \quad k^2 = \lambda.$$

Съответното характеристично уравнение $r^2 - k^2 = 0$ има корени $r_{12} = \pm k$

$$\Rightarrow X(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \Leftrightarrow X(\rho) = C_1\rho^k + C_2\rho^{-k}.$$

Но $X(\rho)$ е непрекъсната функция, защото $u(\rho, \theta)$ трябва да бъде такава, т.е. $C_2 = 0$ и тогава $X_k(\rho) = C_k\rho^k$, приемаме $C_k = 1 \Rightarrow X_k(\rho) = \rho^k$, $k \in \mathbb{N}$.

И така $u_k(\rho, \theta) = X_k(\rho)Y_k(\theta) = \rho^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$, $k \in \mathbb{N}$ са частни решения на (23.2).

Коефициентите A_k и B_k ще определим от началното условие. Образуваме сумата

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)\,.$$

Предполагаме, че този ред е сходящ и тогава функцията $u(\rho, \theta)$ е решение на (23.2). При $k = 0$ означаваме коефициента $A_0 = \dfrac{a_0}{2}$

$$\Rightarrow u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta).$$

От $u(\rho, \theta)\Big|_{\gamma} = \varphi(\theta)$

$$\Rightarrow u(R, \theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) = \varphi(\theta).$$

Така функцията $\varphi(\theta)$ е развита в ред на Фурие, при това $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2k\pi)$ и следователно

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)\,.$$

Поради единственост на Фуриеровия ред написваме:

$$\left|\begin{array}{l} A_k R^k = a_k \\[2ex] B_k R^k = b_k \\[2ex] A_0 = \dfrac{a_0}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} A_k = \dfrac{a_k}{R^k} = \dfrac{1}{\pi R^k}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\cos k\xi d\xi \\[2ex] B_k = \dfrac{b_k}{R^k} = \dfrac{1}{\pi R^k}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\sin k\xi d\xi \\[2ex] A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) d\xi \end{array}\right.$$

Заместваме и получаваме решението на (23.2):

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(\xi - \theta)d\xi\,. \qquad (23.4)$$

Пример 23.1 Дадена е правоъгълна пластинка с установена постоянна температура. Нека на краищата на три от страните ѝ температурата е нула, а върху четвъртата е $f(x) = e^x$. Пластинката е топлинно изолирана от околната среда. Да се изследва температурното състояние на пластинката в коя да е точка от нея.

Решение: Задачата се решава с уравнението на Лаплас (защото топлинното състояние на пластинката е стационарно):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

при гранични и начални условия:

$$\begin{array}{lll} * & u(0, y) = 0, & u(a, y) = 0; \\ * & u(x, 0) = 0, & u(x, b) = f(x) = e^x\,. \end{array}$$

Търсим нетривиално решение във вида:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)\,.$$

Намираме $u_{xx} = X''Y$ и $u_{yy} = XY''$ и заместваме в уравнението

$$X''Y + XY'' = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k^2\,.$$

Решаваме двете обикновени диференциални уравнения, които се получават от последното равенство:

$$\begin{aligned}
* \quad & X'' - k^2X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx},\\
* \quad & Y'' + k^2Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y(y) = Ce^{iky} + De^{-iky},\\
& \Rightarrow \; u(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(Ce^{iky} + De^{-iky})\,.
\end{aligned}$$

Константите A, B, C и D определяме от граничните и началните условия:

* $u(0,y) = 0 \Leftrightarrow (A+B)(Ce^{iky} + De^{-iky}) = 0 \Leftrightarrow A+B=0 \Leftrightarrow A=-B.$
Тогава

$$u(x,y) = 2A\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}(Ce^{iky} + De^{-iky}) = 2A\operatorname{sh} kx(Ce^{iky} + De^{-iky})\,.$$

* $u(a,y) = 0 \Leftrightarrow 2A\operatorname{sh} ka(Ce^{iky} + De^{-iky}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} ka = 0$

$$\Leftrightarrow e^{ka} - e^{-ka} = 0 \Leftrightarrow e^{2ka} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2ka} = e^{2n\pi i} \Leftrightarrow k = \frac{n\pi i}{a}\,.$$

Така получихме едно частно решение

$$u_n(x,y) = 2A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi i x}{a}(Ce^{-\frac{n\pi y}{a}} + De^{\frac{n\pi y}{a}})\,,$$

а търсеното решение е

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi i x}{a}(Ce^{-\frac{n\pi y}{a}} + De^{\frac{n\pi y}{a}})\,,$$

* $u(x,0) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2A_n \sin\dfrac{n\pi x}{a}(C+D) = 0 \Leftrightarrow C+D=0 \Leftrightarrow C=-D.$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 4A_nD\sin\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n\sin\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\,.$$

* $u(x,b) = e^x \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n \sin\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{a} = e^x.$
Следователно

$$K_n = \frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\int\limits_0^a e^x\sin\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\,\frac{an\pi}{a^2+n^2\pi^2}[1-(-1)^n e^a]\,.$$

Крайният вид на решението е:

$$u(x,y) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[1-(-1)^n e^a]}{(a^2+n^2\pi^2)\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}.$$

Пример 23.2 Намерете температурата в произволна точка от кръгла пластинка с пренебрежимо малка дебелина, ако по контура ѝ температурата е $f(\theta) = 2\cos^2\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, а в центъра има крайна температура.

Решение: Трябва да решим уравнението на Лаплас $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Тъй като пластинката е кръгла, удобно е да се премине към полярни координати и уравнението сега е (вж. 23.2)

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = 0$$

с гранично условие $f(\theta) = 2\cos^2\theta$.

Търсим решение от вида $u(\rho,\theta) = R(\rho)T(\theta)$, което има частни производни

$$u_\rho = R'T, \qquad u_{\rho\rho} = R''T, \qquad u_{\theta\theta} = RT''.$$

След заместване на производните получаваме

$$\rho^2 TR'' + \rho TR' + RT'' = 0 \,\Big|\, : RT \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} + \frac{T''}{T} = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda.$$

Решаваме уравненията, получени от последното равенство

* $\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0$ (Ойлерово уравнение).

Полагаме $\rho = e^t$, $\dot\rho = e^t$, $\ddot\rho = e^t$, тогава $R' = e^{-t}\dot R$, $R'' = e^{-2t}(\ddot R - \dot R)$ и след заместване получаваме

$$\ddot R - k^2 R = 0, \quad k^2 = \lambda \Leftrightarrow R(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \Leftrightarrow R(\rho) = C_1\rho^k + \frac{C_2}{\rho^k}.$$

Поради непрекъснатостта на $R(\rho)$ трябва $C_2 = 0 \Rightarrow R(\rho) = C_1\rho^k$ и при $C_1 = 1$ получаваме $R_k(\rho) = \rho^k$.

* $T'' + \lambda T = 0 \Leftrightarrow T(\theta) = A\cos k\theta + B\sin k\theta$, $k^2 = \lambda$,

$$T_k(\theta) = A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta.$$

Следователно $u_k(\rho,\theta) = R_k(\rho)T_k(\theta) = \rho^k(A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta)$, $k \in \mathbb{N}$ са частни решения, а

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k(A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta)$$

е търсеното решение. При $k = 0$ имаме $\cos k\theta = 1$, $\sin k\theta = 0$ и нека да означим $A_0 = \frac{a_0}{2}$. Тогава

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$$

Коефициентите определяме от допълнителните условия:

$$u(R,\theta) = 2\cos^2\theta \Leftrightarrow A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) = 2\cos^2\theta\,.$$

$$** \quad \forall k \neq 2 : A_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos^2\theta \cos k\theta d\theta = \frac{2}{\pi R^k}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\cos k\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^k}\left(\frac{1}{k}\sin k\theta + \frac{\sin(2+k)\theta}{2(2+k)} - \frac{\sin(2-k)\theta}{2(2-k)}\right)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\text{при } k = 2 : A_2 = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos^2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(\int_0^{\pi}\cos 2\theta d2\theta + \int_0^{\pi}\cos^2 2\theta d2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(\sin 2\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d2\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 4\theta d2\theta\right) = \frac{\pi}{\pi R^2} = \frac{1}{R^2};$$

$$** \qquad B_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos^2\theta \sin k\theta d\theta = 0;$$

$$** \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta = 1$$

$$\Rightarrow u(\rho,\theta) = 1 + \frac{\rho^2}{R^2}\cos 2\theta\,.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се реши уравнението на Лаплас при гранично условие $\varphi(\theta) = \theta$.

$$\text{Отг. } u(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nR^n}\rho^n \sin n\theta.$$

2. Да се реши уравнението $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0$ при гранични условия

$$u(a,\theta) = \varphi(\theta) = \begin{cases} 1, & \varphi \in (0,\pi) \\ 2, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}, \quad \varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)\,.$$

$$\text{Отг. } u(\rho,\theta) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n-1} \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)\theta.$$

***

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 4, София, Техника, 1974.
2. *Привалов И.И.*, Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва, Наука, 1967.
3. *Кожевников, Н.И. и колектив*, Задачи и упражнения: Ряды Фурье; Теория поля; Аналитические и специальные функции; Преобразование Лапласа.
4. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ, Втора част, София, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1994.
5. *Петрова А. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика, четвърта част – избрани глави от математиката, София, Техника, 1979.