ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
МОДУЛ 7

РЕДОВЕ. ФУРИЕ АНАЛИЗ. ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

Любомир Петров **Донка Беева**

СОФИЯ • 2009

Предлаганият модул 7 **Редове. Фурие анализ. Диференциално смятане на функция на повече променливи** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в шестнадесет раздела, като във всеки от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е седма част от **Сборник задачи по висша математика**, състоящ се от седем модула, разработени от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на
проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

От авторите

***

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

ЧИСЛЕНИ РЕДОВЕ: ДЕФИНИЦИЯ, СХОДИМОСТ, СВОЙСТВА

Дефиниция 1 *Символът*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1.1}$$

където $u_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *се нарича* ***числов ред.***

Пример. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (*хармоничен ред*).

Пример. $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ (*геометричен ред*).

Означаваме с

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{1.2}$$

редицата от *парциалните* (частичните) *суми* на реда (1.1) или $\left\{ s_n \right\}_{n=1}^{\infty}$, където $s_1 = u_1$, $s_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 2 *Редът (1.1) се нарича* ***сходящ,*** *ако редицата (1.2) е сходяща, т.е. (1.1) е сходящ, ако* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$. *Числото* S *се нарича* ***сума*** *на реда.*

Ако редицата (1.2) е разходяща, то (1.1) се нарича *разходящ* ред. Хармоничният ред е разходящ, а геометричният ред е сходящ само при $|q| < 1$ и неговата сума е $\frac{1}{1-q}$.

За сходящите редове са в сила някои правила от по-общ характер:

Теорема 1 ***Необходимо условие*** *редът (1.1) да е* ***сходящ*** *е* $|s_n| \leq M$, *т.е редицата (1.2) да е ограничена.*

Теорема 2 ***Необходимо условие*** *редът (1.1) да е* ***сходящ*** *е* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *т.е. общият член* u_n *на (1.1) да клони към нула.*

Следствие. Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то реда (1.1) е разходящ.

Теорема 3 *(**общ критерий на Коши**).* ***Необходимо и достатъчно условие*** *редът (1.1) да е* ***сходящ*** *е* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, *така че при*

$$n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ще казваме, че два числени реда имат един и същ характер, ако или и двата са сходящи, или и двата са разходящи. Ще изброим някои свойства на числените редове:

1^0. Редовете $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, където $c = \text{const} \neq 0$, имат еднакъв характер.

2^0. Ако редът (1.1′) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е получен от (1.1) като по произволен начин са добавени нули за негови членове, то (1.1) и (1.1′) имат еднакъв характер.

3^0. Ако от даден ред премахнем членове, които са нули, то новополученият ред има еднакъв характер с дадения.

4^0. Ако прибавим (премахнем) към един сходящ ред краен брой членове, новополученият ред е също сходящ.

5^0. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ е сходящ и образуваме нов ред, като групираме неговите членове по произволен начин (без разместване), новият ред е също сходящ и сумата му е S.

6^0. Ако редовете $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$ са сходящи и a, b са произволни числа, то редът $\sum_{n=1}^{\infty}(au_n + bv_n) = aS_1 + bS_2$ е също сходящ и неговата сума е $aS_1 + bS_2$.

Дефиниция 3 *Редът*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{n+m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} + \cdots$$

*се нарича n-**ти остатък** на реда (1.1).*

Съгласно свойство 4^0, ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, то n-тият остатък е също сходящ ред.

Нека $\sum_{m=1}^{\infty} u_{n+m} = R_n$, тогава от $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s_n + \sum_{m=1}^{\infty} u_{n+m} \Longrightarrow S = s_n + R_n$.

Теорема 4 ***Необходимо условие** редът (1.1) да е **сходящ** е:*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Пример 1.1 Проверете *сходящ* ли е редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2-1}$ и намерете сумата му.

Решение: Написваме n-тата парциална сума на реда

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2-1}$$

и търсим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = ?$

Предварително ще запишем n-тия член u_n на реда по друг начин (разлагаме u_n на сума от елементарни дроби):

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2},$$

където $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{2}$ или $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Тогава

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}\Big[\Big(1-\frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big) + \Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\Big) + \cdots \\ &\quad + \Big(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\Big) + \Big(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\Big) + \Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Пример 1.2 Намерете *сумата* на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Решение:

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{14}{1.2.3.4} + \frac{26}{2.3.4.5} + \cdots + \frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Аналогично както в пример 1.1 записваме u_n като сума от елементарни дроби (този метод се прилага често, когато общият член на реда е рационална функция на n).

$$\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} + \frac{D}{n+3},$$

където $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$, или

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} s_n =& \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots \\ &+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3} \\ &\Longrightarrow S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{4}{3} \\ &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Пример 1.3 Да се докаже *разходимостта* на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$.

Решение: Общият член на реда $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ клони към нула: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Но това е необходимо, а не достатъчно условие за сходимост. Затова трябва сходимостта (разходимостта) на реда да се изследва.

Да оценим n-тата парциална сума на реда:

$$s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

От $s_n\geq\sqrt{n}$ при $n\to\infty$ следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$, т.е. редът е разходящ съгласно теорема 1.

Пример 1.4 Изследвайте относно *сходимост* реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots$$

Решение: Общият член на реда може да се напише по следния начин:

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln(n)\,.$$

Тогава

$$\begin{aligned} s_n &=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n)-\ln(n-1)+\ln(n+1)-\ln(n) \\ &=\ln(n+1) \\ &\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\ln\lim_{n\to\infty}(n+1)=[\ln\infty]=\infty\,. \end{aligned}$$

Даденият ред е разходящ съгласно теорема 1.

ЗАДАЧИ

Установете *сходимоста* на следните редове и намерете *сумите* им:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ Отг. $S = \frac{1}{2}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n+3}{n^2(n+1)^2}$ Отг. $S = 3$

3. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots$ Отг. $S = \frac{1}{2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ Отг. $S = 1 - \sqrt{2}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ Отг. $S = 1$

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ Отг. $S = -\ln 2$

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ Отг. $S = -\ln 3$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1}$ Отг. $S = \frac{\pi}{2}$

   Упътване: $\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ и $\frac{1}{n^2-n+1} = \frac{n-(n-1)}{1+n(n-1)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$ Отг. $S = \frac{\pi}{4}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n^2+n}\cos\frac{2n+1}{n^2+n}\right)$ Отг. $S = \frac{1}{2}\sin 2$

    Упътване: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\sqrt{(n+1)^2-1} - \sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$ Отг. $S = \frac{\pi}{2}$

    Упътване:

    $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin\left(x_1\sqrt{1-{x_2}^2} + x_2\sqrt{1-{x_1}^2}\right)$ за ${x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1$.

ГЛАВА 2

ЧИСЛЕНИ РЕДОВЕ С НЕОТРИЦАТЕЛНИ ЧЛЕНОВЕ. ТЕОРЕМИ ЗА СРАВНЕНИЕ

Дефиниция 1 *Редът*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2.1}$$

където $u_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, се нарича ***числов ред с неотрицателни членове.***

Теорема 1 ***Необходимото и достатъчно*** *условие редът (2.1) да е* ***сходящ*** *е редицата от парциалните суми на (2.1) да е ограничена, т.е. $0 \leq s_n \leq M$.*

Теорема 2 *Редовете*

$$(2.1): \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n \geq 0, \ n \in \mathbb{N} \qquad \text{и} \qquad (2.1'): \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

където (2.1′) е получен от (2.1) чрез произволно разместване на членовете му, имат еднакъв характер.

Следствие. Ако редовете

$$(2.1): \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n \geq 0, n \in \mathbb{N} \qquad \text{и} \qquad (2.1'): \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

са сходящи, те имат равни суми.

Теорема 3 *(**за сравнение**). Ако са дадени редовете*

$$(2.1): \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n \geq 0, n \in \mathbb{N} \qquad \text{и} \qquad (2.1''): \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \ v_n \geq 0, \ n \in \mathbb{N}$$

и при $n > n_0$ е изпълнено $0 \leq u_n \leq v_n$, то:

*а) ако $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ (**минорантен** ред на $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$);*

*б) ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е разходящ (**мажорантен** ред на $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$).*

По-удобни за приложения са следните следствия:

Следствие 1. Ако съществува крайната граница $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\neq 0,\ v_n\neq 0,$ то редовете (2.1) и (2.1″) имат еднакъв характер.

Следствие 2. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0,\ v_n\neq 0$ тогава:

а) ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ е сходящ $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ е сходящ;

б) ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ е разходящ $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ е разходящ.

Следствие 3. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\infty,\ v_n\neq 0$, тогава:

а) ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ е сходящ $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ е сходящ;

б) ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ е разходящ $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ е разходящ.

Пример 2.1 Изследвайте относно *сходимост* редовете:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};\qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Решение:

а) От $u_n=\dfrac{1}{n^2}\leq\dfrac{1}{n^2-n}=\dfrac{1}{(n-1)n}=v_n,\ u_n\geq 0,\ v_n\geq 0$ и, че $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)n}$ е сходящ (вж. пример 1.1.), според теорема 3 следва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ е сходящ ред.

б) От $u_n=\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}=v_n,\ u_n\geq 0,\ v_n\geq 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - разходящ (хармоничния ред), според теорема 3 следва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ е разходящ ред.

в) Нека $v_n=\dfrac{1}{n}$ (общ член на хармоничния ред, който е разходящ). Тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\pi\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=2\pi\neq 0$. Следователно двата реда имат един и същ характер, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ е също разходящ (по критерия за сравнение).

Пример 2.2 Докажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ е *разходящ*.

Решение: Наистина като помощен ред разглеждаме хармоничния ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, който е разходящ. Тогава от

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0, \quad v_n = \frac{1}{n} \neq 0$$

според следствие 1 следва, че двата реда имат еднакъв характер, т.е. редът $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ е също разходящ.

Пример 2.3 Докажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$, $0 < q < 1$ е *сходящ*.

Решение: Наистина като помощен ред разглеждаме $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, който е сходящ (вж. пример 2.1. а). Тогава от

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^3 q^{n-1} = 0, \qquad v_n = \frac{1}{n^2} \neq 0,$$

според следствие 2 следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ е сходящ ред.

ЗАДАЧИ

Като се използуват *теоремите за сравнение*, да се изследват относно *сходимост* редовете.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$ Отг. Сходящ.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$ Отг. Разходящ.
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ Отг. Разходящ.
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\ln(n)}$ Отг. Разходящ.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^4+2n^2}{n^4-1}$ Отг. Сходящ.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+3}$ Отг. Сходящ.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n-n^2}$ Отг. Сходящ.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n . \sin \dfrac{\pi}{4^n}$ Отг. Сходящ.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$ Отг. Разходящ.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ Отг. Разходящ.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ Отг. Сходящ.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\sqrt{n}+1}{(n+1)^2\sqrt{n+1}}$ Отг. Сходящ.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ Отг. Сходящ.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$ Отг. Сходящ.

ГЛАВА 3

ДОСТАТЪЧНИ УСЛОВИЯ (КРИТЕРИИ) ЗА СХОДИМОСТ И РАЗХОДИМОСТ НА РЕДОВЕ С ПОЛОЖИТЕЛНИ ЧЛЕНОВЕ

А. Критерий на Коши

Даден е редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ и образуваме $\sqrt[n]{u_n}$:

а) ако $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ;

б) ако $\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

Допълнение на критерия (практическо правило): Ако съществува $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ редът е сходящ, при $l > 1$ редът е разходящ, а при $l = 1$ редът е неопределен (възможен е и случаят $l = +\infty$).

Б. Критерий на Даламбер

Даден е редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ и образуваме отношението $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

а) ако $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ;

б) ако $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \sum\limits_{n+1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

Допълнение на критерия (практическо правило): Ако съществува $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ редът е сходящ, при $l > 1$ редът е разходящ, а при $l = 1$ редът е неопределен (съществуват сходящи и разходящи редове).

В. Критерий на Раабе-Дюамел

Даден е редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, образуваме отношението $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ и ако съществува $\lim\limits_{n\to\infty} [n(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1)] = l$, то при $l > 1$ редът е сходящ, при $l < 1$ редът е разходящ, а при $l = 1$ редът е неопределен.

Критерият на Раабе-Дюамел е по-силен от този на Даламбер.

Г. Интегрален Критерий на Коши

Ако дадена функция $f(x), x \in [1,\infty)$ удовлетворява условията:

а) $f(x)$ е непрекъсната;

б) $f(x) \geq 0$ - графиката е над оста Ox;

в) $f(x)$ е нерастяща (монотонно намаляваща), редът (1): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственият интеграл (2): $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ имат еднакъв характер относно сходимост.

Пример 3.1 Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ е *сходящ*, защото

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1.$$

Пример 3.2 Изследвайте относно *сходимост* реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n$, $\alpha > 0$, $a \geq 0$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha a^n} = a\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\Big)^\alpha = a\Big(\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\Big)^\alpha$

$$= a\Big(\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}}\Big)^\alpha = a(e^0)^\alpha = a.$$

Следователно при $a < 1$ редът е сходящ, при $a > 1$ редът е разходящ, а при $a = 1$ редът е неопределен.

Пример 3.3 Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ е *сходящ*, защото

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример 3.4 Изследвайте относно *сходимост* реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{(n+1)n!n^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e > 1.$$

Следователно редът е разходящ.

Пример 3.5 Изследвайте относно *сходимост* реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение: Прилагаме *критерия на Даламбер*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{2}{n})} = 1.$$

Следователно, критерият не дава резултат.

Прилагаме по-силния критерий на *Раабе-Дюамел.*

$$\lim_{n\to\infty} [n(\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)n} - 1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n+1} = 2 > 1.$$

Следователно редът е сходящ.

Пример 3.6 Изследвайте относно *сходимост* реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

Решение: Прилагаме *интегралния критерий.* В случая $f(x) = \frac{1}{x^s}$, $x \in [1, +\infty)$. Известно е, че $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ е сходящ при $s > 1$ и разходящ при $s \leq 1$.

Следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ е сходящ при $s > 1$ и разходящ при $s \leq 1$.

Пример 3.7 Докажете, че *обобщеният хармоничен ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \cdots$$

е *сходящ* за $\forall\alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$ (ред на Риман).

Доказателство: Този ред е частен случай на реда от 3.6, а именно при $s = 1 + \alpha$, $s > 1 \iff \alpha > 0$.

ЗАДАЧИ

При задачите от **Редове** се срещат следните означения:

- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ (n-факториел), $n \in \mathbb{N}$ - произведение от последователни *естествени* числа;

- $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!$, $n \in \mathbb{N}$ - произведение от последователни *нечетни* числа;
- $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = (2n)!!$, $n \in \mathbb{N}$ - произведение от последователни *четни* числа.

1. Да се изследва *сходимостта* на редовете с помощта на *критерия на Даламбер:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ Отг. Сходящ.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ Отг. Сходящ.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Отг. Сходящ.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n2^{\frac{n}{2}}}$ Отг. Разходящ.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ Отг. Сходящ.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ Отг. Разходящ.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$ Отг. Сходящ.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$ Отг. Сходящ.

2. Да се изследва *сходимостта* на редовете с помощта на *критерия на Коши:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$ Отг. Сходящ.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2n^2+1}{n^2+1})^{n^2}$ Отг. Разходящ.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^n(n+1)}$ Отг. Сходящ.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^2 3^n}$ Отг. Сходящ.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n^2+4n+5}$ Отг. Сходящ.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$ Отг. Сходящ.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{6n+1}{5n-3})^{\frac{n}{2}} (\frac{5}{6})^{\frac{2n}{3}}$ Отг. Сходящ.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{\sqrt{n^2+3n+1}}$ Отг. Не дава резултат.

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{[ln(n+1)]^{\frac{n}{2}}}$, $a > 0$ Отг. Сходящ.

й) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ Отг. Сходящ.

3. Определете *сходимостта* на редовете, като използвате *критерия на Раабе-Даамел*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ Отг. Разходящ.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 . \frac{1}{n}$ Отг. Сходящ.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!(n+1)}$ Отг. Разходящ.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$; $a > 0$ Отг. Сходящ при $a > 1$ и разходящ при $a \leq 1$.

4. С помощта на *интегралния критерий на Коши* изследвайте относно *сходимост* редовете:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln^2 n}$ Отг. Сходящ.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$ Отг. Сходящ.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ Отг. Разходящ.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n)}{n(ln^4 n+1)}$ Отг. Сходящ.

5. Изследвайте относно *сходимост* редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^4}$ Отг. Разходящ.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$ Отг. Разходящ.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln^2 n}$ Отг. Сходящ.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1+n}{n})^{\frac{n}{3}}$ Отг. Разходящ.

д) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$ Отг. Разходящ.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Отг. Сходящ.

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^3}$ Отг. Разходящ.

з) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} + \ln(n)}$ Отг. Разходящ.

и) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{1}{n})$ Отг. Сходящ.

й) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}}{n}$ Отг. Сходящ.

к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^n}$ Отг. Разходящ.

л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ Отг. Сходящ.

м) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7}$ Отг. Разходящ.

н) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n-2}$ Отг. Разходящ.

о) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$ Отг. Сходящ.

ГЛАВА 4

АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВЕ. КРИТЕРИЙ НА ЛАЙБНИЦ

Дефиниция 1 *Числен ред от вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots , \tag{4.1}$$

където $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *се нарича* ***алтернативен ред.***

Теорема 1 *(**Критерий на Лайбниц**). Редът (4.1) е **сходящ**, ако:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

б) $u_n \geq u_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$, *т.е. редицата, образувана от абсолютните стойности на членовете на (4.1), е монотонно намаляваща.*

Теорема 2 *(**за оценка на грешката на сходящ алтернативен ред**).*
Ако $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, *то* $|S - s_n| \leq u_{n+1}$, *където* s_n *е* n*-тата парциална сума на (4.1).*

Пример 4.1 Изследвайте относно *сходимост* реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

Решение:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;
б) $u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow u_n > u_{n+1}$.
Тогава редът е сходящ (според T1).

Пример 4.2 Изследвайте относно *сходимост* реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n}\right)}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Тогава редът е разходящ (съгласно следствието на T2 (1.1)).

ЗАДАЧИ

Да се изследват относно *сходимост* с помощта на *критерия на Лайбниц* редовете:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}$ Отг. Сходящ.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ Отг. Сходящ.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{1+(-5)^{2n}}$ Отг. Сходящ.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n-1}$ Отг. Разходящ.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n)}$ Отг. Сходящ.

ГЛАВА 5

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИ И ПОЛУСХОДЯЩИ РЕДОВЕ. УМНОЖЕНИЕ НА РЕДОВЕ

Разглеждаме редовете:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \tag{5.2}$$

Редът (5.1) има безброй членове (положителни, отрицателни, може да има и нули), а (5.2) е с неотрицателни членове и за него могат да се прилагат критериите от Гл. 3.

От сходимостта на (5.1) не следва сходимостта на (5.2).

Наистина

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{5.1$'$}$$

е *сходящ* (според критерия на Лайбниц).

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{5.2$'$}$$

е *разходящ* (хармоничният ред).

Дефиниция 1 *Редът (5.1) се нарича* ***абсолютно*** *(безусловно)* ***сходящ****, ако е сходящ редът (5.2).*

Теорема 1 *Ако редът (5.2) е* ***сходящ****, то (5.1) е* ***абсолютно*** *сходящ.*

Теорема 2 *(**комутативен закон за абсолютно сходящи редове**). Ако числовият ред (5.1) е абсолютно сходящ, то произволно разместване на членовете му не се отразява на сходимостта, нито на сумата му.*

Дефиниция 2 *Редът (5.1) се нарича* ***полусходящ*** *(условно сходящ), ако (5.1) е сходящ, но (5.2) е разходящ (такива са редовете (5.1$'$) и (5.2$'$).*

Теорема 3 *(**на Риман**). Ако редът (5.1) е полусходящ, то при каквото и да е отнапред избрано число A, възможно е така да разместим членовете му, че сумата на реда да бъде точно равна на A.*

Дефиниция 3 ***Произведение на редовете*** *(5.3) и (5.4) в смисъл на Коши, наричаме реда (5.5):*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} w_n &= u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \cdots \\ &+ (u_0v_n + u_1v_{n-1} + u_2v_{n-2} + \cdots + u_nv_0) + \cdots \\ &= w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots \end{aligned}\tag{5.5}$$

Теорема 4 *Ако редовете (5.3) и (5.4) са сходящи, като поне един от тях е абсолютно сходящ, то редът (5.5) е сходящ (може би не абсолютно сходящ) и сумата му е равна на произведението от сумите на (5.3) и (5.4).*

Пример 5.1 Да се изследва относно *сходимост* редът: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$.

Решение: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(2n)!}$. Разглеждаме реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ и изследваме сходимостта му по *критерия на Даламбер:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)(2n)!}{(2n)!(2n+1)2(n+1)n^n} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{e}{\infty.2}\right] = 0 < 1.\end{aligned}$$

Следователно, редът образуван от модулите на членовете на изходния ред е сходящ. От това според Т1 следва, че даденият ред е абсолютно сходящ.

Пример 5.2 Да се изследва относно *сходимост* редът: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$.

Решение: Тъй като $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ не е изпълнено необходимото условие за сходимост на числов ред. Следователно редът е разходящ.

Пример 5.3 Да се изследва относно *сходимост* редът: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение: Редът, съставен от модулите на членовете на дадения ред, е $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ и той е разходящ (обобщен хармоничен ред със степенен показател < 1). Даденият ред не е алтернативен. Прилагаме с-во 5^0 от Гл. 12 и от дадения ред образуваме реда:

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)+\cdots$$

Изследваме реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$, където $u_n=\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=0$;

б) $$u_n-u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+2}}+\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$
$$=\frac{2n+2-2n}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+2}(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})}+\frac{2n+3-2n-1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+2}(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})}+\frac{2}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}>0$$
$$\Longrightarrow u_n>u_{n+1}.$$

Този ред е сходящ по *критерия на Лайбниц*, следователно изходният ред е условно сходящ (според дефиниция 2).

Пример 5.4 Намерете *произведението* на редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}.$$

Решение: По *критерия на Даламбер* установяваме, че двата реда са абсолютно сходящи:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n)(2n+1)}=\frac{1}{4} \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)!}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)(2n)}=\frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}=\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots\Big)\cdot\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots\Big)$$

$$=1+\Big(-1\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}1\Big)+\Big(1\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}1\Big)+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\Big[\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{3!(2n-4)!}+\frac{1}{5!(2n-6)!}+\cdots+\frac{1}{(2n-3)!2!}+\frac{1}{(2n-1)!}\Big]+\cdots$$

$$=1-\frac{4}{3!}+\frac{16}{5!}-\frac{64}{7!}+\frac{256}{9!}-\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-2}}{(2n-1)!}.$$

Полученият ред е *абсолютно* сходящ.

ЗАДАЧИ

1. Да се установи *сходимостта* на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ Отг. Абсолютно сходящ

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ Отг. Условно сходящ

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n.7^n}$ Отг. Абсолютно сходящ

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$ Отг. Абсолютно сходящ

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-2n}{3n+5})^n$ Отг. Абсолютно сходящ

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{10^n}{n}$ Отг. Условно сходящ

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)}{n(n+2)}$ Отг. Условно сходящ

з) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-3)}{n^2-1}$ Отг. Условно сходящ

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{n+1}}$ Отг. Абсолютно сходящ

й) $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{-1}{n}\Big)^n$ Отг. Абсолютно сходящ к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ Отг. Абсолютно сходящ

л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$ Отг. Абсолютно сходящ

м) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \mathrm{tg}\, \frac{1}{4n}$ Отг. Условно сходящ

н) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ Отг. Абсолютно сходящ

о) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$ Отг. Абсолютно сходящ

2. Да се докаже, че разликата на редовете $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ е *сходящ* ред.

3. Да се докаже *сходимостта* на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2+n^4 2^{-n}}{2n}\right]^2$ чрез разлагане на сума от редове и изследване на всеки от получените редове.

4. Намерете *сумата на редовете*:

$\sum_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{5^n} - \frac{(-1)^n 5}{2^{n+1}}]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-5)^{n+1}}{10^n}$ Отг. $\frac{11}{8}$

5. Намерете *първите пет члена от произведението* на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Отг. $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^2 2!} + \frac{16}{2^3 3!} + \frac{72}{2^2 4!} + \frac{376}{2^5 5!} + \cdots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Отг. $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{31}{72} + \frac{187}{600} + \cdots$

6. Намерете *произведението* на редовете:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$ Отг. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-2}}{(2n-1)!}$

7. Да се *пресметне* $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^2$ и да се изследва *сходимостта* на полученият ред

Отг. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k}}\right]$; разходящ.

ГЛАВА 6

ФУНКЦИОННИ РЕДОВЕ. СХОДИМОСТ И РАВНОМЕРНА СХОДИМОСТ. СВОЙСТВА

Дефиниция 1 *Редът*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots , \tag{6.1}$$

членовете на който са функции на една независима променлива $x \in (a, b)$, се нарича ***функционен ред****.*

Дефиниция 2 *Сумата*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

се нарича n-та ***парциална*** *(частична)* ***сума****, а редът*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots ,$$

се нарича n-ти ***остатък*** *на реда (6.1).*

Дефиниция 3 *Редът (6.1) е* ***сходящ*** *в (a, b), ако редицата от неговите парциални суми*

$$s_1(x), s_2(x), \ldots , s_n(x), \ldots \tag{6.2}$$

е сходяща в (a, b).

Теорема 1 ***Необходимо условие*** *редът (6.1) да е* ***сходящ*** *$\forall x \in (a, b)$ – фиксирано е $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$.*

Дефиниция 4 *Множеството D от стойности на $x \in (a, b)$, при които редът (6.1) е сходящ, се нарича* ***област на сходимост на (6.1)****.*

Дефиниция 5 *Сума на реда (6.1) се нарича функцията $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, дефинирана $\forall x \in D$.*

За сходящите функционни редове имаме $S(x) = s_n(x) + R_n(x)$, при което $R_n(x) \to 0$, при $n \to \infty$.

Дефиниция 6 *Казваме, че редът (6.1) е* ***сходящ****, ако* $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x)$*, така че при* $n > N(\varepsilon, x) \to |s_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Дефиниция 7 *Редът (6.1) се нарича* ***абсолютно сходящ****, ако е сходящ редът*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

За да определим *областта на сходимост* на (6.1) използваме *допълненията на критериите на Коши или Даламбер*. Чрез тях се изследва дали (6.1) е абсолютно сходящ.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = l(x)$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = l(x)$, то (6.1) е
— *абсолютно сходящ* $\forall x$, удовлетворяващо $l(x) < 1$;
— *разходящ* $\forall x$, удовлетворяващо $l(x) > 1$.

Дефиниция 8 *Редът (6.1) се нарича* ***равномерно сходящ*** *в областта* D *със сума* $S(x)$*, ако* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$*, така че при* $n > N(\varepsilon) \to |s_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in D$.

Теорема 2 ***(критерий за равномерна сходимост на функционен ред)****. Необходимо условие редът (6.1) да е* ***равномерно сходящ*** *в* (a, b) *е* $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$*, така че при* $n > N(\varepsilon) \to |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \; \forall x \in (a, b)$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$.

Прилагането на Т2 често е много трудоемко. Затова най-често се прилага *критерият на Ваерщрас*.

Теорема 3 ***(критерий на Ваерщрас)****. Ако численият ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \; a_n \in \mathbb{R}$$

е сходящ и ако $|u_n(x)| \leq a_n$*, при* $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (a, b)$*, то функционният ред (6.1)* ***е равномерно и абсолютно сходящ*** *в* (a, b).

Пример. Нека да разгледаме фунционния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$. От

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_n > 0$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ - сходящ, според Т3 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ е равномерно сходящ.

Теорема 4 *Ако функционните редове*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \Sigma(x)$$

са равномерно сходящи $\forall x \in (a, b)$, *то редът*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha u_n(x) \pm \beta v_n(x)] = \alpha S(x) \pm \beta \Sigma(x)$$

е равномерно сходящ.

Следствие 1. Ако $\beta = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n(x) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \alpha S(x).$$

Следствие 2. Ако $\alpha = \beta = 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) \pm v_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S(x) \pm \Sigma(x).$$

Ще изброим някои *свойства* на равномерно сходящите фунционни редове:

1^0. (*Достатъчно условие за непрекъснатост* на сумата на функционен ред). Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ е равномерно сходящ в (a, b) и $u_n(x) \in C[a, b]$, то $S(x) \in C[a, b]$.

2^0. (*Досатъчно условие за почленно интегриране* на функционен ред). Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ е равномерно сходящ в $[a, b]$ и $u_n(x) \in C[a, b]$, то редът може да се интегрира $\forall [x_0, x] \subset [a, b]$; в сила е

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$$

и редът е равномерно сходящ.

3^0. (*Достатъчно условие за почленно диференциране* на функционен ред). Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ е сходящ в $[a, b]$, $u_n(x) \in C^1[a, b]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ е равномерно сходящ в $[a, b]$, то а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в $[a,b]$;

б) $S(x) \in C^1[a,b]$;

в) $S'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Пример 6.1 Намерете *областта D на сходимост* на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |x|e^0 = |x|.$$

При $|x| < 1$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x| > 1$ - разходящ. Тогава $D : x \in (-1,1)$. За краищата на този интервал са необходими допълнителни изследвания:

а) при $x = 1$ численият ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ (хармоничният ред);

б) при $x = -1$ численият ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ е условно сходящ.

И така, областта на сходимост е $D : x \in [-1,1)$.

Пример 6.2 Намерете *областта D на сходимост* на реда $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2-x^2)^{n+1}}{(2-x^2)^n}\right| = |2-x^2|.$$

От условието за сходимост

$|2-x^2| < 1 \Rightarrow -1 < 2-x^2 < 1 \Rightarrow -3 < -x^2 < -1 \Rightarrow 1 < x^2 < 3 \Rightarrow 1 < |x| < \sqrt{3}.$

При $x = \pm\sqrt{3}$ получаваме разходящ числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, а при $x = \pm 1$ - разходящ числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$.

Следователно областта на сходимост на реда е $D : x \in (-\sqrt{3},-1) \cup (1,\sqrt{3})$.

Пример 6.3 Намерете *сумата* $S(x)$ на реда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, $0 \le x \le 1$.

Решение: Очевидно при $x = 0$ и $x = 1$ имаме $S(x) = 0$. Нека $x \in (0,1)$. Тогава $S(x)$ е сума на геометричен ред с $q = 1 - x$, т.е.

$$S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = x \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{x}{x} = 1.$$

Следва, че

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, x = 1; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

В общия случай сумата на функционен ред не наследява свойствата на членовете му. Когато $S(x)$ е непрекъсната, интегруема или диференцуема функция, отговор на този въпрос дава понятието *равномерна непрекъснатост* на функционен ред.

Пример 6.4 Да се изследва редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ за *равномерна сходимост* в интервала $(0,1)$.

Решение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$ Сумата на реда е $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, а n-тият остатък на реда е

$$|R_n(x)| = |S(x) - s_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x}.$$

Нека $\varepsilon > 0$. Търсим номер N такъв, че $\forall n > N$ да е в сила неравенството $|R_n| < \varepsilon$ или $\dfrac{x^n}{1-x} < \varepsilon \Rightarrow x^n < \varepsilon(1-x)$, понеже $x \in (0,1)$ и тогава $1 - x > 0$. След логаритмуване получаваме $n \ln(x) < \ln(1-x)\varepsilon$ и при деление на $\ln(x) < 0$, $x \in (0,1)$ намираме $n > \dfrac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln(x)}$. Следователно $N = \left[\dfrac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x} \right]$.

Получената стойност е най-малкото от всички положителни числа N такива, че при $n > N$ е в сила неравенството $\dfrac{x^n}{1-x} < \varepsilon$.

Да разгледаме поведението на функцията $N(x)$ в интервала $(0,1)$. В този интервал тя е неограничена (при $x \to 1 \Rightarrow \ln(x) \to 0 \Rightarrow N \to \infty$). Следователно, не съществува такова N, че за всяко $x \in (0,1)$, $R_n(x)$ да бъде по малък от ε. Следва, че редът е неравномерно сходящ в интервала $(0,1)$.

Пример 6.5 Изследвайте за *равномерна сходимост* редовете:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Решение: Редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ е алтернативен. За него $\forall x \neq 0$ имаме

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1+(n+1)x^2+\cdots+x^{2(n+1)}} < \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

При $x = 0 \Rightarrow R_n(0) = 0$. Следователно даденият ред е равномерно сходящ $\forall x$.

Редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ е геометрична прогресия с $q = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x \neq 0$.

$$R_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \ldots = \frac{x^2/(1+x^2)^{n+1}}{1-1/(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

при $x \to 0$, $R_n(x) \to 1$ $\forall n \Rightarrow$ остатъкът не може да бъде по-малък от произволно малко $\varepsilon > 0$ за всички x едновременно. Следователно, този ред е неравномерно сходящ на цялата числова ос.

Като се използва, че сумата $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = |\text{sign}(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, е прекъсната функция, следва (от свойство 1^0), че редът не е абсолютно сходящ.

ЗАДАЧИ

1. Да се намери *областта на сходимост* на редовете:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$ Отг. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; усл. сх; $x \in (1; +\infty)$; абсол. сх.

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(1+x^2)$ Отг. абсол. сх. за $-\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^x$ Отг. абсол. сх. за $x < -1$

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^n}$ Отг. абсол. сх. за $-4 < x < 0$; усл. сх. за $x = -4$

е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{3^n}$ Отг. абсол. сх. за $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ Отг. абсол. сх. за $x \in (\frac{1}{e}, e)$

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ Отг. абсол. сх $\forall x$

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \mathrm{tg}\, \frac{x}{2n}$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-2; 2)$

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-1; \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 2^n (x+2)^n}$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$;

усл. сх. за $x = -\frac{5}{2}$ и $x = \frac{3}{2}$.

2. Да се намери *сумата на редовете* и да се определи *интервалът на сходимост*:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(2x-1)}$ Отг. $\forall x \in (\frac{1}{2}; \frac{1+e}{e}) \cup (\frac{e+1}{2}; +\infty)$;

$$S(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\ln(2x-1)-1}$$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ Отг. $x \neq 0; -1; -2; \ldots\ S(x) = \frac{1}{x}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+x^2)+1}{(n+x^2)^2(n+1+x^2)}$ Отг. $S(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}\ \forall x$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \cos\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{x}\right)$

Отг. $S(x) = \sin\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}),\ x \neq 0$.

3. Да се докаже *равномерната сходимост* на редовете:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in [-\frac{1}{2}; 0]$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}, \quad x \in [0; 1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1}, \quad x \in (-1; 1)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$.

ГЛАВА 7

СТЕПЕННИ РЕДОВЕ. ТЕОРЕМА НА АБЕЛ

Дефиниция 1 *Функционен ред от вида:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0)^2 + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \cdots \quad (7.1')$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (7.1)$$

членовете на който са степенни функции на x, се нарича ***степенен ред.***

Редът (7.1′) се свежда до (7.1) като положим $x - x_0 = X$. Понятието степенен ред е обобщение на полином (когато броят на събираемите е краен брой) и частен случай на функционен ред.

Геометричният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ е степенен ред, който е сходящ само при $-1 < x < 1$, а сумата му е $\frac{1}{1-x}$.

Дефиниция 2 *Редът (7.1)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *се нарича* ***абсолютно сходящ****, ако е сходящ редът* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$

Теорема 1 ***(Теорема на Абел).*** *Ако редът (7.1) е* ***сходящ*** *в точката $x = x_0 \neq 0$, то (7.1) е* ***абсолютно сходящ*** *$\forall x$, за които $|x| < |x_0|$.*

Следствие 1. Ако редът (7.1) е *разходящ* в точката $x = x_1 \neq 0$, то (7.1) е *разходящ* $\forall x$, за които $|x| > |x_1|$.

Дефиниция 3 *Най-големият интервал, в който редът (7.1) е сходящ, се нарича негов* ***интервал на сходимост****, а половината от дължината на този интервал се нарича* ***радиус на сходимост*** *на (7.1).*

Ако числото $R > 0$ е такова, че (7.1) е *сходящ* при $|x| < R$, т.е. в интервала $(-R, R)$ и *разходящ* при $|x| > R$, то интервалът на сходимост е $(-R, R)$, а радиусът на сходимост е R.

Ако (7.1) е сходящ *само* в точката $x = 0$, то $R = 0$ (интервалът на сходимост се изражда в точка), а ако (7.1) е сходящ за *всяка* точка x, то $R = \infty$ (интервалът на сходимост се изражда в цялата числова ос).

И така, за всеки степен ред (7.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ съществува интервал $(-R, R)$, вътре в интервала (7.1) е сходящ, вън от интервала е разходящ, а за краищата на интервала са необходими допълнителни разглеждания.

Теорема 2 *Всеки степенен ред (7.1) е* ***равномерно сходящ*** *в* $[-R_0, R_0]$ *за всяко* $R_0 \in (0, R)$.

Следствие 2. Всеки степенен ред (7.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може да се *интегрира* и *диферницира*, защото е равномерно сходящ.

Теорема 3 *Сумата* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *на (7.1) е непрекъсната функция във всяка вътрешна точка на неговия интервал на сходимост* $(-R, R)$.

Теорема 4 *Ако редът (7.1)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ *е сходящ в* $(-R, R)$, *той може почленно да се дефиренцира и интегрира произволен брой пъти, при което получените редове имат същия радиус* R *на сходимост.*

Пример 7.1 Намерете *радиуса на сходимост* на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+1)2^n} = 1 + \frac{x}{4.2} + \frac{x^2}{7.2^2} + \cdots$$

Решение: Според допълнението към критерия на Даламбер имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(3n+4)2^{n+1}} \, \frac{(3n+1)2^n}{x^n} = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n+4} = \frac{|x|}{2}.$$

Ако $\frac{|x|}{2} < 1$, редът е сходящ.

Ако $\frac{|x|}{2} > 1$, редът е разходящ.

Следователно $R = 2$.

Пример 7.2 Намерете *интервала* и *радиуса на сходимост* на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n} = 1 + \frac{x}{3.2} + \frac{x^2}{3^2.3} + \frac{x^3}{3^3.4} + \frac{x^4}{3^4.5} + \cdots$$

Решение: Според допълнението към критерия на Даламбер имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n 3^{n-1} n}{|x|^{n-1} 3^n (n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n(1+\frac{1}{n})}|x| = \frac{1}{3}|x|.$$

Ако $\frac{1}{3}|x| < 1$, редът е сходящ $\Rightarrow |x| < 3$ или $x \in (-3, 3)$, $R = 3$.

а) при $x = -3$ получаваме чилсов ред

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \qquad u_n = \frac{1}{n} > 0, \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

т.е редът е сходящ (не абсолютно);

б) при $x = 3$ получаваме хармоничния ред $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, който е разходящ.

И така, интервалът на сходимост е $[-3, 3)$ и $R = 3$;

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{3 - x}.$$

Пример 7.3 Намерете *интервала на сходимост, радиуса* и *сумата* на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{2^n} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^7}{4} + \frac{x^{11}}{8} + \cdots + \frac{x^{4n-1}}{2^n} + \cdots$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^4}{2}| = \frac{1}{2}|x^4| < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{2}.$$

За сега редът е сходящ в интервала $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$ и $R = \sqrt[4]{2}$.

а) при $x = \sqrt[4]{2}$ получаваме числовия ред $\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} + \ldots + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} + \cdots$ и понеже $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \neq 0 \Rightarrow$ редът е разходящ;

б) при $x = -\sqrt[4]{2}$ получаваме същия числов ред, умножен с (-1).

И така, интервалът на сходимост е $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$, а $R = \sqrt[4]{2}$.

Сумата $S(x)$ на реда съществува $\forall x \in (-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$. Тогава

$$S(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^7}{4} + \frac{x^{11}}{8} + \cdots + \frac{x^{4n-1}}{2^n} + \cdots$$
$$= \frac{x^3}{2}\left(1+\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{4}+\ldots\right) = \frac{x^3}{2}\left[1+\frac{x^4}{2}+\left(\frac{x^4}{2}\right)^2+\ldots\right] = \frac{x^3}{2}\frac{1}{(1-\frac{x^4}{2})} = \frac{x^3}{2-x^4}$$

(използваме сума на геометричен ред).

Пример 7.4 Намерете *интервала на сходимост, радиуса* и *сумата* на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = |x| < 1.$$

Разглежданият ред е сходящ в интервала (-1,1) и $R = 1$.

а) при $x = -1$ получаваме числовия ред $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^n n + \cdots$ и понеже $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \neq 0$, той е разходящ;

б) при $x = 1$ получаваме реда $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ и отново $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \neq 0$ и тогава редът е разходящ.

И така, интервалът на сходимост е (-1,1), а $R = 1$.

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$
$$\Rightarrow \int S(x)dx = \int 1dx + 2\int xdx + 3\int x^2dx + \cdots + n\int x^{n-1}dx + \cdots + c$$
$$= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots + c = x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) + c$$
$$= x\frac{1}{1-x} + c = \frac{x}{1-x} + c$$

Тогава от

$$d\left[\int S(x)dx\right] = d\left[\frac{x}{1-x} + c\right] \Rightarrow S(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Пример 7.5 Намерете *сумата* на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n4^{2n}}$.

Решение: Ще диференцираме, а след това ще интегрираме реда.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{2n4^{2n}} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n-1} = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\frac{x}{4}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{4}\frac{x}{4}\left[1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^4 + \cdots\right] = \frac{x}{16}\frac{1}{[1-(x/4)^2]} = \frac{x}{16-x^2}.$$

Тогава:

$$S(x) = \int \frac{xdx}{16-x^2} + c = -\frac{1}{2}\int \frac{d(16-x^2)}{16-x^2} + c = -\frac{1}{2}\ln|16-x^2| + c.$$

За да определим константата c, ще използваме условието $S(0) = 0$. Така от

$$0 = -\frac{1}{2}\ln 16 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln 4^2 = \ln 4.$$

Следоватевлно, $S(x) = \ln 4 - \ln\sqrt{16-x^2} = \ln\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете *интервала на сходимост* на степенните редове:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x^n}{-2n}$ Отг. $-2 < x < 2$

б) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ Отг. $x = 0$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Отг. $-\infty < x < +\infty$

г) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ Отг. $x = 0$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$ Отг. $-\infty < x < +\infty$

е) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$ Отг. $-1 \le x < 3$

ж) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n+1}{2n+1})^n x^n$ Отг. $-2 < x < 2$

з) $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$ Отг. $0 < x < 4$

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} \dfrac{n^2+3}{n^2+1}$ Отг. $-\dfrac{4}{\pi} < x < \dfrac{4}{\pi}$

й) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{n+4}{n-4}$ Отг. $0 \le x \le 2$

2. Намерете *сумата* на редовете:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ Отг. $S(x) = -\ln(1-x); -1 \le x < 1$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ Отг. $S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}; |x| < 1$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n$ Отг. $S(x) = \dfrac{1}{(2-x^2)^2}; -\sqrt{2} < x < 0 \cup 0 < x < \sqrt{2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$ Отг. $\ln 2$

Упътване: Намерете сумата на степенния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n2^n}; S = S(1)$.

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ Отг. $\dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}$ Отг. $S(x) = -\ln(1-2x); -\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{1}{2}$

ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1) x^n}{3^n}$ Отг. $S(x) = \dfrac{9}{(3+x)^2}; |x| < 3$

з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^3+1)^n$ Отг. $S(x) = \dfrac{1}{x^6}; -\sqrt[3]{2} < x < 0$

и) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}$ Отг. $S(x) = -\ln(2-x^3); 0 \le x \le \sqrt[3]{2}$

й) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ Отг. $S(x) = (1-x)\ln(1-x) + x; -1 \le x < 1$

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1}$ Отг. $S(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}; |x| < 1$

ГЛАВА 8

РАЗВИТИЕ НА ФУНКЦИИ В СТЕПЕННИ РЕДОВЕ. БИНОМЕН РЕД

Дефиниция 1 *Степенният ред*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots, \quad (8.1)$$

където $f(x)$ е дефинирана в някаква околност на точката x_0 и има в x_0 производни от произволен ред, се нарича ***ред на Тейлор*** *за функцията $f(x)$ в точка x_0.*

При $x_0 = 0$ получаваме *ред на Маклорен:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots, \quad x_0<\xi<x. \quad (8.2)$$

Редовете (8.1) и (8.2) се използват за получаване приближения на $f(x)$ в околност на точката x_0 и други приложения.

Дефиниция 2 *Ще казваме, че функцията $f(x)$ се развива в степенен ред в интервала $(-R,R)$, $R\neq 0$, ако редът (8.2) за $f(x)$ е сходящ в $(-R,R)$ и сумата му е точно $f(x)$, т.е.*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n; x\in(-R,R).$$

Теорема 1 *Ако*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\cdots; \quad x\in(-R,R),\ R\neq 0,$$

това развитие е единствено и е от вида (8.2).

Теорема 2 ***Необходимо и достатъчно условие*** *една функция $f(x)$ да се развива в степенен ред от вида (8.2) в $(-R,R)$, $R \neq 0$ е $f(x)$ да бъде безброй пъти диференцуема в $(-R,R)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in (-R,R)$, където $R_n(x)$ е остатъчният член във формулата на Тейлор (Маклорен).*

Теорема 3 ***Достатъчно условие*** *една функция $f(x)$ да се развива в степенен ред от вида (8.2) в $(-R,R)$, $R \neq 0$ е $f(x)$ да бъде безброй пъти диференцуема и да съществува константа M, така че*

$$|f^{(n)}(x)| \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in (-R,R).$$

Дефиниция 3 *Равенството*

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{m}{n-1}x^{n-1} + \cdots, \tag{8.3}$$

което е в сила за всяко $m \in \mathbb{R}$ и $x \in (-1,1)$, се нарича ***биномен ред.***

Ще намерим развитие на някои елементарни функции в степенни редове:

1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $x \in (-R,R)$, $f^{(n)}(0) = 1$. Тогава от

$$x \in (-R,R) \Longrightarrow e^x \le e^R \Longrightarrow |f^{(n)}(x)| = |e^x| \le |e^R| = e^R = M$$

и според Т3 $f(x) = e^x$ се развива в ред от вида (8.2), т.е.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{8.4}$$

и понеже R е произволно число следва, че (8.4) е сходящ $\forall x$.

2. Като заместим x с $(-x)$ в (8.4), получаваме реда

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{8.5}$$

който е сходящ $\forall x$.

3. Чрез почленно изваждане и събиране на (8.4) и (8.5) получаваме:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{8.6}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^2 n}{(2n)!} + \cdots \tag{8.7}$$

4. $f(x) = \sin x$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, $x \in (-R, R)$, $f^{(n)}(0) = 0$, при $n = 2k$ и $f^{(n)}(0) = \pm 1$ при $n = 2k + 1$. Тогава от $|f^{(n)}(x)| = |\sin(x + n\frac{\pi}{2})| \leq 1 = M$ следва, че $f(x)$ може да се развие в ред от вида (8.2), т.е.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots , \tag{8.8}$$

който е сходящ $\forall x$.

5. Аналогично $f(x) = \cos x$, $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $x \in (-R, R)$ имаме

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!} + \cdots , \tag{8.9}$$

който е сходящ $\forall x$.

6. От $f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ За да бъде сходящ полученият геометричен ред ($q = -x^2$), трябва

$$|-x^2| < 1 \Rightarrow |-1||x^2| < 1 \Rightarrow |x^2| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

След като интегрираме почленно, получаваме:

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = c + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}.$$

При $x = 0$ намираме $c = 0$. И така получаваме

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots , \tag{8.10}$$

който е сходящ за $-1 < x < 1$.

Редът (8.10) е сходящ и за краищата на $(-1, 1)$, т.е (8.10) е сходящ за $-1 \leq x \leq 1$.

7. От $f(x) = \ln(1 + x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ За сходимостта на този геометричен ред имаме

$$|-x| < 1 \Rightarrow |-1|\,|x| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

И тогава

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots . \tag{8.11}$$

Нека $x = 1$. Тогава редът $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \cdots$, е сходящ по критерия на Лайбниц.

Нека $x = -1$. Получаваме хармоничен ред $-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$, който е разходящ.

И така редът (8.11) е сходящ за $-1 < x \leq 1$. С този ред се пресмятат логаритмите на числата от интервала $(0, 2]$, защото от $-1 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < x + 1 \leq 2$.

8. Като заместим x с $(-x)$ в (8.11), получаваме

$$\ln(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots, \quad x \in [-1, 1). \tag{8.12}$$

9. Развийте функцията $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, в степенен ред.

Решение: Диференцираме $f(x)$ и полагаме: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 + u)^m$, където $u = -x^2$, $m = -\frac{1}{2}$, т.е. получаваме биномен ред.

$$f'(x)=1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}(-x^2)^3+\cdots+\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n+\cdots$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1!} = -\frac{1}{2.1!} = -\frac{1!!}{2.1!}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1)}{2!} = \frac{1.3}{2^2 2!} = \frac{3!!}{2^2 2!}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1)(-\frac{1}{2} - 2)}{3!} = \frac{-1.3.5}{2^3.3!} = -\frac{5!!}{2^3.3!}$$

....

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Полученият ред е абсолютно сходящ при $|u| < 1$, т.е.

$$|-x^2| < 1, \Rightarrow |-1|.|x^2| < 1 \Rightarrow |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Тогава:

$$(\arcsin x)' = 1 + \frac{1!!}{2.1!}x^2 + \frac{3!!}{2^2 2!}x^4 + \frac{5!!}{2^3 3!}x^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n} + \cdots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{2.1!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{2^2.2!}\frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{2^3.3!}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots + c$$

При $x = 0 \Rightarrow \arcsin 0 = c \Rightarrow c = 0$. Този ред е сходящ $\forall x \in (-1, 1)$. И така:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1). \tag{8.13}$$

При *развитие на функция* в степенен ред се използват *следните методи*:

I. *Непосредствено разлагане в ред на Тейлор:*

а) съставя се редът на Тейлор, като се намират производните до n-ти ред в точката $x = x_0$ и се заместват във формулите;

б) определя се областта на сходимост на получения ред.

Пример 8.1 Развийте функцията $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в степенен ред.

Решение:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+u)^m,\ u = x^2,\ m = -\frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1!!}{2.1!}x^2 + \frac{3!!}{2^2 2!}x^4 - \frac{5!!}{2^3.3!}x^6 + \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n} + \cdots$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1!!}{2.1!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{2^2.2!}\frac{x^5}{5} - \frac{5!!}{2^3.3!}\frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Полученият ред е сходящ за $|u| < 1$, т.е. $\forall x \in (-1, 1)$.

II. *Използване на известни разложения:*

а) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $|x| < \infty$;

б) $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $|x| < \infty$;

в) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$; $|x| < \infty$;

г) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; $|x| < 1$;

д) $(1+x)^m = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$

при $m \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1$,

при $-1 < m < 0 \Rightarrow -1 < x \leq 1$,

при $m \leq -1 \Rightarrow |x| < 1$, ($m \in \mathbb{R}$, биномен ред);

е) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$; $-1 < x \leq 1$;

ж) $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $-1 \leq x < 1$;

з) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$; $|x| \leq 1$.

Пример 8.2 Развийте функцията $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ в степенен ред.

Решение: Разлагаме $f(x)$ в сума от елементарни дроби или:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$
$$= \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-q_1} - \frac{1}{3}.\frac{1}{1-q_2}.$$

Всяка от двете дроби е сума на геометричен ред, при това трябва:

$$|q_1| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2,$$
$$|q_2| = \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3.$$

Тогава

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$
$$- \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right].$$

Полученият ред е абсолютно сходящ $\forall x \in (-2, 2)$, който интервал е сечение на интервалите на сходимост за двата геометрични реда.

И така, $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2}^{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3}^{n-1}, \qquad x \in (-2, 2).$

Пример 8.3 Да се разложи в ред на Маклорен $f(x) = \cos x^2$.

Решение: Полагаме

$$x^2 = y \Rightarrow \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!};\ |y| < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!};\ |x| < \infty.$$

Пример 8.4 Да се разложи $f(x) = \ln|\cos\frac{x}{2}|$ по степените на $\cos x$:

Решение:

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\ln\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Полагаме: $\cos x = y \Rightarrow \ln(1+y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n};\ -1 < y \le 1$

Следователно

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos^n x}{n}; \quad -1 < \cos x \le 1;\ x \ne \pi(2k-1).$$

III. *Сумиране и изваждане на таблични редове и умножение на табличен ред с число*

Пример 8.5 Да се разложи в ред на Маклорен $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Решение:

$$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n+2};\ |x| \leq 1.$$

IV. *Диференциране и интегриране на редове*

Пример 8.6 Да се разложи в ред на Маклорен $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Решение: От $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ намираме $f'(x) = \arcsin x$ и тогава

$$f'(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}; \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow f(x) = c + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!x^{2n+2}}{(2n)!!(2n+2)(2n+1)} = c + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!x^{2n+2}}{(2n+2)!!(2n+1)}.$$

От $c = f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)} x^{2n+2}$.

V. *Умножение на редове*

Пример 8.7 Да се развие в ред на Маклорен $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Решение:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$= \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots\right)$$

$$\begin{aligned}
= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots \\
-x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{5} + \cdots \\
+x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} + \cdots \\
-x^4 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{3} + \cdots \\
+x^5 - \frac{x^6}{2} + \cdots \\
-x^6 + \cdots
\end{aligned}$$

$$= 1.x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)x^n; \quad |x| < 1.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се разложат в *ред на Маклорен* функциите:

а) $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$ Отг. $f(x) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^{n-1}2^n)x^n;\ |x| < \dfrac{1}{2}$

б) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-x}{2+x}$ Отг. $f(x) = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)4^n};\ |x| < 1$

в) $f(x) = \cos^2 x$ Отг. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!};\ |x| < \infty$

г) $f(x) = \ln(1+x)^x$ Отг. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n};\ |x| < 1$

д) $f(x) = (1+x)e^x$ Отг. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n;\ |x| < \infty$

е) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\binom{-\frac{1}{3}}{n}x^{2n}}{n!};\ |x| < 1$

ж) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};\ |x| < 1$

з) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ Отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!})x^n;\ |x| < 1$

и) $f(x) = \dfrac{1}{x}ln\dfrac{1}{1-x}$ Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n};\ |x| < 1; x \neq 0$

к) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{x-3}$ Отг. $-\dfrac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}.\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1};\ |x| \leq 3.$

2. Да се разложат в *ред на Тейлор* по степените на $(x - x_0)$ функциите:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x};\ x_0 = -3$ Отг. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{3^{n+1}};\ -6 < x < 0$

б) $f(x) = \ln(4+3x-x^2);\ x_0 = 2$

Отг. $\ln 6 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)\dfrac{(x-2)^n}{n};\ 0 \leq x < 2$

в) $f(x) = \sin^4 x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

Отг. $f(x) = \dfrac{3}{8} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{4n-3}}{(2n)!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n};\ |x| < \infty$

г) $f(x) = (x+1)\cos^2 x;\ x_0 = -1$

Отг.
$$\frac{1}{2}(x+1)+\cos 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}(x+1)^{2n+1}}{(2n)!}+\sin 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!};\ |x|<\infty$$

д) $f(x) = (2x+1)\sin x \sin(x+1);\ x_0 = -\dfrac{1}{2}$

Отг.
$$(x+\frac{1}{2})\cos 1-\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(x+\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n)!}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}(x+\frac{1}{2})^{2n+2}}{(2n+1)!};\ |x|<\infty$$

3. Да се *разложат по степените на* $\varphi(x)$ функциите:

а) $f(x) = e^{\sin x};\ \varphi(x) = \sin x$ Отг. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n!};\ |x|<\infty$

б) $f(x) = \ln x;\ \varphi(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ Отг. $\displaystyle -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n;\ x>0$

в) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}};\ \varphi(x) = \dfrac{x}{1+x}$ Отг. $\displaystyle \frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$

г) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+x-2};\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ Отг. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{x^{n+1}};\ |x|>2$

д) $f(x) = \dfrac{x\ln(1+\frac{\sin x}{x})}{x+\sin x};\ \varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ Отг. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n;\ x\neq 0.$

ГЛАВА 9

РЕД НА ФУРИЕ И УСЛОВИЯ ЗА НЕГОВАТА СХОДИМОСТ

A. Ред на Фурие за периодична функция с период $T = 2\pi$

Дефиниция 1 *Функцията $f(x)$ се нарича **периодична**, ако $\exists T > 0$ така,че $f(x+T) = f(x)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. **Най-малкото** положително число с горното свойство се нарича **период** на $f(x)$.*

Дефиниция 2 *Ако $f(x)$ е дефинирана за $x \in (a, a+T)$, $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, то **периодично продължение** на $f(x)$ наричаме функцията*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, a+T) \\ f(x-kT), & x \in (a+kT, a+(k+1)T), k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{9.1}$$

Очевидно $F(x+T) = F(x)$, $\forall z \in \mathbb{R}$, т.е. графиката на $f(x)$, $x \in (a, a+T)$ се премества успоредно по оста Ox на разстояние kT, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1 *Ако $f(x+T) = f(x)$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.*

Дефиниция 3 *Функционен ред*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{9.2}$$

*където $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ се нарича **тригонометричен ред**.*

Парциалните (частичните) суми $s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)$ на (9.2) са линейни комбинации от функциите $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$. Тези функции образуват **основна тригонометрична система** (ОТС).

Свойства на ОТС:

1) Интеграл от произведението на *две различни функции* на ОТС в интервала $(-\pi, \pi)$ е винаги *равен на нула.*
2) Интеграл от произведението на *две еднакви функции* на ОТС в интервала $(-\pi, \pi)$ е винаги *различен от нула.*

Като използваме горните две свойства, за коефициентите на реда (9.2) получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k \in \mathbb{N}. \tag{9.3}$$

Дефиниция 4 *Тригонометричен ред (9.2), чиито коефициенти се пресмятат по формули (9.3) се нарича ред на Фурие.*

От известната формула

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(-x) = -f(x) \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(-x) = f(x) \end{cases}$$

получаваме:

1) Ако $f(-x) = f(x) \bigwedge f(x + 2\pi) = f(x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kxdx, b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{9.4}$$

(развитие на $f(x)$ само по косинуси).

2) Ако $f(-x) = -f(x) \bigwedge f(x + 2\pi) = f(x)$, то

$$a_0 = a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kxdx, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{9.5}$$

(развитие на $f(x)$ само по синуси).

Б. Условия за сходимост на реда на Фурие

Дефиниция 5 *Казваме, че $f(x)$ удовлетворява **условията на Дирихле**, ако са изпълнени:*

1) $f(x + 2\pi) = f(x)$ е непрекъсната или има краен брой точки на прекъсване от първи род, т.е. ако x_0 е точка на прекъсване за $f(x)$, то $\exists f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

2) $f(x)$ има краен брой екстремуми или краен брой интервали на монотонност, т.е. ако разбием интервала $(-\pi, \pi)$ на подинтервали, то във всеки един от тях функцията $f(x)$ е монотонна.

Теорема 2 *(**на Дирихле**) Ако $f(x)$ е дефинирана за всяко x, $f(x + 2\pi) = f(x)$ и $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле, то $f(x)$ се развива в ред на Фурие, който е сходящ за всяко x и неговата сума*

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ е точка на непрекъснатост за } f(x) \\ \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}, & x_0 \text{ е точка на прекъсване за } f(x). \end{cases}$$

Пример 9.1. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0)\\ 3, & x\in(0,\pi), f(x+2\pi)=f(x).\end{cases}$$

Решение. В интервала $(-\pi,\pi)$ функцията $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле: 1) има една точка на прекъсване $x=0$ от първи род; 2) има краен брой интервали на монотонност. Освен това $f(x)$ е периодична с период 2π. Следователно $f(x)$ се развива в ред на Фурие за $\forall x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Графиката на $f(x)$ не е симетрична относно оста Oy или O и тогава $f(x)$ е нито четна, нито нечетна. Според (9.3) и (9.2) имаме:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}1dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}3dx=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}+3x\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(\pi+3\pi)=4;$$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos kxdx+\frac{3}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos kxdx\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{3}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\pi}\right)=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}\sin kxdx+3\int\limits_{0}^{\pi}\sin kxdx\right)\\&=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{3}{k}\cos kx\Big|_{0}^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}(1-(-1)^k)+\frac{3}{k}((-1)^k-1)\right]\\&=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k}\right)(1-(-1)^k)\\&=\frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)=\begin{cases}\text{при } k=2n & \Longrightarrow b_{2n}=0\\ \text{при } k=2n-1 & \Longrightarrow b_{2n-1}=\dfrac{4}{(2n-1)\pi}, n\in\mathbb{N}.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow f(x)=\frac{4}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}0\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x\\&=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=2+\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right), \forall x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Забележка. При решението се използва, че $\sin k\pi=0$, $\cos k\pi=(-1)^k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 9.2. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0)\\ 1, & x\in(0,\pi), f(x+2\pi)=f(x).\end{cases}$$

Решение. Функцията $f(x)$ е периодична с период 2π и в интервала $(-\pi, \pi)$ удовлетворява условията на Дирихле, при това $f(-x) = -f(x)$, т.е. *нечетна* (графиката е симетрична спрямо O). Тогава по (9.5) имаме:

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin kx dx = \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^\pi \sin kx d(kx) = -\frac{2}{k\pi}\cos kx\Big|_0^\pi$$

$$= -\frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Longrightarrow b_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n-1 & \Longrightarrow b_{2n-1} = \dfrac{4}{(2n-1)\pi}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\Big(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\Big).$$

Забележка. Функцията $f(x)$ е *нечетна* и в ред на Фурие се развива *само по синуси.*

Пример 9.3. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \frac{x}{\pi}), & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{\pi}), & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Решение. Зададената периодична функция с период 2π отговаря на условията на Дирихле. Тя е *нечетна* (графиката е симетрична спрямо т.О) и следователно коефициентите в реда на Фурие се изчисляват по формули (9.5).

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (1 - \frac{x}{\pi})\sin kx dx = \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^\pi (\frac{x}{\pi} - 1) d\cos kx$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[(\frac{x}{\pi} - 1)\cos kx\Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos kx dx\right] = \frac{1}{k\pi}\Big(0 + 1 - \frac{1}{k\pi}\sin kx\Big|_0^\pi\Big) = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{\pi}\Big(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\Big).$$

Пример 9.4. Намерете Фуриеровото развитие на функцията

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

С помощта на получения ред намерете сумите:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

Решение. Периодичната функция $f(x) = x^2$ с период 2π удовлетворява условията на Дирихле, при това $f(x) = f(-x)$, т.е. тя е *четна* (графиката е симетрична спрямо оста Oy). Тогава по формули (9.4) получаваме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi x^2 d\sin kx = \frac{2}{k\pi}\left(x^2\sin kx\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin kx dx\right)$$

$$= \frac{4}{k^2\pi}\int_0^\pi x d\cos kx = \frac{4}{k^2\pi}\left(x\cos kx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos kx dx\right) = \frac{4}{k^2\pi}\pi(-1)^k$$

$$= \frac{4(-1)^k}{k^2}, \qquad b_k = 0, k \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

1) От получения ред при $x = 0 \Longrightarrow \cos 0 = 1$ получаваме:

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{но } f(0) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}; \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2) При $x = \pi$, $\cos k\pi = (-1)^k$ и от получения ред получаваме:

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k, \quad \text{но } f(\pi) = \pi^2$$

$$\Longrightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2/3}{4} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Забележка. Периодична функция с период 2π притежава свойството: интеграл от периодична функция по произволна отсечка, дължината на която е 2π, има една и съща стойност (вж. Т1), т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Пример 9.5. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = x$, $x \in (0, 2\pi]$ и $f(x+2\pi) = f(x)$.

Решение. Правата $y = f(x) = x$ е ъглополовяща на първи и трети квадранти, като в $(0, 2\pi]$ е отсечка от правата. Тази отсечка не е симетрична нито спрямо Oy, нито спрямо

O и тогава $f(x)$, която е периодична с период 2π е *нито четна, нито нечетна*. Тогава по (9.3) и (9.2) имаме (вж. *забележката*):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} x d\sin kx = \frac{1}{k\pi}\Big(x\sin kx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx dkx\Big)$$
$$= \frac{1}{k\pi}\Big(0 + \frac{1}{k}\cos kx\Big|_0^{2\pi}\Big) = \frac{1}{k\pi}(1-1) = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx dx = -\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} x d\cos kx = -\frac{1}{k\pi}\Big(x\cos kx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx dkx\Big)$$
$$= -\frac{1}{k\pi}\Big(2\pi - 0 - \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{2\pi}\Big) = -\frac{2}{k}, k \in \mathbb{N}.$$
$$\Longrightarrow f(x) = \pi + \sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{2}{k})\sin kx = \pi - 2\Big(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\Big).$$

Пример 9.6. С помощта на реда на Фурие да се намери едно частно решение на уравнението: $y'' - 2y = f(x)$, където $f(x)$ е периодична функция с период 2π, зададена в интервала за $x \in (0; 2\pi)$ с равенството $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Решение. Развиваме в ред на Фурие *нечетната* функция $f(x)$.

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin kx dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)d\cos kx = \frac{1}{k\pi}\Big[(x-\pi)\cos kx\Big|_0^{\pi}$$
$$-\int_0^{\pi}\cos kx dx\Big] = \frac{1}{k\pi}\Big(\pi - \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{1}{k\pi}\pi = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Търсим решението на уравнението във вид на тригонометричен ред:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k \sin kx + b_k k \cos kx);$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k^2 \cos kx - b_k k^2 \sin kx).$$

Заместваме в уравнението $y'' - 2y = f(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k^2 \cos kx - b_k k^2 \sin kx) - 2\Big[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[-a_k(k^2+2)\cos kx - b_k(k^2+2)\sin kx\Big] - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} -a_0 = 0 \\ -a_k(k^2+2) = 0 \\ -b_k(k^2+2) = \dfrac{1}{k} \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_k = 0 \\ b_k = -\dfrac{1}{k(k^2+2)}, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow y = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k^2+2)}, x \neq 2n\pi.$$

ЗАДАЧИ

Да се развият в *ред на Фурие* функциите:

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -2, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $-\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

2) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0, \pi) \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $1 + \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

3) $f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi], f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} - 2\pi\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ (вж. пр. 9.4.)

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

С помощта на получения ред да се намери сумата на реда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

Отг. $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

5) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2; \pi/2] \\ 0, & x \in [\pi/2; \frac{3\pi}{2}] \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1}$

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(1+e^{-\pi}(-1)^{k+1})}{k^2+1}(\cos kx + k\sin kx)$

7) $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x \in (-\pi, \pi) \\ \mathrm{ch}\pi, & x = \pm\pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$

Отг. $\frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right].$

ГЛАВА 10

КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА РЕДА НА ФУРИЕ. РЕД НА ФУРИЕ ЗА ФУНКЦИЯ С ПРОИЗВОЛЕН ПЕРИОД

А. Комплексна форма на реда на Фурие.

Ако

$$f(x+2\pi)=f(x), \quad f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx(k=0,1,2,\dots)\,, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx(k\in\mathbb{N})$$

и заместим $\cos kx=\dfrac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx=\dfrac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$, получаваме

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}, \tag{10.1}$$

т.е. *ред на Фурие в комплексна форма*, при това:

1) Ако $k>0, \quad c_k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx$ (10.2)

2) Ако $k<0, \quad c_{-k}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx$ (10.3)

3) $f(x)\sim\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k(e^{ix})^k$ и като положим $z=e^{ix}$, т.е. $z\in(c):|z|=1$ получаваме, че редовете на Фурие са Лоранови редове върху единична окръжност.

Б. Ред на Фурие за периодична функция с произволен период $(2l\neq2\pi)$.

Теорема 1 *Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:*

а) $f(x)$ е дефинирана за $x\in(-l,l)$;

б) $f(x+2l)=f(x)$, $T=2l\neq2\pi$;

в) $f(x)$ е по части гладка и по части непрекъсната.

Тогава посредством субституцията $x=\dfrac{l}{\pi}\xi$ функцията $f(x)$ се представя с ред на Фурие по следния начин:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{10.4}$$

където

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx, a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10.5}$$

В зависимост от това дали $f(x)$ е четна или нечетна получаваме:

1) Ако $f(-x) = f(x) \wedge f(x+2l) = f(x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{10.6}$$

(развитие на $f(x)$ само по косинуси).

2) Ако $f(-x) = -f(x) \wedge f(x+2l) = f(x)$, то

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{10.7}$$

(развитие на $f(x)$ само по синуси).

Пример 10.1. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = |x|, x \in [-l, l]$, като $f(x+2l) = f(x)$. Като използвате полученото развитие намерете сумата на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решение. От $y = f(x) = |x| \Longrightarrow y = \pm x$, т.е. графиката на функцията се състои от ъглополовящите на първи и трети, втори и чевърти квадранти, а следователно в $[-l, l]$- две отсечки, симетрични относно Oy, т.е. $f(x)$ е *четна* *функция* ($b_k = 0$). Тогава по (10.6) имаме:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x dx = \frac{2}{l}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = l;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\frac{l}{k\pi}\int\limits_0^l x d\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(x\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l - \frac{l}{k\pi}\int\limits_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}d\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{2}{k\pi}\left(0 + \frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l\right)$$

$$= \frac{2l}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Longrightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n-1 \Longrightarrow a_{2n-1} = -\dfrac{4l}{(2n-1)^2\pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow |x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

При $x = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

Пример 10.2. Да се развие в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, \ x \in (0,2), \ b > 0 \\ 0, \ x \in (2,4). \end{cases}$$

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 4$, т.е. $l = 2$ е *нито четна, нито нечетна*. Тогава:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 bdx + \frac{1}{2}\int\limits_0^4 0dx = \frac{b}{2}x\bigg|_0^2 = b;$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{b}{2}\int\limits_0^2 \cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{b}{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2$$

$$= \frac{b}{k\pi}(\sin k\pi - \sin 0) = 0, k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{b}{2}\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}d\frac{k\pi x}{2}$$

$$= -\frac{b}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{b}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{b}{k\pi}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Longrightarrow b_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n-1 \Longrightarrow b_{2n-1} = \dfrac{2b}{(2n-1)\pi}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Пример 10.3. Функцията $f(x) = x$, $x \in (-1, 1)$ да се развие в *ред на Фурие*.

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 2$, т.е. $l = 1$ е нечетна ($a_0 = a_k = 0$). Тогава по формула (10.7) имаме:

$$b_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin\frac{k\pi x}{1}dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 xd\cos k\pi x$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(x\cos k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dk\pi x\right)$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(\cos k\pi - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right) = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x.$$

Пример 10.4. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x; & -1 \le x < 0 \\ -x; & 0 \le x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 2$ ($l = 1$) е *нито четна, нито нечетна*.

Прилагаме формули (10.5) за изчисляване на коефициентите:

$$a_0 = \frac{1}{1}\left[\int_{-1}^0 \frac{1}{4}xdx + \int_0^1 (-x)dx\right] = \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8};$$

$$a_k = \frac{1}{1}\left[\int_{-1}^0 \frac{1}{4}x\cos k\pi x - \int_0^1 x\cos k\pi x dx\right] = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}\int_{-1}^0 xd\sin k\pi x - \int_0^1 xd\sin k\pi x\right]$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}x\sin k\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\sin k\pi x dx - x\sin k\pi x\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1}\sin k\pi x dx\right]$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}\cos k\pi x\Big|_{-1}^{0} - \cos k\pi x\Big|_{0}^{1}\right] = \frac{1}{k^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}(1-(-1)^k) - ((-1)^k - 1)\right]$$

$$= \frac{5}{4k^2\pi^2}[1-(-1)^k] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Longrightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n-1 & \Longrightarrow a_{2n-1} = \dfrac{10}{4(2n-1)^2\pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{1}\left[\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} x\sin k\pi x dx - \int_{0}^{1} x\sin k\pi x dx\right] = -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} xd\cos k\pi x - \int_{0}^{1} xd\cos k\pi x\right]$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}\left(x\cos k\pi x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\cos k\pi x dx\right) - x\cos k\pi x\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1}\cos k\pi x dx\right]$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{4}(-1)^k - (-1)^k\right] = \frac{3(-1)^k}{4k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = -\frac{5}{16} + \frac{5}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{3}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n\pi x}{n}.$$

Пример 10.5. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} x+2; & -2 < x < 0 \\ x-2; & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$

Решение. Дадената периодична функция е *нечетна* с период $2l = 4 \Longrightarrow l = 2$. По формули (10.7) изчисляваме коефициентите:

$$a_0 = a_k = 0, \qquad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_{0}^{2}(x-2)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = -\frac{2}{k\pi}\int_{0}^{2}(x-2)d\cos\frac{k\pi x}{2}$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[(x-2)\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2}\cos\frac{k\pi x}{2}dx\right] = -\frac{2}{k\pi}(2-0) = \frac{-4}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

Пример 10.6. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = |\cos x|$.

Решение. Функцията $f(x) = |\cos x|$ е периодична функция с период $2l = \pi \Longrightarrow l = \pi/2$.

Развиваме периодична функция с произволен период $2l \neq 2\pi$.

Функцията е *четна* ($b_k = 0$) и коефициентите се изчисляват по формули (10.6):

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{4}{\pi}\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2kx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\cos(2kx - x) + \cos(2kx + x)]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2k-1}\int_0^{\pi/2}\cos(2k-1)xd(2k-1)x + \frac{1}{2k+1}\int_0^{\pi/2}\cos(2k+1)xd(2k+1)x\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}(-2k-1+2k-1) = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Забележка.

$$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = -\cos k\pi = (-1)^{k+1} = -(-1)^k,$$

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-k\pi)\right) = \cos(-k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k.$$

Пример 10.7. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2, \\ 3-x, & 2 \le x < 3 \end{cases} \quad f(x+3) = f(x).$$

Решение. Дадената функция е *четна* ($b_k = 0$). Изчисленията могат да се направят в симетричния интервал $[-3/2, 3/2]$ по формулите за четна периодична функция с период $2l = 3 \Longrightarrow l = 3/2$ по (10.6):

$$a_0 = \frac{2}{3/2}\Big[\int_0^1 x dx + \int_1^{3/2} 1 dx\Big] = \frac{4}{3}\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_1^{3/2}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{4}{3};$$

$$a_k = \frac{4}{3}\Big[\int_0^1 x\cos\frac{2k\pi x}{3}dx + \int_1^{3/2}\cos\frac{2k\pi x}{3}dx\Big] = \frac{4}{3}\frac{3}{2k\pi}\Big[\int_0^1 x d\sin\frac{2k\pi x}{3} + \sin\frac{2k\pi x}{3}\Big|_1^{\frac{3}{2}}\Big]$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Big[x\sin\frac{2k\pi x}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin\frac{2k\pi x}{3}dx - \sin\frac{2k\pi}{3}\Big]$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Big[\sin\frac{2k\pi}{3} + \frac{3}{2k\pi}\cos\frac{2k\pi x}{3}\Big|_0^1 - \sin\frac{2k\pi}{3}\Big]$$

$$= \frac{3}{k^2\pi^2}\Big[\cos\frac{2k\pi}{3} - 1\Big] = -\frac{6}{k^2\pi^2}\sin^2\frac{k\pi}{3}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k\pi/3)}{k^2}\cos\frac{2k\pi x}{3}.$$

Пример 10.8. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1, & -\pi < x \le 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Дадената функция е четна ($b_k = 0$). От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$. По формули 10.6) за коефициентите на Фурие имаме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{2}{\pi}x + 1\Big)dx = -\frac{\Big(-\frac{2}{\pi}x+1\Big)^2}{2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{2}{\pi}x+1\Big)\cos kx dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\Big(-\frac{2x}{\pi}+1\Big)d\sin kx$$

$$= \frac{2}{k\pi}\Big[\Big(-\frac{2}{\pi}x+1\Big)\sin kx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx dx\Big] = -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \dfrac{8}{(2n-1)^2\pi^2}, & \text{при } k = 2n-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Пример 10.9. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = e^x$, $x \in (0, 2\pi)$.

Решение. Функцията е нито четна, нито нечетна. От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$.

По формули (10.5) пресмятаме коефициентите на Фурие:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}e^x\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\,;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx = \frac{1}{k\pi}\Big(e^x \sin kx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx\Big)$$

$$= \frac{1}{k^2\pi}\Big(e^x \cos kx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx\Big) = \frac{1}{k^2\pi}(e^{2\pi}-1) - \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx\,,$$

$$\Longrightarrow a_k + \frac{1}{k^2}a_k = \frac{e^{2\pi}-1}{k^2\pi} \Longrightarrow a_k = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)}\,, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx = -a_k k \Longrightarrow b_k = \frac{-k(e^{2\pi}-1)}{\pi(k^2+1)}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx - k\sin kx}{k^2+1}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Пример 10.10. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l\,, \quad b > 0\,. \end{cases}$$

Решение. Функцията е нито четна, нито нечетна. Периодът на функцията е $2l$. По формули (10.5) за коефициентите на реда на Фурие получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l b dx = \frac{b}{l}x\Big|_0^l = b,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^l b\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{b}{l}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_0^l b\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{b}{l}\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l$$

$$= -\frac{b}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n, \\ \dfrac{2b}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[((2n-1)\pi x)/l]}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 10.11. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x) = |\cos x|$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Решение. Функцията $f(x) = |\cos x|$ е четна за $x \in (-\pi, \pi)$. От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$, а от $f(x) = |\cos x| \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases}$

По формули (10.6) за коефициентите на реда имаме $b_k = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx\Big] = \frac{2}{\pi}\Big(\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}(1+1) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos kx dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos x\cos kx dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\cos(k-1)x dx$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/2}\cos(k+1)x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos(k-1)x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos(k+1)x dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$- \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{-2\cos k\pi/2}{k-1} + \frac{2\cos k\pi/2}{k+1}\Big)$$

$$= \frac{-4\cos k\pi/2}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} \dfrac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n+1,\ k \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Коефициента a_1 изчисляваме отделно

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 x dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos 2x)dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - x\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = 0\,.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Пример 10.12. Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция с период π:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Решение. От $2l = \pi \Longrightarrow l = \pi/2$. По формула (10.2) имаме:

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-k\pi x i/l}dx \Longrightarrow c_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi}\cos x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi}d\sin x = \frac{1}{\pi}\left(e^{-2kxi}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x e^{-2kxi}(-2ki)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^{-k\pi i} - 2ki\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi}d\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[e^{-k\pi i} - 2ki\left(e^{-2kxi}\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos x e^{-2kxi}(-2ki)dx\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-k\pi i}}{\pi} + \frac{2ki}{\pi} + \frac{4k^2}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2kxi}\cos x dx$$

$$\Longrightarrow c_k - 4k^2 c_k = \frac{e^{-k\pi i} + 2ki}{\pi}$$

$$c_k = \frac{\cos k\pi - i\sin k\pi + 2ki}{\pi(1-4k^2)} = \frac{(-1)^k + 2ki}{\pi(1-4k^2)}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k + 2ki}{1-4k^2}e^{2kix}\,.$$

Пример 10.13. Да се напише комплексната форма на реда на Фурие за 2π-периодичната функция $f(x)$, зададена в $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \operatorname{ch}\pi, & x = \pm\pi, . \end{cases}$$

Решение. По формула (10.2) за коефициентите на Фурие получаваме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ik)}e^{(1-ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)} \\ &= \frac{e^{\pi}(\cos k\pi - i\sin k\pi) - e^{-\pi}(\cos k\pi + i\sin k\pi)}{2\pi(1-ik)} = \frac{(-1)^k e^{\pi} - (-1)^k e^{-\pi}}{2\pi(1-ik)} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)}\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}\pi}{\pi(1-ik)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-ik}e^{kxi}.$$

Пример 10.14. Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция $f(x) = e^{-x}$ с период $2l = 4$. Като се използва полученият резултат, да се напише тригонометричният ред на Фурие за функцията.

Решение. По формула (10.2) за коефициентите на Фурие имаме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-x}e^{-k\pi xi/2}dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-(2+k\pi i)x/2}dx \\ &= -\frac{1}{4}\frac{2}{2+k\pi i}e^{-(2+k\pi i)x/2}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2(2+k\pi i)}\left(e^{-2-k\pi i} - e^{2+k\pi i}\right) \\ &= \frac{e^2(\cos k\pi + i\sin k\pi) - e^{-2}(\cos k\pi - i\sin k\pi)}{2(2+k\pi i)} = \frac{(-1)^k(e^2 - e^{-2})}{2(2+k\pi i)}. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow c_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2}{2+k\pi i}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow f(x) = \operatorname{sh} 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2+k\pi i}e^{\frac{k\pi xi}{2}}.$$

Коефициентите на тригонометричния ред на Фурие могат да се изчислят от тези в комплексната форма на реда по два начина:

I начин. Чрез формулите $\dfrac{a_0}{2} = c_0$, $a_k = 2\mathrm{Re}(c_k)$, $b_k = -2\mathrm{Im}(c_k)$. При $k = 0$ за c_0 получаваме

$$c_0 = \frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} e^{-x}dx = -\frac{1}{4}e^{-x}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{4}(e^{-2} - e^{2}) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}.$$

От

$$c_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2}{2 + k\pi i} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2(2 - k\pi i)}{4 + k^2\pi^2} = \frac{2(-1)^k \operatorname{sh} 2}{4 + k^2\pi^2} - i\frac{(-1)^k k\pi \operatorname{sh}2}{4 + k^2\pi^2}.$$

$$\Longrightarrow a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = \frac{4(-1)^k \operatorname{sh} 2}{4 + k^2\pi^2}; \quad b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = \frac{(-1)^k 2k\pi \operatorname{sh} 2}{4 + k^2\pi^2}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 2\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(2\cos\dfrac{k\pi x}{2} + k\pi \sin\dfrac{k\pi x}{2}\right)}{4 + k^2\pi^2}.$$

II начин. От $f(x) = \operatorname{sh} 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^k e^{\frac{k\pi x}{2}i}}{2 + k\pi i} \Longrightarrow$ при $k = 0 \Longrightarrow c_0 = \frac{\operatorname{sh}2}{2}$.

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{e^{\frac{k\pi x}{2}i}}{2 + k\pi i} + \frac{e^{-\frac{k\pi x}{2}i}}{2 - k\pi i}\right) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}$$

$$+\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\left[(2 - k\pi i)\left(\cos\dfrac{k\pi x}{2} + i\sin\dfrac{k\pi x}{2}\right) + (2 + k\pi i)\left(\cos\dfrac{k\pi x}{2} - i\sin\dfrac{k\pi x}{2}\right)\right]}{4 + k^2\pi^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 + k^2\pi^2}\left(2\cos\frac{k\pi x}{2} + 2i\sin\frac{k\pi x}{2} - ik\pi\cos\frac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{k\pi x}{2} - 2i\sin\frac{k\pi x}{2} + ik\pi\cos\frac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 + k^2\pi^2}\left(4\cos\frac{k\pi x}{2} + 2k\pi\sin\frac{k\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 2\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(2\cos\dfrac{k\pi x}{2} + k\pi\sin\dfrac{k\pi x}{2}\right)}{4 + k^2\pi^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Развийте в ред на Фурие функцията:

1. $f(x) = |x|,\ x \in [-\pi, \pi],\ f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2. $f(x) = x^2,\ x \in [-1, 1],\ f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\cos k\pi x}{k^2}$.

3. $f(x) = |\sin 2x|$ Отг. $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 4nx}{1-4n^2}$.

4. $f(x) = x^2 - x,\ x \in (-1, 1),\ f(x+2) = f(x)$

   Отг. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{2\cos k\pi x}{k^2\pi} + \dfrac{\sin k\pi x}{k}\right)$.

5. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0, 2\pi),\ f(x+2\pi) = f(x)$ Отг. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}$.

6. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le l/2 \\ l - x, & l/2 < x < l \end{cases},\ f(x+l) = f(x)$

   Отг. $\dfrac{l}{4} - \dfrac{2l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{2(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$ Отг. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

8. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

   Отг. $\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

9. $f(x) = x\sin x,\ x \in [-\pi, \pi]$ Отг. $1 - \dfrac{1}{2}\cos x + 2\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2-1}\cos kx$.

ГЛАВА 11

РАЗВИТИЕ В РЕД НА ФУРИЕ НА ФУНКЦИЯ $f(x)$, ДЕФИНИРАНА В ИНТЕРВАЛА $(0,l), l>0$, САМО ПО СИНУСИ ИЛИ САМО ПО КОСИНУСИ

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал $(0,l)$, тя може да се додефинира в интервала $(-l,0)$ така, че да бъде четна или нечетна, т.е. да се развие *само по синуси или по косинуси*. В този случай казваме, че функцията е продължена нечетно или четно:

1) Ако $f(x)$, $x\in(0,l)$ трябва да се развие *само по синуси*, разглеждаме функция $F(x)\equiv f(x)$, $x\in(0,l)$ и $F(-x)=-f(x)$, $x\in(-l,0)$. Тогава

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\,,\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k\in\mathbb{N}\,. \tag{11.1}$$

2) Ако $f(x)$, $x\in(0,l)$ трябва да се развие *само по косинуси*, разглеждаме функция $F(x)\equiv f(x)$, $x\in(0,l)$ и $F(-x)=f(x)$, $x\in(-l,0)$. Тогава

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l},\ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k=1,2,\ldots \tag{11.2}$$

Пример 11.1. Развийте в *ред на Фурие* функцията $f(x)=2x$ в интервала $(0,1)$ а) *по синуси*, б) *по косинуси.*

Решение. а) *Развитие само по синуси*: графиката на $f(x)$ е *права*, която минава през точките $O(0,0)$ и $A(1,2)$, а в интервала $(0,1)$ — *отсечката OA*. Необходимо е да продължим $f(x)$ *нечетно*, като я додефинираме в интервала $(-1,0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо 0. Тогава $a_0=a_k=0$. От $2l=2\Longrightarrow l=1$ и пресмятаме

$$\begin{aligned}
b_k&=\frac{2}{1}\int_0^1 2x\sin\frac{k\pi x}{1}dx=-\frac{4}{k\pi}\int_0^1 xd\cos k\pi x\\
&=-\frac{4}{k\pi}\left(x\cos k\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_0^1\cos k\pi x dk\pi x\right)\\
&=-\frac{4}{k\pi}\left(\cos k\pi-0-\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right)=-\frac{4}{k\pi}(-1)^k+\frac{4}{k^2\pi^2}0=\frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}\,.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ f(x)=2x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin k\pi x}{k}\,.$$

б) *Развитие само по косинуси*: Необходимо е да продължим $f(x)$ *четно*, като я додефинираме в интервала $(-1,0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо Oy. Тогава $b_k=0$, а от $2l=2 \Longrightarrow l=1$ и пресмятаме

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 2x\,dx=4\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=2\,.$$

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{2}{1}\int_0^1 2x\cos\frac{k\pi x}{1}dx=\frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\,d\sin k\pi x\\
&=\frac{4}{k\pi}\left(x\sin k\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_0^1\sin k\pi x\,dk\pi x\right)\\
&=\frac{4}{k\pi}\left(0+\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^1\right)=\frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi-\cos 0)\\
&=\frac{4}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]\Longrightarrow-\begin{cases}\text{при } k=2n & \Longrightarrow a_{2n}=0\\ \text{при } k=2n-1 & \Longrightarrow a_{2n-1}=\dfrac{-8}{(2n-1)^2\pi^2}\,.\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x)=2x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}\,.$$

Пример 11.2. Развийте в *ред на Фурие* функцията

$$f(x)=\begin{cases}a, & x\in[0,1)\\ 0, & x\in(1,2),\end{cases}\quad a>0$$

а) само по синуси, б) само по косинуси.

Решение. Графиката на функцията $f(x)$ е *права*, успоредна на оста Ox: в интервала $[0,1)$ е $y=a$, а в интервала $(1,2)$ е $y=0$.

а) Необходимо е да продължим *нечетно* $f(x)$, като я додефинираме в интервала $(-2,0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спряма O.

От $2l=4 \Longrightarrow l=2$.

$$b_k=\frac{2}{2}\int_0^1 a\sin\frac{k\pi x}{2}dx=-a\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1=-\frac{2a}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{2}-1\right].$$

При $k=2n \Longrightarrow b_{2n}=-\dfrac{a}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2p\\ \dfrac{2a}{(2p-1)\pi}, & n=2p-1\,.\end{cases}$

При $k = 2n - 1 \Longrightarrow b_{2n-1} = \dfrac{2a}{(2n-1)\pi}$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2a}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{2(2p-1)\pi x}{2}}{2p-1} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}\,.$$

б) За развитие *само по косинуси* продължаваме $f(x)$ *четно*, като я додефинираме в интервала $(-2, 0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо Oy. От $2l = 4 \Longrightarrow l = 2$.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 a dx = ax\Big|_0^1 = a\,.$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^1 a\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{2a}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2a}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \dfrac{2a(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1\,. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}\,.$$

Пример 11.3. Да се развие *по синуси* в интервала $0, \pi$ функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \sin x, & \pi/2 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията е отсечка от правата $y = 0$ в интервала $[0, \pi/2]$ и част от синусоида в интервала $(\pi/2, \pi)$. Додефинираме функцията в интервала $(-\pi, 0)$, като продължаваме графиката *нечетно*, т.е. симетрично спрамо O. От $2l = 2\pi \Longrightarrow l = \pi$. Изчисляваме b_k:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin x\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(k-1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(k+1)x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin(k-1)x}{k-1}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos k\pi/2}{k-1} + \frac{\cos k\pi/2}{k+1}\Big]$$

$$= \frac{2k\cos k\pi/2}{(k^2-1)\pi} = \begin{cases} \dfrac{4n(-1)^n}{(4n^2-1)\pi} & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n-1\,, \end{cases} \quad \text{за } k \ge 2\,.$$

При $k=1$:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin x\sin x dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{\pi}\Big(x\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big)=\frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin 2nx}{4n^2-1}.$$

Пример 11.4. Да се разложи в ред на Фурие *по косинуси* в интервала $(0,\pi)$ функцията

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}x, & 0\le x\le\pi/2\\ \frac{\pi}{4}(\pi-x), & \pi/2<x\le\pi\,.\end{cases}$$

Решение. Построяваме *четно* продължение на графиката на $f(x)$ в интервала $(-\pi,0)$: пренасяме графиката симетрично спрямо Oy. От $2l=2\pi\Longrightarrow l=\pi$.

Изчисляваме коефициентите a_0 и a_k:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\pi x}{4}dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{4}(\pi-x)dx\Big]=\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{(\pi-x)^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big)=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\Big[\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\pi x}{4}\cos kx dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{4}(\pi-x)\cos kx dx\Big]$$

$$=\frac{1}{2k}\Big(\int\limits_0^{\pi/2}x d\sin kx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)d\sin kx\Big)$$

$$=\frac{1}{2k}\Big(x\sin kx\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi/2}+(\pi-x)\sin kx\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{\pi/2}^{\pi}\Big)$$

$$=\frac{1}{2k}\Big(\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k}(-1)^k+\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}\Big)$$

$$=\frac{1}{2k^2}\Big[2\cos\frac{k\pi}{2}-1-(-1)^k\Big]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n-1}{4n^2}, & k=2n\\ 0, & k=2n-1.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n-1]\cos 2nx}{n^1}.$$

ЗАДАЧИ

1. Развийте в *ред на Фурие* само по *синуси* и само по *косинуси* функцията $f(x) = 2x$, $x \in [0,\pi]$. Отг. $4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$; $\pi - \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
2. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* и по *косинуси* функцията $f(x) = x^2$, $x \in (0,\pi)$.
   Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{2n-1} - \frac{8}{\pi(2n-1)^2}\right]\sin(2n-1)x - \pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$;
   $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2}$.
3. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* и по *косинуси* функцията $f(x) = \sin x$, $x \in (0,\pi/2)$. Отг. $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}\sin 2kx$; $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$.
4. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2\,. \end{cases}$
   Отг. $-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$.
5. Развийте в *ред на Фурие* само по *косинуси* функцията $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in (0,\pi)$.
   Отг. $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
6. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x) = -x$, $x \in [0,1]$.
   Отг. $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin k\pi x}{k}$.
7. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = -x$, $x \in [0,2]$.
   Отг. $-1 + \frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$.
8. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = x - 1$, $x \in (0,2)$.
   Отг. $-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$.
9. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* и по *косинуси* функцията $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in (0,\pi/2)$. Отг. $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(2n-1)x}{(2n-1)^3}$; $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{n^2}$.
10. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = |\pi - x|$, $x \in (-\pi,0]$.
    Отг. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
11. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$, $x \in [0,\pi)$.
    Отг. $\frac{1}{\pi}\sin x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nx + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1-(-1)^n}{2\pi n(n+1)}\sin(2n-1)x$.
12. Развийте в *ред на Фурие* по *косинуси* функцията $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$, $x \in [0,\pi)$.

Отг. $\dfrac{3\pi}{4}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{(2n-1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(-1)^n-1]\cos 2nx}{\pi n^2}$.

13. Развийте в *ред на Фурие* по *синуси* функцията $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \pi/2 \\ \pi-x, & \pi/2\le x\le \pi \end{cases}$.

Отг. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

14. Развийте в *ред на Фурие* а) по *синуси*; б) по *косинуси* функцията
$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$, $x\in(0,2]$.

Отг. а) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi}{2}-1\right)\sin\dfrac{k\pi x}{2}$

б) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-\cos\dfrac{k\pi}{2}}{k^2}\cos\dfrac{k\pi x}{2}$.

ГЛАВА 12

ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ. ДЕФИНИЦИЯ, ГРАНИЦА И НЕПРЕКЪСНАТОСТ

I. ПОНЯТИЕ ЗА ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

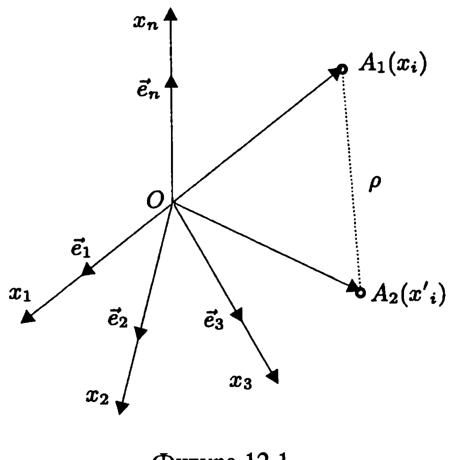
Дадени са координатната система $K_n(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ и $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$, $\mathbb{R}^n\{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$, където векторите $\vec{e}_i$, $i = \overline{1,n}$ образуват ортонормирана база (фиг. 12.1). $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K_n$.

В частност $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow A_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in K_n$ и тогава е определено разстоянието ρ между точките A_1 и A_2:

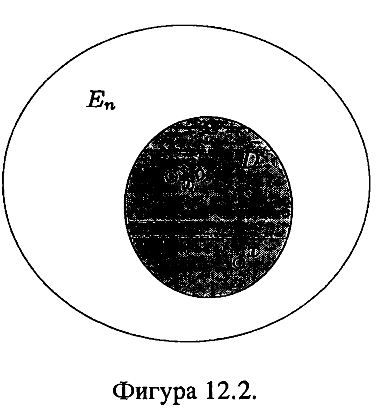
$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}. \qquad (12.1)$$

Дефиниция 1 *Всяка наредена n-орка $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ наричаме* ***координати на точка*** *в n-мерното пространство. Такова пространство се бележи с E_n и се нарича* ***n-мерно евклидово пространство****, ако в него е дефинирано разстояние между две точки с формула (12.1).*

Респективно с $E_1, E_2, E_3, \dots$ бележим едномерно, двумерно, тримерно, … евклидово пространство, съответно с координатни системи $K_1(o; \vec{i})$, $K_2(0; \vec{i}, \vec{j})$, $K_3(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



Фигура 12.1.



Фигура 12.2.

и разстояния

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|,$$
$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \ldots$$

II. МНОЖЕСТВО ОТ ТОЧКИ В E_n. ОКОЛНОСТ НА ТОЧКА

Дадени са E_n, $D \subset E_n$, D - множество от точки, $K_n(0; \vec{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$ и точки $x^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ - фиксирана, $x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ - произволна, $x^0 \neq x$ (фиг. 12.2).

Дефиниция 2 ***Околност на точката*** *x^0, $x^0 \neq x$ е множеството от точки D, за които разстоянието $\rho(x^0, x) < \delta$, $\forall\delta > 0$ – произволно.*

Околност на точката x^0 бележим с $U(x^0, \delta)$ или $U_\delta(x^0)$ и наричаме δ-околност на x^0.

Нека $n = 1$, т.е. в E_1 имаме $\rho(x^0, x) = |x_1 - x_1^0| < \delta$ или $U_\delta(x^0)$ е *отворена отсечка* $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$.

Нека $n = 2$, т.е. в E_2 имаме $\rho(x^0, x) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \delta$ или $U_\delta(x^0)$ е *отворен кръг* с център x^0 и радиус δ.

Ако в E_2 разгледаме отворен квадрат с център x^0 и страна 2δ, дефиниция 2 може да се изкаже така: Всеки *отворен кръг* или *квадрат* в E_2 с радиус и страна съответно δ и 2δ, на които центърът е точката x^0, се нарича отворена δ-околност на точката x^0.

Нека $n = 3$, т.е. в E_3 имаме $\rho(x^0, x) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2} < \delta$ или $U_\delta(x^0)$ е *отворено кълбо* с център x^0 и радиус δ (респективно *отворен куб* в E_3 със страна 2δ и център x^0).

Ако $n \geq 4$, $U_\delta(x^0)$ е *отворена хиперсфера* в съответното евклидово пространство.

III. ОТВОРЕНО И ЗАТВОРЕНО МНОЖЕСТВО НА ТОЧКИ

Разглеждаме множество от точки D, $D \subset E_n$ (фиг. 12.2).

Дефиниция 3 *Една точка x се нарича* ***вътрешна*** *за D, ако съществува* ***поне*** *една околност на x, всички точки на която принадлежат на D.*

Дефиниция 4 *Точка x се нарича* ***външна*** *за D, ако съществува* ***поне*** *една нейна околност, която не принадлежи на D.*

Дефиниция 5 *Точка x се нарича* ***гранична*** *(контурна) за D, ако всяка нейна околност съдържа* ***вътрешни и външни точки*** *за D.*

Дефиниция 6 *Множеството D се нарича **отворено**, ако се състои само от **вътрешни точки**.*

Дефиниция 7 *Множеството D се нарича **затворено**, ако се състои от **всички** вътрешни и гранични точки (Г) на D, $\bar{D} = D \cup (\Gamma)$.*

Дефиниция 8 *Множеството D се нарича **свързано**, ако всеки две негови точки могат да се съединят с линия, която **изцяло** принадлежи на D.*

Дефиниция 9 *Всяко отворено и свързано множество D наричаме **област**.*

Дефиниция 10 *Множеството D се нарича **ограничено**, ако съществува кълбо така, че всички точки на D да са вътрешни за кълбото.*

IV. БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ ОТ ТОЧКИ

Дадени са E_n, $D \subset E_n$, $K_n(0; \vec{e_i})$, $i = \overline{1,n}$ и произволни точки

$$x^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in D, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Дефиниция 11 *Ако $\forall k \in \mathbb{N}$ наречем съответно точка $x^{(k)} \in D$, получаваме безкрайна редица (12.2) от точки ($f : \mathbb{N} \to D$):*

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \tag{12.2}$$

Дефиниция 12 *Точката $a(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ е **граница** на (12.2), ако $\rho(x^{(k)}, a) \to 0$ при $k \to \infty$ и бележим $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$.*

Дефиниция 13 *Редицата (12.2) се нарича **сходяща**, ако има граница.*

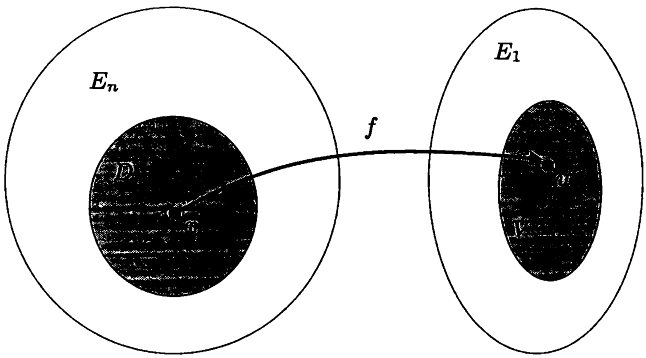
Означаваме с (12.3) безкрайните числови редици от съответните координати на точките на редицата (12.2):

$$\left|\begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(k)}, \dots \\ x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(k)}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots \end{array}\right. \tag{12.3}$$

Теорема 1 *Редицата (12.2) е **сходяща** и $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ тогава и само тогава, когато редиците (12.3) са сходящи и $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$, $i = \overline{1,n}$.*

V. ДЕФИНИЦИЯ И ГРАФИКА НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дадени са $E_n, E_1, D \subset E_n$, D-област, $K_n(0;\vec{e_i}), i = \overline{1,n}$ и точка $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ (фиг. 12.3).



Фигура 12.3.

Дефиниция 14 *Ако $\forall x \in D$ по някакво правило f поставим в съответствие точка $u \in E_1$, казваме, че е дефинирана функция $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$* ***на n променливи*** *или е установено изображение $f : x \in D \subset E_n \to u \in V \subset E_1$.*

D се нарича *дефиниционна област на функцията $u = f(x)$*, а V - *област от стойности на функцията.*

При $n = 2$ имаме $f : D \subset E_2 \to V \subset E_1$, $u = f(x_1, x_2)$ и бележим $z = f(x, y)$.

При $n = 3$ имаме $f : D \subset E_3 \to V \subset E_1$, $u = f(x_1, x_2, x_3)$ и бележим $u = f(x, y, z)$.

Дефиниция 15 ***Графика*** *Γ на $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in D \subset E_n$ наричаме множеството от точки M с координати $\{x_1, x_2, \dots, x_n, u = f(x)\}$, разположени в E_{n+1}.*

Така, ако $z = f(x, y)$, графиката $\Gamma : \{x, y, z = f(x, y)\}$ е повърхнина (S) в E_3.

VI. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ

Дадени са $u = f(x), x \in D \subset E_n, K_n(0;\vec{e_i}), i = \overline{1,n}$ и точки $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E_n$ - фиксирана, $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ - произволна, $x^0 \neq x$, като предполагаме, че точката x^0 *е точка на сгъстяване за D* ($\forall \delta > 0, U_\delta(x^0)$ съдържа безброй точки на D) фиг. 12.2.

Дефиниция 16 *(**на Коши**) Казваме, че числото A е **граница** на $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ при $x \to x^0$, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, че, ако $0 < \rho(x^0, x) < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$ и бележим $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = A$.*

Дефиниция 17 *(**на Хайне**) Числото A е **граница** на $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ при $x \to x^0$, ако при всеки избор на редицата от точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, $x^{(n)} \neq x^0$ и $x^{(n)} \to x^0$, редицата от стойностите на функцията $f(x^{(1)})$, $f(x^{(2)}), \ldots, f(x^{(n)})$, е сходяща и $\lim\limits_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = A$.*

Дефиниция 16 и 17 са еквивалентни.

VII. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ В ТОЧКА

Дадени са $u = f(x), x \in D \subset E_n, K_n(0, \vec{e}_j), j = \overline{1, n}$ и точки $x^0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ $\in D$ - фиксирана, $x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ - произволна, $x^0 \neq x$.

Дефиниция 18 *Функцията $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ се нарича **непрекъсната** в точката x^0 (бележи се $f(x) \in \mathbf{C}[x^0]$), ако са изпълнени условията:*

1. *$f(x)$ е дефинирана в x^0 и в $U_\delta(x^0)$, т.е. $\exists f(x^0)$;*
2. *$\exists \lim\limits_{x \to x^0} f(x)$;*
3. *$\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$.*

Някои *свойства* на непрекъснатите функции:

1. Ако $f_1(x)$, $f_2(x) \in \mathbf{C}[x^0]$, $x \in D \subset E_n$, такива са и функциите: $f_1(x) \pm f_2(x)$; $f_1(x) f_2(x)$; $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $f_2(x) \neq 0$.
2. $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$, т.е. $f(x) \in \mathbf{C}[x^0] \iff \lim\limits_{x \to x^0} [f(x) - f(x^0)] = 0$.

Дефиниция 19 *Разликата $f(x) - f(x^0) = \Delta u = \Delta f$ се нарича **пълно** (тотално) **нарастване** на $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$.*

Теорема 2 *Всяка функция $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, която е непрекъсната в ограничено и затворено множество $X \subset E_n$, е ограничена и приема своята най-голяма и най-малка стойност в X.*

Теорема 3 *Всяка функция $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, която е ограничена и непрекъсната в $X \subset E_n$, е **равномерно непрекъсната**, т.е. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, но δ не зависи от x, така че $\forall (x', x'')$, x', $x'' \in D$, за които $\rho(x', x'') < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Пример 12.1. Намерете и изобразете дефиниционната област на функцията:

а) $z = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x}$;

б) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

в) $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$;

г) $z = \arccos \dfrac{x}{x+y}$;

д) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$;

е) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} + \ln(z - x^2 - y^2)$.

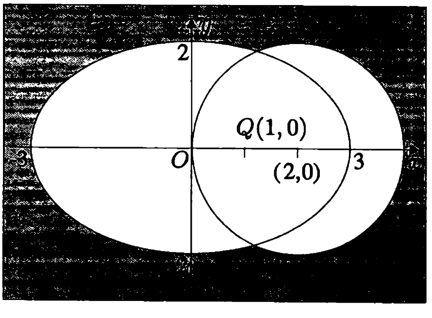
Решение. а) Дефиниционната област означаваме с $D = D_1 \cap D_2$. $D_1 : 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \geq 1$. Според теоремата на Жордан щом една точка принадлежи на област, това е изпълнено за всяка друга точка като нея. Тогава, като заместим координатите на координатното начало O в D_1, получаваме $-36 \geq 0$, т.е. $O \notin D_1$. Следователно D_1 се състои от всички точки вън от елипсата с полуоси $a = 3$ и $b = 2$, включително точките на елипсата (фиг. 12.4).

$D_2 : x^2 + y^2 - 4x \geq 0 \Longrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 \geq 2^2$. Точката $Q(1,0) \notin D_2$, защото получаваме $1 \geq 4$. Следователно D_2 се състои от всички точки вън от окръжност с център (2,0) и $r = 2$ (фиг. 12.4).

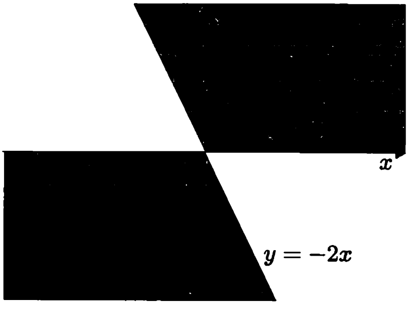
И така, D се състои от всички точки вън от елипсата и окръжността, включително точките на общия контур.

б) Аналогично, както в а), означаваме $D = D_1 \cap D_2$, като $D_1 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0$, а $D_2 : x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4, \end{array} \right.$$



Фигура 12.4.



Фигура 12.5.

т.е. D е областта между двете централни окръжности с радиуси 2 и 3, включително точките на окръжностите (пръстен).

в) Поради биективност $D : |1 - x^2 - y^2| \leq 1 \Longrightarrow D : -1 \leq 1 - x^2 - y^2 \leq 1$.

От $D_1 : -1 \leq 1 - x^2 - y^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2$ и понеже т. $O(0,0) \in D_1$ следва, че D_1 е вътрешността на централен кръг с радиус $r = \sqrt{2}$, включително точките от контура.

От $D_2 : 1 - x^2 - y^2 \leq 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 \geq 0$, т.е. D_2 е цялата Гаусова равнина (z).

И така, $D = D_1 \cap D_2$ се състои от всички точки вътре в кръг с център O и $r = \sqrt{2}$, включително точките на окръжността.

г) Както във в) имаме $D : -1 \leq \dfrac{x}{x+y} \leq 1$ или

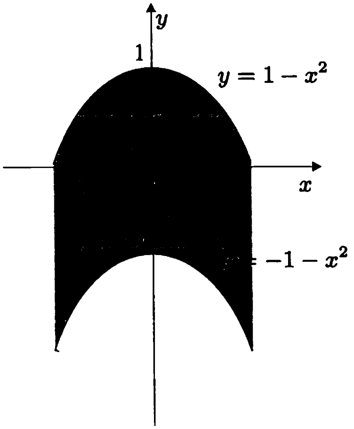
$$\left|\begin{array}{l} -x-y \leq x \leq x+y \\ x+y > 0 \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} -x-y \geq x \geq x+y \\ x+y < 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} y \geq -2x \\ y \geq 0 \\ y > -x \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} y \leq -2x \\ y \leq 0 \\ y < -x \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} y \geq -2x \\ y > 0 \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} y \leq -2x \\ y < 0. \end{array}\right.$$

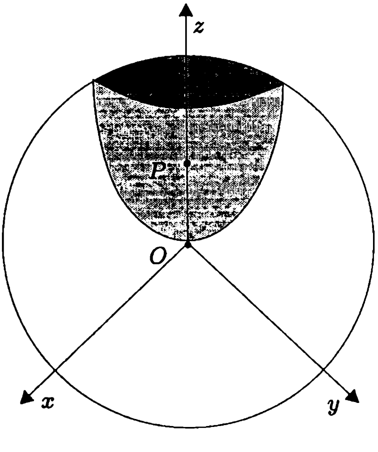
Тези неравенства определят дефиниционната област на функцията, изобразена на фиг. 12.5.

д) Имаме

$$D : 1-(x^2+y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x^2+y)^2 \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq x^2+y \leq 1 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} y \leq 1 - x^2 \\ y \geq -1 - x^2. \end{array}\right.$$



Фигура 12.6.



Фигура 12.7.

D е областта между двете параболи (фиг. 12.6).

е) От $D_1 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, т.е. D_1 е вътрешността на централна сфера с $R = 1$, защото точката $O(0,0,0) \in D_1$, включително точките на сферата (фиг. 12.7).

От $D_2 : z - x^2 - y^2 > 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 < z$ или D_2 е вътрешността на ротационен параболоид с връх O и ос $+Oz$ без точките от повърхността на параболоида, защото $P(0,0,\frac{1}{2}) \in D_2$. Итака, $D = D_1 \cap D_2$ е чаша, образувана от параболоида без повърхнината му, която е похлупена от сферата, включително точките от сферата (фиг. 12.7).

Пример 12.2. Пресметнете границата на функцията:

а) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$; г) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$;

б) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$; д) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

в) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

Решение. а) Полагаме $xy = u$. От $x \to 0$ и $y \to 0$ следва $u \to 0$. Тогава

$$\lim_{u\to0} \frac{u}{\sqrt{u+1}-1} = \lim_{u\to0} \frac{u(\sqrt{u+1}+1)}{(\sqrt{u+1})^2-1} = \lim_{u\to0} \frac{u(\sqrt{u+1}+1)}{u} = 2;$$

б) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} y\frac{\sin xy}{xy} = 2 \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy} = 2.1 = 2;$

в) Полагаме $x^2 + y^2 = t$. От $x \to 0$ и $y \to 0 \Longrightarrow t \to 0$. Тогава

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \qquad \text{(основна граница);}$$

г) Полагаме както във в) $x^2 + y^2 = u$. От $x \to \infty$ и $y \to \infty \Longrightarrow u \to \infty$. Получаваме

$$\lim_{u\to\infty} u\sin\frac{1}{u} = \lim_{\frac{1}{u}\to0} \frac{\sin\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} = 1 \qquad \text{(основна граница);}$$

д) Ще разгледаме изменението на x и y по правата $y = kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Границата зависи от избора на k, следователно $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не съществува.

Пример 12.3. Намерете точките на прекъсване на функцията:

а) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

б) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2 - x)}$;

в) $z = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)}$;

г) $u = \dfrac{1}{xyz}$;

д) $u = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1}$;

е) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$.

Решение. а) Функцията не е дефинирана за $1 - x^2 - y^2 \leq 0$, следователно точки на прекъсване са тези точки, които принадлежат на централната окръжност $x^2 + y^2 = 1$;

б) Точките на прекъсване се определят равенствата $x + y = 0 \cap y^2 - x = 0$, т.е. точките по правата с уравнение $y = -x$ и параболата $x = y^2$;

в) Аналогично както в б) имаме $x^2 + y^2 - 1 = 0 \cap x^2 - y^2 - 1 = 0$. Точките на прекъсване са точките от окръжността с уравнение $x^2 + y^2 = 1$ и хиперболата $x^2 - y^2 = 1$;

г) Сега равенствата $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ определят точките на прекъсване. Това са всички точки от координатните равнини Oyz $(x = 0)$, Oxz $(y = 0)$ и Oxy $(z = 0)$;

д) От $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \Longrightarrow$ точките на прекъсване лежат върху елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

е) Аналогично на д) имаме $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ или точки на прекъсване са всички точки от коничната повърхнина $x^2 + y^2 = z^2$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете *дефиниционната област* на функцията:

а) $z = x + \sqrt{y}$ Отг. $y \geq 0$

б) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$ Отг. $|x| \leq 1$; $|y| \geq 1$

в) $z = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$ Отг. Частта от равнината, заградена от параболите $x = \pm y^2$ и правите $y = 0$ и $y = 2$ без т. $O(0, 0)$, включително точките по линиите

г) $z = \dfrac{x^2 + y^2 - x + 2y}{x - y}$ Отг. $x \neq y$

д) $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$ Отг. Частта от равнината между окръжностите $c_1 : (x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4}$ и $c_2 : (x-1)^2+y^2 = 1$, включително точките от c_1 без т. $O(0,0)$

е) $u = \dfrac{1}{a^2-x^2-y^2-z^2}$ Отг. Всички точки от $\mathbb{R}^3$ без тези на сферата $x^2+y^2+z^2=a^2$

ж) $u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Отг. Пространството извън коничната повърхнина $z^2 = x^2+y^2$, включително точките на повърхнината без т. $O(0,0)$

з) $u = \ln(1-x^2-y^2+z^2)$ Отг. Пространството във вътрешността на двойния хиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$ без точките по повърхнината

2. Намерете *границата* на функцията:

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x}$ Отг. 3

б) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$ Отг. 12

в) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ Отг. не съществува

г) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

3. Намерете *границата* на функцията $f(x,y) = x^2e^{-(x^2-y)}$ по направление на кой да е лъч: $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $o \le t < +\infty$.

Отг. 0

4. Да се покаже, че за функцията $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ съществуват $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right)$, $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right)$, но $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не съществува.

Отг. $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right) = 0$

5. Намерете *точките на прекъсване* на функциите:

а) $z = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$ Отг. $(1,-2)$

б) $z = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$ Отг. Точките по правата $x+y=0$

в) $z = \ln[1-(x+1)^2-(y-2)^2]$

Отг. Точките от и извън окръжността $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

г) $u = \dfrac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ Отг. (a,b,c)

д) $u = \dfrac{1}{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2-(z-c)^2}$

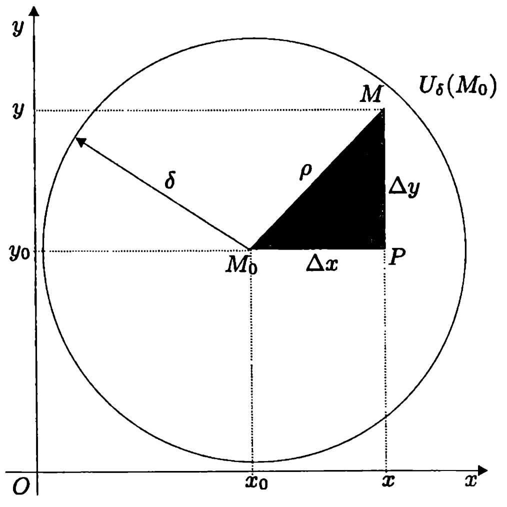
Отг. Точките от сферата $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

ГЛАВА 13

ЧАСТНИ ПРОИЗВОДНИ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ. ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТ И ДИФЕРЕНЦИАЛ

I. ПЪЛНО (ТОТАЛНО) НАРАСТВАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Разглеждаме функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$, $(x, y) \in U_\delta(M_0)$, $K_2 : Oxy$ и точки $M_0(x_0, y_0)$ - фиксирана, $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$, $\rho = |M_0M|$ (фиг. 13.1).



Фигура 13.1.

Катетите на $\triangle M_0PM$ означаваме с Δx и Δy - нарастване на x и y.

Дефиниция 1 ***Пълно нарастване*** *(нарастване на всеки от аргументите) на* $z = f(x, y)$ *наричаме* $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, *където* $x = x_0 + \Delta x = x_0 + h$, $y = y_0 + \Delta y = y_0 + k$.

Дефиниция 2 $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ *и* $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ *наричаме съответно* ***частично нарастване*** *по* x $(k = 0)$ *и по* y $(h = 0)$.

II. ЧАСТНИ ПРОИЗВОДНИ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дадена е $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset E_2$. Ако $y = y_0$ - фиксирано, то $f(x,y_0) = \varphi(x)$ и тогава $\exists \varphi'(x)$ - производна на функция на една променлива.

Дефиниция 3

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x$$

се нарича ***частна производна спрямо*** *x в точката x_0 от първи ред.*

Дефиниция 4

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$$

се нарича ***частна производна спрямо*** *y в точката y_0 от първи ред.*

Практическо правило: Частни производни се търсят по обикновените правила за диференциране с тази особеност, че когато се диференцира по една от променливите, останалите се приемат за константи.

Ако $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, частните производни от първи ред спрямо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$.

Дефиниция 5 *Частните производни, намерени по таблицата, се наричат* ***частни производни от втори ред***

$$\frac{\partial z}{\partial x}: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}.$$

Теорема 1 *Ако $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0) \in \mathbf{C}[U_\delta(x_0, y_0)]$, ако $\exists\, f_{xy}(x_0, y_0)$ и е непрекъсната, то $\exists\, f_{yx}(x_0, y_0)$ и $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.*

Частните производни $f_{xy}(x_0, y_0)$ и $f_{yx}(x_0, y_0)$ се наричат *смесени частни производни* от втори ред. Аналогично се търсят частни производни от трети и по-висок ред.

III. ДИФЕРЕНЦИРУЕМИ ФУНКЦИИ

Разглеждаме функция $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset E_2$ от точка I (фиг. 13.1).

Дефиниция 6 *Функцията $z = f(x,y)$ е* ***диференцируема*** *в точката $M_0(x_0,y_0)$, ако $\Delta z = A(x_0,y_0)\Delta x + B(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$, където A и B са const, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$ (безкрайно малка функция).*

Теорема 2 *Ако функцията $z = f(x,y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0,y_0)$, тя е* ***непрекъсната*** *в M_0 (обратното не е вярно).*

Теорема 3 *(**Необходимо условие за диференцируемост**) Ако функцията $z = f(x,y)$ е* ***диференцируема*** *в точката $M_0(x_0,y_0)$, то* ***съществуват*** *$z_x(x_0,y_0) = A(x_0,y_0)$ и $z_y(x_0,y_0) = B(x_0,y_0)$.*

Теорема 4 *(**Достатъчно условие за диференцируемост**) Ако $z_x(x_0,y_0)$, $z_y(x_0,y_0) \in \mathbf{C}[M_0(x_0,y_0)]$, то функцията $z = f(x,y)$ е* ***диференцируема*** *в точката $M_0(x_0,y_0)$.*

IV. ДИФЕРЕНЦИАЛ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Разглеждаме функцията $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset E_2$, която е диференцируема във фиксирана точка $M_0(x_0,y_0) \in D$, т.е.

$$\Delta z(M_0) = z_x(x_0,y_0)\Delta x + z_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho).$$

Дефиниция 7 ***Линейната част*** *спрямо Δx и Δy в нарастването $\Delta z(M_0)$ на диференцируемата функция $z = f(x,y)$ се нарича* ***пълен*** *(**тотален**)* ***диференциал*** *на $z = f(x,y)$ и се бележи dz, т.е.*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{13.1}$$

Частен случай:

а) ако $z = f(x,y) = x \Longrightarrow dz = dx = 1.\Delta x + 0.\Delta y = \Delta x$, т.е. $\Delta x = dx$;

б) ако $z = f(x,y) = y \Longrightarrow dz = dy = 0.\Delta x + 1.\Delta y = \Delta y$, т.е. $\Delta y = dy$.

Тогава от (13.1) получаваме

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \tag{13.2}$$

който се нарича *първи диференциал* на $z = f(x,y)$ (*пълен диференциал от първи ред*).

Ако фунцията $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \tag{13.2'}$$

За *втория диференциал* на $z = f(x, y)$ получаваме

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f, \end{aligned} \tag{13.3}$$

....

$$d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f. \tag{13.4}$$

Пример 13.1. Намерете dz и d^2z на функцията $z = \ln(x^2 + y^2)$

Решение. I начин (непосредствено) като използваме формулите (13.2) и (13.3):

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \\ r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x.2x}{(x^2 + y^2)^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y.2y}{(x^2 + y^2)^2} = 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x2y}{(x^2 + y^2)^2} = -4\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Тогава по формули (13.2) и (13.3) записваме

$$\begin{aligned} dz &= \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy, \\ d^2z &= 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}dx^2 - 8\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}dxdy + 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dy^2. \end{aligned}$$

II начин (директно) като използваме дефиницията и свойствата ($1^\circ \div 5^\circ$) на диференциал на функция $y = f(u)$,

1° $df(u)] = f'(u)du$;

2° $d[cf(u)] = cd[f(u)]$, $c = \mathrm{const}$;

3° $d[f(u) \pm \varphi(u)] = d[f(u)] \pm d[\varphi(u)]$;

4° $d[f(u)\varphi(u)] = \varphi(u)d[f(u)] + f(u)d[\varphi(u)]$;

5° $d\left[\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}\right] = \dfrac{\varphi(u)d[f(u)] - f(u)d[\varphi(u)]}{\varphi^2(u)}$.

$$
\begin{aligned}
dz &= d[\ln(x^2+y^2)] = \frac{1}{x^2+y^2}d(x^2+y^2) = \frac{1}{x^2+y^2}[d(x^2)+d(y^2)] \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}(2xdx+2ydy) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy.
\end{aligned}
$$

При този начин променливите x и y са равноправни (за разлика от първия начин), при това $dx^2 = (dx)^2$, $d(x^2) = 2xdx$, $d^2x = d(dx) = 0$, ако x е независима променлива. Още, този начин дава друг подход за намиране на частни производни на функция на две променливи:

$$
\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) = d\left[2\frac{x}{x^2+y^2}dx + 2\frac{y}{x^2+y^2}dy\right] \\
&= d\left(2\frac{x}{x^2+y^2}dx\right) + d\left(2\frac{y}{x^2+y^2}dy\right) = 2d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx + 2d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy \\
&= 2\frac{(x^2+y^2)dx - xd(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}dx + 2\frac{(x^2+y^2)dy - yd(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy \\
&= 2\frac{x^2dx + y^2dx - 2x^2dx - 2xydy}{(x^2+y^2)^2}dx + 2\frac{x^2dy + y^2dy - 2xydx - 2y^2dy}{(x^2+y^2)^2}dy \\
&= 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2 - 8\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy + 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy^2.
\end{aligned}
$$

Пример 13.2. Намерете $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ за функцията $z = \left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)^x$

Решение. $\ln z = x \ln\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)$ и диференцираме по x и y:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right) + x\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y - \sqrt{y^2 - x^2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)^x \left[\ln\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right) - \frac{x^2}{\sqrt{y^2 - x^2}\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)}\right],$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1 - \dfrac{2y}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y - \sqrt{y^2 - x^2}} = x\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2}\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)^x \frac{-x}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Пример 13.3. Намерете частните производни от първи и втори ред и първи и втори пълен диференциал на функциата $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Решение. Диференцираме функцията два пъти последователно по променливата x $(y = \text{const})$:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y\left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}\right]2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Аналогично диференцираме функцията два пъти по y $(x = \text{const})$:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}\right]2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Смесената частна производна от втори ред намираме, като диференцираме z_x по y $(x = \text{const})$ или z_y по x $(y = \text{const})$:

$$z_{xy} = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}\right]'_y = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Пълните диференциали написваме по формули (13.2) и (13.3):

$$dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \qquad d^2z = \frac{2xydx^2 + 2(y^2 - x^2)dxdy - 2xydy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Пример 13.4. За функцията $u = (x^2 + y^2 + z^2)e^{xyz}$ намерете du.

Решение. Частните производни са:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{xyz} + (x^2 + y^2 + z^2)yze^{xyz},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{xyz} + (x^2 + y^2 + z^2)xze^{xyz},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{xyz} + (x^2 + y^2 + z^2)xye^{xyz}.$$

Така намерените първи производни заместваме в

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете *частните производни от първи ред* на функциите:

а) $z = x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y - 8$ Отг. $z_x = 2x - 3y + 4$; $z_y = 2y - 3x + 5$

б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ Отг. $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

в) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{2x + y - x^2 y}{1 - 2xy - x^2}$ Отг. $z_x = \dfrac{2}{1 + x^2}$; $z_y = \dfrac{1}{1 + y^2}$

г) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$ Отг. $z_x = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $z_y = \dfrac{1}{1 + y^2}$

д) $u = xyz$ Отг. $u_x = yz$; $u_y = xz$; $u_z = xy$

2. Намерете *първи тотален диференциал* на функциите:

а) $z = \arccos \dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}}$ Отг. $dz = \dfrac{dx}{1 + x^2} + \dfrac{dy}{1 + y^2}$

б) $z = e^{\frac{x}{y}}$ Отг. $dz = \left(dx - \dfrac{x}{y}dy\right)\dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$

в) $u = z^{y^x}$ Отг. $du = y^x z^{y^x}\left(\ln y \ln z dx + \dfrac{x}{y}\ln z dy + \dfrac{dz}{z}\right)$

г) $u = \ln(x^2 - y^2 - 2z) + e^{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Покажете, че функцията удовлетворява равенството:

а) $z = y^{\sin(ye^{-x})}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

б) $z = \ln(e^x + e^y + e^z)$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1.$

4. Намерете *частните производни от втори ред* на функциите:

а) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ Отг. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

б) $u = e^{xyz}$ Отг. $u_{xx} = y^2z^2e^{xyz}$; $u_{yy} = x^2z^2e^{xyz}$; $u_{zz} = x^2y^2e^{xyz}$;
$u_{xy} = z(1+xyz)e^{xyz}$; $u_{xz} = y(1+xyz)e^{xyz}$; $u_{yz} = x(1+xyz)e^{xyz}$

5. Намерете *втория тотален дифернциал* на функциите:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \sqrt{x^2+y^2}$ Отг.
$$d^2z = \frac{(2xy+y^2\sqrt{x^2+y^2})dx^2+2(y^2-x^2-xy\sqrt{x^2+y^2})dxdy+(x^2\sqrt{x^2+y^2}-2xy)dy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

б) $z = xe^{xy}$ Отг. $d^2z = e^{xy}[y(2+xy)dx^2 + 2x(2+xy)dxdy + x^3dy^2]$

в) $z = \sin(x^2-2y)$ Отг.
$d^2z = [2\cos(x^2-2y) - 4x^2\sin(x^2-2y)]dx^2 + 8x\sin(x^2-2y)dxdy - 4\sin(x^2-2y)dy^2$

6. За дадените функции намерете указаните *производни от по-висок ред*:

а) $z = xe^{-y}$; $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x\partial y^4} = ?$ Отг. e^{-y}

б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = ?$; $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} = ?$
Отг. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} = \dfrac{15xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}}$

7. Да се покаже, че дадените функции удовлетворяват равенствата:

а) $z = \ln\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} - \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} - \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 2\left(\dfrac{1}{y^3} - \dfrac{1}{x^3}\right)$;

б) $z = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$, $a, b > 0$, const $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial z}{\partial t} = 0.$

ГЛАВА 14

ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ ПО ПОСОКА. ГРАДИЕНТ

I. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Разглеждаме функция $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset E_2$, (вж. фиг. 13.1). Нека предположим, че $z = f(x,y)$ е непрекъснато диференцируема в околност $U_\delta(M_0)$.

Дефиниция 1 *Ако функциите $x(t)$, $y(t)$ са дефинирани за $t \in G \subset \mathbb{R}$ и $x(t), y(t) \in D$, то функцията*

$$z = f[x(t), y(t)] = z(t) \tag{14.1}$$

*се нарича **съставна функция** на една променлива.*

Нека съществуват $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ и $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Тогава съставната функция (14.1) има производна при $t = t_0$

$$\dot{z}(t_0) = \frac{dz}{dt}\bigg|_{t=t_0} = f_x(x_0,y_0)\dot{x}(t_0) + f_y(x_0,y_0)\dot{y}(t_0). \tag{14.2}$$

Аналогично, ако $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, то производната на функцията в точката $t = t_0$ е:

$$\dot{u}(t_0) = \frac{du}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\dot{x}_i(t_0). \tag{14.2'}$$

II. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниция 2 *Ако функциите $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ са дефинирани за $(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ и $x(u,v)$, $y(u,v) \in D$, то функцията*

$$z = f[x(u,v), y(u,v)] = z(u,v) \tag{14.3}$$

*се нарича **съставна функция** на две променливи.*

Нека съществуват $x_u(u,v)$, $x_v(u,v)$, $y_u(u,v)$, $y_v(u,v)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ и $x(u_0,v_0) = x_0$, $y(u_0,v_0) = y_0$. Тогава съставната функция (14.3) има частни производни в точката (u_0, v_0)

$$\begin{aligned} z_u(u_0,v_0) &= f_x(x_0,y_0)x_u(u_0,v_0) + f_y(x_0,y_0)y_u(u_0,v_0), \\ z_v(u_0,v_0) &= f_x(x_0,y_0)x_v(u_0,v_0) + f_y(x_0,y_0)y_v(u_0,v_0). \end{aligned} \tag{14.4}$$

Като диференцираме първото уравнение в (14.4) по u, получаваме частна производна от втори ред относно u (в коя да е точка).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \quad \text{и т.н.}$$

Забележка: Ако е възможно от $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ да определим $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, получаваме $z = z(x,y) = f[u(x,y), v(x,y)]$ и след диференциране получаваме $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dots$

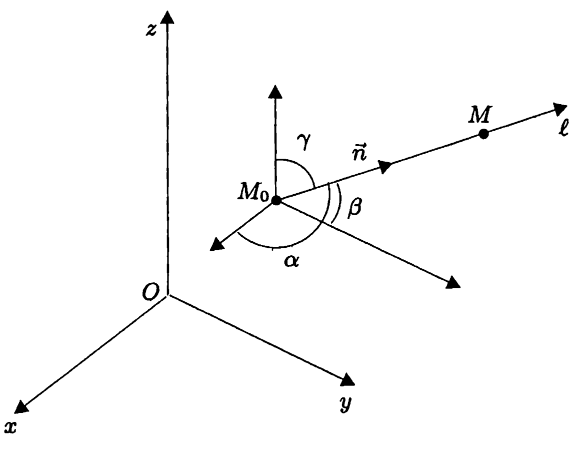
III. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ ПО ПОСОКА

а) Дадени са координатна система $K_3(Oxyz)$, функцията $u = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D \subset E_3$ и фиксирана точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$;

б) През точката M_0 избираме произволна ос ℓ (ориентирана права) и вектор $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $|\vec{n}| = 1$, който определя посоката на ℓ;

в) Нека точка $M(x,y,z) \in \ell$, $M \neq M_0$ и означим $\overline{M_0M} = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$. Числото $\rho > 0$, когато $\overline{M_0M}$ и ℓ са еднопосочни и обратно (фиг. 14.1);

г) Ако $u = f(x,y,z)$ е диференцируема в $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тя притежава производна в точката M_0 по посока на вектора $\vec{n}$ или на правата ℓ.



Фигура 14.1.

Дефиниция 3 *Ако съществува границата* $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M)-f(M_0)}{\overline{M_0M}}$, *наричаме я* ***производна в точката*** M_0 ***по посока на вектора*** $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ *и бележим* $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial\vec{n}}$*:*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\vec{n}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{14.5}$$

Дефиниция 4 *Ако функцията* $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset E_2$ *е диференцируема в точка* $M_0(x_0,y_0)$, *то производната ѝ в* M_0 *по посока на вектора* $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$ *е*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial\vec{n}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\sin\alpha. \tag{14.6}$$

IV. ХОМОГЕННИ ФУНКЦИИ

Дефиниция 5 *Казваме, че* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *е* ***хомогенна функция*** *от* m*-та степен, ако е в сила тъждеството*

$$f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n) = t^m f(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{14.7}$$

Теорема 1 ***(на Ойлер)*** *Ако хомогенната функция* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *от степен* m *е диференцируема в точката* $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, *в сила е тъждеството на Ойлер:*

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(x). \tag{14.8}$$

V. СКАЛАРНО ПОЛЕ. ЕКВИПОТЕНЦИАЛНА ПОВЪРХНИНА И ГРАДИЕНТ НА СКАЛАРНО ПОЛЕ

Дефиниция 6 *Ако е дадена област* $G \subset E_3$ *и* $\forall M \in G$ *е съпоставено число* u, *то* $u = u(M)$ *се нарича* ***скаларно поле*** *(скаларна функция на точка).*

Скаларното поле е *стационарно* или *нестационарно* в зависимост респективно от това, дали зависи само от точката или от точката и времето.

При въведена координатна система $K(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ скаларното поле $u(M)$ зависи от координатите на точката, т.е. $u = u(M) = u(\vec{r}_M) = u(x,y,z)$.

Дефиниция 7 *Множеството от точки* $M(x,y,z)$, *които удовлетворяват уравнението* $u(x,y,z) = c$, $c = const$, *се нарича* ***еквипотенциална повърхнина*** *на скаларно поле (повърхнина на ниво).*

Дефиниция 8 *Множеството от точки* $M(x,y)$, *които удовлетворяват уравнението* $u(x,y) = c$, $c = const$, *се нарича* ***линия на ниво*** *на скаларното поле* $u(M) = u(x,y)$.

Дефиниция 9 ***Градиент*** *на скаларно поле $u = u(M)$, $M \in G \subset E_3$, наричаме вектора*

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}.$$

Векторът $\mathbf{grad}\, u(M)$ е перпендикулярен на еквипотенциалната повърхнина за полето u в точката M и е колинеараен с вектора $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, където $\vec{n}$ е посоката на производната в точката M_0.

Свойства на $\mathbf{grad}\, u$:

1°. Ако за скаларно поле $u = u(M) = u(x, y, z)$, $M \in G \subset E_3$ е изпълнено $du = \vec{g} \cdot d\vec{r}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, то $\vec{g} = \mathbf{grad}\, u$.

2°. За две скаларни полета $u_1(M)$, $M \in G_1 \subset E_3$ и $u_2(M)$, $M \in G_2 \subset E_3$ ($M \in G_1 \cap G_2$) имаме:

а) $\mathbf{grad}(u_1 + u_2) = \mathbf{grad}\, u_1 + \mathbf{grad}\, u_2$;

б) $\mathbf{grad}(u_1u_2) = u_1\mathbf{grad}\, u_2 + u_2\mathbf{grad}\, u_1$.

3°. Ако $v = \Phi(u(M))$, $M \in G \subset E_3$ и предположим, че съществуват Φ_u и $\mathbf{grad}\, u$, то $\mathbf{grad}\, v = \Phi_u\mathbf{grad}\, u$.

Пример 14.1. Намерете $\frac{dz}{dt}$, ако $z = \frac{x}{y}$, където $x = \arcsin t$, $y = t - t^3$

Решение. От формула (14.2) написваме

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t)$$

и намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}, \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \dot{y}(t) = 1 - 3t^2.$$

Тогава

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{x}{y^2}(1 - 3t^2) = \frac{1}{t(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-3t^2)\arcsin t}{t^2(1-t^2)^2}.$$

Пример 14.2. Намерете $\frac{du}{dz}$, ако $u = xyz$, където $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

Решение. $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial u}{\partial z}\dot{z}(t)$, където

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy, \quad \dot{x}(t) = 2t, \quad \dot{y}(t) = \frac{1}{t}, \quad \dot{z}(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dt} = yz2t + xz\frac{1}{t} + xy\frac{1}{\cos^2 t} = 2t\ln t \operatorname{tg} t + \frac{1}{t}(t^2+1)\operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos^2 t}(t^2+1)\ln t.$$

Пример 14.3. Намерете *първите частни производни на съставната функция* $z = \dfrac{u\operatorname{arctg}(u+v)}{v}$, където $u = xy$, $v = x + y$.

Решение. $z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}\Big(\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{u}{1+(u+v)^2}\Big);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u\Big(-\frac{1}{v^2}\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{1}{v(1+(u+v)^2)}\Big)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

$$\Longrightarrow z_x = \frac{y}{v}\Big(\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{u}{1+(u+v)^2}\Big) + \frac{u}{v}\Big(\frac{1}{1+(u+v)^2} - \frac{\operatorname{arctg}(u+v)}{v}\Big),$$

$$z_y = \frac{x}{v}\Big(\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{u}{1+(u+v)^2}\Big) + \frac{u}{v}\Big(\frac{1}{1+(u+v)^2} - \frac{\operatorname{arctg}(u+v)}{v}\Big).$$

Пример 14.4. Да се намери dz за функцията $z = \varphi(x+y, x-y, \sin x)$.

Решение. Полагаме $x + y = u$, $x - y = v$, $\sin x = w$

$$\Longrightarrow z = \varphi(u,v,w), \quad u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \quad w = w(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \cos x; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_u.1 + \varphi_v.1 + \varphi_w \cos x = \varphi_u + \varphi_v + \cos x\varphi_w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_u.1 - \varphi_v.1 + \varphi_w.0 = \varphi_u - \varphi_v$$

$$\Longrightarrow dz = (\varphi_u + \varphi_v + \varphi_w \cos x)dx + (\varphi_u - \varphi_v)dy.$$

Пример 14.5. Да се намери dz и d^2z за функцията $z = u^2v$, $u = x - y$, $v = 2x$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2uv$; $\dfrac{\partial z}{\partial v} = u^2$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -1$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2uv.1 + u^2.2 = 2uv + 2u^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2uv(-1) = -2uv$$

$$\Longrightarrow dz = 2u(u+v)dx - 2uvdy = 2(x-y)(3x-y)dx - 4x(x-y)dy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + 4u\frac{\partial u}{\partial x} = 2(v.1 + u.2) + 4u.1 = 2v + 8u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\Big(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = -2[v.(-1) + u.0] = 2v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\left(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -2(v.1 + u.2) = -2(v + 2u)$$

$$\Longrightarrow d^2 z = 2(v + 4u)dx^2 - 4(2u + v)dxdy + 2vdy^2$$
$$= 4(3x - 2y)dx^2 - 8(2x - y)dxdy + 4xdy^2$$

Пример 14.6. Проверете тъждеството на Ойлер за функциите:

а) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$; б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; в) $u = \dfrac{x+y+z}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. а) Дадената функция е хомогенна, защото

$$f(tx,ty) = \frac{1}{((tx)^2 + (ty)^2)^2} = \frac{1}{t^4}\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = t^{-4}f(x,y).$$

За частните производни имаме $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-4x}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-4y}{(x^2+y^2)^3}$

$$\Longrightarrow \frac{-4x}{(x^2+y^2)^3}x + \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3}y = \frac{-4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-4}{(x^2+y^2)^2} = -4f(x,y);$$

б) Ще покажем, че функцията е хомогенна от нулева степен:

$$f(tx,ty) = \operatorname{arctg}\frac{ty}{tx} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = t^0\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = t^0 f(x,y)$$

$\Longrightarrow z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ е хомогенна функция от нулева степен ($m = 0$).

Частните производни на функцията от първи ред са:

$$z_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z_y = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{(вж. пример 13.3).}$$

Заместваме в тъждеството на Ойлер:

$$x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2} = 0 = 0.z = mz.$$

Следователно тъждеството е изпълнено;

в) Аналогично определяме степента на хомогенност на функцията $u = u(x,y,z)$:

$$u(tx,ty,tz) = \frac{tx+ty+tz}{\sqrt[3]{t^2x^2+t^2y^2+t^2z^2}} = t^{\frac{1}{3}}u(x,y,z) \Longrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Частната производна u_x намираме, като диференцираме по x (y, z - const), а u_y и u_z написваме, като използваме симетричността на $u(x, y, z)$ спрямо x, y, z:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}} \\
&= \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 2x(x+y+z)}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}}.
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 2y(x+y+z)}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}}, \\
u_z &= \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 2z(x+y+z)}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}}.
\end{aligned}$$

Заместваме в тъждеството на Ойлер:

$$\begin{aligned}
&\frac{x[3(x^2+y^2+z^2)-2x(x+y+z)]}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} \\
&\quad + \frac{y[3(x^2+y^2+z^2)-2y(x+y+z)]}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} + \frac{z[3(x^2+y^2+z^2)-2z(x+y+z)]}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) - 2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{3}u(x,y,z) = mu(x,y,z).
\end{aligned}$$

Пример 14.7. Да се покаже, че всяка хомогенна функция от m-ти ред $z = f(x, y)$ може да се представи във вида $z = x^m F\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Решение. Разглеждаме функцията $z(x, y) = x^m F\left(\dfrac{y}{x}\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = mx^{m-1}F\left(\frac{y}{x}\right) + x^m\left(\frac{-y}{x^2}\right)F'\left(\frac{y}{x}\right) = mx^{m-1}F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{m-2}yF'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^m\frac{1}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right) = x^{m-1}F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}x+\frac{\partial z}{\partial y}y=\Big[mx^{m-1}F\Big(\frac{y}{x}\Big)-x^{m-2}yF'\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big]x+x^{m-1}F'\Big(\frac{y}{x}\Big)y$$
$$=mx^mF\Big(\frac{y}{x}\Big)-x^{m-1}yF'\Big(\frac{y}{x}\Big)+x^{m-1}yF'\Big(\frac{y}{x}\Big)=mx^mF\Big(\frac{y}{x}\Big)$$
$$\Longrightarrow z=x^mF\Big(\frac{y}{x}\Big)\quad \text{е хомогенна функция.}$$

Пример 14.8. Да се намерят производните на функциите:

а) $z=\operatorname{arctg}(xy)$ в т. $M(1.1)$ по посока на ъглополовящата на първи квадрант;

б) $z=\ln(x+y)$ в т. $M(1,2)$ от параболата $y^2=4x$ по посока на тази парабола;

в) $u=xy^2+z^3-xyz$ в т. $M(1,1,2)$ по посока на вектора, сключващ с координатните оси ъгли съответно $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$.

Решение. а) От $z=\operatorname{arctg}(xy)\Longrightarrow z_x=\frac{y}{1+x^2y^2};\ z_y=\frac{x}{1+x^2y^2}$. Стойностите на частните производни в т. $M(1,1)$ са съответно $z_x\Big|_M=\frac{1}{2};\ z_y\Big|_M=\frac{1}{2}$.

Ъглополовящата на първи квадрант има уравнение $y=x$, а направляващият ѝ вектор $\vec{a}$ е с координати (1,1). Следователно $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогава

$$\frac{\partial z(M)}{\partial\vec{a}}=z_x\cos\alpha+z_y\sin\alpha=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

б) Под производна на функция в точка от дадена крива по поска на кривата се разбира производната на функцията по посока на тангентата към кривата в дадената точка. Тогава от

$$z=\ln(x+y)\Longrightarrow z_x=\frac{1}{x+y};\quad z_y=\frac{1}{x+y};\quad z_x\Big|_M=\frac{1}{3};\quad z_y\Big|_M=\frac{1}{3}.$$

От $y^2=4x$ имаме $y=\pm2\sqrt{x}$. Точката $M(1,2)$ лежи в първи квадрант, където уравнението на параболата е $y=2\sqrt{x}$. Тогава $y'=\frac{1}{\sqrt{x}};\ y'\Big|_M=1$

$\Longrightarrow$ тангентата сключва ъгъл $\alpha=\frac{\pi}{4}$ с оста Ox. $\cos\alpha=\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow$ $\vec{n}(\cos\alpha,\sin\alpha)=\vec{n}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$. Тогава

$$\frac{\partial z(M)}{\partial\vec{n}}=\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3};$$

в) От $u_x = y^2 - yz$, $u_y = 2xy - xz$, $u_z = 3z^2 - xy$ и точка $M(1,1,2)$ получаваме

$$u_x\Big|_M = 1 - 2 = -1, \quad u_y\Big|_M = 2 - 2 = 0, \quad u_z\Big|_M = 12 - 1 = 11.$$

Векторът $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е с координати $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Следователно

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}} = -1.\frac{1}{2} + 0.\frac{\sqrt{2}}{2} + 11.\frac{1}{2} = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = 5.$$

Пример 14.9. Пресметнете $\mathbf{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r})$, където $\vec{r}(x,y,z)$, а $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ е постоянен вектор.

Решение. I начин (непосредствено): Означаваме $u = \vec{a}\cdot\vec{r} = a_1x + a_2y + a_3z$. Тогава по дефиниция 9 имаме:

$$\mathbf{grad}u = \mathbf{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = (a_1x)_x\vec{i} + (a_2y)_y\vec{j} + (a_3z)_z\vec{k} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \vec{a}.$$

II начин (по свойство 1°*)*: От $u = \vec{a}\cdot\vec{r} \Longrightarrow du = \vec{a}\cdot d\vec{r}$ и според 1° получаваме $\mathbf{grad}u = \mathbf{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$.

Пример 14.10. В кои точки $\mathbf{grad}u$ на скаларното поле $u(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ е перпендикулярно на оста Oz.

Решение. Направляващият вектор на оста Oz е $\vec{k}(0,0,1)$, а $\mathbf{grad}u = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$. От условието $\mathbf{grad}u \perp \vec{k} \Longrightarrow \mathbf{grad}u\cdot\vec{k} = 0$ и тогава

$$(3x^2 - 3yz).0 + (3y^2 - 3xz).0 + (3z^2 - 3xy).1 = 0.$$

Така получаваме повърхнина с уравнение $z^2 = xy$ (хиперболичен конус), върху която $\mathbf{grad}u \perp Oz$.

Пример 14.11. Намерете посоката на най-бързо намаляване (посока на найбързия спад) на скаларното поле $u = u(x,y,z) = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ в точката $A(1,1,1)$.

Решение. Намираме $\mathbf{grad}u$ в коя да е точка на полето $u(x,y,z)$, т.е.

$$\mathbf{grad}u = \frac{2x}{x^2 - y^2 + z^2}\vec{i} - \frac{2y}{x^2 - y^2 + z^2}\vec{j} + \frac{2z}{x^2 - y^2 + z^2}\vec{k}.$$

Тогава $\mathbf{grad}u(1,1,1) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Векторът $\vec{n} = \dfrac{\mathbf{grad}u}{|\mathbf{grad}u|}$, чиято големина е единица, т.е. $|\vec{n}| = 1$ определя посоката на най-бързо растене на скаларното поле

$u(x,y,z)$, а векторът $\vec{n}^* = -\vec{n}$ определя посоката на най-бързото намаляване на $u(x,y,z)$.

Тогава от $\vec{n} = \dfrac{2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ следва, че векторът $\vec{n}^* = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ определя посоката на най-бързо намаляване на даденото скаларно поле в точката $A(1,1,1)$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете $\dfrac{dz}{dt}$, ако $z = \dfrac{x}{y}$; $x = e^t$, $y = \ln t$. Отг. $\dfrac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$

2. Намерете $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и dz за функциите:

а) $z = \dfrac{a}{v} - \dfrac{b}{u}$, където $u = y\ln x$, $v = \dfrac{x}{y}$; $a, b = \text{const}$

Отг. $dz = \left(\dfrac{b}{xy\ln^2 x} - \dfrac{ay}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{b}{y^2\ln x} + \dfrac{a}{x}\right)dy$

б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, където $u = x\sin y$, $v = x\cos y$ Отг. $dz = dy$

3. Намерете d^2z за функциите:

а) $z = f(u,v)$, $u = x^2 + y^2$; $v = xy$

$$\text{Отг. } d^2z = (4x^2 f_{uu} + 2xy f_{uv} + y^2 f_{vv} + 2f_u)dx^2$$
$$+2(4xy f_{uu} + 2(x^2 + y^2) f_{uv} + xy f_{vv} + f_v)dxdy$$
$$+(4y^2 f_{uu} + 2xy f_{uv} + x^2 f_{uv} + 2f_u)dy^2$$

б) $z = f(u,v)$; $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; $v = \ln x$

$$\text{Отг. } d^2z = \left(\frac{x^2}{(x^2+y^2)} f_{uu} + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{uv} + \frac{1}{x^2} f_{vv} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} f_u - \frac{1}{x^2} f_v\right)dx^2$$

$$+2\left(\frac{xy}{x^2+y^2} f_{uu} + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}} f_{uv} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} f_u\right)dxdy + \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} f_{uu} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} f_u\right)dy^2$$

4. Докажете, че:

а) $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворява равенството $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

б) $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворява равенството $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$;

в) $z = xy + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворява равенството $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$;

г) $z = f[x + \varphi(y)]$ удовлетворява равенството $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

5. Проверете тъждеството на Ойлер за функцията $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}$.

6. Докажете, че $z = \dfrac{xf(x)}{y} + \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворява равенството

$$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

7. Намерете производната на функцията $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в т. $M(2,1)$ по посока на вектора с начало дадената точка и край - началото на координатната система.

Отг. $\sqrt{5}$

8. Намерете производната на функцията $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в т. $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ от окръжността $x^2 + y^2 - 2x = 0$ по посока на тази окръжност.

Отг. $-\dfrac{1}{2}$

9. Намерете производната на функцията $u = xyz$ в т. $A(5,1,2)$ по посока на вектора $\overrightarrow{AB}$, $B(9,4,14)$.

Отг. $\dfrac{98}{13}$

10. Докажете, че производната на функцията $z = \dfrac{y^2}{x}$ в коя да е точка от елипсата $2x^2 + y^2 = 1$ по посока на нормалата на елипсата е 0.

Упътване: Нормалата в точка към кривата има ъглов коефициент $k = -\dfrac{1}{y'}$.

11. Докажете, че производната на функцията $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ в коя да е точка $M(x,y,z)$ по посока на вектора $\overrightarrow{MO}$ е равна на $\left(-\dfrac{2u}{r}\right)$, където $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ГЛАВА 15

НЕЯВНА ФУНКЦИЯ: ДЕФИНИЦИЯ, СЪЩЕСТВУВАНЕ, ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

I. НЕЯВНА ФУНКЦИЯ, ЗАДАДЕНА С ЕДНО УРАВНЕНИЕ

А. Неявна функция на една променлива

Дефиниция 1 *Казваме, че $y = y(x)$ е **неявна функция на x**, определена с уравнението*

$$F(x, y) = 0, \tag{15.1}$$

ако е изпълнено $F[x, y(x)] \equiv 0$, т.е. $y(x)$ е коренът на (15.1).

Пример. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ е неявна функция на x, определена с уравнението $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Теорема 1 ***(Достатъчни условия за съществуване и единственост).*** *Ако са дадени $K_2 : Oxy$, точка $M_0(x_0, y_0) \in E_2$, $U_\delta(M_0)$ и функция $F(x, y)$, удовлетворяваща условията:*

1° *$F(x, y)$ е непрекъсната и диференцируема в $U_\delta(M_0)$ и $\exists\, F_y(x, y)$ в $U_\delta(M_0)$, която е непрекъсната $\forall (x, y) \in U_\delta(M_0)$,*

2° *$F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,*

то $\exists\, U_\delta(x_0)$, в която $y = y(x)$ е единствена, непрекъсната, диференцируема и удовлетворява $F[x, y(x)] = 0$, $y_0 = y(x_0)$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$, (фиг. 15.1).

Теорема 2 *Ако са изпълнени условията 1° и 2° на Т1 и $\exists\, F_x(x, y)$ в $U_\delta(M_0)$, която е непрекъсната в $U_\delta(M_0)$, $\forall (x, y) \in U_\delta(M_0)$, то*

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0.$$

Основна задача (*техника на диференцирането*):

Определете y' и y'' на неявната функция $y = y(x)$, зададена с уравнението

$$F(x, y) = 0. \tag{15.1}$$

Диференцираме (15.1) по x ($x_x{}' = 1,\ y_x{}' = y'$) и получаваме

$$F_x.1 + F_y y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y}, \quad F_y \neq 0. \tag{15.1'}$$

Дифенецираме (15.1′) отново по x и получаваме

$$(F_{xx}.1 + F_{xy}.y') + (F_{yx}.1 + F_{yy}y')y' + F_y y'' = 0, \qquad (15.1'')$$

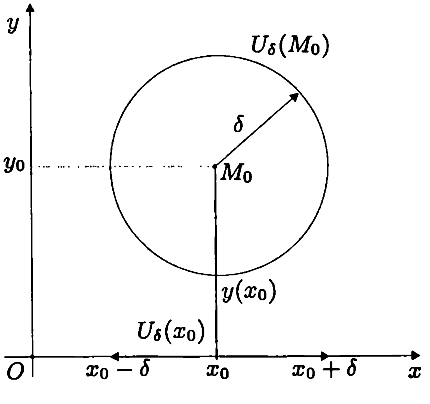
откъдето намираме y'' и заместваме y' от (15.1′), т.е. формула (15.1″) не се помни. Функциите F_{xx}, F_{xy} са изобщо функции на (x, y).

Аналогично, като диференцираме (15.1″) по x, намираме y''' и т.н.

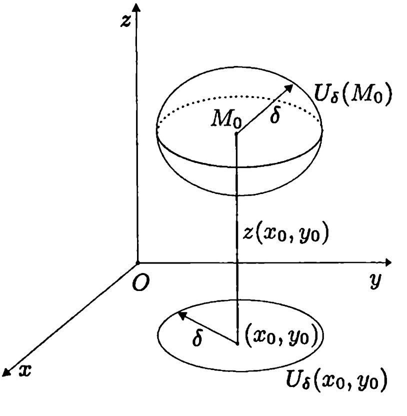
Забележка. От $F(x,y) = 0 \Longrightarrow dF = F_x dx + F_y dy = 0$. Разделяме на $dx \neq 0 \Longrightarrow F_x + F_y y' = 0 \Longrightarrow y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$, $F_y \neq 0$ (dF е първият диференциал на функцията $F(x,y)$).

Неявна функция на една променлива има приложение при извеждане на фирмули за тангентата през точка $M_0(x_0, y_0)$ от елипса, хипербола и парабола, като *съответно* получаваме:

$$t : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad t : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad t : yy_0 = p(x + x_0).$$



Фигура 15.1.



Фигура 15.2.

Б. Неявна функция на две променливи

Дефиниция 2 *Казваме, че $z = z(x,y)$ е* ***неявна функция на (x, y)****, определена с уравнение*

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (15.2)$$

ако е изпълнено $F[x, y, z(x, y)] \equiv 0$.

Пример. $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ е невна функция на (x,y), определена с уравнението $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Теорема 3 *(Достатъчни условия за съществуване и единственост). Ако са дадени $K_3 : Oxy$, точка $M_0(x_0,y_0,z_0) \in E_3$, $U_\delta(M_0)$ и функцията $F(x,y,z)$, удовлетворяваща условията:*

1° *$F(x,y,z)$ е непрекъсната и диференцируема в $U_\delta(M_0)$ и $\exists\, F_z(x,y,z)$ в $U_\delta(M_0)$, която е непрекъсната $\forall(x,y,z) \in U_\delta(M_0)$,*

2° *$F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$,*

то $\exists\, U_\delta(x_0,y_0)$, в която $z = z(x,y)$ е единствена, непрекъсната, диференцируема и удовлетворява $F[x,y,z(x,y)] = 0$, $z_0 = z(x_0,y_0)$, $\forall(x,y) \in U_\delta(x_0,y_0)$, (фиг. 15.2).

Теорема 4 *Ако са изпълнени условията 1° и 2° на Т3 и $\exists\, F_x(x,y,z)$ и $F_y(x,y,z)$ в $U_\delta(M_0)$, които са непрекъснати в $U_\delta(M_0)$, $\forall(x,y,z) \in U_\delta(M_0)$, то*

$$z_x = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad z_y = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad F_z(x,y,z) \neq 0.$$

Основна задача (*техника на диференцирането*):

Определете z_x, z_y и z'_{xx} на неявната функция $z = z(x,y)$, зададена с уравнението

$$F(x,y,z) = 0. \tag{15.2}$$

Диференцираме (15.2) по x $({x_x}' = 1,\ {y_x}' = 0,\ {z_x}' = z_x)$ и получаваме

$$F_x.1 + F_y.0 + F_z z_x = 0 \Longrightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad F_z \neq 0. \tag{15.2$'$}$$

Дифенецираме (15.2$'$) отново по x и получаваме

$$(F_{xx}.1 + F_{xz}.z_x) + (F_{zx}.1 + F_{zz}z_x)z_x + F_z z_{xx} = 0, \tag{15.2$''$}$$

откъдето намираме z_{xx} и заместваме z_x от (15.2$'$), т.е. формула (15.2$''$) не се помни. Функциите F_{xx}, F_{xz} са изобщо функции на (x,y,z).

Диференцираме (15.2) по y $({x_y}' = 0,\ {y_y}' = 1,\ {z_y}' = z_y)$ и получаваме

$$F_x.0 + F_y.1 + F_z.z_y = 0 \Longrightarrow z_y = -\frac{F_y}{F_z}, \quad F_z \neq 0. \tag{15.2$'''$}$$

Забележка. От $F(x,y,z) = 0 \Longrightarrow dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \Longrightarrow dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy$, т.е коефициентите пред dx и dy са съответно z_x и z_y на неявната функция $z = z(x,y)$ (dF е първият диференциал на функцията $F(x,y,z)$).

II. НЕЯВНИ ФУНКЦИИ, ЗАДАДЕНИ СЪС СИСТЕМА ОТ n УРАВНЕНИЯ

Задача (при $n = 2$): Дадени са неявните функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, определени от системата

$$\left| \begin{array}{l} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0, \end{array} \right. \tag{15.3}$$

като функционалната детерминанта (Якобиан на системата (15.3))

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = J \neq 0.$$

Пресметнете u_x, u_y, v_x, v_y.

Решение. **I начин**. Диференцираме (15.3) по x

$$\left| \begin{array}{l} F_x.1 + F_y.0 + F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ G_x.1 + G_y.0 + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} F_u u_x + F_v v_x = -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x. \end{array} \right.$$

Използвайки формулите на Крамер, получаваме

$$u_x = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}, \qquad v_x = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}$$

Аналогично, като диференцираме (15.3) по y, получаваме u_y и v_y.

II начин. От (15.3) посредством тоталните диференциали на функциите F и G получаваме

$$\left| \begin{array}{l} dF = F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} du = \varphi(dx,dy) \\ dv = \psi(dx,dy) \end{array} \right. ,$$

$$\text{но} \quad \left| \begin{array}{l} du = u_x dx + u_y dy \\ dv = v_x dx + v_y dy \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} u_x dx + u_y dy = \varphi(dx,dy) \\ v_x dx + v_y dy = \psi(dx,dy) \end{array} \right. .$$

Като сравним коефиентите пред dx и dy в последната система уравнения, получаваме u_x, u_y, v_x, v_y.

Пример 15.1. Нека $y = y(x)$ е неявна функция, определена от уравнението $y^3 - 3x^2y + 2 = 0$. Намерете y', y'', dy, d^2y.

Решение. I начин (като се помни например формула (15.1′). От $F(x,y) = y^3 - 3x^2y + 2 \Longrightarrow F_x = -6xy$, $F_y = 3y^2 - 3x^2$ и тогава по формула (15.1′) имаме:

$$y' = -\frac{-6xy}{3(y^2 - x^2)} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}, \qquad y^2 - x^2 \neq 0.$$

От $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2} \Longrightarrow dy = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2}dx.$

II начин (без да се помнят формули). Диференцираме даденото уравнение по x и получаваме

$$3y^2y' - 6xy - 3x^2y' = 0 \Big| : 3 \Longrightarrow y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2}, \quad y^2 - x^2 \neq 0.$$

Отново диференцираме по x уравнението $y^2y' - 2xy - x^2y' = 0$ и получаваме

$$2yy'^2 + y^2y'' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2y'' = 0 \Longleftrightarrow (y^2 - x^2)y'' = 4xy' + 2y - 2yy'^2$$

$$\Longrightarrow y'' = \frac{4x\dfrac{2xy}{y^2 - x^2} + 2y - 2y\dfrac{4x^2y^2}{(y^2 - x^2)^2}}{y^2 - x^2}$$

$$\Longrightarrow y'' = \frac{8x^2y(y^2 - x^2) + 2y(y^2 - x^2)^2 - 8x^2y^3}{(y^2 - x^2)^3}, \quad y^2 - x^2 \neq 0.$$

Тогава от $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} \Longrightarrow d^2y = y''dx^2$ и заместваме.

Пример 15.2. Нека $z = z(x, y)$ е неявна функция, определена от уравнението $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$. Намерете z_x, z_y, z_{xx}.

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x ($y = \text{const}$) и получаваме

$$8x - 6zz_x + y - yz_x + 1 = 0 \Longrightarrow z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x + y + 1}{y + 6z}, \quad y + 6z \neq 0.$$

Диференцираме полученото уравнение отново по x и получаваме

$$8 - 6z_x^2 - 6zz_{xx} - yz_{xx} = 0 \Longleftrightarrow z_{xx} = \frac{8 - 6z_x^2}{y + 6z}$$

$$\Longrightarrow z_{xx} = \frac{8 - 6\dfrac{(8x + y + 1)^2}{(y + 6z)^2}}{y + 6z} = \frac{8(y + 6z)^2 - 6(8x + y + 1)^2}{(y + 6z)^3}, \quad y + 6z \neq 0.$$

Диференцираме даденото уравнение по y ($x = \text{const}$) и получаваме

$$4y - 6zz_y + x - z - yz_y = 0 \Longrightarrow z_y = \frac{4y + x - z}{y + 6x}, \quad y + 6z \neq 0.$$

Пример 15.3. Нека $z = z(x, y)$ е неявна функция, определена от уравнението $\operatorname{arctg} z = \sin(x + y + z) + e^{xyz}\varphi(z)$, където $\varphi(z)$ е диференцируема функция. Намерете z_x и z_y.

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x ($y = \text{const}$) и по y ($x = \text{const}$) и от получените уравнения определяме съответно z_x и z_y:

$$\frac{1}{1+z^2}z_x = \cos(x+y+z)(1+z_x) + e^{xyz}(yz + xyz_x)\varphi(z) + e^{xyz}\varphi'(z)z_x,$$
$$\frac{1}{1+z^2}z_y = \cos(x+y+z)(1+z_y) + e^{xyz}(xz + xyz_y)\varphi(z) + e^{xyz}\varphi'(z)z_y.$$

Пример 15.4. Нека $z = z(x,y)$ е неявна функция, определена от уравнението $y + ze^{-x} = \varphi(x + ze^{-y})$. Докажете, че $z(x,y)$ удовлетворява равенството

$$(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - e^{x+y}.$$

Решение. Записваме уравнението във вида $F(x,y,z) = 0$, т.е.

$$y + ze^{-x} - \varphi(x + ze^{-y}) = 0.$$

Частните прозводни ще намерим по формулите: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$,

$$F_x = -\varphi' - ze^{-x}, \quad F_y = 1 + ze^{-y}\varphi', \quad F_z = -(e^{-y}\varphi' - e^{-x})$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\varphi' - ze^{-x}}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 + ze^{-y}\varphi'}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}}.$$

Заместваме в равенството:

$$(z+e^x)\frac{-\varphi' - ze^{-x}}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}} + (z+e^y)\frac{1 + ze^{-y}\varphi'}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}} = \frac{\varphi'(z^2e^{-y} - e^x) - (z^2e^{-x} - e^y)}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}}$$
$$= \frac{\varphi' e^x e^{-y}(z^2e^{-x} - e^y) - (z^2e^{-x} - e^y)}{e^{-x}(e^{-y}e^x\varphi' - 1)} = \frac{e^x(z^2e^{-x} - e^y)(\varphi' e^x e^{-y} - 1)}{(\varphi' e^x e^{-y} - 1)}$$
$$= z^2 - e^{x+y}.$$

С това равенството е доказано.

ЗАДАЧИ

1. Намерете указаните производни на неявно зададената функция $y = y(x)$ с уравнението:

а) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0, \quad y' = ?$ Отг. $y' = \dfrac{ye^{xy} - e^y - ye^x}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$

б) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0, \quad y' = ?$ Отг. $y' = -\dfrac{y(\cos(xy) - e^{xy} - 2x)}{x(\cos(xy) - e^{xy} - x)}$

в) $xy - \ln y = a, \quad y' = ?,\ y'' = ?$ Отг. $y' = \dfrac{y^2}{1-xy}, \quad y'' = \dfrac{y^3(2-xy)}{(1-xy)^2}$

г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad y' = ?$ Отг. $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

д) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad y' = ?\ y'' = ?$ Отг. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}, \quad y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}$

2. Да се намери стойността на първата производна на функцията $y = y(x)$, зададена с уравнението $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ в точките с координати (6,2) и (6,8). Да се даде геометрично тълкуване на получените резултати.

Отг. $y'(6,2) = \dfrac{3}{4}; \quad y'(6,8) = -\dfrac{3}{4}$

3. Да се докаже, че:

а) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0,$

ако $y = y(x)$ е зададена с уравнението $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$;

б) $\dfrac{dy}{a+2by+cy^2} = \dfrac{dx}{a+2bx+cx^2},$

ако $y = y(x)$ е зададена с уравнението $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$.

4. Да се намерят първите производни на y и z, неявни функции на x, дефинирани чрез системата:

$$\left|\begin{array}{l} x^3 + y^3 - 3z + 4 = 0 \\ z^2 - 2y^2 - x + 5 = 0. \end{array}\right.$$

Отг. $y' = \dfrac{2x^2z-1}{2y(2-yz)}, \quad z' = \dfrac{y-4x^2}{2(yz-2)}$

5. Да се изчислят стойностите на y'' и z'' в т. $M(1,1,1)$, ако y и z са неявни функции на x, дефинирани чрез системата:

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0. \end{array}\right.$$

Отг. $y'' = z'' = -\dfrac{2}{3}$

6. Намерете dz и d^2z, ако

а) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$ Отг. $dz = \dfrac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}; \quad d^2z = -\dfrac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$

б) $z = \sqrt{x^2-y^2}\,\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$ Отг. $dz = \dfrac{z(xdx-ydy)}{x^2-y^2}; \quad d^2z = -\dfrac{z(ydx-xdy)^2}{(x^2-y^2)^2}$

7. Системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{array}\right.$$

определя диференцируемите функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ такива, че $u(1,2) = 0$ и $v(1,2) = 0$. Намерете $du(1,2)$ и $dv(1,2)$.

Отг. $du = -\dfrac{1}{3}dy; \quad dv = -dx + \dfrac{1}{3}dy$

8. За неявната функция $z = z(x,y)$, зададена с уравнението:

а) $z = f(y - x\varphi(z))$ докажете равенството $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

б) $F(x + \dfrac{y}{z}, y + \dfrac{z}{x}) = 0$ докажете равенството $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

ГЛАВА 16

ФОРМУЛА НА ТЕЙЛОР. ЕКСТРЕМУМ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ. УСЛОВЕН ЕКСТРЕМУМ

I. ФОРМУЛА НА ТЕЙЛОР ЗА ФУНКЦИЯ НА n ПРОМЕНЛИВИ

А. Диференциална формула на Тейлор за функция на една променлива

Ако функцията $y = f(x)$, $x \in D \subset E_1$ е $(n+1)$ пъти диференцируема в $U_\delta(x_0)$, където $x_0 \in D$ е фиксирана точка, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad (16.1')$$

където $0 < \theta < 1$.

Ако $x - x_0 = \Delta x = dx = h$, $f(x) - f(x_0) = \Delta y = \Delta f$, то

$$\Delta y = \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}. \quad (16.1)$$

Б. Диференциална формула на Тейлор за функция на две променливи

Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ е $(n+1)$ пъти диференцируема в $U_\delta(x_0, y_0)$, където $(x_0, y_0) \in D$ е фиксирана точка, то

$$\Delta z = \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y_0)}{(n+1)!}. \quad (16.2)$$

В. Диференциална формула на Тейлор за функция на n променливи

Ако функцията $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ е $(n+1)$ пъти диференцируема в $U_\delta(x^0)$, където $x^0 \in D$ е фиксирана точка, то

$$\Delta u = \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x^0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x^0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}. \quad (16.3)$$

II. ЕКСТРЕМУМ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дадени са функция $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, координатна система $K_n(0; \vec{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$ и фиксирана точка $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$.

Дефиниция 1 *Функцията $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ има* ***локален максимум*** *в x^0, ако $\exists U_\delta(x^0)$ така, че $\forall x \in U_\delta(x_0)$ да бъде изпълнено $f(x^0) \geq f(x)$ и* ***локален минимум****, ако $f(x^0) \leq f(x)$.*

Теорема 1 ***(Необходимо условие за локален екстремум).*** *Ако функцията $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ е диференцируема в точката $x^0 \in D$ и има локален екстремум в x^0, то*

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{16.4}$$

Следствие. От $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \Longrightarrow df(x^0) = 0.$

Дефиниция 2 *Точките, които удовлетворяват системата (16.4), се наричат* ***стационарни точки*** *за $u = f(x)$.*

Теорема 2 ***(Достатъчно условие за локален екстремум при $n = 2$).*** *Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ е непрекъсната и диференцируема два пъти в околност $U_\delta(x_0, y_0)$, където точката $(x_0, y_0) \in D$ е стационарна точка за $f(x, y)$, то $f(x, y)$* ***има максимум*** *в (x_0, y_0), когато $\Delta(x_0, y_0) > 0$ и $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, ($f_{yy}(x_0, y_0) < 0$);* ***има минимум*** *в (x_0, y_0), когато $\Delta(x_0, y_0) > 0$ и $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, ($f_{yy}(x_0, y_0) > 0$), където*

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y).$$

Ако $\Delta(x_0, y_0) < 0$, функцията $z = f(x, y)$ *няма екстремум* ($M(x_0, y_0)$ е седловинна точка), а при $\Delta(x_0, y_0) = 0$, са *необходими допълнителни изследвания* (разглеждане на производни от по-висок ред).

Забележка. В стационарните точки f_{xx} и f_{yy} имат еднакви знаци.

III. ЕКСТРЕМУМ ПРИ НЕЯВНИ ФУНКЦИИ

Екстремуми при неявни функции на една и две променливи се намират както при явни функции, разликата идва само от начина за намиране на производните на функциите.

За неявна функция на две променливи $z = z(x, y)$, зададена с уравнение $F(x, y, z) = 0$, имаме:

1. *Необходимо условие*:

$$\left| \begin{array}{l} F_x(x, y, z) = 0, \\ F_y(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \\ F_z(x, y, z) \neq 0. \end{array} \right. \tag{16.5}$$

От системата (16.5) определяме стационарната точка $M(x_0, y_0, z_0)$

2. *Достатъчно условие*:

$$\Delta(x_0, y_0) > 0, \qquad \Delta(x, y) = \frac{1}{(F_z)^2}(F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2). \tag{16.6}$$

3. *Видът на екстремума* в точка $M(x_0, y_0, z_0)$ се определя така:

от $-\left.\dfrac{F_{xx}(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\right|_M > 0$ - *минимум* в $M(x_0, y_0, z_0)$, $z_{\min} = z(x_0, y_0) = z_0$;

от $-\left.\dfrac{F_{xx}(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\right|_M < 0$ - *максимум* в $M(x_0, y_0, z_0)$, $z_{\max} = z(x_0, y_0) = z_0$;

Забележка. В точките на екстремум F_{xx} и F_{yy} имад еднакви знаци.

IV. УСЛОВЕН ЕКСТРЕМУМ (ПРИ ДОПЪЛНИТЕЛНИ УСЛОВИЯ)

Дефиниция 3 *Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ има екстремум в точката (x_0, y_0) при допълнително условие $\varphi(x, y) = 0$ и $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, $\varphi(x_0, y_0) = 0$, казваме, че в точката (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има* ***условен минимум****, а когато $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, $\varphi(x_0, y_0) = 0$ - има* ***условен максимум****.*

Теорема 3 ***(Необходимо условие за условен екстремум)****. Необходимо условие функцията $z = f(x, y)$ да има екстремум в точката (x_0, y_0) при допълнително условие $\varphi(x, y) = 0$ е:*

$$\left| \begin{array}{l} F_x(x, y, \lambda) = 0, \\ F_y(x, y, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0, \end{array} \right. \tag{16.7}$$

където $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ (помощна функция на Лагранж).

Видът на условния екстремум в точка (x_0, y_0) може да се определи или от геометрични съображения или чрез детерминантата от трети ред:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \varphi_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} \tag{16.8}$$

Ако $\Delta(x_0, y_0) > 0$, функцията има *минимум*, а при $\Delta(x_0, y_0) < 0$ - *максимум*.

Пример 16.1. Намерете екстремумите на явно зададената функция

$$z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y.$$

Решение. Намираме частните производни на $z = f(x, y)$ до втори ред (включително):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 3, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -6y.$$

Според Т1 решаваме системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} x = \pm 1, \\ y = \pm 1, \end{array}$$

т.е. $f(x, y)$ има четири стационарни точки $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -1)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4(-1, 1)$. В тези точки функцията евентуално има екстремуми.

Няма да образуваме израза $\Delta(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, а ще работим с всяка точка поотделно.

1° $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0 \Longrightarrow f(x, y)$ има евентуално минимум.

$f_{yy}(1, 1) = -6 < 0 \Longrightarrow f(x, y)$ има евентуално максимум.

Тогава $f(x, y)$ *няма екстремум* в $M_1(1, 1)$. Такава точка се нарича *седловидна.*

Наистина от $f_{xy}(1, 1) = 0 \Longrightarrow \Delta(1, 1) = -36 < 0$.

2° $f_{xx}(1, -1) = 6 > 0 \Longrightarrow f(x, y)$ има евентуално минимум.

$f_{yy}(1, -1) = 6 > 0 \Longrightarrow f(x, y)$ има евентуално минимум.

Тогава от $\Delta(1, -1) = 36 > 0$ и $f_{xx}(1, -1) > 0$ следва, че функцията *има локален минимум* в $M_2(1, -1)$ и като заместим координатите на M_2 във функцията, получаваме

$$z_{\min}(x = 1, y = -1) = 1 + 1 - 3 - 3 = -4.$$

3° $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$, $f_{yy}(-1, -1) = 6 > 0 \Longrightarrow f(x, y)$ *няма екстремум* в $M_3(-1, -1)$. наистина $\Delta(-1, -1) = -36 < 0$.

4° $f_{xx}(-1, 1) = -6 < 0$, $f_{yy}(-1, 1) = -6 < 0 \Longrightarrow f(x, y)$ има евентуално максимум.

От $\Delta(-1, 1) = (-6)(-6) - 0^2 = 36 > 0$ и $f_{xx}(-1, 1) < 0 \Longrightarrow f(x, y)$ *има локален максимум* в точката $M_4(-1, 1)$ и след заместване в условието на задачата получаваме

$$z_{\max}(x = -1, y = 1) = -1 - 1 + 3 + 3 = 4.$$

Пример 16.2. Намерете екстремумите на явно зададената функция

$$z = e^{x/2}(x + y^2).$$

Решение. Намираме частните производни до втори ред (включително):

$$z_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2), \quad z_y = 2ye^{\frac{x}{2}},$$

$$z_{xx} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4), \quad z_{xy} = ye^{\frac{x}{2}}, \quad z_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Според T1 решаваме системата (необходимо условие за екстремум):

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) = 0 \\ 2ye^{\frac{x}{2}} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow M(-2, 0),$$

т.е. $z = f(x, y)$ има една стационарна точка.

Образуваме

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4)2e^{\frac{x}{2}} - (ye^{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2}e^x(x - y^2 + 4)$$

и изследваме знака на Δ в стационарната точка: $\Delta(-2, 0) = \frac{1}{2}e^{-2}(-2-0+4) = e^{-2} > 0 \Longrightarrow$ в точка $M(-2, 0)$ функцията има екстремум.

Видът на екстремума определяме в зависимост от знака на z_{xx} или на $z_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$ в стационарната точка: $z_{yy}(-2, 0) = 2e^{-1} > 0 \Longrightarrow$ в т. M функцията има минимум

$$z_{\min} = z(-2, 0) = e^{-1}(-2) = -\frac{2}{e}.$$

Пример 16.3. От всички правоъгълни паралелепипеди с дадена пълна повърхнина $2m$, $m > 0$ определете размерите на този, който има максимален обем.

Решение. Означаваме размерите на паралелепипеда с x, y, h. Тогава

$$V = z = f(x, y) = xyh.$$

От

$$S_1 = 2m = 2(x + y)h + 2xy \Longrightarrow h = \frac{m - xy}{x + y}$$

и тогава $z = \dfrac{mxy - x^2y^2}{x + y}$. Очевидно $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (I октант).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(my - 2xy^2)(x + y) - (mxy - x^2y^2)}{(x + y)^2} = \frac{my^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{(x + y)^2}.$$

Понеже z е симетрична функция относно x и $y \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{mx^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{(x+y)^2}$.

Според T1 решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} y^2(m - x^2 - 2xy) = 0 \\ x^2(m - y^2 - 2xy) = 0, \end{array} \right.$$

която е еквивалентна с четири системи, но $x > 0$, $y > 0$:

$$\left| \begin{array}{l} m - x^2 - 2xy = 0 \\ m - y^2 - 2xy = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x = y = \sqrt{\frac{m}{3}} \Longrightarrow h = \frac{m - \dfrac{m}{3}}{2\sqrt{\dfrac{m}{3}}} = \sqrt{\frac{m}{3}}$$

и от $x = y = h = \sqrt{\dfrac{m}{3}}$ следва, че търсеният паралелепипед е евентуално куб.

За частните производни от втори ред имаме

$$f_{xx}(x,y) = \frac{(-2xy^2 - 2y^3)(x+y)^2 - (my^2 - x^2y^2 - 2xy^3)[(x+y)^2]'}{(x+y)^4}$$

$$\Longrightarrow f_{xx}\Big(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\Big) = -\sqrt{\frac{m}{3}} < 0.$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{(2my - 2x^2y - 6xy^2)(x+y)^2 - (my^2 - x^2y^2 - 2xy^3)[(x+y)^2]'}{(x+y)^4}$$

$$\Longrightarrow f_{xy}\Big(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}} < 0.$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{(-2x^2y - 2x^3)(x+y)^2 - (mx^2 - x^2y^2 - 2x^3y)[(x+y)^2]'}{(x+y)^4}$$

$$\Longrightarrow f_{yy}\Big(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\Big) = -\sqrt{\frac{m}{3}} < 0.$$

Но

$$\Delta\Big(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\Big) = \frac{m}{3} - \Big(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}}\Big)^2 = \frac{m}{4} > 0, \quad m > 0.$$

Оттук и $f_{xx}\Big(\sqrt{\dfrac{m}{3}}, \sqrt{\dfrac{m}{3}}\Big) < 0$ следва, че функцията $z = V = f(x,y)$ има локален максимум в точката $\Big(\sqrt{\dfrac{m}{3}}, \sqrt{\dfrac{m}{3}}\Big)$ и тогава

$$V_{\max} = \frac{m\dfrac{m}{3} - \dfrac{m^2}{9}}{2\sqrt{\dfrac{m}{3}}} = \frac{m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}.$$

Пример 16.4. В равнината Oxy намерете точка M, за която сумата S от квадратите на разстоянията до правите с уравнения $x = 0, y = 0$ и $x+2y-16 = 0$ да е най-малка.

Решение. Разстоянията на точка $M(x, y)$ съответно до дадените прави са (фиг. 16.1):

* до правата $x = 0$ (оста Oy) разстоянието е x;
* до правата $y = 0$ (оста Ox) разстоянието е y;
* до правата $x + 2y - 16 = 0$ разстоянието намираме по формулата

$$d = \left.\frac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}}\right|_M.$$

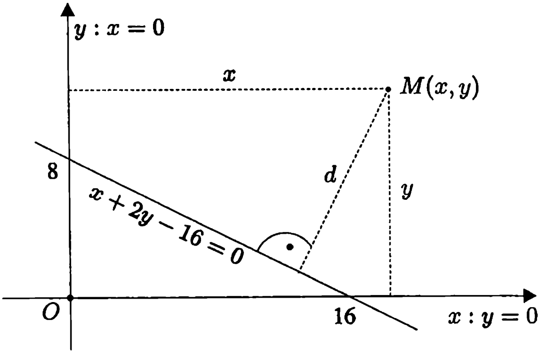
Тогава

$$S = z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x + 2y - 16)^2. \tag{1}$$

Следователно задачата се свежда до намиране координатите на тази стационарна точка, за която функцията (1) има минимум.

Частните производни на z до втори ред са:

$$z_x = 2x + \frac{2}{5}(x + 2y - 16) = \frac{2}{5}(6x + 2y - 16);$$
$$z_y = 2y + \frac{4}{5}(x + 2y - 16) = \frac{2}{5}(2x + 9y - 32);$$
$$z_{xx} = \frac{12}{5}; \quad z_{yy} = \frac{18}{5}; \quad z_{xy} = \frac{4}{5}.$$



Фигура 16.1.

Решаваме системата

$$\left|\begin{array}{l}\frac{2}{5}(6x+2y-16)=0\\ \frac{2}{5}(2x+9y-32)=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}3x+y=8\\ 2x+9y=32\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=\frac{8}{5}\\ y=\frac{16}{5}\end{array}\right. \Longrightarrow M\Big(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\Big),$$

т.е. функцията има една стационарна точка M.

Образуваме $\Delta = \frac{12}{5}.\frac{18}{5} - \frac{16}{25} > 0 \Longrightarrow$ в т. $M\Big(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\Big)$ функцията има екстремум, а от $z_{xx} = 12/5 > 0$ следва, че този екстремум е минимум.

Следователно търсената точка е $M\Big(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\Big)$.

Пример 16.5. Намерете екстремумите на функцията $z = x^2 + y^2$, където x и y са свързани с уравнението $x + y = 1$.

Решение. **I начин.** Образуваме функцията $F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$.

Решаваме сустемата

$$\left|\begin{array}{l}F_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0\\ F_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0\\ F_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-1=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ \lambda=-1,\end{array}\right. ,$$

т.е. $M\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$ е точка на условен екстремум.

Ротационният параболоид $z = x^2 + y^2$ с ос $+Oz$ и връх $O(0,0,0)$ и равнината $x + y - 1 = 0$, която е успоредна на оста Oz, се пресичат в парабола с ос, успоредна на Oz и обърната с върха надолу, т.е. можем да очакваме минимум

$$\Longrightarrow z_{\min}(x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

II начин. От дадените уравнения (ако е възможно) определяме:

$$z = x^2 + (1-x)^2; \quad z' = 2x - 2(1-x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ и тогава } y = \frac{1}{2};$$

$$z'' = 4 \Longrightarrow z''\Big(\frac{1}{2}\Big) = 4 > 0 \Longrightarrow z_{\min}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 16.6. Намерете екстремума на функцията $z = xy^2$ при условие $x + 2y = 1$.

Решение. Образуваме функцията на Лагранж $F(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x+2y-1)$ и решаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} F_x = y^2 + \lambda = 0 \\ F_y = 2xy + 2\lambda = 0 \\ F_\lambda = x + 2y - 1 = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \lambda = -y^2 \\ xy - y^2 = 0 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \lambda = -y^2 \\ x = 1 - 2y \\ (1-2y)y - y^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \end{array} \right. \bigcup \left| \begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ \lambda = -1/9, \end{array} \right.$$

т.е. точките на екстремум са $M_1(1,0)$ и $M_2(1/3,1/3)$. Вида на екстермума определяме от знака на Δ (вж. (16.8)):

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2y \\ 2 & 2y & 2x \end{vmatrix} = 2(x - 4y).$$

* $\Delta(M_1) = 2 > 0 \Longrightarrow$ в точката $M_1(1,0)$ функцията $z = xy^2$ има минимум, като $z_{\min} = z(1,0) = 0$;
* $\Delta(M_2) = -2 < 0 \Longrightarrow$ в точката $M_2(1/3,1/3)$ функцията $z = xy^2$ има максимум, като $z_{\max} = z(1/3,1/3) = 1/27$.

Пример 16.7. Намерете екстремума на функцията $z = 2x + y$ при условие $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Помощната функция на Лагранж е:

$$F(x,y,\lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

а системата, от която намираме координатите на екстремалните точки ина вида:

$$\left| \begin{array}{l} F_x = 2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \end{array} \right.$$

т.е. точките на екстремум са: $M_1(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ и $M_2(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Определяме знака на Δ (вж. (16.8)):

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2) = 8\lambda.$$

* при $\lambda = -\sqrt{5}/2$ имаме $\Delta < 0 \Longrightarrow$ в $M_1(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ функцията има максимум, като $z_{\max} = z(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = \sqrt{5}$;

* при $\lambda = \sqrt{5}/2$ имаме $\Delta > 0 \Longrightarrow$ в $M_2(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ функцията има минимум, като $z_{\min} = z(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$.

Пример 16.8. Изследвайте относно екстремум неявната функция $y = y(x)$, определена от уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \qquad a > 0.$$

Решение. Намираме y' на неявната функция, като диференцираме даденото уравнение по x ($x_x{}' = 1$, $y_x{}' = y'$).

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \quad y^2 - ax \neq 0.$$

Решаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 - 3axy = 0 \\ ay - x^2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{т. } M(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}),$$

в която функцията има евентуално екстремум.

Отново диференцираме по x уравнението $x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0$ и получаваме $2x + 2yy'^2 + y^2y'' - ay' - axy'' = 0$. Като вземе предвид, че $y' = 0$, получаваме

$$y'' = \frac{-2x}{y^2 - ax}, \quad \text{при това } (y^2 - ax)_M = a^2\sqrt[3]{16} - a^2\sqrt[3]{2} \neq 0$$

$$y''(a\sqrt[3]{2}) = \frac{-2a\sqrt[3]{2}}{a^2\sqrt[3]{16} - a^2\sqrt[3]{2}} < 0 \Longrightarrow y_{\max}(a\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4}.$$

Пример 16.9. Намерете екстремалните стойности на неявната функция $y = y(x)$, определена с уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x два пъти и намираме съответно y' и y'':

$$2x - 2y - 2xy' + 10yy' + 4y' - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{x - y - 1}{x - 5y - 2}, \ x - 5y - 2 \neq 0$$

$$1 - y' - y' - xy'' + 5y'^2 + 5yy'' + 2y'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{1}{x - 5y - 2}, \ x - 5y - 2 \neq 0,$$

като при второто равенство е взето под внимание, че $y' = 0$. От системата

$$\begin{vmatrix} x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{vmatrix}$$

намираме стационарните точки $M_1(1,0)$ и $M_2(1/2, -1/2)$ за функцията, при това $(x - 5y - 2)_{M_1} = -1 \neq 0$ и $(x - 5y - 2)_{M_2} = 1 \neq 0$.

От $y''(M_1) = -2 < 0 \Longrightarrow y_{\max}(1) = 0$. От $y''(M_2) = 2 > 0 \Longrightarrow y_{\min}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Пример 16.10. Намерете екстремумите на неявната функция $z = z(x,y)$, определена от уравнението

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x, като $x_x{}' = 1$, $y_x{}' = 0$, $z_x{}' = z_x$, и получаваме

$$4x + 2zz_x + 8z + 8zz_x - z_x = 0 \Longrightarrow z_x = \frac{-4x - 8z}{2z + 8x - 1}, \quad 2z + 8x - 1 \neq 0.$$

Диференцираме даденото уравнение по y, като $x_y{}' = 0$, $y_y{}' = 1$, $z_y{}' = z_y$, и получаваме

$$4y + 2zz_y + 8xz_y - z_y = 0 \Longrightarrow z_y = \frac{-4y}{2z + 8x - 1}, \quad 2z + 8x - 1 \neq 0.$$

От системата
$$\begin{vmatrix} 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0 \\ -4(x + 2z) = 0 \\ -4y = 0 \end{vmatrix}$$

намираме стационарните точки $M_1(-2, 0, 1)$ и $M_2(16/7, 0, -8/7)$ за функцията, при това $(2z + 8x - 1)_{M_1} = -15 \neq 0$ и $(2z + 8x - 1)_{M_2} = 105/7 \neq 0$.

За частните производни на функцията от втори ред получаваме:

$$z_{xx} = z_{yy} = \frac{-4}{2z + 8x - 1}, \quad z_{xy} = 0.$$

От $\Delta(x,y) = \left(\frac{-4}{2z + 8x - 1}\right)^2 - 0^2 = \frac{16}{(2z + 8x - 1)^2}$ получаваме

$$\Delta(M_1) = \frac{16}{(-15)^2} > 0 \text{ и } z_{xx}(M_1) = \frac{-4}{-15} > 0 \Longrightarrow z_{\min}(x = 2, y = 0) = 1.$$

$$\Delta(M_2) = \frac{16}{(\frac{105}{7})^2} > 0 \text{ и } z_{xx}(M_2) = \frac{-4}{\frac{105}{7}} < 0 \Longrightarrow z_{\max}\left(x = \frac{16}{7}, y = 0\right) = \frac{8}{7}.$$

Пример 16.11. Намерете най-голямата стойност M и най-малката стойност m на функцията $z = (x-2y)e^{-x^2-y^2}$ в областта $D : |x| \le 1$, $|y| \le 1$.

Решение. Алгоритъмът за решаване на задачата е следният:

а) намираме екстремумите на $z = f(x,y)$ в стационарните точки, вътрешни за дадената област D;

б) изследваме функцията по границите на областта D (правите $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$);

в) определяме стойността на функцията в точките $A(1,1), B(1,-1), C(-1,1)$, $D(-1,-1)$ - върхове на правоъгълника,определен от правите $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

г) сравняваме получените стойности и определяме M и m.

а) Намираме частните производни до втори ред:

$$\begin{aligned}
z_x &= e^{-x^2-y^2} + (x-2y)(-2x)e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2+4xy)\\
z_{xx} &= -2xe^{-x^2-y^2}(1-2x^2+4xy) + e^{-x^2-y^2}(-4x+4y)\\
&= e^{-x^2-y^2}(4x^3-8x^2y-6x+4y)\\
z_y &= -2e^{-x^2-y^2} - 2ye^{-x^2-y^2}(x-2y) = -2e^{-x^2-y^2}(1+xy-2y^2)\\
z_{yy} &= -2\Big[-2ye^{-x^2-y^2}(1+xy-2y^2) + e^{-x^2-y^2}(x-4y)\Big]\\
&= -2e^{-x^2-y^2}(4y^3-2xy^2-6y+x)\\
x_{xy} &= -2ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2+4xy) + e^{-x^2-y^2}4x\\
&= 2e^{-x^2-y^2}(2x^2y-4xy^2-y+2x).
\end{aligned}$$

Решаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} e^{-x^2-y^2}(1-2x^2+4xy) = 0\\ -2e^{-x^2-y^2}(1+xy-2y^2) = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x^2-4xy = 1\\ 2y^2-xy = 1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x^2-2y^2-3xy = 0\\ 2y^2-xy = 1\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2\Big(\dfrac{x}{y}\Big)^2 - 3\Big(\dfrac{x}{y}\Big) - 2 = 0\\ 2y^2-xy = 1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 2\\ 2y^2-xy = 1\end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} \Big(\dfrac{x}{y}\Big) = -\dfrac{1}{2}\\ 2y^2-xy = 1\end{array}\right.$$

Първата система няма решение, решенията на втората са: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $y = \mp\dfrac{2}{\sqrt{10}}$, т.е. има две стацинарни точки $M_1\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big)$ и $M_2\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big)$, като и двете принадлежат на областта D.

Образуваме Δ:

$$\Delta = e^{-x^2-y^2}(4x^3 - 8x^2y - 6x + 4y)(-2)e^{-x^2-y^2}(4y^3 - 2xy^2 - 6y + x) \\ - 4e^{-2(x^2+y^2)}(2x^2y - 4xy^2 - y + 2x)^2.$$

За опростяване на израза ще използваме, че $y = -2x$, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$:

$$\Delta = 2x^2e^{-10x^2}(10x^2 - 7)(40x^2 - 13) - 16x^2e^{-10x^2}(1 - 6x^2)^2.$$

От $\Delta\Big(x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}\Big) = \dfrac{2}{5}e^{-1}\dfrac{248}{100} = \dfrac{119}{125}e^{-1} > 0 \Longrightarrow$ в M_1 и M_2 има екстремуми.

* $z_{xx}\Big(x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\Big) = e^{-\frac{1}{2}}\dfrac{2}{\sqrt{10}}(1 - 7) < 0 \Longrightarrow$ в $M_1\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big)$ функцията има максимум,
  $z_{xx}\Big(x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\Big) = -e^{-\frac{1}{2}}\dfrac{2}{\sqrt{10}}(1 - 7) > 0 \Longrightarrow$ в $M_2\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big)$ функцията има минимум.

* $z_{\min} = z\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big) = \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}} - \dfrac{4}{\sqrt{10}}\Big)e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-5}{\sqrt{10e}}$,
  $z_{\max} = z\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big) = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{10}}\Big)e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}}e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{10e}}$;

б) По правата $y = 1$: $z = f(x, y) = (x - 2)e^{-x^2-1} = \varphi_1(x)$

$$\varphi_1{}'(x) = e^{-x^2-1} + (x - 2)(-2x)e^{-x^2-1} = e^{-x^2-1}(1 - 2x^2 + 4x)$$

$$\varphi_1{}'(x) = 0 \Longleftrightarrow -2x^2 + 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

но само $x = 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ удовлетворява условието $|x| < 1$, като

$$\varphi_1\Big(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\Big) = \varphi_{1\min} \quad \text{и} \quad \varphi_{1\min} = \Big(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\Big)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}.$$

Аналогично по правата $y = -1$: $\varphi_2(x) = (x + 2)e^{-x^2-1}$

$$\varphi_2{}'(x) = e^{-x^2-1} - 2xe^{-x^2-1}(x + 2) = e^{-x^2-1}(1 - 2x^2 - 4x)$$

$$\varphi_2{}'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - 2x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

но само $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1$ удовлетворява условието $|x| \leq 1$, като

$$\varphi_2\Big(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\Big) = \varphi_{2\,\max} \quad \text{и} \quad \varphi_{2\,\max} = \Big(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\Big)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}.$$

По правата $x = 1$: $\varphi_3(y) = (1 - 2y)e^{-1-y^2}$

$$\varphi_3{}'(y) = -2e^{-1-y^2} - 2ye^{-1-y^2}(1 - 2y) = 2e^{-1-y^2}(2y^2 - y - 1)$$

$$\varphi_3{}'(y) = 0 \Longleftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Longrightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -\frac{1}{2},$$

като и двете стойности удовлетворяват условието $|y| < 1$. Имаме

$$\varphi_3\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \varphi_{3\,\max} = 2e^{-\frac{5}{4}}, \qquad \varphi_3(1) = \varphi_{3\,\min} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}.$$

По правата $x = -1$: $\varphi_4(y) = (-1 - 2y)e^{-1-y^2}$

$$\varphi_4{}'(y) = -2e^{-1-y^2} - 2ye^{-1-y^2}(-1 - 2y) = 2e^{-1-y^2}(2y^2 + y - 1)$$

$$\varphi_4{}'(y) = 0 \Longleftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Longrightarrow y_1 = -1,\ y_2 = \frac{1}{2},$$

като и двете стойности удовлетворяват условието $|y| < 1$. Имаме

$$\varphi_4(-1) = \varphi_{4\,\max} = -\frac{1}{e^2}, \qquad \varphi_4\Big(\frac{1}{2}\Big) = \varphi_{4\,\min} = -2e^{-\frac{5}{4}};$$

в) $z(1,1) = \varphi_3(1) = \varphi_{3\,\min} = -\dfrac{1}{e^2}$, $z(1,-1) = 3e^{-3}$, $z(-1,1) = -3e^{-3}$, $z(-1,-1) = \varphi_4(-1) = \varphi_{4\,\max} = -\dfrac{1}{e^2}$;

г) Сравняваме получените стойности:

от а) $z_{\min}\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big) = -\dfrac{5}{\sqrt{10e}}$, $\quad z_{\max}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\Big) = \dfrac{5}{\sqrt{10e}}$,

$z_{\min}\Big(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}, 1\Big) = \Big(-1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\Big)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}$, $\quad z_{\max}\Big(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1, -1\Big) = \Big(\dfrac{\sqrt{6}}{2} + 1\Big)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}$,

от б) $z_{\min}(1,1) = -\dfrac{1}{e^2}$, $\quad x_{\max}(1, -1/2) = 2e^{-\frac{5}{4}}$

$z_{\min}(-1, 1/2) = -2e^{-\frac{5}{4}}$, $\quad z_{\max}(-1,-1) = -\dfrac{1}{e^2}$

от в) $z_{\min}(-1,1) = -3e^{-3}$ $\quad z_{\max}(1,-1) = 3e^{-3}$

Най-голямата стойност

$$M = \max\left[\frac{5}{\sqrt{10e}}, \left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}, 2e^{-\frac{5}{4}}, -\frac{1}{e^2}, 3e^{-3}\right] = \frac{5}{\sqrt{10e}} \Longrightarrow M = \frac{5}{\sqrt{10e}}.$$

Най-малката стойност

$$m=\min\left[\frac{-5}{\sqrt{10e}}, \left(-1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}, -\frac{1}{e^2}, -2e^{-\frac{5}{4}}, -3e^{-3}\right]=\frac{-5}{\sqrt{10e}} \Longrightarrow m=\frac{-5}{\sqrt{10e}}.$$

ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно *екстремум* функциите:

а) $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$ Отг. $z_{\min}(-2,-1) = -2$

б) $z = 2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 - 16x + 16y + 1$ Отг. $z_{\min}(1,-1) = -23$

в) $z = 1 - \sqrt{x^2 - y^2}$ Отг. $z_{\max}(0,0) = 1$

г) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

Отг. $z_{\min}(0,0) = 0,\ z(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{e^{-2}}{2}$ (седловидна точка)

д) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ Отг. $z_{\min}(1,2) = 7 - 10\ln 2$

е) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Отг. $z(1,1) = \frac{3\pi}{4} - 1 + \ln\sqrt{2}$ (седловидна точка)

ж) $z = xy\ln(x^2+y^2)$

Отг. $z_{\min}(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}) = -\frac{1}{2e},\ z_{\max}(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}) = \frac{1}{2e}.$

Няма екстремум в стационарните точки $(0,\pm1)$, $\pm1, 0)$

з) $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$ Отг. $z_{\min}(-2,0) = -\frac{2}{e}$

и) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$

Отг. $z_{\max}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3\frac{\sqrt{3}}{2},\ z(\pi,\pi) = 0$ (седловидна точка)

2. Намерете *условните екстремуми* на функциите:

а) $z = x^2 + y^2;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ Отг. $z_{\min}(1,2) = 2$

б) $z = 6 - 4x - 3y;\ x^2 + y^2 = 1$ Отг. $z_{\min}(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 1,\ z_{\max}(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 11$

в) $z = xy;\ x^3 + y^3 - axy = 0$ Отг. $z_{\min}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4}$

г) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Отг. при $a > 0$: $z_{\min}(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a},\ z_{\max}(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$

при $a < 0$: $z_{\min}(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{a},\ z_{\max}(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$

3. От всички правоъгълни паралелепипеди, вписани в кълбо с даден радиус R, определете размерите на този, който има максимален обем. Намерете обема.

Отг. Куб със страна $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$; $V_{\max} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$

4. Намерете екстремумите на неявно зададената функция $y = y(x)$, определена от уравнението $y^2 + 2x^2y + 4x - 3 = 0$.

Отг. $y_{\max}(x = -\frac{1}{2}) = 2$

5. Намерете екстремумите на неявната функция $z = z(x, y)$, определена от уравнението $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Отг. $z_{\max}(1, -1) = 6$, $z_{\min}(1, -1) = -2$

6. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ в областта $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 4$

Отг. $z = 3$ - най-малка стойност при $x = 2$, $y = 1$;
$z = 10$ - най-голяма стойност при $x = y = 0$ и $x = 0$, $y = 4$

7. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в областта $D : \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$.

Отг. $z_{\text{нмс}} = z(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $z_{\text{нгс}} = z(3, 0) = z(0, 3) = 6$

8. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = xy^2$ в областта $D : \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Отг. $z_{\text{нмс}} = z(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = -2\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z_{\text{нгс}} = z(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

9. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в областта $D : \{x \leq 1,\ y \leq 1,\ x + y \geq 1\}$.

Отг. $z_{\text{нмс}} = z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$, $z_{\text{нгс}} = z(1, 1) = 4$

***

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 2, София, Техника, 1977.
2. *Шополов Н., Бончев Е.*, Математически анализ I част, София, ТУ, 1990.
3. *Шмелев П.*, Теория рядов, Москва, Висшая школа, 1983.
4. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ, Втора част, София, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1994.
5. *Петрова А. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика, четвърта част - избрани глави от математиката, София, Техника, 1979.
6. *Манолов С., Шополов Н. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика - втора част, София, "Техника", 1979.
7. *Богомилов Н.В.*, Практические занятия по высшей математике, Москва, "Высшая школа", 1973.

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА

Модул 1:	Линейна алгебра. Аналитична геометрия
Модул 2:	Диференциално смятане на функция на една променлива
Модул 3:	Интеграли
Модул 4:	Обикновени и частни диференциални уравнения
Модул 5:	Многократни интеграли. Приложения на анализа в геометрията
Модул 6:	Комплексен анализ. Фурие анализ. Операционно смятане. Уравнения на математическата физика
Модул 7:	Редове. Фурие анализ. Диференциално смятане на функция на повече променливи