И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Справочное пособие по высшей математике. Т. 3

М.: Едиториал УРСС, 2001. — 224 с.

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 3 по содержанию соответствует второй половине второго тома «Справочного пособия по математическому анализу». В нем рассматриваются интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Оглавление

Глава 1

Интегралы, зависящие от параметра

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1. Непрерывность функции

$$F : y \mapsto \int_a^A f(x, y)\,dx. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если функция $f : \Pi \to \mathbb{R}$, где $\Pi = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant A, b \leqslant y \leqslant B\}$, непрерывна, то функция F непрерывна на отрезке $[b, B]$.*

Теорема 2. *Если функция f непрерывна на Π, а кривые $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $y \in [b, B]$, непрерывны и не выходят за его пределы, то функция*

$$I : y \mapsto \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \tag{2}$$

непрерывна на отрезке $[b, B]$.

1.2. Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 1. *При условиях теорем п.1.1 справедливы формулы*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A \lim_{y \to y_0} f(x, y)\,dx,$$

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\,dx.$$

Определение. *Семейство функций $x \mapsto f(x, y)$, где y — параметр семейства, $y \in Y$, равномерно стремится к предельной функции g при $y \to y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что при $0 < |y - y_0| < \delta$ будет $|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon$ для всех тех x, для которых функции f и g определены.*

Если $y_0 = \infty$, то неравенства $0 < |y - y_0| < \delta$ следует заменить неравенством $|y| > \delta$; если же $y_0 = +\infty(-\infty)$, то тогда неравенством $y > \delta$ $(y < -\delta)$.

Теорема 2. *Если функция f при фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, A]$ и при $y \to y_0$ стремится к предельной функции g равномерно относительно x, то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A g(x)\,dx.$$

1.3. Дифференцирование под знаком интеграла.

Теорема 1. Если функции f и f'_y непрерывны на Π, то функция F дифференцируема на отрезке $[b, B]$ и ее производную можно найти по формуле Лейбница

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A f'_y(x, y)\,dx.$$

Теорема 2. Если, кроме условий теоремы 2, п.1.1, функции φ и ψ дифференцируемы при $b < y < B$, то

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx = f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx, \quad y \in]b, B[.$$

1.4. Интегрирование под знаком интеграла.

Теорема. Если функция f непрерывна на Π, то

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A dx\int_b^B f(x, y)\,dy.$$

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$F : y \mapsto \int_0^1 \frac{y\,f(x)}{x^2 + y^2}\,dx,$$

где $f \in C[0, 1]$ и $f(x) > 0$.

◀ Функции $\varphi : x \mapsto \frac{y}{x^2+y^2}$ и f интегрируемы по x на $[0, 1]$ и знакопостоянны при $0 < x < 1$. Кроме того, функция f непрерывна; следовательно, все условия первой теоремы о среднем в интегральном исчислении выполнены, поэтому

$$F(y) = f(c(y))\operatorname{arctg}\frac{1}{y}, \quad 0 \leqslant c(y) \leqslant 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)| = \left|\Big(f(c(\varepsilon)) + f(c(-\varepsilon))\Big)\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right| \geqslant 2\min_{x\in[0, 1]} f(x)\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right| \to \pi\min_{x\in[0, 1]} f(x) > 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, функция F разрывна в нуле.

Далее, поскольку функция $\psi : (x, y) \mapsto \frac{y\,f(x)}{x^2+y^2}$ непрерывна в каждом из прямоугольников $[0 \leqslant x \leqslant 1;\ \delta \leqslant y \leqslant A]$, $[0 \leqslant x \leqslant 1;\ -A \leqslant y \leqslant -\delta]$, где $\delta > 0$, $A > 0$, то, согласно теореме 1, п.1.1, функция F непрерывна на каждом из отрезков $[\delta, A]$ и $[-A, -\delta]$. Поскольку δ и A произвольны, то отсюда следует, что функция F непрерывна $\forall y \neq 0$. ▶

2. Найти: а) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$; г) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx$.

◀ Поскольку функции $(x, \alpha) \mapsto \sqrt{x^2+\alpha^2}$, $\alpha \mapsto 1+\alpha$, $(x, \alpha) \mapsto \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывны, то, согласно теореме 1, п.1.2, возможен предельный переход по α под знаком интеграла, когда $\alpha \to \alpha_0$ и α_0 — конечное.

а) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx=\int\limits_{-1}^{1}|x|\,dx=1;$

б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, $\alpha_0=0$.

Поскольку функции $x\mapsto\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ и $x\mapsto\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}$ при фиксированных n, $n\in\mathbb{N}$ и α, $|\alpha|>1$, непрерывны по x ($0\leqslant x\leqslant 1$ и $1\leqslant x\leqslant 2$ соответственно) и $f_n(x)=\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\rightrightarrows\frac{1}{1+e^x}$, когда $n\to\infty$, а $f(x,\alpha)=\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\rightrightarrows\frac{1}{2}$, когда $\alpha\to\infty$ (см. ниже), то, согласно теореме 2, п.1.2, получаем:

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int\limits_{0}^{1}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^x}=\ln\frac{2e}{e+1};$

г) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx=\frac{1}{2}.$

Равномерная сходимость последовательности $(f_n(x))$ и семейства функций $x\mapsto f(x,\alpha)$ вытекает из следующих оценок:

$$\left|\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}-\frac{1}{1+e^x}\right|=\frac{\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|}{(1+e^x)\left(1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)}\leqslant\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 0$$

при $n\to\infty$ $\forall x\in[0,1]$. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда

$$\left|\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\ln\left(1+\frac{2x|\alpha|}{x^2+\alpha^2}\right)}{2\ln(x^2+\alpha^2)}\right|\leqslant\frac{x|\alpha|}{(x^2+\alpha^2)\ln(x^2+\alpha^2)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2|\alpha|}{(1+\alpha^2)\ln(1+\alpha^2)}\leqslant\frac{1}{\ln(1+\alpha^2)}<\varepsilon$$

$\forall x\in[1,2]$, как только $|\alpha|>\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$. ►

3. Найти $A=\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta$.

◄ Поскольку $\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta$ при $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $e^{-R\sin\theta}\leqslant e^{-\frac{2}{\pi}\theta}$. Поэтому

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta<\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$$

и $0\leqslant A\leqslant\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})=0$, т. е. $A=0$. ►

4. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[A,B]$. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{a}^{x}(f(t+h)-f(t))\,dt=f(x)-f(a),\quad A<a<x<B.$$

◀ Вводя в рассмотрение первообразную F функции f, согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_a^x (F'(t+h) - F'(t))\,dt = (F(t+h) - F(t))\,\Big|_a^x = F(x+h) - F(x) - (F(a+h) - F(a)).$$

Следовательно,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^x (f(t+h) - f(t))\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} =$$
$$= F'(x) - F'(a) = f(x) - f(a). \blacktriangleright$$

5. Пусть: 1) $\varphi_n(x) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, на $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, если $0 < \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1$; 3) $\int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что если $f \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx = f(0).$$

◀ Пусть $\delta > 0$ задано. Рассмотрим неравенство

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| \leqslant \left|\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| + \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right|. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части (1) оценивается следующим образом:

$$\left|\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant 2M \sup_{0<\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \varphi_n(x), \quad (2)$$

где $M = \max\limits_{|x|\leqslant 1} |f(x)| \neq 0$ (заметим, что при $f(x) \equiv 0$ на $[-1, 1]$ утверждение теоремы становится тривиальным).

Пользуясь первой теоремой о среднем, а также условием 1), оцениваем второе слагаемое в правой части неравенства (1):

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| = \left|f(\xi_n)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(\xi_n) - f(0)| \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx + M\left|1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(\xi_n) - f(0)| \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx + M\left|1 - \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx\right| + 2M \sup_{0<\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \varphi_n(x), \quad (3)$$

где $|\xi_n| < \varepsilon$.

В силу непрерывности функции f, всегда можно выбрать число ε так, что будет выполняться неравенство

$$|f(\xi_n) - f(0)| < \frac{\delta M}{4M + \delta}. \quad (4)$$

После того как число ε уже выбрано, из условий 2) и 3) находим

$$0 < \sup_{0<\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \varphi_n(x) < \frac{\delta}{8M}, \quad \left|\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx - 1\right| < \frac{\delta}{4M}, \quad 0 < \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx < 1 + \frac{\delta}{4M}, \tag{5}$$

если n достаточно велико.

Используя теперь оценки (2)—(5), из (1) получаем

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| < \delta$$

при всех достаточно больших n. ►

6. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx?$$

◄ Нет, нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что в точке $(0, 0)$ функция $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ терпит разрыв. ►

7. Найти $F'(\alpha)$, если: а) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)\,dx$; б) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$.

◄ а) Допуская существование непрерывных частных производных функций $(u, v) \mapsto f(u, v)$, где $u = x+\alpha$, $v = x-\alpha$, согласно формуле Лейбница, имеем

$$F'(\alpha) = f(2\alpha, 0) + \int_0^{\alpha} (f'_u(u, v) - f'_v(u, v))\,dx.$$

Замечая, что $\frac{df}{dx} = f'_u + f'_v$, можем записать

$$\int_0^{\alpha} (f'_u - f'_v)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f'_u\,dx - f(2\alpha, 0) + f(\alpha, -\alpha).$$

Следовательно, $F'(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2\int\limits_0^{\alpha} f'_u\,dx$.

б) Обозначим $f(x, \alpha) = \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$. Тогда

$$F'(\alpha) = 2f(\alpha^2, \alpha)\alpha + \int_0^{\alpha^2} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx,$$

$f'_\alpha(x, \alpha) = \sin(x^2 + (x+\alpha)^2 - \alpha^2) + \sin(x^2 + (x-\alpha)^2 - \alpha^2) -$

$$-2\alpha \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2)\, dy.$$

Таким образом, получаем

$$F'(\alpha) = 2\alpha \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2)\, dy + 2\int\limits_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x\, dx - 2\alpha \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2)\, dy. \blacktriangleright$$

8. Найти $F''(x)$, если $F(x) = \dfrac{1}{h^2} \displaystyle\int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^h f(x + \xi + \eta)\, d\eta$, $h > 0$, где f — непрерывная функция.

◀ Очевидно, если функция f непрерывна, то справедливо равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t + \omega)\, dt = \int\limits_{\alpha+\omega}^{\beta+\omega} f(t)\, dt.$$

Пользуясь этим равенством и возможностью дифференцирования по параметру, получаем

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta)\, d\eta\right) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (f(h + x + \xi) - f(x + \xi))\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\int\limits_{x+h}^{x+2h} f(\xi)\, d\xi - \int\limits_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi\right),$$

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}(f(2h + x) - 2f(h + x) + f(x)). \blacktriangleright$$

9. Доказать формулу

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int\limits_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) dy, & x \neq 0, \\ \dfrac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}, & x = 0,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку $\left|\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ при $x \in]-\infty, +\infty[$.

◀ Справедливость формулы (1) при $x \neq 0$ устанавливается методом математической индукции. Действительно, при $n = 1$ соотношение (1) справедливо. Предполагая, что формула (1) правильна при некотором $n = k$, дифференцированием обеих ее частей по x с последующим применением интегрирования по частям получаем

$$I_{k+1} = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}} \int\limits_0^x y^k \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{x}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}}\left(\frac{y^{k+1}}{k+1}\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\Big|_0^x + \frac{1}{k+1}\int\limits_0^x y^{k+1}\sin\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)dy\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x y^{k+1}\sin\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)dy = \frac{1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x y^{k+1}\cos\left(y+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)dy, \quad x \neq 0.$$

Покажем теперь справедливость формулы (1) при $x = 0$. Используя разложение $\sin x$ в ряд Маклорена, получаем $\frac{\sin x}{x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$, если $x \neq 0$. Очевидно, сумма этого ряда при $x = 0$ равна единице. Поэтому $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$ при всех x. Отсюда находим $f^{(n)}(0) = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1}$, что и требовалось доказать.

Далее, поскольку при $x \neq 0$

$$\left|\frac{1}{x^{n+1}}\int\limits_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy\right| \leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}}\int\limits_0^{|x|} y^n\,dy = \frac{1}{n+1},$$

а при $x = 0$ имеем $|f^{(n)}(0)| = \frac{\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$, то $\forall x \in]-\infty, +\infty[$

$$\left|\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}. ▶$$

10. Функцию $f : x \mapsto x^2$ на отрезке $[1, 3]$ приближенно заменить линейной функцией $x \mapsto a + bx$ так, чтобы

$$I(a, b) = \int\limits_1^3 (a+bx-x^2)^2\,dx = \min.$$

◀ Поскольку подынтегральная функция имеет непрерывные частные производные при любых a и b, то можно применять формулу Лейбница. Дифференцируя под знаком интеграла по a и по b и учитывая необходимые условия экстремума функции I, получаем

$$I'_a(a, b) = 2\int\limits_1^3 (a+bx-x^2)\,dx = 0, \quad I'_b(a, b) = 2\int\limits_1^3 (a+bx-x^2)x\,dx = 0.$$

Отсюда находим $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$. Легко убедиться, что $I''_{a^2}(a, b) = 4$. Таким образом,

$$d^2I(a, b) = 4\,da^2 + 16\,da\,db + \frac{52}{3}\,db^2 = 4(da + 2\,db)^2 + \frac{4}{3}db^2 > 0,$$

т. е. при $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ функция I принимает минимальное значение. Следовательно, линейная функция $y = 4x - \frac{11}{3}$ удовлетворяет поставленной задаче. ▶

11. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad F(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad 0 < k < 1,$$

и выразить их через функции E и F.

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

◀ Будем считать, что $k \in [k_0, k_1] \subset]0, 1[$. Тогда функции $(k, \varphi) \mapsto \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, $(k, \varphi) \mapsto \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \left\{(\varphi, k) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ k_0 \leqslant k \leqslant k_1\right\}$. Следовательно, к интегралу применима формула Лейбница. Имеем

$$E'(k) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{1}$$

Умножая обе части этого равенства на k и пользуясь выражениями для $E(k)$ и $F(k)$, находим

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k)-F(k)}{k}. \tag{2}$$

Интегрируя в (1) по частям, получаем

$$E'(k) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,d(\cos\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = -k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но поскольку

$$F'(k) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (kF(k))' = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

(дифференцирование здесь возможно по причине, аналогичной изложенной выше), то $E'(k) = F'(k) = -k(kF(k))'$. Пользуясь формулой (2), из последнего соотношения находим

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k)} - \frac{F(k)}{k}. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что $F(k) = E(k) - kE'(k)$, $F' = -kE''$. Подставляя $F(k)$ и $F'(k)$ в (3), приходим к указанному дифференциальному уравнению.

Наконец, так как числа k_0 и k_1 могут быть как угодно близкими к нулю и единице соответственно, то отсюда следует, что все полученные выше результаты справедливы при $0 < k < 1$. ▶

12. Доказать, что функция Бесселя

$$I_n : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 I_n''(x) + xI_n'(x) + (x^2 - n^2)I_n(x) = 0.$$

◀ Вычисляя производную от данного интеграла и интегрируя по частям, находим

$$I_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\ \varphi)\,d\varphi - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi (1-\sin^2\varphi)\cos(n\varphi - x\sin\ \varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\ \varphi)\,d\varphi - xI_n(x) - xI_n''(x). \qquad (1)$$

Поскольку $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\ \varphi)(n - x\cos\varphi)\,d\varphi = 0$, то

$$\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\ \varphi)\cos\varphi\,d\varphi = nI_n(x). \qquad (2)$$

Умножая обе части соотношения (1) на x и учитывая тождество (2), получаем уравнение Бесселя. ▶

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

13. $I(a) = \int\limits_0^\pi \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx.$

◀ Пусть $\left||a|-1\right| \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда функции $f : (a, x) \mapsto \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$, $f'_a : (a, x) \mapsto \frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x + a^2}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(\varepsilon, x) \mid \left||a|-1\right| \geqslant \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$ и, в соответствии с теоремой 1, п.1.3, возможно дифференцирование по параметру a под знаком интеграла. Имеем

$$I'(a) = 2\int_0^\pi \frac{a-\cos x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, приводим интеграл к виду

$$I'(a) = 4\int_0^{+\infty} \frac{a - 1 + (a+1)t^2}{(1+t^2)((1-a)^2 + (1+a)^2t^2)}\,dt.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов и формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$I'(a) = \begin{cases} \frac{2\pi}{a}, & \text{если} \quad |a| \geqslant 1+\varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad |a| \leqslant 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| + C_1, & \text{если} \quad |a| \geqslant 1+\varepsilon, \\ C_2, & \text{если} \quad |a| \leqslant 1-\varepsilon, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Поскольку полученный результат справедлив при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, то

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| + C_1, & \text{если} \quad |a| > 1, \\ C_2, & \text{если} \quad |a| < 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Для вычисления $I(\pm 1)$ используем исходный интеграл:

$$I(\pm 1) = \int_0^\pi \ln(2(1\pm\cos x))\,dx = 2\pi\ln 2 + 4\int_0^\pi \ln\sin\ t\,dt = 0. \qquad (2)$$

Поскольку $I(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Кроме того, как видим из (1), $\lim\limits_{|a|\to 1-0} I(a) = 0$. Следовательно, с учетом тождества (2) находим, что функция I непрерывна в точках $a = 1$, $a = -1$ соответственно слева и справа.

Замечая, что

$$I\left(\frac{1}{a}\right) = \int\limits_0^\pi \ln\left(\frac{1}{a^2}(a^2 - 2a\cos x + 1)\right) dx = -2\pi \ln |a| + I(a),\ a \neq 0, \tag{3}$$

приходим к выводу, что функция I непрерывна в указанных точках также справа и слева. Действительно, в этом случае из соотношения (3) находим

$$\lim_{|a|\to 1+0} I(a) = 2\pi \lim_{|a|\to 1+0} \ln |a| + \lim_{|a|\to 1+0} I\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{|a|\to 1-0} I(a) = 0.$$

Таким образом, функция I непрерывна при всех a. Поэтому, полагая $C_1 = 0$, имеем

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln |a|, & \text{если} \quad |a| > 1, \\ 0, & \text{если} \quad |a| \leqslant 1. \end{cases} \ ►$$

14. $I(a) = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$.

◄ Пусть $a \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad f'_a : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \left\{(x, \varepsilon) \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ a \geqslant \varepsilon > 0\right\}$. Поэтому, согласно теореме 1, п.1.3, при $a \geqslant \varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + a^2 t^2)} = \frac{\pi}{2(1 + a)};$$

из которого интегрированием находим

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + a) + C, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная.

Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть произвольно мало, то полученный результат справедлив при всяком $a > 0$. Тогда из (1) следует, что

$$C = \lim_{a\to +0} I(a). \tag{2}$$

Таким образом, если исходный интеграл представляет собой непрерывную функцию параметра a, то, с учетом (2), имеем $C = I(0)$. Но интеграл действительно непрерывен по a в силу теоремы 1, п.1.1. Следовательно, $C = 0$ и $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + a)$ при $a \geqslant 0$.

Учитывая еще очевидное равенство $I(a) = I(|a|) \operatorname{sgn} a$, окончательно находим $I(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \cdot \ln(1 + |a|)\ \forall a$. ►

15. $I(a) = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \frac{dx}{\cos x}$; $|a| < 1$.

◀ Функции

$$f:(x,\,a)\mapsto\begin{cases}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}, & x\neq\frac{\pi}{2},\\ 2a, & x=\frac{\pi}{2},\end{cases}\qquad f'_a:(x,\,a)\mapsto\frac{1}{1-a^2\cos^2 x}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi=\left\{(\varepsilon,\,x)\mid |a|\leqslant 1-\varepsilon<1,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$. Поэтому, в соответствии с п.1.3,

$$I'(a)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

откуда $I(a)=\pi\arcsin a+C$.

Устремляя ε к нулю, замечаем, что этот ответ правилен при $|a|<1$. Так как $I(0)=0$, то $C=0$. Таким образом, $I(a)=\pi\arcsin a$. ▶

16. Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},\quad x\neq 0,\tag{1}$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.\tag{2}$$

◀ Интеграл (2) является несобственным, поэтому его следует понимать как предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя сюда интеграл (1), получаем

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}.\tag{3}$$

Так как функция $f:(x,\,y)\mapsto\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ является непрерывной на прямоугольнике $\Pi=\{(x,\,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$, то из (3), используя теорему п.1.4, находим

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделав в интеграле $A=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}$, $|x|<1$, подстановку $t=\arcsin x$, получаем

$$A=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\left(z\sqrt{1+y^2}\right),\ z=\operatorname{tg}(\arcsin x).$$

Следовательно,

$$B(\varepsilon,\,y)=A\big|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\operatorname{tg}(\arcsin(1-\varepsilon))\right).$$

Поскольку функция B при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ является непрерывной (при $\varepsilon = 0$ полагаем $B(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} B(\varepsilon, y)$), то в соответствии с теоремой 1, п.1.2, имеем

$$I = \int\limits_0^1 \lim_{\varepsilon \to +0} B(\varepsilon, y)\, dy = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

17. Вычислить интегралы:

$$I_1 = \int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx; \quad I_2 = \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \ a > 0, \ b > 0.$$

◀ Используя представление (1) из предыдущего примера, вместо данных интегралов рассматриваем повторные:

$$I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dy; \quad I_2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) dy.$$

Функции

$$f_1 : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right), & 0 < x \leqslant 1, \quad a \leqslant y \leqslant b, \\ 0, & x = 0, \quad a \leqslant y \leqslant b, \end{cases}$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right), & 0 < x \leqslant 1, \quad a \leqslant y \leqslant b, \\ 0, & x = 0, \quad a \leqslant y \leqslant b, \end{cases}$$

непрерывны, поэтому можно выполнить перестановку интегралов:

$$I_1 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx, \quad I_2 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx.$$

Произведя подстановку $x = e^{-t}$, получаем

$$I_1 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t\, dt, \quad I_2 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t\, dt,$$

Выполняя внутреннее интегрирование, находим

$$I_1 = \int\limits_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1}, \quad I_2 = \int\limits_a^b \frac{(y+1)\, dy}{(y+1)^2+1},$$

откуда

$$I_1 = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что функция $F : y \mapsto \int\limits_a^b \varphi(x) f(x, y)\, dx$ является непрерывной на $[c, d]$, если выполнены условия:

1) функция f непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$;
2) функция φ абсолютно интегрируема на интервале $]a, b[$.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

2. $F : y \mapsto \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{\pi}{4}}(x^2+y^2+1)}$. **3.** $F : y \mapsto \begin{cases} \int\limits_0^{\pi} \frac{y^2\,dx}{(x+|y|)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

4. $F : y \mapsto \begin{cases} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}\,dx}{\operatorname{arctg}(x^2+y^2)\sin x}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Найти пределы:

5. $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)\,dx}{x^2y^2+xy+1}$. **6.** $\lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_1^2 \frac{y}{y+x} e^{-x^2y}\,dx$.

7. $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_{y^2}^{y^2+1} \frac{\arcsin x\,dx}{xy+(1+y^2)\frac{1}{y^2}}$. **8.** $\lim\limits_{y\to+0} \int\limits_{[y]}^{\operatorname{sgn} y} \frac{\sin(xy)}{(x+y)y+1}\,dx$.

Доказать, что в следующих случаях возможен предельный переход под знаком интеграла:

9. $\int\limits_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}+y^2}\,dx$, $y \to +\infty$. **10.** $\int\limits_{-1}^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{1+y}\right)dx$, $y \to 0$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\sin\frac{x^2}{y}\,dx$, $y \to \infty$. **12.** $\int\limits_0^1 \frac{\arccos(x+y)\,dx}{x+y+2}$, $y \to -\frac{1}{2}$.

13. Пусть: 1) функция $\psi : (x, y) \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{dy}$ непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$; 2) функция φ абсолютно интегрируема на $]a, b[$. Тогда функция $F : y \mapsto \int\limits_a^b \varphi(x) f(x, y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на $]c, d[$. Доказать это.

Исследовать на непрерывную дифференцируемость функцию F и возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла, если:

14. $F : y \mapsto \int\limits_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\,dx$. **15.** $F : y \mapsto \int\limits_{-1}^1 \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^2+|y|+2}$.

Доказать, что в следующих повторных интегралах можно изменить порядок интегрирования:

16. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}\,dx$. **17.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx$.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

2.1. Определение равномерной сходимости.

Пусть несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

где функция f определена в области $\Pi = \{(x, y) \mid a \leqslant x < +\infty,\ y_1 < y < y_2\}$, сходится на интервале $]y_1, y_2[$. Говорят, что интеграл (1) равномерно сходится на $]y_1, y_2[$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists B > a$ такое, что $\forall b > B \wedge \forall y \in]y_1, y_2[$ выполняется неравенство

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

2.2. Критерий Коши.

Для того чтобы интеграл (1), п.2.1, сходился равномерно на $]y_1, y_2[$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists A > a$ такое, что $\forall\alpha > A \wedge \forall\beta > A \wedge \forall y \in]y_1, y_2[$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_\alpha^{\beta} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

2.3. Признак Вейерштрасса.

Несобственный интеграл (1), п.2.1, сходится абсолютно и равномерно на $]y_1, y_2[$, если $\exists F :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ такая, что $|f(x, y)| \leqslant F(x)\ \forall x \in]a, +\infty[\wedge \forall y \in]y_1, y_2[$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится. Функция F называется *мажорирующей* по отношению к функции f.

2.4. Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 1. *Если* 1) *функция* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *непрерывна по переменной* x *и при* $y \to y_0 \in]y_1, y_2[$ *равномерно относительно* x *стремится к предельной функции* g *на каждом отрезке* $[a, A]$; 2) *интеграл* (1), *п.*2.1, *сходится равномерно на* $]y_1, y_2]$, *то*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Если функция* f *непрерывна при* $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ *и интеграл* (1), *п.*2.1, *сходится равномерно на* $]y_1, y_2]$, *то*

$$\lim_{y\to y_0\in[y_1,\, y_2]}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\,dx.$$

2.5. Непрерывность несобственного интеграла.

Теорема 1. *Если функция* f *непрерывна в области* $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ *и интеграл* (1), *п.*2.1, *сходится равномерно на отрезке* $[y_1, y_2]$, *то он представляет собой значение непрерывной функции на этом отрезке.*

Теорема 2. *Если:* 1) *функция* f *непрерывна и ограничена в указанной области;* 2) *функция* φ *интегрируема на каждом отрезке* $a \leqslant x \leqslant A$; 3) *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\varphi(x)\,dx$$

сходится равномерно и является значением равномерно-непрерывной функции параметра y *на отрезке* $[y_1, y_2]$.

Аналогичные определение и теоремы справедливы и для интегралов от неограниченных функций.

Определить области сходимости интегралов:

18. $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,dx.$

◀ Положим для определенности, что $p \geqslant q$. Функция

$$x \mapsto \int\limits_{\pi}^{x} \cos t\,dt = \sin x$$

ограничена. Функция $x \mapsto \frac{1}{x^{p-1}}$ монотонно стремится к нулю при $p > 1$. Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}}\,dx,$$

в силу признака Дирихле, сходится при $p > 1$. Так как функция $x \mapsto \frac{1}{1+x^{q-p}}$ монотонна и ограничена при $x > \pi$, то интеграл

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \cdot \frac{dx}{1+x^{q-p}}$$

по признаку Абеля, сходится при $p > 1$, т. е. при $\max(p, q) > 1$.

Это условие является и необходимым. Действительно, представляя интеграл в виде ряда и пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}+x^{q-1}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)} \frac{\cos x\,dx}{x^{p-1}+x^{q-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\xi_n^{p-1}+\xi_n^{q-1}}, \quad \frac{\pi}{2}(2n+1) \leqslant \xi_n < \frac{\pi}{2}(2n+3).$$

Из необходимого условия сходимости ряда вытекает неравенство $\max(p, q) > 1$, что и требовалось доказать. ▶

19. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$

◀ Произведем замену переменной x по формуле $x = t^{\frac{1}{q}}$, $t > 0$, $q > 0$, и разобьем полученный интеграл на два интеграла. Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx = \frac{1}{q}\int\limits_{0}^{a} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt + \frac{1}{q}\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt, \ \ \alpha = \frac{p-1}{q}+1, \ \ a > 0.$$

Так как $\frac{\sin t}{t^\alpha} = O^*\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$ при $t \to +0$, то первый интеграл, в силу признака сравнения, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geqslant 2$. Второй интеграл, в силу признака Дирихле, сходится при $\alpha < 2$. При $\alpha \leqslant 0$ этот интеграл расходится, так как при этом условии расходится соответствующий числовой ряд. Действительно, поскольку

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi_n^\alpha}, \quad \pi n \leqslant \xi_n \leqslant \pi(n+1),$$

то это утверждение становится очевидным.

Следовательно, если $q > 0$, то исходный интеграл сходится при условии $0 < \frac{p+q-1}{q} < 2$, или, что то же самое, при $|p-1| < q$

Если $q < 0$, то, полагая $q = -q_1$, $q_1 > 0$, и производя аналогичные выкладки и рассуждения, приходим к такому условию сходимости данного интеграла: $|p-1| < q_1$, или $|p-1| < -q$. Объединяя оба случая и учитывая, что при $q = 0$ интеграл расходится, приходим к выводу, что данный интеграл может сходиться только при условии $\left|\frac{p-1}{q}\right| < 1$. ►

20. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$.

◄ Положим $x = e^{-t}$. Тогда получим

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_{-\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{|t|^p} = \int_{-\ln 2}^{1} \frac{e^{-t}\,dt}{|t|^p} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t^p}. \tag{1}$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{|t|^p} = O^*\left(\frac{1}{|t|^p}\right)$ при $t \to 0$, то первый интеграл в правой части равенства (1), в силу признака сравнения, сходится лишь при $p < 1$. Второй интеграл сходится при всяком p, так как $e^t > t^{2-p}$ при достаточно большом t. Последнее неравенство вытекает из того, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{2-p}}{e^t} = 0$. Следовательно, данный интеграл сходится лишь при $p < 1$. ►

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx$.

◄ Положим $t = (1-x)^{-1}$, $x \neq 1$. Тогда получим

$$\int_0^1 \frac{\cos(1-x)^{-1}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{t^{2-n^{-1}}\left(2-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Поскольку функция $f : t \mapsto \frac{1}{\left(2-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{n}}}$, $t > 1$, монотонна и ограничена, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{t^{2-n^{-1}}}$, в силу признака Дирихле, сходится при $n < 0$ или при $n > \frac{1}{2}$, то рассматриваемый интеграл сходится, в силу признака Абеля, при этом же условии. Пользуясь приемом, примененным в примере 18, можно показать, что это условие является необходимым. ►

22. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx$, $p > 0$.

◄ Разобьем данный интеграл на два

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx. \tag{1}$$

Так как $f(x) = \frac{\sin x}{x^p + \sin x} \sim \frac{1}{x^{p-1}+1}$ при $x \to +0$, то первый интеграл в правой части равенства (1) сходится при любом p (точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции f). Поскольку

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right), \quad x \to +\infty,$$

и интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2p}}\,dx$, $p > 0$, в силу признака Дирихле, сходятся, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}}$ сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$, то второй интеграл из (1) сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$.

Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии. ▶

Исследовать сходимость интегралов путем сравнения их с рядами:

23. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n \sin^2 x}$, $n > 0$.

◀ Поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)\,dt}{1+(k\pi+t)^n \sin^2 t},$$

то будем исследовать сходимость последнего ряда.

Легко видеть, что

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} \frac{k\pi\,dt}{1+(k+1)^n\pi^n\sin^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)\,dt}{1+(k\pi+t)^n\sin^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{(k+1)\pi\,dt}{1+k^n\pi^n\sin^2 t} = I_2,$$

где $I_1 = \frac{k\pi^2}{\sqrt{1+(k+1)^n\pi^2}}$, $I_2 = \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+k^n\pi^n}}$. Так как $I_1 = O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$, $I_2 = O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$ при $k\to\infty$, то, по признаку сравнения, ряд, а значит и интеграл, сходится лишь при $n > 4$. ▶

24. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

◀ Представив данный интеграл в виде

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}},$$

будем рассматривать последний ряд. Полагая $x = n\pi + t$, имеем

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{\sin^2 t}}.$$

Заметим попутно, что этот интеграл является несобственным и сходится по признаку сравнения $\left(\frac{1}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right) \text{ при } t\to+0,\ \frac{1}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^*\left(\frac{1}{(\pi-t)^{\frac{2}{3}}}\right),\ t\to\pi-0\right)$.

В силу оценок

$$\frac{1}{\pi^p(n+1)^p}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{(n\pi+t)^p\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \frac{1}{\pi^p n^p}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}},$$

исследуемый ряд (интеграл) сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ который сходится только при $p > 1$. Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии. ▶

25. Доказать, что если: 1) интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходятся равномерно на $]y_1, y_2[$ и 2) функция φ ограничена и монотонна по x, то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx \qquad (1)$$

сходится равномерно на $]y_1, y_2[$.

◀ Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 1) согласно критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b', \xi, b'' > B(\varepsilon)$ независимо от $y \in]y_1, y_2[$ выполняются неравенства

$$\left|\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left|\int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{2}$$

где $M = \sup\limits_{x, y} |\varphi(x, y)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема, очевидно, справедлива).

Далее, поскольку функция φ монотонна по x, а функция f интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем

$$\int_{b'}^{b''} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx = \varphi(b'+0, y)\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx + \varphi(b''-0, y)\int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx,$$

где $b' \leqslant \xi \leqslant b''$. Отсюда, учитывая неравенства (2), получаем оценку

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\right| \leqslant |\varphi(b'+0, y)|\left|\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx\right| + |\varphi(b''-0, y)|\left|\int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

$\forall y \in]y_1, y_2[$. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл (1) сходится равномерно в указанной области. ▶

26. Доказать, что если: 1) функция $\varphi(x, y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$, $y \in]y_1, y_2[$, и монотонна по x, $x \in]a, +\infty[$; 2) первообразная $\int\limits_a^x f(t, y)\,dt$, $y_1 < y < y_2$, ограничена абсолютной постоянной M, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx \tag{1}$$

равномерно сходится в области $]y_1, y_2[$.

◀ К интегралу

$$\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx, \quad b', b'' \in]a, +\infty[,$$

применим вторую теорему о среднем. Тогда

$$\left|\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx\right| = \left|\varphi(b'+0, y)\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx + \varphi(b''-0, y)\int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\big(|\varphi(b'+0, y)| + |\varphi(b''-0, y)|\big).$$

Поскольку $\varphi(x, y)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ равномерно по параметру $y \in]y_1, y_2[$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $|\varphi(b'+0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $|\varphi(b''-0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ при $y_1 < y < y_2$, если только $b' > B \wedge b'' > B$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall y \in]y_1, y_2[,$$

если только $b' > B$ и $b'' > B$. В силу критерия Коши, интеграл (1) сходится равномерно в области $]y_1, y_2[$, что и требовалось доказать. ►

27. Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2\right\} dx, \quad 0 < y < 1,$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

◄ Интеграл $L = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ сходится, а поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists B(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \varepsilon. \tag{1}$$

Выберем число A так, чтобы

$$A > \frac{2L}{\varepsilon} + B(\varepsilon). \tag{2}$$

Произведя в интеграле $\int_A^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2\right\} dx$ замену $t = \frac{1}{y}\left(x - \frac{1}{y}\right)$ и используя неравенства (1) и (2), получаем оценку

$$\int_A^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2\right\} dx = y \int_{\frac{1}{y}\left(A - \frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt <$$

$$< \begin{cases} y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 2Ly < \varepsilon, & 0 < y < \frac{\varepsilon}{2L}, \\ \int_{\frac{1}{y}\left(A - \frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \int_{A - \frac{2L}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \int_B^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \varepsilon, & \frac{\varepsilon}{2L} \leqslant y < 1, \end{cases}$$

из которой непосредственно следует равномерная сходимость интеграла на $]0, 1[$.

Что же касается мажорирования, то здесь можно привести следующие соображения. Предположим, что такая мажорантная функция F существует. Тогда должно быть

$$f(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2\right\} \leqslant F(x).$$

Легко видеть, что благодаря конструкции области определения функции $f :]1, +\infty[\times]0, 1[\to \mathbb{R}$ $\forall x\ \exists y = \frac{1}{x}$ такое, что $f(x, y) = 1$. Таким образом, $F(x) \geqslant 1\ \forall x$. Очевидно, соответствующий несобственный интеграл от $F(x)$ расходится. ►

28. Показать, что интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$$

1) сходится равномерно в любом промежутке $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ и 2) сходится неравномерно в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

◄ В первом случае легко построить мажорирующую функцию $F : x \mapsto be^{-ax}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

Во втором случае, произведя замену $t = \alpha x$, $x > 0 \wedge \alpha > 0$, получим

$$\int_{B}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t}\, dt = e^{-\alpha B}.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0\ \exists \alpha,\ \alpha \in]0, b[$, такое, что $e^{-\alpha B} > \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Например, число α можно выбрать из неравенства $0 < \alpha < \frac{1}{B} \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно. ►

29. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

1) сходится равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$, и 2) сходится неравномерно на каждом отрезке $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

◄ В первом случае воспользуемся примером 25. Здесь функция $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ монотонно стремится к нулю (и равномерно относительно параметра α). Первообразная

$$\int_{a}^{x} \sin \alpha t\, dt = \frac{1}{\alpha}(\cos \alpha a - \cos \alpha x)$$

ограничена числом $\frac{2}{\min(|a|, |b|)}$. Следовательно, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно.

Во втором случае положим $x = \alpha t$, $\alpha > 0 \wedge t > 0$. Тогда получим

$$\int_{B}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_{B\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0\ \exists \alpha \in [a, b]$ такое, что

$$\left| \int_{B}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| > \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \int_{0,1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Действительно, для этого достаточно взять $\alpha \leqslant \frac{0,1}{B}$.

При $\alpha < 0$ применяем подстановку $x = -\alpha t$ и, проводя аналогичные рассуждения, приходим к такому же выводу.

Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно. ►

30. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ в следующих промежутках: а) $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$; б) $1 < \alpha < +\infty$.

◄ а) Легко видеть, что $\frac{1}{x^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ при $1 \leqslant x < +\infty$, $\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

б) Поскольку $\int\limits_{B}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ и $\lim\limits_{\alpha \to 1+0} \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = +\infty$, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall B_0\ \exists B > B_0 \wedge \exists \alpha \in]1, +\infty[$ такие, что $\int\limits_{B}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} > \varepsilon$. Следовательно, интеграл в этом случае сходится неравномерно. ►

31. Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ сходится неравномерно на интервале $1 < \alpha < +\infty$.

◀ Пусть $B > 1$. Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1} > \frac{1}{2} \int\limits_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \to +\infty, \ \alpha \to 1 + 0,$$

указывающая на то, что данный интеграл сходится неравномерно (см. пример 30). ▶

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

32. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\, dx, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$

◀ Поскольку $\frac{|\cos \alpha x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < \alpha < +\infty$, и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно. ▶

33. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}, \quad 0 \leqslant \alpha < +\infty.$

◀ В интеграле $I(B, \alpha) = \int\limits_B^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ произведем замену $x = \alpha + t$.Тогда $I(B, \alpha) = \int\limits_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$. Если положить $\alpha = B > 0$, то при любом B будет $I(B, \alpha) > \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, данный интеграл сходится неравномерно. Заметим, что сходимость рассматриваемого интеграла при фиксированном α, $0 \leqslant \alpha < +\infty$, следует из признака сравнения $\left(\frac{1}{(x-\alpha)^2+1} \sim \frac{1}{x^2},\, x \to +\infty\right)$. ▶

34. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx, \quad 0 \leqslant \alpha < +\infty.$

◀ Воспользуемся примером 25. Здесь $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, согласно признаку Дирихле, сходится, а функция $x \mapsto e^{-\alpha x}$ монотонна по x $\left((e^{-\alpha x})'_x = -\alpha e^{-\alpha x} \leqslant 0\right)$ и ограничена единицей. Следовательно, согласно указанному примеру, данный интеграл сходится равномерно. ▶

35. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\, dx, \quad 0 \leqslant p \leqslant 10.$

◀ Поскольку $\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \leqslant \left(\frac{40}{e}\right)^{10} \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$ при $x \geqslant e$, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно. ▶

36. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p}\, dx, \quad 0 \leqslant \alpha < +\infty$, где $p > 0$ фиксировано.

◀ В силу того, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$ при $p > 0$ сходится (по признаку Дирихле), а функция $x \mapsto e^{-\alpha x}$ монотонна по x и ограничена единицей, то, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно. ▶

37. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx$, $\quad 0 \leqslant \alpha < +\infty$.

◀ Полагая $\sqrt{\alpha}x = t$ в интеграле $\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx$, имеем

$$\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx = \int\limits_{B\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Взяв $\alpha = \frac{1}{B^2}$, $B > \alpha$, получаем неравенство $\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx > \varepsilon$, справедливое при любом B, если

$$0 < \varepsilon < \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Следует заметить, что данный интеграл при $\alpha \geqslant 0$ сходится по признаку сравнения. ▶

38. $I(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

◀ Очевидно, $I(0) = 0$. Полагая в данном интеграле $t = |x|y$, $x \neq 0$, получаем $I(x) = C\frac{\sin x}{|x|} e^{-x^2}$ $\left(C = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \neq 0\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to -0} I(x) = -C$, $\lim\limits_{x\to +0} I(x) = C$, то функция I разрывна в нуле. А тогда, согласно теореме 1, п.2.5, интеграл сходится неравномерно (если бы он сходился равномерно, то, в силу непрерывности подынтегральной функции, представлял бы собой непрерывную функцию). ▶

39. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\, dx$, $\quad p \geqslant 0$.

◀ Произведя замену $x = \sqrt{t}$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{2\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)\sqrt{t}}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$, в силу признака Дирихле, сходится, а функция $t \mapsto \frac{1}{2\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}$, $p \geqslant 0$, монотонна по t и ограничена числом 0,5, то, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно. ▶

40. $\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx$, если: а) $p \geqslant p_0 > 0$; б) $p > 0$, $q > -1$.

◀ Произведем замену переменной x по формуле $x = e^{-t}$, $t > 0$. Тогда получим

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} t^q e^{-pt}\, dt.$$

а) Поскольку $t^q e^{-pt} \leqslant t^q e^{-p_0 t}$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^q e^{-p_0 t}\,dt$, в силу признака сравнения, сходится, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

б) В интеграле $I(B, p) = \int\limits_B^{+\infty} t^q e^{-pt}\,dt$, $B > 0$, положим $z = pt$. Тогда получим

$$I(B, p) = \frac{1}{p^{q+1}} \int\limits_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z}\,dz.$$

Пусть числа $B > 0$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Тогда в силу того, что

$$\lim_{p\to+0} \frac{1}{p^{q+1}} \int\limits_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z}\,dz = +\infty,$$

всегда можно выбрать число $p > 0$ так, что $I(B, p) > \varepsilon$.

Итак, данный интеграл сходится неравномерно. ►

41. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad 0 \leqslant n \leqslant +\infty.$

◄ Поскольку $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно. ►

42. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}, \quad 0 < n < 2.$

◄ Положим $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}}\,dt.$$

Далее, интегрированием по частям находим

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}}\,dt = \frac{\cos B}{B^{2-n}} + (n-2)\int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}}\,dt. \qquad (1)$$

Последний интеграл, в силу примера 26, сходится равномерно (здесь функция $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^{3-n}} \leqslant \frac{1}{t} \to 0$ при $t \to \infty$ и монотонна по t, первообразная $\int\limits_a^x \cos t\,dt = \sin x - \sin a$ ограничена числом 2). Поэтому при достаточно большом B справедлива оценка $\left|\int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}}\,dt\right| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$ — наперед заданное число.

Что же касается слагаемого $\frac{\cos B}{B^{2-n}}$ в (1), то оно не может быть сделано как угодно малым при всех достаточно больших $b \geqslant B$ равномерно относительно параметра n. Действительно, пусть $B > 0$ задано. Пусть, кроме этого, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда, выбирая число $b = 2k\pi > B$, $k \in \mathbb{N}$, значение параметра n из неравенства $0 < 2 - n < \frac{\ln \varepsilon_2^{-1}}{\ln 2k\pi}$, получаем $\left|\frac{\cos b}{b^{2-n}}\right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-n}} > \varepsilon_2$.

Следовательно, исследуемый интеграл сходится неравномерно.

Заметим, что сходимость данного интеграла при $0 < n < 2$ вытекает из признака Дирихле. ►

43. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, \quad |\alpha| < \frac{1}{2}.$

◀ Поскольку

$$0 \leqslant \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}, & 0 < x < 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

то

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} + \int_1^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}.$$

В силу оценок

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to +0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), \quad x \to 1,$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right), \quad x \to 2,$$

и признака сравнения, два последних интеграла сходятся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исследуемый интеграл сходится равномерно. ▶

44. Подобрать число $b > 0$ так, чтобы $0 < \displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \varepsilon$ при $1{,}1 \leqslant n \leqslant 10$, где $\varepsilon = 10^{-6}$.

◀ Поскольку $\frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{1,1}}$, то

$$0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,1}} = \frac{10}{b^{0,1}}.$$

Таким образом, решая неравенство $b^{\frac{10}{0,1}} < 10^{-6}$, находим, что если $b > 10^{70}$, то указанное в условии примера неравенство будет обеспечено. ▶

45. Пусть интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx, \quad c < y < d, \tag{1}$$

является несобственным сходящимся интегралом и $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \in]a, b[$, есть кривая бесконечного разрыва функции f (подвижная особенность). Интеграл (1) будем называть *равномерно сходящимся* на интервале $]a, b[$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0$ такое, что для любых δ_1 и δ_2 из неравенств $0 < \delta_1 < \Delta \wedge 0 < \delta_2 < \Delta$ следует неравенство

$$\left| \int_{\varphi(y)-\delta_1}^{\varphi(y)+\delta_2} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in]c, d[.$$

Показать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}}\,dx, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

сходится равномерно.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что

$$\left| \int\limits_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}}\, dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, 1] \tag{2}$$

в смысле данного выше определения.

Имеем

$$\left| \int\limits_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}}\, dx \right| \leqslant \int\limits_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}} = \int\limits_{y-\delta_1}^{y} \frac{dx}{\sqrt{y-x}} + \int\limits_{y}^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2\left(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}\right) < 4\sqrt{\Delta} \tag{3}$$

для любых δ_1 и δ_2 таких, что $0 < \delta_1 < \Delta$ и $0 < \delta_2 < \Delta$.

Если теперь $\forall \varepsilon > 0$ взять $\Delta = \frac{\varepsilon^2}{16}$, то из (3) получим неравенство (2). Следовательно, данный интеграл сходится равномерно. ▶

46. Несобственный интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} M(x, y)\, dx, \quad y \in Y, \tag{1}$$

где M — матричная функция, называется *равномерно сходящимся* на множестве Y, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 \geqslant a$ такое, что $\forall A > A_0 \wedge \forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left\| \int\limits_{A}^{+\infty} M(x, y)\, dx \right\| < \varepsilon,$$

где $M(x, y) = (a_{ij}(x, y))$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Доказать, что равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех интегралов

$$\int\limits_{a}^{+\infty} a_{ij}(x, y)\, dx \text{ на } Y. \tag{2}$$

◀ 1. Пусть интегралы (2) сходятся равномерно. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 \geqslant a$ такое, что $\forall A > A_0 \wedge \forall y \in Y$ выполняются неравенства

$$\left| \int\limits_{A}^{+\infty} a_{ij}(x, y)\, dx \right| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

С учетом этих неравенств имеем оценку

$$\left\| \int\limits_{A}^{+\infty} M(x, y)\, dx \right\| = \left\| \left(\int\limits_{A}^{+\infty} a_{ij}(x, y)\, dx \right) \right\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{A}^{+\infty} a_{ij}(x, y)\, dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\sqrt{mn},$$

которая показывает, что несобственный интеграл (1) сходится равномерно.

2. Пусть интеграл (1) сходится равномерно на Y. Тогда выполняется данное в условии определение, а значит, справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{A}^{+\infty} a_{ij}(x, y)\, dx \right)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} a_{ij}(x, y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall y \in Y,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

т. е. несобственные интегралы от всех элементов матрицы $M(x, y)$ сходятся равномерно. ►

47. Исследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} M(x, y)\,dx, \quad y \in Y, \quad Y = [0, +\infty[, \quad M(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x(y+1)}\sin x & \frac{\cos x(y+0,1)}{x+y} \\ x^{1-y}e^{-x} & \ln\left(1 + \frac{y}{x^2+y^3}\right) \end{pmatrix}.$$

◄ Согласно доказанному выше, равномерная сходимость данного интеграла эквивалентна равномерной сходимости интегралов от элементов матрицы $M(x, y)$:

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x(1+y)}\sin x\,dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x(y+0,1)}{x+y}\,dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} x^{1-y}e^{-x}\,dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{y}{x^2+y^3}\right)dx.$$

Первый, третий и четвертый интегралы сходятся равномерно по признаку Вейерштрасса, поскольку мажорируются соответствующими сходящимися интегралами

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx, \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

Второй интеграл также равномерно сходится, поскольку: 1) семейство функций $x \mapsto \frac{1}{x+y} \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$; 2) функция $x \mapsto \frac{1}{x+y}$ при каждом фиксированном y монотонно убывает к нулю; 3) $\left|\int\limits_1^x \cos t(y+0{,}1)\,dy\right| \leqslant 20$, т. е. выполняются все условия примера 26. Таким образом, несобственный интеграл от матрицы $M(x, y)$ сходится равномерно. ►

48. Функция f интегрируема в промежутке $]0, +\infty[$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

◄ Оценим разность

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)\,dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{B}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx + \int\limits_B^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда, замечая, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx$, согласно примеру 25, сходится равномерно при $\alpha \geqslant 0$ (здесь функция $|x| \mapsto e^{-\alpha x} - 1$ ограничена единицей и монотонна по $x \geqslant 0$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$, по условию, сходится), при достаточно большом фиксированном B можем записать

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-1\right)f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall\alpha\geqslant 0. \tag{2}$$

По данному ε и фиксированному B найдем α такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_0^B(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Имеем

$$\left|\int\limits_0^B(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx\right|\leqslant(1-e^{-\alpha B})MB<\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{B}\ln\frac{2MB}{2MB-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<2MB, \tag{4}$$

где $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant B}|f(x)|\neq 0$ (при $M=0$ теорема тривиальна).

Тогда из (1), с учетом неравенств (2), (3), находим

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx-\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

если B достаточно велико, а число α удовлетворяет условию (4). ►

49. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0$, если f абсолютно интегрируема в промежутке $]0, +\infty[$.

◄ Данный интеграл, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно относительно параметра n. Поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall A>A_0(\varepsilon)\wedge\forall n$

$$\left|\int\limits_A^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Промежуток $[0, A]$ разобьем на $k+1$ частей точками $0=x_0<x_1<\ldots<x_{k+1}=A$ и представим интеграл $\int\limits_0^A f(x)\sin nx\,dx$ в виде

$$\int\limits_0^A f(x)\sin nx\,dx=\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x)-m_i)\sin nx\,dx+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k}m_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\sin nx\,dx,\quad m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}\{f(x)\}. \tag{2}$$

Поскольку $f(x)-m_i\leqslant\omega_i$, где ω_i — колебание функции f на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, то из (2) получаем оценку

$$\left|\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\sin nx\,dx\right|\leqslant\sum_{i=0}^{k}\omega_i\,\Delta x_i+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{k}|m_i|. \tag{3}$$

В силу интегрируемости функции f, для ранее заданного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение сегмента $[0, A]$, для которого

$$\sum_{i=0}^{k} \Delta x_i \omega_i < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

При выбранном разбиении числа m_i фиксированы; поэтому если возьмем $n > \frac{6}{\varepsilon} \sum\limits_{i=0}^{k} |m_i|$, то из неравенств (3), (4) и (1) получим окончательно $\left| \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| < \varepsilon$. ▶

50. Доказать, что если: 1) $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ на каждом интервале $]a, b[$; 2) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, где $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx.$$

◀ Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_0^{+\infty} f(x, y_0)\, dx = \int_a^b \big(f(x, y) - f(x, y_0)\big)\, dx + \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_b^{+\infty} f(x, y_0)\, dx, \quad b > a. \tag{1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 2), при достаточно большом b справедливы оценки

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \int_b^{+\infty} F(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_b^{+\infty} f(x, y_0)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

а в силу условия 1), — оценка

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in]a, b[, \tag{3}$$

если разность $|y - y_0|$ достаточно мала.

Таким образом, из (1), с учетом оценок (2) и (3), получаем

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\, dx \right| < \varepsilon$$

при достаточной близости y к y_0. ▶

51. Пусть f — непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty[$ функция. Доказать, что

$$I = \lim_{y \to \pm 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\, dx = \pm f(0).$$

◀ Положим $x = ty$, $t > 0$, $y > 0$. Тогда

$$I = \lim_{y \to +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2 + 1}\, dt.$$

Так как $\frac{|f(ty)|}{t^2+1} \leqslant \frac{M}{t^2+1}$, где $|f(ty)| \leqslant M = \text{const}$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ (сходится), а в силу непрерывности функции f дробь $\frac{f(ty)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \to +0$ на каждом конечном интервале $]a, b[$, то, согласно примеру 50, получаем

$$\lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}\,dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to+0} \frac{f(ty)}{t^2+1}\,dt = f(0). \tag{1}$$

В силу нечетности интеграла по переменной y и равенства (1), имеем

$$\lim_{y\to-0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx = -f(0). \blacktriangleright$$

52. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$.

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1 - \int\limits_0^{1} \frac{x^n\,dx}{x^n+1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$$

и замечая, что

$$\int\limits_0^{1} \frac{x^n\,dx}{x^n+1} < \int\limits_0^{1} x^n\,dx = \frac{1}{n+1}, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} < \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1. \blacktriangleright$$

53. Показать, что $F : \alpha \mapsto \int\limits_0^{1} \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,dx$ есть непрерывная функция на интервале $-\infty < \alpha < 2$.

◀ Выполняя замену $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, получаем

$$F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}\,dt.$$

Пусть $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда, в силу оценки $\frac{|\sin\alpha t|}{t^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ и признака Вейерштрасса, рассматриваемый интеграл сходится равномерно. Если учесть еще, что функция $t \mapsto \frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}$ при $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $t \geqslant 1$ непрерывна, то на основании теоремы 1, п.2.5, можно утверждать, что функция F непрерывна в указанном промежутке.

Пусть $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\left|\int\limits_1^{x} \sin\alpha t\,dt\right| < \frac{2}{\alpha} \leqslant 4$; функция $t \mapsto \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ при фиксированном α монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$. Это стремление, как показывает оценка $\frac{1}{t^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{t^\varepsilon}$, равномерно по α. Поэтому, в соответствии с утверждением примера 26, данный интеграл сходится равномерно. Принимая еще во внимание непрерывность подынтегральной функции при $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$, устанавливаем, что функция F непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Таким образом, функция F непрерывна при $-\infty < \alpha \leqslant 2-\varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то требуемое доказано. ►

54. Определить точки разрыва функции

$$F : a \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin((1-a^2)x^2)}{x}\, dx.$$

◄ Полагая $t = (1-a^2)x$, $a \neq \pm 1$, получаем

$$F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \operatorname{sgn}(1-a^2).$$

Очевидно, это выражение справедливо и при $|a| = 1$. Точки $a = 1$ и $a = -1$ являются точками разрыва первого рода функции F. ►

Исследовать на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

55. $F : \alpha \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{2+x^\alpha}$, $\alpha > 2$.

◄ Можно показать (см. пример 31), что этот интеграл сходится неравномерно в указанной области (сходимость его вытекает из признака сравнения). Поэтому о непрерывности функции F сказать пока что ничего нельзя.

Пусть $\alpha \geqslant 2+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В случае $x \geqslant 1$ имеем $\frac{x}{2+x^\alpha} \leqslant \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}}$. Поскольку $\frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} = O^*\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ при $x \to +\infty$, то, на основании признака Вейерштрасса, интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\, dx}{2+x^\alpha}$$

сходится равномерно. Учитывая еще непрерывность подынтегральной функции, согласно теореме 1, п.2.5, устанавливаем непрерывность функции Φ при $\alpha \geqslant 2+\varepsilon$, т. е. при $\alpha > 2$.

Принимая во внимание, что функция

$$\Psi : \alpha \mapsto \int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{2+x^\alpha},$$

в силу п.1.1, непрерывна при $\alpha > 2$, приходим к выводу, что функция $F : \alpha \mapsto \Psi(\alpha) + \Phi(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha > 2$. ►

56. $F : \alpha \mapsto \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\, dx$, $0 < \alpha < 2$.

◄ Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon < 2$. Тогда, разбивая данный интеграл на три интеграла и оценивая подынтегральную функцию, получаем

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\, dx < \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha-1}(\pi-x)^\alpha} + \int\limits_1^{\pi-1} \frac{dx}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{x^\alpha(\pi-x)^{\alpha-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} + \pi - 2 + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}.$$

Поскольку последние интегралы, в силу признака сравнения, являются сходящимися, то, согласно признаку Вейерштрасса, исходный интеграл равномерно сходится при $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$. Учитывая еще непрерывность функции

$$f:(x,\alpha)\mapsto \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}$$

в области $0<x<\pi$, $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$, в соответствии с теоремой 1, п.2.5, заключаем, что функция F непрерывна на каждом отрезке $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$. Следовательно, она непрерывна в интервале $0<\alpha<2$. ►

57. $F:\alpha\mapsto \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{|\sin x|^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$.

◄ Замена переменной x по формуле $x=k\pi+t$ в интеграле под знаком суммы

$$F(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{e^{-x}\,dx}{|\sin x|^{\alpha}}$$

преобразует данный интеграл к следующему:

$$F(\alpha)=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{-t}\,dt}{\sin^{\alpha}t}.$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\leqslant\left(\frac{\pi}{2t}\right)^{\alpha}\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\varepsilon}\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}$, $0<t\leqslant 1$, где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл $\int\limits_0^1\frac{e^{-t}\,dt}{\sin^{\alpha}t}$ равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Аналогично можно показать, что интеграл $\int\limits_{\pi-1}^{\pi}\frac{e^{-t}\,dt}{\sin^{\alpha}t}$ также равномерно сходится на этом отрезке. Так как, кроме того, функция $t\mapsto\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}$ непрерывна в области $0<t<\pi$, $0<\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 1-\varepsilon$, то, согласно теореме 1, п.2.5, функция F непрерывна при $\alpha\in[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon>0$, эта функция непрерывна при $\alpha\in]0,1[$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную сходимость в указанных интервалах следующие несобственные интегралы:

18. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{R(x+y)}{x+y+1}\,dx$, $0<y<+\infty$, R — функция Римана.

19. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x}}\,dx$, $0<y\leqslant A$. **20.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{y}{y+1}\operatorname{arctg}(xy)\,dx$, $0<y<+\infty$.

21. $\int\limits_1^{+\infty}x\frac{\cos(x^2+y)}{x+y}\,dx$, $y>0$. **22.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{yx^y}\,dx$, $1<y<+\infty$.

23. $\int\limits_0^1 x^{y-1}\ln(1-x)\,dx$, $y>0$. **24.** $\int\limits_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^y}\,dx$, $-\infty<y<2$.

25. $\int\limits_0^1 y\cos\frac{1}{x^2}\,dx$, $-\infty<y<+\infty$.

Найти пределы:

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}f_n(x)\,dx$, где $f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{x^2}e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\frac{\sin 2tx}{t}\,dt$. **28.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$.

Показать, что следующие функции непрерывны:

29. $F: y\mapsto \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{(x+y)^2}\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+1}$, $1\leqslant y\leqslant 2$. **30.** $F: y\mapsto\int\limits_0^1\frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y}}\,dx$, $y\geqslant 1$.

§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

3.1. Дифференцирование по параметру.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) *функция* f'_y *непрерывна в области* $a\leqslant x<+\infty$, $y_1\leqslant y\leqslant y_2$; 2) *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится;* 3) *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на отрезке* $[y_1, y_2]$. *Тогда*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

на отрезке $[y_1, y_2]$.

Теорема 2. Если функции f и f'_y *непрерывны и ограничены в указанной области, а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(x)\,dx$ *представляет собой значение дифференцируемой функции на отрезке* $[y_1, y_2]$ *и*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(x)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\varphi(x)\,dx.$$

3.2. Интегрирование по параметру.

Теорема 1. Если функция f *непрерывна при* $x\geqslant a$ *и* $y\in[y_1, y_2]$, *а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *равномерно сходится на* $[y_1, y_2]$, *то справедлива формула*

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy.$$

Эта формула справедлива также и в том случае, когда $y_1=-\infty$, $y_2=+\infty$, если $f(x,y)\geqslant 0$, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ непрерывны и один из повторных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ или $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ сходится.

Теорема 2. Если функция f *непрерывна при* $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y<+\infty$, *а интегралы*

$$\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{и} \quad \int^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

сходятся равномерно: первый — на каждом отрезке $[a, A]$, *а второй — на каждом отрезке* $[c, C]$, *и если хотя бы один из повторных интегралов*

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)|\, dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)|\, dx$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx.$$

Теорема 3. Если f *непрерывна и ограничена при* $a \leqslant x < +\infty$, $y \in [y_1, y_2]$, *а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx$ *сходится, то*

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\varphi(x)\, dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

58. Пользуясь формулой $\int\limits_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}$, $n > 0$, вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x\, dx,$$

где $m \in \mathbb{N}$.

◀ Формально дифференцируя m раз по параметру n обе части указанной формулы, получаем

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x\, dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{(m)} = (-1)^m \frac{m!}{n^{m+1}}.$$

Покажем, что m-кратное дифференцирование под знаком интеграла возможно. Для этого, полагая $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, преобразуем данные в условии интегралы к следующим:

$$\int_0^1 x^{n-1}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad I = (-1)^m \int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\, dt.$$

Поскольку функции $t \mapsto t^{-n-1}$ и $t \mapsto t^{-n-1} \ln^m t$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leqslant n < +\infty$, $1 \leqslant t < +\infty$ и интеграл $\int\limits_0^1 x^{n-1}\, dx$ сходится, то, в силу п.3.1, остается показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\, dt$ сходится равномерно на полуинтервале $0 < \varepsilon \leqslant n < +\infty$. Действительно, так как

$$\frac{|\ln^m t|}{t^{n+1}} \leqslant \frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leqslant \left(\frac{2m}{e^\varepsilon}\right)^m \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл I равиомерио сходится на указанном полуинтервале. Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, согласно теореме 1, п.3.1, дифференцирование по параметру n, $n \geqslant \varepsilon$, справедливо, т. е. справедливо при $n > 0$. ▶

59. Пользуясь формулой $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$, вычислить интеграл

$$I_{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Формально дифференцируя n раз по a левую и правую части данной в условии формулы, имеем

$$(-1)^n n! \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{\pi}{a}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!(2n-1)!!}{(2n)!!a^n 2\sqrt{a}}\pi,$$

откуда следует значение интеграла I_{n+1}.

Возможность n-кратного дифференцирования вытекает из п.3.1. Действительно, функции $(x, a) \mapsto \frac{1}{x^2+a}$ и $(x, a) \mapsto \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leqslant a < +\infty$, $0 \leqslant x < +\infty$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ сходится при $a > 0$. Интеграл I_{n+1} сходится равномерно по признаку Вейерштрасса $\left(\frac{1}{(x^2+a)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}} \text{ при } x \geqslant 0\right)$ на полуинтервале $\varepsilon \leqslant a < +\infty$. Поэтому на этом полуинтервале, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и на интервале $0 < a < +\infty$ дифференцирование возможно. ▶

60. Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$ имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

◀ Положим $\alpha x = t$. Тогда $I(\alpha) = \text{const}$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ имеем $I'(\alpha) = 0$. Если же формально продифференцировать по α под знаком интеграла, то получим расходящийся интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x\,dx. \text{ ▶}$$

61. Доказать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}, \ a > 0, \ b > 0,$$

где f — непрерывная функция и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ сходится $\forall A > 0$.

◀ В силу условий теоремы имеем

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int\limits_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \quad \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Применяя к последнему интегралу первую теорему о среднем, получаем

$$\int_{A}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{dt}{t} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}, \quad Aa \leqslant \xi \leqslant Ab. \tag{1}$$

Поскольку функция f непрерывна, то $\lim\limits_{A\to+0} f(\xi) = f(0)$, в силу чего из (1) вытекает, что существует

$$\lim_{A\to+0}\int_{A}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Замечание. Может случиться, что интеграл $\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$, $A>0$, расходится, но существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$, а также сходится интеграл $\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{f^*(x)}{x}\,dx$, где $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$. Тогда на основании изложенного выше

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \big(f(0)-f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}.$$

Вычислить интегралы:

62. $I(\alpha) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0.$

◀ Пусть $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $\beta \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f:(x,\alpha)\mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases} \qquad f'_\alpha:(x,\alpha)\mapsto -xe^{-\alpha x^2}$$

непрерывны в области $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$; интеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx,$$

в силу признака сравнения, сходится, а интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx$, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно (здесь $x\mapsto xe^{-\varepsilon x^2}$ мажорантная функция) на полуинтервале $\alpha\geqslant\varepsilon$. Поэтому дифференцирование по α под знаком интеграла по теореме 1, п.3.1, возможно. Имеем

$$I'(\alpha) = -\int_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx = -\frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha\geqslant\varepsilon>0.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi(\beta)$. Очевидно, $I(\beta)=0$. Поэтому $\varphi(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$, $\beta\geqslant\varepsilon>0$.

Итак, $I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha\geqslant\varepsilon>0$. В силу произвольности $\varepsilon>0$, этот ответ справедлив $\forall\,\alpha>0,\ \beta>0$. ▶

63. $I(\alpha) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0.$

◀ Как и в предыдущем примере, легко показать, что дифференцирование по α возможно (полагаем сначала, что $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $\beta \geqslant \varepsilon > 0$). Тогда имеем

$$I'(\alpha) = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-2\alpha x}}{x}\, dx.$$

Применяя формулу Фруллани (см. пример 61), находим $I'(\alpha) = 2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$. Отсюда интегрированием по α получаем

$$I(\alpha) = -2(\alpha+\beta)\big(\ln(\alpha+\beta) - 1\big) + 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) + \varphi(\beta).$$

Из условия $I(\beta) = 0$ следует, что $\varphi(\beta) = 2\beta(\ln 2\beta - 1)$. Поэтому

$$I(\alpha) = \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}, \quad \alpha \geqslant \varepsilon > 0, \ \beta \geqslant \varepsilon > 0.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $\beta > 0$. ▶

64. $I(m) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

◀ Дифференцируя по параметру m, получаем

$$I'_m(m) = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx\, dx. \tag{1}$$

Дифференцирование под знаком интеграла по теореме 1, п.3.1, возможно, так как функции

$$f : (m, x) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f'_m : (m, x) \mapsto (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx$$

непрерывны в области $-\infty < m < +\infty$, $0 \leqslant x < +\infty$; интеграл (1), в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно, а данный интеграл сходится.

Выполняя интегрирование в (1), находим $I'_m(m) = \frac{\alpha}{\alpha^2+m^2} - \frac{\beta}{\beta^2+m^2}$, откуда $I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{m}{\beta} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно, $I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m(\beta-\alpha)}{\alpha\beta+m^2}$. ▶

65. $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad |\alpha| \leqslant 1.$

◀ Пусть $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда при фиксированном ε функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}, & x \neq 0, \\ -\alpha^2, & x = 0, \end{cases} \qquad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

непрерывны в области $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$, $|x| < 1$. Интеграл $I(\alpha)$ сходится по признаку сравнения, а интеграл

$$I'(\alpha) = -2\int\limits_0^1 \frac{\alpha\, dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно $\left(|f'_\alpha(x, \alpha)| \leqslant \frac{2}{\left(1-(1-\varepsilon)^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\right)$ на отрезке $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$. Следовательно, дифференцирование по параметру α под знаком интеграла возможно при $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$ (см. теорему 1, п.3.1).

Полагая в (1) $x = \sin t$, получаем

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - \alpha^2 \sin^2 t} = -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = \pi\sqrt{1-\alpha^2} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = -\pi$. Следовательно,

$$I(\alpha) = \pi\left(\sqrt{1-\alpha^2} - 1\right). \tag{2}$$

В силу произвольности ε, заключаем, что этот ответ пригоден при $|\alpha| < 1$.

Нетрудно видеть, что функция f непрерывна в области $|\alpha| \leqslant 1$, $|x| < 1$. В силу признака Вейерштрасса, интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на сегменте $|\alpha| \leqslant 1$ $\left(|f(x, a)| \leqslant \frac{|\ln(1-x^2)|}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)$. Следовательно, функция I непрерывна при $|\alpha| \leqslant 1$. Поэтому $I(\pm 1) = \lim\limits_{|\alpha| \to 1-0} I(\alpha)$, т. е. формула (2) справедлива при $\alpha = \pm 1$. ►

66. $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad |\alpha| \leqslant 1.$

◄ Аналогично предыдущему (см. пример 65) получаем

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), & 0 < |\alpha| < 1, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $I(\alpha) = -\pi\ln(1 + \sqrt{1-\alpha^2}) + C$, $|\alpha| < 1$. Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \pi\ln 2$. Следовательно,

$$I(\alpha) = -\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}.$$

В силу непрерывности исходного интеграла при $|\alpha| \leqslant 1$ это выражение справедливо также при $|\alpha| \leqslant 1$. ►

67. $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

◄ Функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

непрерывны в области $1 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

равномерно сходятся по признаку Вейерштрасса, так как

$$\frac{|\operatorname{arctg}\alpha x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

и соответствующие интегралы от мажорирующих функций сходятся. Следовательно, функции f и f'_α непрерывны при всех α и дифференцирование под знаком данного интеграла возможно. Имеем

$$I'(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}.$$

Полагая здесь $x = \operatorname{ch} t$, получаем $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}) + C$, $\alpha \geqslant 0$. Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 + \alpha - \sqrt{1+\alpha^2})$, $\alpha \geqslant 0$.

Аналогично при $\alpha \leqslant 0$ получаем $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1+\alpha^2})$. Окончательно имеем $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2}) \operatorname{sgn} \alpha$, $|\alpha| < \infty$. ▶

68. $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}\, dx.$

◀ Пусть $\beta \neq 0$. Тогда функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}, \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)}$$

непрерывны при $0 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно, в силу признака Вейерштрасса, на любом отрезке $[-A, A]$,

$$\frac{|\ln(\alpha^2 + x^2)|}{\beta^2 + x^2} \leqslant \frac{\varphi(x)}{\beta^2 + x^2}, \quad \varphi(x) = \max\left\{\left|\ln(A^2 + x^2)\right|, \left|\ln x^2\right|\right\}.$$

Интеграл

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha\, dx}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \tag{1}$$

также сходится равномерно, но только на отрезке $0 < \varepsilon \leqslant |\alpha| \leqslant A$.

Действительно, в этом случае

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \leqslant \frac{2A}{(\varepsilon^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \equiv \psi(x)$$

и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$ сходится.

Таким образом, функция I непрерывна $\forall \alpha \in]-\infty, +\infty[$, а функция I' непрерывна при $|\alpha| > 0$.

Выполняя интегрирование в (1), получаем $I'(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{|\alpha\beta|(|\alpha| + |\beta|)}$, $\alpha\beta \neq 0$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha| + |\beta|) + C$.

Поскольку

$$I(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2}\, dx = \frac{2}{|\beta|}\int_0^{+\infty} \frac{\ln|\beta|}{1 + t^2}\, dt + \frac{2}{|\beta|}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t\, dt}{1 + t^2} = \frac{2\ln|\beta|}{|\beta|}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \pi\frac{\ln|\beta|}{|\beta|},$$

то $C = 0$. Окончательно имеем $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha| + |\beta|)$, $\beta \neq 0$.

Заметим, что если $\beta = 0$, то данный интеграл сходится только при $|\alpha| = 1$. В этом случае интегрированием по частям легко установить, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\, dx = \pi$. ▶

69. $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\, dx.$

◀ Очевидно, $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} f(x, \alpha, \beta)\, dx$, где

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x, & x \neq 0, \\ \alpha\beta, & x = 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывна в области $0 \leqslant x < +\infty$, $-\infty < \alpha,\ \beta < +\infty$, и данный интеграл, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно (мажорантная функция φ строится так: при $0 \leqslant x \leqslant 1$ будет $|f(x, \alpha, \beta)| \leqslant |\alpha\beta|$, а при $x \geqslant 1$ имеем $|f(x, \alpha, \beta)| \leqslant \frac{\pi^2}{4x^2}$; т.е. $\varphi(x) = |\alpha\beta|$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{4x^2}$ при $x \geqslant 1$). Следовательно, по п.2.5 функция I непрерывна $\forall \alpha, \beta \in]-\infty, +\infty[$.

Далее, пусть $0 < \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant A < +\infty$, $0 < \delta \leqslant \beta \leqslant B < +\infty$. Тогда, как нетрудно проверить, справедливы формулы

$$I'_\alpha(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)}\, dx, \quad I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)},$$

откуда находим $I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}$. Интегрируя это равенство по β и α последовательно, получаем

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)\big(\ln(\alpha+\beta) - 1\big) + \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \tag{1}$$

где φ, ψ — функции, подлежащие определению. В силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $A > 0$, $B > 0$ последнее соотношение справедливо при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Заметим, что (1) есть сужение функции I на область положительных значений параметров α и β. Для нахождения ее для всех $\alpha, \beta \in]-\infty, +\infty[$ нужно подобрать функции φ и ψ таким образом, чтобы функция I оказалась непрерывной $\forall \alpha, \beta$, как и должно быть по доказанному выше. Соотношение непрерывности

$$\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta\to+0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta) = I(\alpha, 0) = I(0, 0)$$

приводит к равенству

$$\varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \frac{\pi}{2}\big(\beta(1-\ln\beta) + \alpha(1-\ln\alpha)\big). \tag{2}$$

Таким образом, учитывая тождество $I(\alpha, \beta) = I(|\alpha|, |\beta|)\operatorname{sgn}(\alpha\beta)$ и равенство (2), окончательно получаем

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\alpha\beta)\ln\frac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|}|\beta|^{|\beta|}}, & \text{если} \quad \alpha\beta \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha\beta = 0. \ ▶ \end{cases}$$

При решении следующих примеров считается известным значение интеграла Эйлера—Пуассона: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

70. $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2 + 2b_1x + c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}\, dx, \quad a > 0.$

◀ Приводя трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ к виду $\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$ и полагая $\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (At^2 + 2Bt + C)e^{-t^2}\, dt,$$

где

$$A = \frac{a_1}{a\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \quad B = \frac{b_1a - a_1b}{a^2} e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \quad C = \frac{a^2c_1 - 2abb_1 + a_1b^2}{a^2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}, \quad 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,d(t^2) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то

$$I = \sqrt{\pi}\left(\frac{A}{2} + C\right) = \frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}((a+2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1)e^{-\frac{ac-b^2}{a}}. \blacktriangleright$$

71. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx, \quad a > 0.$

◀ Имеем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,dx.$$

Замечая, что оба эти интеграла можно найти как частные случаи общего интеграла из предыдущего примера, получаем $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$. ▶

72. $\displaystyle I(|a|) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx.$

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int\limits_{0}^{1} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx$$

производя замену $y = \frac{1}{x}$ в первом интеграле, получаем

$$I(|a|) = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\,\frac{dy}{y^2} + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\,dy.$$

Так как подынтегральные функции f_1 и f_2 здесь непрерывны при всех a и $1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно $\left(|f_1(a, y)| \leqslant \frac{1}{y^2},\right.$ $\left.|f_2(a, y)| \leqslant e^{-y^2}\right)$ и интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-y^2}dy$ сходятся, то функция I непрерывна $\forall |a| \in \mathbb{R}$.

Пусть $|a| \geqslant \varepsilon > 0$. Поскольку функции $\frac{\partial f_1}{\partial a}$, $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ непрерывны в области $|a| \geqslant \varepsilon$, $1 \leqslant y < +\infty$ а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно на каждом отрезке $\varepsilon \leqslant |a| \leqslant A$, то функция I' непрерывна при $|a| > 0$. Следовательно,

$$\frac{dI(|a|)}{d|a|} = -2|a|\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,\frac{dx}{x^2}. \tag{1}$$

Кроме того, положив в исходном интеграле $x = \frac{|a|}{y}$, $y > 0$, можем написать

$$I(|a|) = |a|\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\,\frac{dy}{y^2}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение $I'(|a|) + 2I(|a|) = 0$, решая которое, находим $I(|a|) = Ce^{-2|a|}$, $|a| > 0$.

Но функция $I(|a|)$ непрерывна, поэтому должно быть $I(0) = \lim\limits_{|a|\to 0}(Ce^{-2|a|})$. Учитывая, что $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, отсюда находим $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Итак, окончательно получаем $I(|a|) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|}$. ▶

73. $I(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx, \quad a > 0,\ b \in \mathbb{R}.$

◀ Функции $f : (b, x) \mapsto e^{-ax^2}\cos bx$ и $f'_b : (b, x) \mapsto -xe^{-ax^2}\sin bx$ непрерывны в области $0 \leqslant x < +\infty$, $-\infty < b < +\infty$; интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx, \quad \int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx,$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно относительно параметра b. Следовательно, функции I и I' непрерывны $\forall b \in \mathbb{R}$ и

$$I'(b) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx = \frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}I(b).$$

Отсюда $I'(b) + \frac{b}{2a}I(b) = 0$. Решая это уравнение, находим $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$. Поскольку $I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, то $I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. ▶

74. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

◀ Дифференцируя $2n$ раз интеграл из предыдущего примера и полагая $a = 1$, получаем

$$\frac{d^{2n}}{db^{2n}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = (-1)^n 2^{2n}\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}\right)^{(2n)},$$

откуда

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\left(e^{-b^2}\right)^{(2n)}. \ ▶$$

75. Исходя из интеграла $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}\,dx$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, вычислить интеграл Дирихле $D(\beta) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin \beta x}{x}\,dx$.

◀ Поскольку функция

$$f : (\alpha, x) \mapsto \begin{cases} e^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при каждом конечном $\alpha \geqslant 0$, $0 \leqslant x < +\infty$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha, x)\,dx$, в силу примера 25, сходится равномерно по $\alpha \geqslant 0$, то функция I непрерывна по переменной $\alpha \geqslant 0$ и поэтому $I(+0, \beta) = D(\beta)$.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда функция $\varphi : (\beta, x) \mapsto e^{-\alpha x}\cos\beta x$, $x \geqslant 0$, $-\infty < \beta < +\infty$, непрерывна и интеграл

$$I'_\beta(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx, \qquad (1)$$

в силу мажорантного признака, сходится равномерно относительно параметра β, поскольку $|e^{-\alpha x}\cos\beta x| \leqslant e^{-\alpha x}$. Следовательно, дифференцирование по β возможно, и после выполнения интегрирования в (1) получаем $I'_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha > 0$. Отсюда находим $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$. Так как $I(\alpha, 0) = 0$, то $C(\alpha) \equiv 0$ и $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$.

Таким образом, окончательно имеем

$$D(\beta) = I(+0, \beta) = \lim_{\alpha\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta. \blacktriangleright$$

Используя интеграл Дирихле и формулу Фруллани, вычислить интегралы:

76. $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - \cos\beta x}{x^2}\,dx, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$

◀ При $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $|\beta| \geqslant \varepsilon > 0$ и $0 \leqslant x < +\infty$ функции

$$f : (\alpha, \beta, x) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2}(e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x), & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha, & x = 0, \end{cases}$$

$$f'_\alpha : (\alpha, \beta, x) \mapsto -e^{-\alpha x^2}, \quad f'_\beta : (\alpha, \beta, x) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin\beta x}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывны. Данный интеграл, а также интегралы $I'_\alpha(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha, \beta, x)\,dx$, $I'_\beta(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\beta(\alpha, \beta, x)\,dx$ сходятся равномерно (первый — в силу признака Вейерштрасса, второй — в силу примера 26). Следовательно, функции I, I'_α, I'_β непрерывны и существует дифференциал

$$dI(\alpha, \beta) = \left(-\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx\right)d\alpha + \left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx\right)d\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,d\alpha + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta\,d\beta$$

(см. интегралы Дирихле и Эйлера—Пуассона), откуда интегрированием находим

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha} + C. \qquad (1)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $|\beta| > 0$. Покажем, что он справедлив также и при $\alpha \geqslant 0$, $-\infty < \beta < +\infty$.

Разбив исходный интеграл на два интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 f(\alpha, \beta, x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(\alpha, \beta, x)\,dx,$$

видим, что первый интеграл — непрерывная функция α и β при любых α и β. Второй интеграл равномерно сходится при $\alpha \geqslant 0$ и любом β, так как $|f(\alpha, \beta, x)| \leqslant \frac{2}{x^2}$. Кроме того, функция f непрерывна, поэтому и второй интеграл — также непрерывная функция при $\alpha \geqslant 0$, β — любое.

Используя непрерывность функции I, находим постоянную C из соотношения $I(0, 0) = \lim\limits_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}} \left(\frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha} + C\right) = 0$.

Таким образом, из (1) окончательно имеем $I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. ▶

77. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \cos\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx$$

и пользуясь интегралом Дирихле (см. пример 75), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\right). ▶$$

78. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \pm\beta.$

◀ Пользуясь формулой Фруллани (см. пример 61), находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\cos|\alpha-\beta|x - \cos|\alpha+\beta|x\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|, \quad \alpha \neq \pm\beta. ▶$$

79. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

◀ Используя тождество $\sin^3\alpha x = \frac{3}{4}\sin\alpha x - \frac{1}{4}\sin 3\alpha x$, а также интеграл Дирихле (см. пример 75), имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x}\,dx = \frac{3\pi}{8}\operatorname{sgn}\alpha - \frac{\pi}{8}\operatorname{sgn}3\alpha = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha. ▶$$

80. $\displaystyle I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x}{x}\,dx.$

◀ Преобразовывая разность $\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x$ к виду

$$\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x = \frac{1}{4}\left((1-\cos 2\alpha x)^2 - (1-\cos 2\beta x)^2\right) = \frac{1}{4}\left(f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)\right),$$

$$f(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x,$$

запишем

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)}{x}\,dx.$$

Теперь применим формулу Фруллани (см. пример 61). Поскольку функция f непрерывна и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, по признаку Дирихле, сходится $\forall A > 0$, то по указанной формуле $I(\alpha, \beta) = \frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$, если $\alpha\beta \neq 0$. Если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ или $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, то данный интеграл расходится. Наконец, если $\alpha = \beta = 0$, то интеграл существует и равен нулю. Поэтому окончательно имеем

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|, & \text{если} \quad \alpha\beta \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha = \beta = 0. \end{cases} \blacktriangleright$$

81. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx.$

◀ После замены переменной x по формуле $x = \sqrt{t}$, $t > 0$, получаем интеграл Дирихле (см. пример 75):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

82. Найти разрывный множитель Дирихле $D(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda\cos\lambda x\frac{d\lambda}{\lambda}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

◀ Полагая в примере 77 $x = \lambda$, $\alpha = 1$, $\beta = x$ получаем

$$D(x) = \frac{1}{2}\bigl(\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)\bigr), \quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad x = \pm 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

83. Вычислить интеграл $I = \text{ v. p.} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b}\,dx.$

◀ Положим $t = x + b$. Тогда

$$I = \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\cos(ab)\,dt - \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t}\sin ab\,dt = 2\cos(ab)\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\,dt = \pi\cos(ab)\operatorname{sgn} a,$$

так как

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t}\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ A\to+\infty}} \int\limits_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\cos at}{t}\,dt + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ A\to+\infty}} \int\limits_{\varepsilon}^{A} \frac{\cos at}{t}\,dt = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции, а

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ A\to+\infty}} \int\limits_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\sin at}{t}\,dt + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0 \\ A\to+\infty}} \int\limits_{\varepsilon}^{A} \frac{\sin at}{t}\,dt = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\,dt$$

в силу четности подынтегральной функции. ▶

84. Пользуясь формулой $\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\,dy$, вычислить интеграл Лапласа $L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$.

◀ Согласно условию имеем

$$L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} \cos\alpha x\,dy.$$

Введя множитель e^{-kx^2}, $k > 0$, рассмотрим интеграл

$$L^*(k,\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos\alpha x\,dx. \tag{1}$$

Функция $f : (x, y) \mapsto e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x$ непрерывна в области $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$; интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dx$$

сходятся равномерно в силу мажорантного признака Вейерштрасса (действительно, имеют место неравенства $|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x| \leqslant e^{-y}$, $|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x| \leqslant e^{-kx^2}$, а интегралы $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}dy$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}dx$ сходятся); интеграл (1), как следует из оценки

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dy\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}\,dx,$$

сходится. Следовательно, по теореме 2, п.3.2, можно в (1) изменить порядок интегрирования. Тогда получим

$$L^*(k,\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dx.$$

Используя решение примера 73, находим

$$L^*(k,\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y+k}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(y+k)}+y\right)}\,dy = \sqrt{\pi}e^k \int\limits_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\gamma(t)}\,dt, \quad \gamma(t) = \frac{\alpha^2}{4t^2} + t^2. \tag{2}$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$ равномерно сходится при $k \geqslant 0$ и подынтегральная функция непрерывна, то функция L^* непрерывна по переменной k (см. теорему 1, п.2.5). Поэтому

$$L(\alpha) = \lim_{k\to+0} L^*(k,\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)}\,dt.$$

Последний интеграл был вычислен в примере 72. Таким образом, окончательно имеем $L(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ▶

Вычислить следующие интегралы:

85. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx.$

◀ Используя тождество $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и интеграл Лапласа, получаем $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$. ▶

86. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

◀ Вводя функцию f по формуле

$$f : y \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{y^2+x^2}\,dx, \quad |y-1| \leqslant \frac{1}{2},$$

замечаем (после замены $x = yt$), что $f(y) = \frac{1}{y}L(|\alpha|y)$, а также $f'_y(1) = -2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx$, L — интеграл Лапласа. Следовательно (см. пример 84), имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)}\,dx = -\frac{1}{2}f'(1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}L(|\alpha|y)\right)_{y=1} = \frac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}. \blacktriangleright$$

87. $\displaystyle I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x\,dx}{ax^2+2bx+c}, \quad a>0,\ ac-b^2>0.$

◀ Выделяя полный квадрат в знаменателе и производя замену по формуле $\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, имеем

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\alpha t}{\sqrt{a}}\cos\frac{\alpha b}{a}}{t^2+y^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\alpha t}{\sqrt{a}}\sin\frac{\alpha b}{a}}{t^2+y^2}\,dt,$$

где $y^2 = c - \frac{b^2}{a} > 0$.

Замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции второй интеграл равен нулю, а первый легко вычисляется через интеграл Лапласа, получаем

$$I(\alpha) = \frac{2}{|y|\sqrt{a}}\cos\frac{\alpha b}{a}\cdot L\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{a}}|y|\right) = \frac{\pi\cos\frac{\alpha b}{a}}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}. \blacktriangleright$$

88. С помощью интегралов Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

вычислить следующий интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx, \quad a \neq 0.$$

◀ Приводя квадратный трехчлен к каноническому виду и производя затем замену переменной по формуле $\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, $a > 0$, имеем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\,dx = \frac{\cos y}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2\,dt + \frac{\sin y}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $y = c - \frac{b^2}{a}$. При $a < 0$ следует положить $a = -a_1$, $a_1 > 0$, и провести аналогичные выкладки. В общем случае получаем

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a + \frac{ac - b^2}{a}\right), \quad a \neq 0. ▶$$

89. Доказать формулы:

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} \sin(|\alpha| a)$;

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2} \cos(\alpha a) \operatorname{sgn} \alpha$,

где $a \neq 0$ и интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

◀ **1)** Легко видеть, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a + x}\,dx + \frac{1}{4a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a - x}\,dx.$$

Вычисляя эти интегралы способом, изложенным в примере 83, получаем формулу 1).

2) Представляя значение подынтегральной функции в виде $\frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{-a + x} - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{a + x}$ и используя указанный пример, получаем формулу 2). ▶

90. Найти преобразование Лапласа

$$F(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt, \quad p > 0,$$

для функции f, если: а) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f(t) = \sqrt{t}$; в) $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$; г) $f(t) = \sin(\alpha\sqrt{t})$.

◀ а) Функция $\psi : (p, t) \mapsto e^{-pt} t^n$ непрерывна при $p > 0$, $0 \leqslant t < +\infty$ и при любом $n > 0$. Данный интеграл равномерно сходится при $p \geqslant \varepsilon > 0$ и при любой интегрируемой функции, для которой справедлива оценка $|f(t)| e^{-\varepsilon t} \leqslant \text{const}$. В нашем случае $t^n e^{-\varepsilon t} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^n e^{-n}$. Следовательно, дифференцирование под знаком интеграла по параметру p, $p > 0$, возможно.

Пусть $f(t) \equiv 1$. Тогда $F(p) = \frac{1}{p}$ и

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} t^n\,dt,$$

откуда $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} t^n\,dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

б) Выполняя замену $\sqrt{t} = x$, находим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\sqrt{t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-px^2}x^2\,dx,$$

откуда интегрированием по частям получаем

$$F(p) = -\frac{x}{p}e^{-px^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px^2}\,dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

в) В этом случае воспользуемся формулой Фруллани. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt} - e^{-(p+1)t}}{t}\,dt = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

г) После замены $\sqrt{t} = z$ приходим сначала к интегралу

$$F(p) = 2\int_0^{+\infty} ze^{-pz^2}\sin\,\alpha z\,dz,$$

а после интегрирования по частям — к интегралу

$$F(p) = \frac{\alpha}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pz^2}\cos\alpha z\,dz,$$

который вычислен в примере 73. Окончательно имеем

$$F(p) = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}. \blacktriangleright$$

91. Доказать формулу (интеграл Липшица)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}I_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a > 0,$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого индекса (см. пример 12).

◀ Функция $\psi : (t, \varphi) \mapsto \cos(bt\sin\,\varphi)$ непрерывна при $0 \leqslant t < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ сходится, поэтому данный интеграл сходится равномерно по параметру. Следовательно, по теореме 1, п.3.2, справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\,\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt\sin\,\varphi)\,dt,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}I_0(bt)\,dt = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \blacktriangleright$$

92. Найти преобразование Вейерштрасса

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy,$$

если $f(y)=\cos ay$.

◀ Полагая $x-y=t$, получаем

$$F(x)=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos at\,dt+\frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sin at\,dt.$$

В силу нечетности подынтегральной функции, второй интеграл равен нулю, а первый вычислен в примере 73. Таким образом, имеем

$$F(x)=e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Применяя метод дифференцирования и интегрирования по параметру под знаком интеграла, вычислить интегралы:

31. $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx$, $\alpha\geqslant 0$. **32.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x}{x^4}\,dx$. **33.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin^2 x}{x^3}\,dx$.

34. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\,dx$. **35.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{\operatorname{ch} x}\,dx$. **36.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$. **37.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x}\,dx$.

38. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\cdot\ln(\sin x)\,dx$. **39.** $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^a\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$. **40.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|a|x^2}\sin^2 bx\,\frac{dx}{x}$.

Вычислить:

41. $\text{v.p.}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a-b\cos x}$, $0<a<b$. **42.** $\text{v.p.}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^3}$. **43.** $\text{v.p.}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,dx}{1-a\cos x}$, $a>1$.

44. $\lim\limits_{a\to b}\left(\text{v.p.}\int\limits_a^b\frac{\varphi(s)\,ds}{x-s}\right)$, $a<b$; функция φ удовлетворяет условию Гельдера: $\exists\alpha$, L такие, что $\forall x_1, x_2\in]a,b[$ выполняется неравенство $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<L|x_1-x_2|^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$.

Найти преобразование Лапласа для функций:

45. $f: x\mapsto\frac{\cos^2\sqrt{kx}}{\sqrt{\pi x}}$, $x>0$. **46.** $f: x\mapsto\frac{\operatorname{ch}^2\sqrt{kx}}{\sqrt{\pi x}}$, $x>0$.

§ 4. Эйлеровы интегралы

4.1. Гамма-функция.

Определение. *Функция*

$$\Gamma: p\mapsto\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx,\quad 0<p<+\infty,$$

называется ***гамма-функцией****, а ее значение —* ***эйлеровым интегралом****.*

Функция Γ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка при $p > 0$ и для них справедлива формула

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4.2. Основные формулы.

Если $p > 0$, то

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \tag{1}$$

(*формула понижения*). Если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \tag{2}$$

а также

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{3}$$

Если $0 < p < 1$, то

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \tag{4}$$

(*формула дополнения*).

4.3. Бета–функция.

Определение. *Функция*

$$B : (p, q) \mapsto \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, \quad p > 0 \wedge q > 0,$$

называется бета–функцией, а ее значение — эйлеровым интегралом.

Бета–функция непрерывна в области определения и обладает частными производными любого порядка, которые можно найти путем дифференцирования по переменным p, q под знаком интеграла. Полезно представление

$$B(p, q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\, dz. \tag{1}$$

Связь между B– и Γ–функциями выражается формулой

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2}$$

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

93. $\displaystyle\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \quad a > 0.$

◄ Полагая $x = a\sqrt{t}$, $t > 0$, и пользуясь формулами (2), (3), п.4.2, и формулой (2), п.4.3, получаем

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4\,\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}. \text{ ►}$$

94. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx.$

◀ Используя представление (1) и формулу (2), п.4.3, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x)^2} = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Далее, применяя формулы понижения (1) и дополнения (4), п.4.2, находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x)^2} = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

95. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

◀ Полагая $x = \sqrt{t}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}. \blacktriangleright$$

Выразить через эйлеровы интегралы:

96. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx, \quad n > 0.$

◀ Замена $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, приводит к интегралу

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Этот результат справедлив при $0 < m < n$. ▶

97. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}, \quad a > 0,\ b > 0,\ n > 0.$

◀ Полагая $x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}\,dt = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\frac{1}{na^p}B\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $0 < \frac{m+1}{n} < p$. ▶

98. $\displaystyle I = \int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx, \quad 0 < a < b,\ c > 0.$

◀ Выполняя замену $\frac{x-a}{x+c} = \frac{b-a}{b+c}t$, получаем

$$I = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = \frac{(b-a)^{m+n+1}B(m+1, n+1)}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что данный интеграл сходится, если $m > -1$, $n > -1$. ▶

99. $I_{mn} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx.$

◀ Положим $\sin x = \sqrt{t}$, $t > 0$. Тогда

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} \, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Очевидно, интеграл сходится, если $m > -1$, $n > -1$. ▶

100. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1 + k \cos x)^n} \, dx, \quad 0 < |k| < 1.$

◀ Вводя новую переменную по формуле $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, имеем

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1 + k \cos x)^n} \, dx = \frac{2^n}{(1+k)^n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} \, dt}{(1 + \alpha^2 t^2)^n}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}.$$

Полагая далее $\alpha t = \sqrt{z}$, получаем

$$I = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \quad n > 0. \blacktriangleright$$

101. $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$

◀ Применяя подстановку $\ln \frac{1}{x} = t$, получаем

$$\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{n}\right)^p dx = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t} \, dt = \Gamma(p+1), \quad p > -1. \blacktriangleright$$

102. $I(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x \, dx, \quad a > 0.$

◀ После замены $x = \frac{t}{a}$ получаем

$$I(p) = \frac{1}{a^{p+1}} \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t} \ln t \, dt - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t} \, dt.$$

Легко видеть, что первый интеграл есть значение производной от гамма-функции аргумента $p+1$, $p+1 > 0$, а второй равен $\Gamma(p+1)$. Следовательно,

$$I(p) = \frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}} - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \Gamma(p+1) = \frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right). \blacktriangleright$$

103. $I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} \, dx.$

◀ Очевидно, функция I является производной от бета-функции (см. п.4.3). Поэтому

$$I(p)=\frac{d}{dp}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\frac{d}{dp}B(p,\,1-p)=\frac{d}{dp}\big(\Gamma(p)\Gamma(1-p)\big)=\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi},$$

$$0<p<1. \ ▶$$

104. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx.$

◀ Полагая $x=t^{\frac{1}{3}}$ и используя результат предыдущего примера, получаем

$$I=\frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2}{3}-1}}{1+t}\ln t\,dt=-\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi^2}{27}. \ ▶$$

105. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx.$

◀ Применяя подстановку $x=t^{\frac{1}{4}}$, $t>0$, приходим к интегралу

$$I=\frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}\ln^2 t}{1+t}\,dt,$$

являющемуся второй производной от бета-функции

$$p\mapsto\frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+(1-p)}},$$

вычисленной в точке $p=\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$I=\frac{1}{64}\cdot\frac{d^2}{dp^2}\big(B(p,\,1-p)\big)\Big|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{1}{64}\cdot\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)\Big|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi^3. \ ▶$$

106. $I(p,\,q)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx.$

◀ Очевидно, если $p=q$, то интеграл равен нулю. Используя признак сравнения, нетрудно установить, что данный интеграл сходится, если $0<p<1$, $0<q<1$.

Далее, замечая, что

$$I(p,\,q)=\int B(p,\,1-p)\,dp-\int B(q,\,1-q)\,dq+C,$$

где C — постоянная, имеем

$$I(p,\,q)=\pi\int\frac{dp}{\sin\pi p}-\pi\int\frac{dq}{\sin\pi q}+C=\pi\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|+C.$$

Полагая здесь $p=q$, находим, что $C=0$.

Таким образом, имеем

$$I(p,\,q)=\pi\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|,\quad 0<p<1,\quad 0<q<1. \ ▶$$

107. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx, \quad 0 < p < 1.$

◀ Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int\limits_0^1 (x^{p-1} - x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon}\,dx, \quad \varepsilon \geqslant 0. \tag{1}$$

Поскольку функция $f : (x, \varepsilon) \mapsto \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}$ при $0 < x < 1$ и $\varepsilon \geqslant 0$ непрерывна, а интеграл (1) сходится равномерно при $\varepsilon \geqslant 0$, в силу признака Вейерштрасса

$$\left(|f(x, \varepsilon)| \leqslant \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x}, \ \int\limits_0^1 \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x}\,dx < +\infty \right),$$

то функция F непрерывна и возможен предельный переход под знаком интеграла (1) при $\varepsilon \to +0$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} F(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx. \tag{2}$$

Принимая во внимание, что $F(\varepsilon) = B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)$, из (2) находим

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \big(B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)\big) = \lim_{\varepsilon \to +0} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} \right).$$

Отсюда, используя формулу $\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma(1-p)} - \frac{\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma(p)} \right) = \big(\ln(\Gamma(1-p)\Gamma(p))\big)'_p = \pi \operatorname{ctg} \pi p. \ ▶$$

108. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx, \quad 0 < \alpha < \beta.$

◀ Полагая $e^{-2\beta x} = t$, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx = \frac{1}{2\beta} \int\limits_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t}\,dt,$$

где $p = \frac{\beta - \alpha}{2\beta}$. Поскольку $0 < p < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx = \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2\beta}. \ ▶$$

109. $I = \int\limits_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x\,dx.$

◀ Производя замену $x = 1 - t$, получаем интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \ln \Gamma(1-x) \sin \pi x\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \ln\big(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\big) \sin \pi x\,dx,$$

откуда с помощью формулы дополнения (см. п.4.2) находим

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (\ln\pi - \ln\sin\pi x)\sin\ \pi x\, dx = \frac{1}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x\sin\ \pi x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{2\pi}\left(\cos\pi x + (1-\cos\pi x)\ln\sin\pi x - \ln(1+\cos\pi x)\right)\Big|_{+0}^{1-0} = \frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right). ▶$$

110. Доказать равенство

$$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

◀ Полагая $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right),$$

откуда

$$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n^n}\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right). \tag{1}$$

При $n = 1$ равенство (1), очевидно, справедливо. Поэтому далее считаем, что $n \geqslant 2$. Записывая произведение (1) в прямом и обратном порядках, замечаем, что

$$\left(\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\right)^2 = \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\left(\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right)\ldots\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Отсюда, используя формулу дополнения, находим

$$\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}}}. \tag{2}$$

Для вычисления произведения синусов разложим двучлен $z^n - 1$ на множители. Имеем $z^n - 1 = (z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$, z_k — нули этого двучлена, т. е. $\sqrt[n]{1} = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right)$, $i^2 = -1$, $k = \overline{0, n-1}$. Следовательно, $\frac{z^n-1}{z-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-z_k)$, откуда

$$\lim_{z\to1}\frac{z^n-1}{z-1} = n = \lim_{z\to1}\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right). \tag{3}$$

Поскольку $\left|1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right| = 2\sin\frac{\pi k}{n}$, то из (3) получаем формулу

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{4}$$

Наконец, подставляя (4) в (2), а затем (2) в (1), получаем доказываемое тождество. ▶

111. Используя равенство $\frac{1}{x^m} - \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\, dt$, $x > 0$, найти интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}\, dx$, $0 < m < 1$, $a \neq 0$.

◀ Имеем

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} \cos ax\, dx \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \int\limits_\delta^{A} \cos ax\, dx \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\, dt. \qquad (1)$$

Функция $f : (x, t) \mapsto t^{m-1} e^{-xt} \cos ax$ непрерывна при $0 < t < +\infty$, $\delta \leqslant x \leqslant A$. Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} t^{m-1} \cos ax\, dt,$$

в силу мажорантного признака $(|f(x, t)| \leqslant t^{m-1} e^{-\delta t})$, сходится равномерно относительно $x \in [\delta, A]$. Тогда, по теореме 1, п.3.2, в (1) можно выполнить перестановку интегралов:

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1}\, dt \int\limits_\delta^{A} e^{-xt} \cos ax\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}(a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} e^{-tA}\, dt + \right.$$

$$\left. + \cos a\delta \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^m e^{-\delta t}}{a^2 + t^2} - a \sin a\delta \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} e^{-\delta t}}{a^2 + t^2}\, dt \right). \qquad (2)$$

Первый интеграл в (2), как следует из оценки

$$\left| \int\limits_0^1 \ldots + \int\limits_1^{+\infty} \ldots \right| < \frac{1 + |a|}{a^2} \int\limits_0^1 e^{-tA}\, dt + e^{-A} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}(|a| + t)}{a^2 + t^2}\, dt,$$

стремится к нулю при $A \to +\infty$. Второй интеграл, в силу равномерной (по признаку Вейерштрасса) сходимости его относительно δ $(0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0)$ и непрерывности подынтегральной функции в области $0 < t < +\infty$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, согласно теореме 1, п.4.2, при $\delta \to +0$ стремится к интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^m\, dt}{a^2 + t^2} = \frac{|a|^{m-1}}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, 1 - \frac{m+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2|a|^{1-m} \cos \frac{\pi m}{2}}.$$

По той же причине третий интеграл (вместе с $\sin a\delta$) стремится к нулю при $\delta \to +0$.

Таким образом, окончательно получаем $I = \frac{\pi |a|^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{\pi m}{2}}$, $a \neq 0$. ▶

112. Доказать формулы Эйлера:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha)\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha)\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x, \quad \lambda > 0,\ x > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

◀ Нетрудно видеть, что подынтегральные функции в а) и б) и их производные по α непрерывны при $0 < t < +\infty$ и $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, данные интегралы (обозначим их через $F(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ соответственно) при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ сходятся по признаку сравнения. Интегралы

$$F'(\alpha) = -\lambda \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha - \alpha)\, dt, \tag{1}$$

$$\Phi'(\alpha) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos\alpha} \cos(\lambda t \sin\alpha - \alpha)\, dt, \tag{2}$$

по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно на каждом отрезке $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Действительно, функция $t \mapsto t^x e^{-\lambda t \sin\varepsilon}$ является мажорирующей для подынтегральных функций в (1) и (2), а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \sin\varepsilon}\, dt$ сходится по признаку сравнения. Следовательно, дифференцирование в (1), (2) возможно при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

Выполняя в (1) и (2) интегрирование по частям (приняв $t^x = u$, $e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha - \alpha)\, dt = dv$, $t^x = u$, $e^{-\lambda t \cos\alpha} \cos(\lambda t \sin\alpha - \alpha)\, dt = dv$ соответственно), получаем систему дифференциальных уравнений

$$F'(\alpha) = -x\Phi(\alpha), \quad \Phi'(\alpha) = xF(\alpha).$$

Решая эту систему, находим

$$F(\alpha) = A \sin\alpha x + B\cos\alpha x, \quad \Phi(\alpha) = -A\cos\alpha x + B\sin\alpha x, \tag{3}$$

где A, B — постоянные; $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Замечая что

$$F(0) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}, \quad \Phi(0) = 0,$$

из (3) определяем эти постоянные: $A = 0$, $B = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$.

Подставляя найденные значения постоянных в (3), получаем

$$F(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos\alpha x, \quad \Phi(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin\alpha x. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

47. $\int\limits_0^1 x^3(1-x^3)^{\frac{1}{3}}\, dx$. **48.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x\, dx$. **49.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2}\, dx$.

50. $\int\limits_0^1 \frac{x(1-x)^6\, dx}{(1-3x+3x^2)^3}$. **51.** $\int\limits_0^1 x^3 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^5 dx$. **52.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{ch}\beta x}\, dx$.

53. Используя формулу понижения, построить продолжение функции Γ для отрицательных значений аргумента.

54. Построить эскиз графика функции B.

§ 5. Интегральная формула Фурье

5.1. Представление функции интегралом Фурье.

Теорема. *Если функция* $f:]-\infty;\infty[\to\mathbb{R}$ *является кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке числовой прямой и абсолютно интегрируема на* $]-\infty, +\infty[$, *то справедлива формула*

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big),\tag{1}$$

или

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int\limits_0^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda,$$

где

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi,\ x\in\mathbb{R}.$$

Если f — непрерывная функция, то $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)=f(x)$ и интегральная формула (1) принимает вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Для упрощения записи вид формулы (2) сохраняют и в том случае, когда функция f разрывна. Интеграл в (2) называют *интегралом Фурье* функции f.

Часто формулу (2) используют в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}\,d\xi,\quad i^2=-1.\tag{3}$$

Интеграл в (3) называют *комплексным интегралом Фурье* функции f.

5.2. Преобразования Фурье.

Теорема. *Если функция* $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *является кусочно-гладкой на каждом отрезке полупрямой* $x>0$ *и абсолютно интегрируема на* $]0,+\infty[$, *то*

$$\bar{f}_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\bar{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda,\tag{1}$$

$$\bar{f}_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\bar{f}_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda.\tag{2}$$

Равенства (1) называют синус-преобразованием Фурье функции f, а равенства (2) — косинус-преобразованием; причем, первые формулы в (1) и (2) называют прямым преобразованием, а вторые — обратным.

Из формулы (3), п.5.1, следует прямое комплексное преобразование Фурье:

$$\bar{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\lambda s}ds\tag{3}$$

и обратное комплексное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{4}$$

Представить интегралом Фурье следующие функции:

113. $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$

◀ Данная функция удовлетворяет условиям теоремы п.5.1 и, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье. Легко видеть, что $b(\lambda) = 0$ (в силу четности функции f), а

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x\, d\lambda, \quad |x| \neq 1,$$

что и требовалось.

Следует заметить, что в точках $x = \pm 1$ разрыва функции f интеграл Фурье, согласно теории, равен $\frac{1}{2}$. Действительно, поскольку

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(1+x)}{\lambda}\, d\lambda + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(1-x)}{\lambda}\, d\lambda \right),$$

то, применяя формулу Дирихле (см, пример 75), имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x\, d\lambda = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)),$$

откуда и следует указанный результат. ▶

114. $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x - \alpha) - \operatorname{sgn}(x - \beta), \quad \beta > \alpha.$

◀ Замечая, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < \alpha, \\ 1, & \text{если} \quad x = \alpha, \\ 2, & \text{если} \quad \alpha < x < \beta, \\ 1, & \text{если} \quad x = \beta, \\ 0, & \text{если} \quad x > \beta, \end{cases}$$

имеем

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b \cos \lambda x\, d\lambda = \frac{2}{\pi\lambda}(\sin \lambda\beta - \sin \lambda\alpha),$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b \sin \lambda x\, dx = \frac{2}{\pi\lambda}(\cos \lambda\alpha - \cos \lambda\beta).$$

Следовательно, представление интегралом Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \big((\sin \lambda\beta - \sin \lambda\alpha) \cos \lambda x + (\cos \lambda\alpha - \cos \lambda\beta) \sin \lambda x \big)\, d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(\beta - x) + \sin \lambda(x - \alpha)}{\lambda}\, d\lambda.$$

В данном примере значение функции f совпадает с ее интегралом Фурье во всех точках числовой прямой. ►

115. $f : x \mapsto \dfrac{1}{a^2 + x^2}$.

◄ Функция f при $a \neq 0$ дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $]-\infty, +\infty[$. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Имеем $b(\lambda) = 0$ (в силу четности функции f),

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x\, dx}{a^2 + x^2} (x = |a|t) = \frac{2}{\pi |a|} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda |a| t)\, dt}{1 + t^2} = \frac{1}{|a|} e^{-\lambda |a|}, \quad a \neq 0$$

(см. пример 84). Запишем теперь интегральную формулу Фурье данной функции:

$$f(x) = \frac{1}{|a|} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda |a|} \cos \lambda x\, d\lambda, \quad \text{если} \quad a \neq 0. \ ►$$

116. $f : x \mapsto \dfrac{x}{a^2 + x^2}$, $a \neq 0$.

◄ Функция f дифференцируема и не является абсолютно интегрируемой на интервале $]-\infty, +\infty[$, однако она интегрируема на нем в смысле главного значения Коши и может быть представлена интегралом Фурье.

Легко видеть, что $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{a^2 + x^2}\, dx$.

Этот интеграл равномерно сходится по параметру $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ в силу примера 26 (здесь $\frac{x}{a^2 + x^2}$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, а $\left| \int\limits_0^x \sin \lambda t\, dt \right| \leqslant \frac{2}{\lambda_0}$). Следовательно, его можно найти как производную (с точностью до знака) от функции, рассмотренной в предыдущем примере, т. е.

$$b(\lambda) = -\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x\, dx}{a^2 + x^2} \right)'_\lambda = e^{-\lambda |a|}.$$

Интеграл Фурье функции $x \mapsto \frac{x}{a^2 + x^2}$ имеет вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda |a|} \sin \lambda x\, d\lambda, \quad a \neq 0. \ ►$$

117. $f : x \mapsto \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \pi. \end{cases}$

◀ Эта функция непрерывна, кусочно-гладкая и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Кроме того, она нечетна;

$$a(\lambda)=0, \quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\sin\lambda x\,dx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}, & \lambda\neq 1,\\ 1, & \lambda=1.\end{cases}$$

Итак, $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$. ▶

118. $f: x\mapsto e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha>0.$

◀ Рассматриваемая функция непрерывна, дифференцируема всюду, за исключением точки $x=0$, и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Следовательно, она представима интегралом Фурье.

Поскольку функция f четная, то $b(\lambda)=0$,

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\lambda x\,dx=\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}.$$

Таким образом, искомое представление данной функции интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-\alpha|x|}=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\,d\lambda; \quad \alpha>0. ▶$$

119. $f: x\mapsto e^{-\alpha|x|}\sin\beta x, \quad \alpha>0.$

◀ Нетрудно проверить, что эта функция дифференцируема всюду и абсолютно интегрируема на $]-\infty, +\infty[$ ($|e^{-\alpha|x|}\sin\beta x|\leqslant e^{-\alpha|x|}$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|x|}$ сходится). Поэтому ее можно представить интегралом Фурье.

Учитывая нечетность функции, имеем

$$a(\lambda)=0, \quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x\sin\lambda x\,dx.$$

Переходя под интегралом от произведения синусов к разности косинусов, получаем

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos(\beta-\lambda)x\,dx-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos(\beta+\lambda)x\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+(\beta-\lambda)^2)}-\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+(\beta+\lambda)^2)}=\frac{4\alpha\beta\lambda}{\pi(\alpha^2+(\beta-\lambda)^2)(\alpha^2+(\beta+\lambda)^2)}.$$

Следовательно,

$$e^{-\alpha|x|}\sin\beta x=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x\,d\lambda}{(\alpha^2+(\beta-\lambda)^2)(\alpha^2+(\beta+\lambda)^2)}, \quad \alpha>0. ▶$$

120. $f: x\mapsto e^{-x^2}$.

◀ Замечая, что все условия теоремы о представимости функции интегралом Фурье здесь выполняются, имеем

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\quad\text{(см. пример 73)},$$

$$b(\lambda)=0\quad\text{(в силу четности функции } x\mapsto e^{-x^2}\text{)}.$$

Таким образом, представление интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda. \blacktriangleright$$

121. Функцию $f: x\mapsto e^{-x}$, $0<x<+\infty$, представить интегралом Фурье, продолжая ее: а) четным образом; б) нечетным образом.

◀ В случае а) в выражении для функции f вместо x подставим $|x|$; в случае б) будем рассматривать функцию $F: x\mapsto f(|x|)\operatorname{sgn}x$. Очевидно, при $x>0$ функции $\Phi: x\mapsto e^{-|x|}$ и $F: x\mapsto e^{-|x|}\operatorname{sgn}x$ совпадают с данной функцией, а при $x<0$ первая из них является четным продолжением, вторая же — нечетным продолжением функции f, т. е. $\Phi(-x)=\Phi(x)$, $F(-x)=-F(x)$.

Поскольку функции Φ и F удовлетворяют условиям представимости их интегралом Фурье, то по соответствующим формулам находим

$$a_\Phi(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi(\lambda^2+1)},\quad b_\Phi(\lambda)=0,$$

$$a_F(\lambda)=0,\quad b_F(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin\lambda x\,dx=\frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2+1)}.$$

Таким образом, в первом случае

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda,$$

а во втором

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x\,d\lambda}{\lambda^2+1}. \blacktriangleright$$

Найти прямое комплексное преобразование Фурье функции f, если:

122. $f: x\mapsto e^{-\alpha|x|}$, $\alpha>0$.

◀ Подставляя данную функцию в указанную формулу преобразования (см. (3), п.5.2), получаем

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|-it\lambda}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}\cos t\lambda\,dt-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}\sin t\lambda\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos t\lambda\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2},\quad\alpha>0. \blacktriangleright$$

123. $f : x \mapsto xe^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$

◀ Как и в предыдущем примере, находим

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|-it\lambda}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|} \cos t\lambda\,dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|} \sin t\lambda\,dt =$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} te^{-\alpha t} \sin t\lambda\,dt = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2}, \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что последний интеграл можно получить дифференцированием интеграла Фурье из предыдущего примера по параметру λ (дифференцирование под знаком интеграла справедливо в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} te^{-\alpha t} \sin t\lambda\,dt$ относительно λ). ▶

124. Найти прямое синус-преобразование Фурье функции

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 2, \\ 3, & 2 < x < 4, \\ 0, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Функция f удовлетворяет условиям теоремы п.5.2, поэтому она допускает прямое синус-преобразование Фурье:

$$\bar{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int\limits_{0}^{2} \sin \lambda x\,dx + 3 \int\limits_{2}^{4} \sin \lambda x\,dx \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \big(1 - \cos 2\lambda + 3(\cos 2\lambda - \cos 4\lambda)\big) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + 2\cos 2\lambda - 3\cos 4\lambda). \text{ ▶}$$

125. Найти прямое косинус-преобразование Фурье функции

$$f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ e^{1-x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Функция f является кусочно-гладкой на любом отрезке полуинтервала $x > 0$ и абсолютно интегрируемой на $]0, +\infty[$, поэтому к ней можно применить косинус-преобразование Фурье. По первой формуле (1), п.5.2, имеем

$$\bar{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int\limits_{0}^{1} x \cos \lambda x\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{1-x} \cos \lambda x\,dx \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} + \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{\lambda^2 + 1} \right). \text{ ▶}$$

Применяя преобразования Фурье, решить следующие дифференциальные задачи:

126. $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ y(0) = 0, \; y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, \end{cases} \qquad \omega = \text{const}.$

◀ Применим синус-преобразование Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} y''(x) \sin \lambda x\,dx + \omega^2 \bar{y}_s(\lambda) = \bar{\varphi}_s(\lambda). \tag{1}$$

К интегралу применим интегрирование по частям и учтем при этом краевые условия:

$$\int_0^{+\infty} y''(x)\sin\lambda x\,dx = y'(x)\sin\lambda x\Big|_0^{+\infty} - \lambda\int_0^{+\infty} y'(x)\cos\lambda x\,dx =$$

$$= -\lambda\left(y(x)\cos\lambda x\Big|_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} y(x)\sin\lambda x\,dx\right) = -\lambda^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{y}_s(\lambda).$$

Подставив это значение в (1) и решив полученное уравнение относительно $\bar{y}_s(\lambda)$, найдем

$$\bar{y}_s(\lambda) = \frac{\bar{\varphi}_s(\lambda)}{\omega^2-\lambda^2}.$$

Для восстановления функции y используем обратное синус–преобразование Фурье:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\bar{\varphi}_s(\lambda)}{\omega^2-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda. \blacktriangleright$$

127. $\begin{cases} y''+\omega^2 y = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ y'(0)=0,\ y(+\infty)=y'(+\infty)=0, \end{cases}$ $\quad \omega = \text{const}.$

◀ Применим косинус–преобразование Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} y''(x)\cos\lambda x\,dx + \omega^2\bar{y}_c(\lambda) = \bar{\varphi}_c(\lambda). \tag{1}$$

Учитывая краевые условия, преобразуем интеграл:

$$\int_0^{+\infty} y''(x)\cos\lambda x\,dx = y'(x)\cos\lambda x\Big|_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} y'(x)\sin\lambda x\,dx = -\lambda^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{y}_c(\lambda).$$

А тогда из (1) аналогично проделанному выше получим

$$\bar{y}_c(\lambda) = \frac{\bar{\varphi}_c(\lambda)}{\omega^2-\lambda^2}.$$

Применяя к функции $\bar{y}_c$ обратное преобразование Фурье, приходим к решению данной задачи:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\bar{\varphi}_c(\lambda)}{\omega^2-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти прямое синус–преобразование Фурье следующих функций:

55. $f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$ **56.** $f : x \mapsto \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$

57. $f : x \mapsto \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ 0, & 2\pi < x < +\infty. \end{cases}$ **58.** $f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x \leqslant 2, \\ e^{-x}, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$

Найти прямое косинус–преобразование Фурье следующих функций:

59. $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$ **60.** $f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ e^{-x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$

61. $f : x \mapsto \begin{cases} \arcsin(\sin x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$

62. Найти прямое комплексное преобразование Фурье производных f', f'', если

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0.$$

63. Применяя комплексное преобразование Фурье, решить следующую дифференциальную задачу:

$$y'' + 3y' + y = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad y(\pm\infty) = y'(\pm\infty) = 0.$$

Глава 2

Кратные и криволинейные интегралы

§ 1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление

1.1. Мера m-мерного параллелепипеда.

Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задана система векторов y_j, $j = \overline{1, m}$, и на ней построен m-мерный параллелепипед $\overline{\mathcal{J}}$, то его *мерой* (*объемом*) $\mu\overline{\mathcal{J}} = |\overline{\mathcal{J}}|$ будем называть число

$$|\overline{\mathcal{J}}| = \sqrt{\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_m)}, \tag{1}$$

где

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & \cdots & \langle y_1, y_m\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \cdots & \langle y_2, y_m\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle y_m, y_1\rangle & \langle y_m, y_2\rangle & \cdots & \langle y_m, y_m\rangle \end{vmatrix} \tag{2}$$

— определитель Грама от этих векторов. Параллелепипед $\overline{\mathcal{J}} = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times \ldots \times[a_m, b_m]$ называется *m-мерным брусом*. Его ребра взаимно перпендикулярны, так как он построен на векторах $y_j = (b_j - a_j)e_j$, $j = \overline{1, m}$, где e_j — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^m$, у которых j-я координата равна единице, а все остальные — нули. Для скалярного произведения $\langle y_j, y_k\rangle$ имеем

$$\langle y_j, y_k\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq j, \\ (b_j - a_j)^2, & \text{если} \quad k = j, \end{cases}$$

в силу чего равенство (1) принимает вид

$$|\overline{\mathcal{J}}| = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j). \tag{3}$$

Кроме бруса $\overline{\mathcal{J}}$ рассматривают также открытый брус $\mathcal{J} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \ldots \times]a_m, b_m[$ и полуоткрытые брусы $\mathcal{J} = [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \ldots \times[a_m, b_m[$, $\mathcal{J} =]a_1, b_1]\times]a_2, b_2]\times \ldots \times]a_m, b_m]$. В каждом случае полагают $\mu\mathcal{J} = |\mathcal{J}| = |\overline{\mathcal{J}}|$.

Если каждое ребро $[a_j, b_j]$, $j = \overline{1, m}$, бруса $\overline{\mathcal{J}}$ разбить на n_j частей точками $x_0^{(j)} = a_j < x_1^{(j)} < \ldots < x_{n_j}^{(j)} = b_j$ и провести через эти точки гиперплоскости $x_j = x_k^{(j)}$, $k = \overline{0, n_j}$, то получим так называемое *сеточное разбиение* $\Pi = \{\overline{\mathcal{J}}_1, \overline{\mathcal{J}}_2, \ldots, \overline{\mathcal{J}}_n\}$ $(n = n_1 n_2 \ldots n_m)$ бруса $\overline{\mathcal{J}}$ на элементарные брусы (ячейки) $\overline{\mathcal{J}}_i$, $i = \overline{1, n}$. В качестве ячеек можно брать не только замкнутые брусы $\overline{\mathcal{J}}_i$, но и открытые брусы $\mathcal{J}_i$.

Если Π — сеточное разбиение бруса $\overline{\mathcal{J}}$, то

$$\mu\overline{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^{n} \mu\overline{\mathcal{J}}_i = \sum_{i=1}^{n} |\overline{\mathcal{J}}_i|. \tag{4}$$

Пусть $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — ограниченная на m-мерном брусе $\overline{\mathcal{J}}$ функция, $\Pi = \{\overline{\mathcal{J}}_i;\ i = \overline{1, n}\}$ — сеточное разбиение бруса $\overline{\mathcal{J}}$ на ячейки, мерами которых являются их евклидовы объемы $|\overline{\mathcal{J}}_i|$. Обозначим

$$M_i = \sup_{x \in \overline{\mathcal{J}}_i} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in \overline{\mathcal{J}}_i} \{f(x)\} \tag{5}$$

и введем в рассмотрение суммы

$$\overline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i |\overline{\mathcal{J}}_i|, \quad \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i |\overline{\mathcal{J}}_i|, \tag{6}$$

которые называются соответственно *верхней* и *нижней интегральными суммами* функции f, соответствующими сеточному разбиению Π бруса $\overline{\mathcal{J}}$.

Пусть $\{\Pi\}$ — множество всех возможных сеточных разбиений бруса $\overline{\mathcal{J}}$ на ячейки $\overline{\mathcal{J}}_i$. Числа

$$\overline{\int} f\,dx = \inf_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f)\}, \quad \underline{\int} f\,dx = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\} \tag{7}$$

называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Римана* функции f на брусе $\overline{\mathcal{J}}$.

Определение. *Функция f называется интегрируемой по Риману на брусе $\overline{\mathcal{J}}$, если выполняется равенство*

$$\overline{\int} f\,dx = \underline{\int} f\,dx, \tag{8}$$

а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется m-кратным интегралом Римана этой функции на брусе $\overline{\mathcal{J}}$ и обозначается

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x)\,dx = \int\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_m. \tag{9}$$

Множество всех функций f, интегрируемых по Риману на брусе $\overline{\mathcal{J}}$, обозначим $R(\overline{\mathcal{J}})$.

Теорема (критерий интегрируемости). *Для того чтобы ограниченная функция $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ была интегрируемой на брусе $\overline{\mathcal{J}}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало такое сеточное разбиение Π этого бруса, что $0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$.*

Сокращенно критерий интегрируемости функции f записывают следующим образом:

$$\left(f \in R(\overline{\mathcal{J}})\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \Pi : 0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon\right).$$

1.2. Интеграл Римана как предел интегральных сумм.

Пусть $\Pi = \{\overline{\mathcal{J}}_i;\ i = \overline{1, n}\}$ — произвольное сеточное разбиение бруса $\overline{\mathcal{J}}$. *Диаметром* $d(\overline{\mathcal{J}}_i)$ *ячейки* $\overline{\mathcal{J}}_i$ будем называть точную верхнюю грань множества всех расстояний между ее точками. Обозначим $d(\Pi) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(\overline{\mathcal{J}}_i)$. Пусть $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция.

Возьмем произвольные точки $\xi_i \in \overline{\mathcal{J}}_i$, $i = \overline{1, n}$, и образуем интегральную сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) |\overline{\mathcal{J}}_i|. \tag{1}$$

Полагаем $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi(f) \overset{\text{def}}{=} I$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для всякого сеточного разбиения Π бруса $\overline{\mathcal{J}}$, для которого $d(\Pi) < \delta$, выполняется неравенство

$$|S_\Pi(f) - I| < \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема. *Если*: 1) *при* $d(\Pi) \to 0$ $\exists \lim S_\Pi(f) = I$, *то* $f \in R(\overline{\mathcal{J}})$ *и при этом*

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x)\,dx = I.$$

2) $f \in R(\overline{\mathcal{J}})$, *то* $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x)\,dx.$

Эта теорема устанавливает два эквивалентных определения интеграла Римана на брусе.

1.3. Мера 0 Лебега и мера 0 Жордана.

Определение 1. *Множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ имеет лебегову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое счетное покрытие $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ этого множества брусами $\overline{\mathcal{J}}_j$ (счетное покрытие $W = \{\mathcal{J}_j : j \in \mathbb{N}\}$ открытыми брусами $\mathcal{J}_j$), меры которых $\mu\overline{\mathcal{J}}_j = \mu\mathcal{J}_j = |\overline{\mathcal{J}}_j|$, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\overline{\mathcal{J}}_j| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение 2. *Множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ имеет жорданову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j;\ j = \overline{1, n}\}$ ($W = \{\mathcal{J}_j;\ j = \overline{1, n}\}$) этого множества брусами $\overline{\mathcal{J}}_j$ (открытыми брусами $\mathcal{J}_j$), меры которых $|\overline{\mathcal{J}}_j|$, что*

$$\sum_{j=1}^{n} |\overline{\mathcal{J}}_j| < \varepsilon. \tag{2}$$

Из определения 2 следует, что всякое множество жордановой меры 0 имеет лебегову меру 0.

Теорема (Лебега). *Пусть $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — ограниченная на брусе $\overline{\mathcal{J}}$ функция и $A \subset \overline{\mathcal{J}}$ — множество ее точек разрыва. Функция f интегрируема на брусе $\overline{\mathcal{J}}$ тогда и только тогда, когда A — множество лебеговой меры 0.*

1.4. Интегралы функций, заданных иа произвольных множествах точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ и $A \supset E$. Функция $\chi_E : A \to \mathbb{R}$, где*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x \in A \setminus E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

Определение 2. *Пусть $E \subset \overline{\mathcal{J}} \subset \mathbb{R}^m$, где $\overline{\mathcal{J}}$ — некоторый брус, $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Полагаем*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x)\chi_E(x)\,dx, \tag{1}$$

если $f\chi_E \in R(\overline{\mathcal{J}})$. При этом пишем $f \in R(E)$.

Определение 3. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция $\overline{\mathcal{J}} \supset E$ — произвольный брус. Продолжим функцию f в каждую точку множества $\overline{\mathcal{J}} \setminus E$, образовав при этом функцию $F : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$, где*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \overline{\mathcal{J}} \setminus E. \end{cases}$$

Если $F \in R(\overline{\mathcal{J}})$, *то полагаем*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} F(x)\,dx. \tag{2}$$

Определение 4. *Ограниченное множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, граница которого имеет лебегову меру* 0, *называется измеримым по Жордану* (или *жордановым*), *а интеграл*

$$\mu E = \int\limits_E dx \tag{3}$$

называется в этом случае m-мерным объемом множества E.

Пересечение $E_1 \cap E_2$ и объединение $E_1 \cup E_2$ двух жордановых множеств E_1 и E_2 есть жорданово множество. Если E_1 и E_2 не пересекаются, то

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2. \tag{4}$$

Дополнение $E \setminus G$ жорданова множества G до жорданова множества $E \supset G$ есть жорданово множество, и

$$\mu(E \setminus G) = \mu E - \mu G. \tag{5}$$

1.5. Основные свойства интеграла Римана на компакте.

Пусть K — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $f : K \to \mathbb{R}$ — интегрируемая на этом компакте функция. Тогда:

1) сужение функции f на компакт $K_1 \subset K$ интегрируемо на K_1;

2) если $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — компакты без общих внутренних точек, то

$$\int\limits_K f(x)\,dx = \int\limits_{K_1} f(x)\,dx + \int\limits_{K_2} f(x)\,dx \tag{1}$$

(*свойство аддитивности*);

3) если $f_1 \in R(K)$, $f_2 \in R(K)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $(\alpha f_1 + \beta f_2) \in R(K)$ и

$$\int\limits_K (\alpha f_1 + \beta f_2)(x)\,dx = \alpha \int\limits_K f_1(x)\,dx + \beta \int\limits_K f_2(x)\,dx \tag{2}$$

(*свойство линейности*);

4) если $f_1 \in R(K)$ и $f_2 \in R(K)$, то $f_1 f_2 \in R(K)$;

5) если $f_1 \in R(K) \wedge f_2 \in R(K)$ и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ $\forall x \in K$, то

$$\int\limits_K f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_K f_2(x)\,dx; \tag{3}$$

6) если $f \in R(K)$, то $|f| \in R(K)$, и при этом

$$\left|\int\limits_K f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_K |f(x)|\,dx; \tag{4}$$

7) если $f \in R(K)$, $g \in R(K) \wedge g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$ $\forall x \in K$, $m = \inf\limits_{x \in K}\{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{x \in K}\{f(x)\}$, то существует такое $\mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $m \leqslant \mu \leqslant M$, что справедлива формула

$$\int\limits_K f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_K g(x)\,dx; \tag{5}$$

если, кроме того, $f \in C(K)$, то найдется такая точка $\xi \in K$, что

$$\int\limits_K f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_K g(x)\,dx \tag{6}$$

(*теорема о среднем*).

1.6. Приведение кратного интеграла к повторному.

Следующая теорема позволяет свести вычисление кратного интеграла к повторному интегрированию.

Теорема (Фубини). *Пусть $\overline{\mathcal{J}}_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\mathcal{J}}_2 \subset \mathbb{R}^m$ — брусы в евклидовых пространствах и $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}_1 \times \overline{\mathcal{J}}_2$ — интегрируемая на брусе $\overline{\mathcal{J}}$ функция. Обозначим*

$$\varphi(x) = \underline{\int} f(x,\, y)\,dy, \quad \psi(x) = \overline{\int} f(x,\, y)\,dy, \quad x \in \overline{\mathcal{J}}_1.$$

Тогда функции φ и ψ интегрируемы на брусе $\overline{\mathcal{J}}_1$ и при этом справедливы равенства

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x,\, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} \psi(x)\,dx, \tag{1}$$

где $\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x,\, y)\,dx\,dy$ — интеграл Римана функции f на брусе $\overline{\mathcal{J}}$.

Интегралы $\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} \varphi(x)\,dx$, $\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} \psi(x)\,dx$ называются *повторными интегралами* функции f. Справедливы также равенства

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x,\, y)\,dxdy = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_2} \left(\underline{\int} f(x,\, y)\,dx\right) dy = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_2} \left(\overline{\int} f(x,\, y)\,dx\right) dy, \tag{2}$$

в которых интегралы называются *повторными, взятыми в обратном порядке* по сравнению с повторными интегралами (1).

Следствие 1. *Если функция $y \mapsto f(x,\, y)$ интегрируема на брусе $\overline{\mathcal{J}}_2$, то при выполнении условий теоремы Фубини справедливо равенство*

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x,\, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} \left(\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_2} f(x,\, y)\,dy\right) dx. \tag{3}$$

Если, кроме того, функция $x \mapsto f(x,\, y)$ интегрируема на брусе $\overline{\mathcal{J}}_1$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}} f(x,\, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} \left(\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_2} f(x,\, y)\,dy\right) dx = \int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_2} \left(\int\limits_{\overline{\mathcal{J}}_1} f(x,\, y)\,dx\right) dy, \tag{4}$$

т.е. повторные интегралы, взятые в обратном порядке по отношению друг к другу, равны между собой и каждый из них равен кратному интегралу функции f на брусе $\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}_1 \times \overline{\mathcal{J}}_2$. В частности, формула (4) справедлива в случае, когда $f \in C(\overline{\mathcal{J}})$.

Следствие 2. *Пусть функция $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ интегрируема на брусе $\overline{\mathcal{J}} = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \times \dots \times [a_m,\, b_m]$, а также на каждом из брусов $\overline{\mathcal{J}}_1 = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \times \dots \times [a_{m-2},\, b_{m-2}]$, $\overline{\mathcal{J}}_2 =$*

$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-3}, b_{m-3}], \ldots, \overline{\mathcal{J}}_{m-3} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *и на сегментах* $[a_j, b_j]$, $j = \overline{2, m}$. *Применив теорему Фубини* $m-1$ *раз, получим равенство*

$$\int_{\overline{\mathcal{J}}} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_m, \tag{5}$$

посредством которого интегрирование по брусу $\overline{\mathcal{J}}$ *сводится к повторному интегрированию. При этом все переменные, кроме той, по которой производится интегрирование, фиксируются.*

1.7. Некоторые конкретные реализации интеграла Римана на компакте.

Рассмотрим два важных случая.

1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компакт с краем ∂K. Множество ∂K точек границы компакта K является гладкой или кусочно-гладкой кривой класса C^1 и поэтому имеет лебегову меру 0, в силу чего измеримо по Жордану.

Если $f : K \to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману на множестве K функция, то ее интеграл

$$\int_K f(x)\,dx$$

называется *двойным интегралом* и обозначается

$$\iint_K f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Предположим, что K — выпуклое в направлении оси Oy множество, т.е. что его можно представить в виде

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}, \tag{2}$$

где y_1, y_2 — кусочно-гладкие функции. Согласно определению 3, п.1.4, и следствию 2 из теоремы Фубини, справедливо равенство (в предположении, что внутренний интеграл существует)

$$\iint_K f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy, \tag{3}$$

позволяющее вычислить двойной интеграл как повторный.

Если множество K выпукло в направлении оси Ox, т.е. его можно представить в виде

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}, \tag{4}$$

где x_1, x_2 — кусочно-гладкие функции, и, кроме того, существует интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

то двойной интеграл выражается через повторный следующим образом:

$$\iint_K f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{5}$$

Если множество K выпукло, то при выполнении условий, сформулированных в следствии 2 из теоремы Фубини, справедливы одновременно равенства (3) и (5):

$$\iint\limits_K f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (6)$$

2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — компакт с краем ∂K, являющимся гладкой или кусочно-гладкой поверхностью класса C^1. Если $f : K \to \mathbb{R}$ — интегрируемая на компакте K функция, то ее интеграл Римана

$$\int\limits_K f(x)\,dx$$

называется *тройным интегралом* функции f и обозначается

$$\iiint\limits_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (7)$$

Пусть $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$, где y_1, y_2, z_1, z_2 — гладкие или кусочно-гладкие функции, и двойной интеграл

$$\iint\limits_{\substack{y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\\ z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y)}} f(x, y, z)\,dy\,dz$$

существует $\forall x \in [a, b]$. Применив теорему Фубини, получаем

$$\iiint\limits_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{\substack{y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\\ z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y)}} f(x, y, z)\,dy\,dz.$$

Если, кроме того, $\forall\,(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$ существует

$$\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz,$$

то, согласно следствию 2 из теоремы Фубини, справедливо равенство

$$\iiint\limits_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (8)$$

Если компакт K не является выпуклым множеством, но его можно представить в виде объединения выпуклых множеств без общих внутренних точек, то следует воспользоваться свойством аддитивности кратного интеграла и представить его в виде суммы интегралов по этим множествам, заменив каждое слагаемое повторным интегралом.

1.8. Замена переменных в интеграле Римана.

Теорема. *Пусть O и O' — выпуклые области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с фиксированным базисом, $K \subset O$ — компакт с краем ∂K (гиперповерхностью размерности $m-1$ класса C^1) и $\boldsymbol{\xi}$ — C^1-диффеоморфизм O' на O. Если $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная на компакте K функция, то справедлива формула замены переменных в m-кратном интеграле Римана*

$$\int\limits_K f(x)\,dx = \int\limits_{K'} f(\boldsymbol{\xi}(t))\,|\det \boldsymbol{\xi}'(t)|\,dt, \qquad (1)$$

где $K' = \boldsymbol{\xi}^{-1}(K)$, $\boldsymbol{\xi}'(t)$ — *матрица Остроградского—Якоби отображения* $\boldsymbol{\xi}$.

Определитель матрицы Остроградского—Якоби $\boldsymbol{\xi}'$ (полной производиой отображения $\boldsymbol{\xi}$) называется *якобианом* и обозначается через $\frac{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\mathcal{D}(t_1, t_2, \ldots, t_m)}$. Поскольку при замеие переменной $x = \boldsymbol{\xi}(t)$ имеем $x_j = \xi_j(t)$, то $\frac{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\mathcal{D}(t_1, t_2, \ldots, t_m)} = \frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\mathcal{D}(t_1, t_2, \ldots, t_m)}$, и формула (1) принимает вид

$$\int\limits_K f(x)\,dx = \int\limits_{K'} f(\boldsymbol{\xi}(t)) \left| \frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\mathcal{D}(t_1, t_2, \ldots, t_m)} \right| dt, \tag{2}$$

в котором она обычно употребляется.

Если $\boldsymbol{\xi} : (t_1, t_2) \mapsto (x, y)$ — C^1–диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$, и в плоскости xOy задана измеримая по Жордану область D, а на ее замыкании $\overline{D}$ определена непрерывная функция f, причем D является образом при отображении $\boldsymbol{\xi}$ измеримой по Жордану области D', лежащей в плоскости $t_1O't_2$, то согласно формуле (2) имеем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\xi_1(t_1, t_2), \xi_2(t_1, t_2)) \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(t_1, t_2)} \right| dt_1\,dt_2. \tag{3}$$

В частности, если $\boldsymbol{p} : (\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$ — отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определяемое равенствами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{4}$$

которые называют *формулами перехода к полярным координатам*, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{5}$$

поскольку $\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = \rho$. Заметим, что в формулах (3), (5) вместо областей D и D' можно взять их замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D}'$, так как границы этих областей имеют двумерный объем 0.

Довольно часто при замене переменных в двойных интегралах переходят от декартовых координат к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = a\rho\cos^\alpha\varphi, \quad y = b\rho\sin^\alpha\varphi \quad (\rho > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi), \tag{6}$$

где параметр α выбирается надлежащим образом. В этом случае

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = ab\alpha\rho\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi.$$

Пусть $\boldsymbol{p} : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ — отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ определяемое системой

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta \quad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \tag{7}$$

которую называют *формулами перехода к сферическим координатам*. Предположим, что в пространстве переменных x, y, z задана измеримая по Жордану область $\mathcal{O}$, а на ее замыкании $\overline{\mathcal{O}}$ определена непрерывная функция f, причем $\mathcal{O}$ является образом при отображении $\boldsymbol{p}$ измеримой по Жордану области $\mathcal{O}'$, лежащей в пространстве переменных ρ, θ, φ. При замене переменных в интеграле

$$\iiint\limits_{\mathcal{O}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

по формулам (7), принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2\sin\theta$, получим

$$\iiint\limits_{\mathcal{O}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\mathcal{O}'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi. \tag{8}$$

Иногда вместо системы (7) берут систему

$$x = a\rho\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi, \quad y = b\rho\sin^\alpha\theta\sin^\beta\varphi, \quad z = c\rho\cos^\alpha\theta \quad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \tag{9}$$

которую называют *формулами перехода к обобщенным сферическим координатам.* В этом случае имеем

$$\frac{\mathcal{D}(x,\, y,\, z)}{\mathcal{D}(\rho,\, \theta,\, \varphi)} = abc\alpha\beta\rho^2 \cos^{\alpha-1}\theta \sin^{2\alpha-1}\theta \,\sin^{\beta-1}\varphi \cos^{\beta-1}\varphi. \tag{10}$$

В некоторых случаях при вычислении тройных интегралов удобно переходить от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z\ (\rho > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi) \tag{11}$$

или к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая

$$x = a\rho\cos^{\alpha}\varphi,\ y = b\rho\sin^{\alpha}\varphi,\ z = z \quad (\rho > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi), \tag{12}$$

где параметр α выбирается надлежащим образом. В последнем случае имеем

$$\frac{\mathcal{D}(x,\, y,\, z)}{\mathcal{D}(\rho,\, \varphi,\, z)} = ab\alpha\rho\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi. \tag{13}$$

При вычислении m-кратного интеграла Римана часто оказывается полезным переход в интеграле от декартовых координат к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^m$ по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\ldots\,\sin\varphi_{m-1}, \\ x_j = \rho\cos\varphi_{j-1}\prod\limits_{i=j}^{m-1}\sin\varphi_i,\ j = \overline{2,\, m-1}, \\ x_m = \rho\cos\varphi_{m-1}, \\ (\rho > 0,\ 0 < \varphi_1 < 2\pi,\ 0 < \varphi_j < \pi \text{ при } j = \overline{2,\, m-1}). \end{cases} \tag{14}$$

Якобиан преобразования координат, задаваемого системой (14), имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m)}{\mathcal{D}(\rho,\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_{m-1})} = \rho^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}\sin^{j-1}\varphi_j. \tag{15}$$

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата $D = [0,\, 1]\times[0,\, 1]$ на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая при этом в качестве точек ξ_i правые вершины ячеек.

◄ Разбиение области интегрирования на ячейки производится прямыми $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{j}{n}$ $(i,\, j = \overline{1,\, n-1})$, а значение функции $f(x,\, y) = xy$, $(x,\, y)\in D$ в каждой правой вершине ячейки равно $\frac{ij}{n^2}$ $(i,\, j = \overline{1,\, n})$. Вполне очевидно, что $d(\Pi)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}.\ ►$$

2. Составить нижнюю $\underline{S}_{\Pi}(f)$ и верхнюю $\overline{S}_{\Pi}(f)$ интегральные суммы для функции $f(x,\, y) = x^2 + y^2$, $(x,\, y)\in D$, $D = [1,\, 2]\times[1,\, 3]$, разбивая прямоугольник D на ячейки прямыми $x = 1 + \frac{i}{n}$, $y = 1 + \frac{2j}{n}$ $(i,\, j = \overline{1,\, n})$. Чему равны пределы этих сумм при $n\to\infty$?

◄ Ячейки разбиения Π — прямоугольники, длина сторон которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$; поэтому площадь ячейки равна $\frac{2}{n^2}$.

Рассмотрим ячейку

$$\overline{\mathcal{J}}_{ij} = \left\{(x,\, y)\in\mathbb{R}^2 :\, 1 + \frac{i}{n}\leqslant x\leqslant 1 + \frac{i+1}{n},\ 1 + \frac{2j}{n}\leqslant y\leqslant 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right\}.$$

Так как $f(x, y)$ — квадрат расстояния точки (x, y) от начала координат, то

$$f_{\min} = f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right), \quad f_{\max} = f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right)$$

при $(x, y) \in \overline{\mathcal{J}}_{ij}$, в силу чего имеем

$$\underline{S}_\Pi(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

$$\overline{S}_\Pi(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right) = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$$

Переходя к пределу, находим

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_\Pi(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_\Pi(f) = 13\frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

3. Какой знак имеет интеграл

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy?$$

◀ Представим исследуемый интеграл I в виде

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 0}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy + \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy = I_1 + I_2.$$

Вполне очевидно, что $I_2 > 0$. Исследуем интеграл I_1. В точках квадрата $D = [0, 1] \times [-1, 0]$, симметричных относительно его диагонали $y = -x$, функция $f(x, y) = \arcsin(x+y)$ принимает значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, поэтому при любом разбиении Π множества D на ячейки — квадраты $\overline{\mathcal{J}}_i$ — в каждой паре симметричных ячеек, лежащих по обе стороны диагонали, найдутся такие точки (ξ_i, η_i), (ξ'_i, η'_i), что $f(\xi_i, \eta_i) + f(\xi'_i, \eta'_i) = 0$. Рассмотрим такое сеточное разбиение $\Pi = \{\overline{\mathcal{J}}_i;\ i = \overline{1, n}\}$ на квадраты, чтобы сумма площадей ячеек, объединение которых $\bigcup\limits_k \overline{\mathcal{J}}_k$ содержит диагональ квадрата D, была меньше произвольного $\varepsilon > 0$. Тогда при указанном выше выборе точек (ξ_i, η_i), (ξ'_i, η'_i) и произвольном выборе точек $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \in \overline{\mathcal{J}}_k$ интегральная сумма $S_\Pi(f)$ имеет вид

$$S_\Pi(f) = \sum_k f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) |\overline{\mathcal{J}}_k|.$$

Пусть $\sup\limits_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = M$. Тогда справедлива оценка

$$|S_\Pi(f)| \leqslant M\varepsilon,$$

из которой следует, что $I_1 = \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = 0$. Поэтому $I > 0$.

При решении примера воспользовались тем, что интеграл Римана интегрируемой функции f не зависит от способа выбора точек (ξ_i, η_i) при сеточном разбиении квадрата D. ▶

4. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 10} \frac{dx\, dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

◀ Площадь области интегрирования равна 200. Согласно формуле (6), п.1.5, имеем

$$I = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad (\xi, \eta) \in D, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 10\}.$$

Принимая во внимание неравенства $100 < 100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 102$, получаем оценку $1{,}96 < I < 2$. ▶

5. Заменить двойной интеграл $I = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ соответствующими ему повторными интегралами, если: а) D — замкнутый треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$; б) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant y\}$; в) D — компакт с краем ∂D, заданным уравнением $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

◀ а) Если внешнее интегрирование в повторном интеграле производить по переменной x, то следует представить область интегрирования в виде $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leqslant x \leqslant 0, -\frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 1\right\}$, $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2, \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 1\right\}$. В этом случае воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла и формулой (3), п.1.7:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-\frac{x}{2}}^{1} f(x, y)\, dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1} f(x, y)\, dy.$$

Если внешнее интегрирование производить по переменной y, то, применив формулу (5), п.1.7, получим

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2y}^{2y} f(x, y)\, dx.$$

б) Из представлений компакта D:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right\} =$$

$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1, \ -\sqrt{y - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{y - y^2}\right\}$$

следует, что при замене двойного интеграла повторными можно применить формулы (3) и (5), п.1.7. При этом получим

$$I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y)\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y - y^2}}^{\sqrt{y - y^2}} f(x, y)\, dx.$$

в) После несложного исследования убеждаемся в том, что компакт D является выпуклым в направлении осей Ox и Oy множеством, имеющим следующие представления:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant a, \ x - \sqrt{a^2 - x^2} \leqslant y \leqslant x + \sqrt{a^2 - x^2}\right\} =$$

$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a\sqrt{2} \leqslant y \leqslant a\sqrt{2}, \ \frac{y - \sqrt{2a^2 - y^2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{y + \sqrt{2a^2 - y^2}}{2}\right\}.$$

Согласно формулам (3) и (5), п.1.7, справедливы равенства

$$I = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy = \int\limits_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{y-\sqrt{2a^2-y^2}}{2}}^{\frac{y+\sqrt{2a^2-y^2}}{2}} f(x, y)\, dx. \blacktriangleright$$

6. Доказать формулу Дирихле

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x, y)\, dx, \quad a > 0.$$

◀ Предположим, что повторные интегралы, равенство которых требуется доказать, существуют. Можем предположить, например, что функция f непрерывна на множестве

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant a,\ y \leqslant x \leqslant a\}$$

или имеет разрывы в D лишь на конечном числе гладких кривых, оставаясь ограниченной.

Рассмотрим функцию $F : D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 = [0, a] \times [0, a]$, где

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in D_1 \setminus D. \end{cases}$$

Для функции F существуют повторные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a F(x, y)\, dy, \quad I_2 = \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a F(x, y)\, dx.$$

Произведем разбиение Π квадрата D_1 на ячейки — прямоугольники $\overline{\mathcal{J}}_{ij}$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$, выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_j) \in \overline{\mathcal{J}}_{ij}$ и составим интегральные суммы

$$S_\Pi^{(1)}(F) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F(\xi_i, \eta_j) |\overline{\mathcal{J}}_{ij}|, \quad S_\Pi^{(2)}(F) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_j) |\overline{\mathcal{J}}_{ij}|,$$

где $|\overline{\mathcal{J}}_{ij}| = \Delta x_i\, \Delta y_j$. Из существования интегралов I_1, I_2 следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |I_1 - S_\Pi^{(1)}(F)| < \varepsilon \wedge |I_2 - S_\Pi^{(2)}(f)| < \varepsilon$. Так как $S_\Pi^{(1)}(F) = S_\Pi^{(2)}(F)$, то $I_1 = I_2$. Пусть $x \in]0, a[$. Тогда имеем

$$\int\limits_0^a F(x, y)\, dy = \int\limits_0^x F(x, y)\, dy + \int\limits_x^a F(x, y)\, dy = \int\limits_0^x f(x, y)\, dy.$$

Если $y \in]0, a[$, то получим

$$\int\limits_0^a F(x, y)\, dx = \int\limits_0^y F(x, y)\, dx + \int\limits_y^a F(x, y)\, dx = \int\limits_y^a f(x, y)\, dx.$$

Поскольку $I_1 = I_2$, то

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x, y)\, dx. \blacktriangleright$$

Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

7. $\displaystyle\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy.$

◀ При изменении y от 0 до 1 переменная x пробегает в области интегрирования значения от $2-y$ до $1+\sqrt{1-y^2}$, в силу чего получаем повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx. \ \blacktriangleright$$

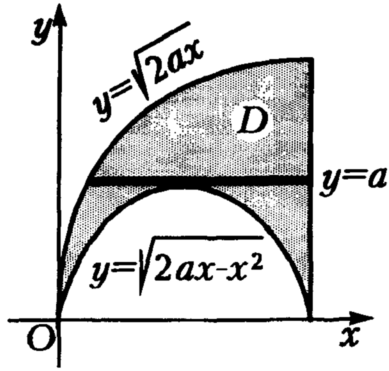

Рис. 1

8. $\displaystyle\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy,\ a > 0.$

◀ Разобьем замкнутую область

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax}\right\}$$

отрезком прямой $y = a$ на три области (рис. 1). При изменении порядка интегрирования получим сумму повторных интегралов

$$\int\limits_0^a \left(\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx \right) dy + \int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\,dx. \ \blacktriangleright$$

9. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy.$

◀ Из свойства аддитивности интеграла Римана и его свойства изменять знак на противоположный при изменении направления интегрирования получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\pi}^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy - \int\limits_{\pi}^{2\pi} dx \int\limits_{\sin x}^{0} f(x, y)\,dy.$$

В каждом из интегралов, входящих в правую часть полученного равенства, изменим порядок интегрирования.

При изменении y от 0 до 1 переменная x изменяется от $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$; а при изменении y от -1 до 0 переменная x изменяется от $\pi - \arcsin y$ до $2\pi + \arcsin y$, в силу чего получим разность интегралов

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\,dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x, y)\,dx. \ \blacktriangleright$$

В двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования, если:

10. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant ax\ (a < 0)\}$.

◀ При переходе к полярным координатам в интеграле I по формуле (5), п.1.8, переменная φ изменяется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до $a\cos\varphi$. Следовательно,

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho. \ ▶$$

11. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant a,\ \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a\right\}$.

◀ Отрезками лучей $y = x$ и $y = -x$, $y > 0$, разобьем область интегрирования на три множества (рис. 2): два параболических сегмента

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant x\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant 0,\ \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant -x\right\}$$

и треугольник $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqslant x \leqslant a,\ |x| \leqslant y \leqslant a\}$. В силу свойства аддитивности двойного интеграла, имеем

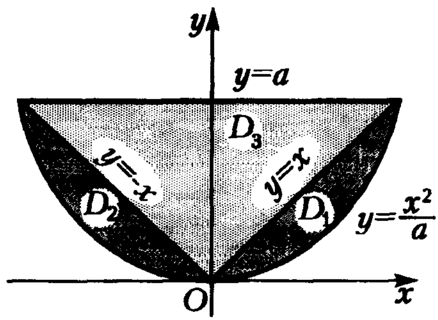

Рис. 2

$$I = \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{D_j} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

В D_1 переменная φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а ρ изменяется от 0 до $\rho = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. В D_2 имеем $\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, а в D_3, очевидно, $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$, $0 \leqslant \rho \leqslant a\,\mathrm{cosec}\,\varphi$.

Переходя к полярным координатам в каждом интеграле, входящем в сумму (1), получим

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\,\mathrm{cosec}\,\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho. \ ▶$$

Перейти к полярным координатам в повторных интегралах, считая подынтегральную функцию непрерывной в области определения:

12. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

◀ функция f непрерывна в круговом сегменте

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2}\},$$

поэтому повторный интеграл I равен двойному интегралу

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получаем представление множества D в виде

$$D = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \ \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \leqslant \rho \leqslant 1\right\},$$

или в виде

$$D = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \rho \leqslant 1, \ \arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}\right\}.$$

Соответственно каждому из этих представлений после замены переменных интеграл I принимает вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \rho\,d\rho \int_{\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi. \ ▶$$

13. $I = \displaystyle\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

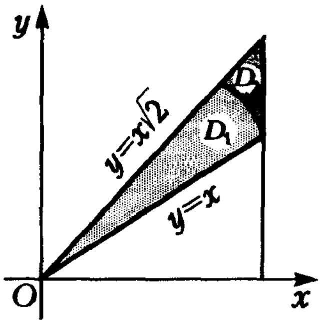

Рис. 3

◀ Как и в предыдущем примере, повторный интеграл I равен двойному интегралу от функции $(x, y) \mapsto f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2, \ x \leqslant y \leqslant x\sqrt{2}\}$, на компакте D.

Предположим, что при переходе от декартовых координат к полярным после замены двойного интеграла повторным внешнее интегрирование производится по переменной φ. Представляя в этом случае множество D в виде

$$D = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}, \ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{2}{\cos\varphi}\right\},$$

получим

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} \rho f(\rho)\,d\rho.$$

Если при замене переменных в двойном интеграле и переходе затем к повторному интегралу внешнее интегрирование будет производиться по переменной ρ, то предварительно представим множество D в виде $D = D_1 \cup D_2$ (рис. 3), где

$$D_1 = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \rho \leqslant 2\sqrt{2}, \ \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{2} \leqslant \rho \leqslant 2\sqrt{3}, \ \arccos\frac{2}{\rho} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right\},$$

и воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла:

$$I = \iint_{D_1} \rho f(\rho)\,d\rho\,d\varphi + \iint_{D_2} \rho f(\rho)\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho)\,d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho f(\rho)\,d\rho \int_{\arccos\frac{2}{\rho}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho)\,d\rho + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \arccos\frac{2}{\rho}\right) f(\rho)\,d\rho. \blacktriangleright$$

14. $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, где край ∂D компакта D задан неявно уравнением $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geqslant 0$.

◀ Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получаем уравнение края ∂D в виде $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Если после замены переменных и перехода к повторному интегралу внешнее интегрирование производится по φ, то, очевидно,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Из представления компакта D

$$D = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \rho \leqslant a,\ -\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}\right\}$$

следует, что интеграл I можно записать также в виде

$$I = \int_0^a \rho\,d\rho \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi. \blacktriangleright$$

15. Считая, что ρ и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, \rho)\,d\rho, \quad a > 0.$$

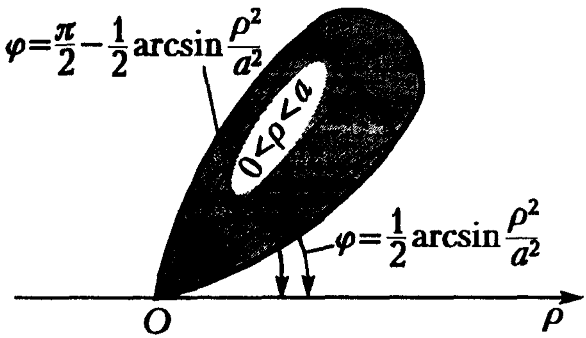

Рис. 4

◀ На рис. 4 показано, что область, в которой задана подынтегральная функция f, определяется неравенствами

$$0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad \frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}.$$

После изменения порядка интегрирования получим интеграл

$$\int_0^a d\rho \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}} f(\varphi, \rho)\,d\varphi. \blacktriangleright$$

16. Квадрат $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < a+h,\ b < y < b+h\}$, $a > 0$, $b > 0$, посредством системы функций $u = y^2x^{-1}$, $v = \sqrt{xy}$ преобразуется в область D'. Найти отношение площади области D' к площади области D. Чему равен предел этого отношения при $h \to 0$?

◀ Пусть $P_{D'}$, P_D соответственно площади областей D' и D. Под площадями открытых областей понимаем меры Жордана множеств D' и D или их замыканий. Согласно формуле замены переменной и определения жордановой меры множества, имеем

$$P_{D'} = \iint\limits_{D'} du\,dv = \iint\limits_{D} \left|\frac{\mathcal{D}(u,\,v)}{\mathcal{D}(x,\,y)}\right| dx\,dy,$$

где $\frac{\mathcal{D}(u,\,v)}{\mathcal{D}(x,\,y)} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.

Заменяя двойной интеграл повторным, получаем

$$P_{D'} = \frac{3}{2}\int\limits_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}}\,dx \int\limits_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}}\,dy = \frac{6}{5}\,\frac{\left(b^2+(b+h)^2+b(b+h)+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}\right)h^2}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b+h}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a(a+h)}}.$$

Поскольку $P_D = h^2$,

$$\frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{6}{5}\,\frac{b^2+(b+h)^2+b(b+h)+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b+h}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a(a+h)}}.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, находим

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}. \ ▶$$

17. В интеграле $I = \iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy$, где край ∂D компакта D задан уравнениями $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0)$, произвести замену переменных по формулам $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$ и перейти от двойного интеграла к повторному, считая функцию f непрерывной.

◀ При заданном отображении имеем

$$\frac{\mathcal{D}(x,\,y)}{\mathcal{D}(u,\,v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v \\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} = 4u\sin^3 v\cos^3 v,$$

в силу чего получаем

$$I = 4\iint\limits_{D'} f(u\cos^4 v,\,u\sin^4 v)|u|\,|\sin^3 v\cos^3 v|\,du\,dv,$$

где D' — компакт, внутренние точки которого отображаются на множество всех внутренних точек компакта D.

Чтобы заменить полученный двойной интеграл повторным, найдем пределы изменения переменных u и v. При заданном отображении край компакта, заданный уравнением $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, переходит в отрезок прямой $u=a$. Если $(0,\,y)$ — любая точка, лежащая на отрезке оси Oy, где $0\leqslant y\leqslant a$, то $v=\frac{\pi}{2}$. Если точка $(x,\,0)$ лежит на оси Ox и $0\leqslant x\leqslant a$, то $v=0$. Таким образом, справедливо равенство

$$I = 4\int\limits_0^a u\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(u\cos^4 v,\,u\sin^4 v)\,\sin^3 v\cos^3 v\,dv. \ ▶$$

18. Показать, что замена переменных $x+y=\xi$, $y=\xi\eta$ переводит треугольник $D = \{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$ в квадрат $D' = \{(\xi,\,\eta)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$.

◀ Началу координат в плоскости xOy соответствует множество точек $\gamma_1 = \{(\xi,\,\eta)\in\mathbb{R}^2 : \xi=0,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$. Если $y=1-x$, то $\xi=1$, $\eta=1-x$, откуда следует, что множество

$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1 - x\}$ отображается на множество $\gamma_2' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi = 1,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$, причем при возрастании x от 0 до 1 переменная η убывает от 1 до 0. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что множество $\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ отображается на множество $\gamma_3' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ \eta = 1\}$, а множество $\gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0\}$ — на множество $\gamma_4' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \eta = 0\}$. Таким образом, край компакта D отображается в край компакта D'. Осталось показать, что при заданном отображении любая внутренняя точка компакта D переходит во внутреннюю точку компакта D'. Если $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x$, то $0 < \xi < 1, 0 < \xi(1 - \eta) < 1$, откуда следует, что $0 < \eta < 1$, т.е. что точка $(\xi, \eta) \in D'$ — внутренняя. ►

19. Пусть функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$ непрерывна на компакте D, край которого ∂D задан уравнениями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ $(x > 0,\ y > 0)$. Посредством замены переменных свести двойной интеграл $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ к однократному.

◄ Произведем в интеграле I замену переменных по формулам $xy = u$, $y = vx$. Тогда $1 \leqslant u \leqslant 2$, $1 \leqslant v \leqslant 4$, т.е. отображение, определяемое системой $x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$, осуществляет C^1–диффеоморфизм квадрата $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant u \leqslant 2,\ 1 \leqslant v \leqslant 4\}$ на криволинейный четырехугольник D. Согласно формуле замены переменных, имеем

$$I = \iint\limits_{D'} f(u) \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| du\,dv = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 f(u)\,du \int\limits_1^4 \frac{dv}{v} = \ln 2 \int\limits_1^2 f(u)\,du.$$

Заметим, что якобиан взятого отображения легко вычислить по формуле

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \left(\frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} \right)^{-1} = \left(\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \right)^{-1} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}. \ ►$$

Вычислить двойные интегралы:

20. $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leqslant 1\}$.

◄ Переходя к полярным координатам ρ, φ, получим уравнение края ∂D компакта D в виде $\rho^4(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) = 1$, откуда

$$0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

После замены переменных и перехода от двойного интеграла к повторному получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}}} \rho^3\,d\rho = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^4\varphi}\,d(\operatorname{tg}\varphi).$$

Полагая в интеграле $\operatorname{tg}^4\varphi = t$, имеем

$$I = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\infty} \frac{\left(1 + t^{\frac{1}{2}}\right) t^{-\frac{3}{4}}}{1 + t}\,dt = \frac{1}{4} \left(B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2 \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \ ►$$

21. $I = \iint\limits_D (x + y)\,dx\,dy$, где D — компакт, край которого ∂D задан уравнениями $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

◀ Решая системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

получим соответственно $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ и $x_1 = 8$, $x_2 = 18$. Поэтому справедливо представление $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leqslant x \leqslant 8, \ 4 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x}\},$$
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 \leqslant x \leqslant 18, \ -\sqrt{2x} \leqslant y \leqslant 12 - x\}.$$

Используя свойство аддитивности двойного интеграла и заменяя двойные интегралы повторными, получим

$$I = \iint\limits_{D_1} (x+y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_2^8 dx \int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\,dy + \int\limits_8^{12} dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_2^8 (x+y)^2 \Big|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2}} dx + \frac{1}{2}\int\limits_8^{18} (x+y)^2 \Big|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x} dx =$$

$$= \int\limits_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} + x - 8\right) dx + \int\limits_8^{18} \left(72 - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - x\right) dx = 543\frac{11}{15}. \ ▶$$

22. $I = \iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.

◀ В точках квадрата D, симметричных относительно его диагонали, определяемой уравнением $x + y = \pi$, подынтегральная функция принимает равные значения, в силу чего справедливо равенство

$$I = 2\iint\limits_{D'} |\cos(x+y)|\,dx\,dy,$$

где $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi - x\}$. С помощью отрезка $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ y = \frac{\pi}{2} - x\right\}$ разобьем множество D' на два множества, на одном из которых подынтегральная функция положительная, а на другом — отрицательная. Указанные области в полярных координатах определяются соответственно неравенствами

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{\pi}{2(\sin\varphi + \cos\varphi)}; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2(\sin\varphi + \cos\varphi)} \leqslant \rho \leqslant \frac{\pi}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

После перехода к полярным координатам и замены двойных интегралов повторными получим

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2(\sin\varphi+\cos\varphi)}} \rho\cos\rho(\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\rho - \int\limits_{\frac{\pi}{2(\sin\varphi+\cos\varphi)}}^{\frac{\pi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)}} \rho\cos\,\rho(\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\rho \right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\sin\varphi + \cos\varphi)^2} = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} = \pi \operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\pi. \ ▶$$

23. $I = \iint\limits_D \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

◀ Функция $f : (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D$, положительна на множестве $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$ и отрицательна на множестве $D_2 = D \setminus D_1$, вследствие чего имеем

$$I = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy - \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy = -\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy + 2\iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dx\,dy + 2\iint\limits_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right) dx\,dy = I_1 + I_2.$$

После замены переменных в интегралах I_1 и I_2 соответственно по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \rho\cos\varphi$, $y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \rho\sin\varphi$, получим

$$I = -\iint\limits_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi + 2\iint\limits_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}}} f\left(\rho\cos\varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \rho\sin\varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho^2 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)\rho\,d\rho + 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2} + 4\pi\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) = \frac{9}{16}\pi. ▶$$

24. $I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

◀ Выражение под знаком модуля неотрицательно на множестве $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2\}$ и неположительно на множестве $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant y < x^2\}$. Принимая во внимание, что $D = D_1 \cup D_2$, и свойство аддитивности двойного интеграла, имеем

$$I = \iint\limits_{D_1} \sqrt{y - x^2}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2 - y}\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} \left((y - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=x^2}^{y=2} + (x^2 - y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=x^2}^{y=0}\right) dx = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} \left(x^2|x| + (2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} (2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Полагая в последнем интеграле $t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$, окончательно получим

$$I = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{\cos 4t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}. ▶$$

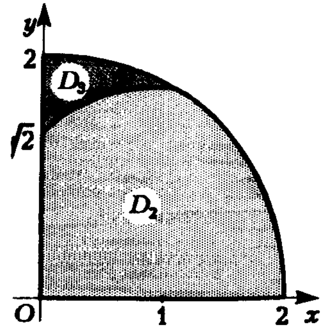

Рис. 5

Вычислить интегралы от разрывных функций:

25. $I = \iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

◀ Исходя из симметрии, следует равенство

$$I = 4\iint\limits_{D_1} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy,$$

где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

Обозначим через f функцию под знаком интеграла на компакте D_1. Эта функция разрывна в каждой точке кривой $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = \sqrt{x^2+2}\right\}$, разделяющей компакт D_1 на множества D_2 и D_3 (рис. 5), где

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y < \sqrt{x^2+2}\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\right\},$$

$$D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \sqrt{x^2+2} < y \leqslant \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

Поскольку $f(x, y) = 1$, если $(x, y) \in D_2$, $f(x, y) = 0$, если $(x, y) \in \gamma$, $f(x, y) = -1$, если $(x, y) \in D_3$, то

$$I = 4\left(\iint\limits_{D_2} dx\,dy - \iint\limits_{D_3} dx\,dy\right) = 4\left(\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right) =$$

$$= 4\left(\int\limits_0^1 \left(2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x^2}\right) dx + \int\limits_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right) =$$

$$= 4\left(\left(x\sqrt{x^2+2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)\right)\Big|_0^1 - 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt + 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\right) =$$

$$= 4\left(\sqrt{3} + 2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$$

(в интеграле $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ производилась замена $x = 2\sin t$). ▶

26. $I = \iint\limits_D [x+y]\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

◀ Отрезками прямых, заданных уравнениями $x + y = j$ ($j = 1, 2, 3$), разобьем компакт D на множества D_k ($k = 1, 2, 3, 4$) (рис. 6). Если (x, y) — внутренняя точка множества D_k, то $[x + y] = k - 1$, $k = \overline{1, 4}$, в силу чего имеем

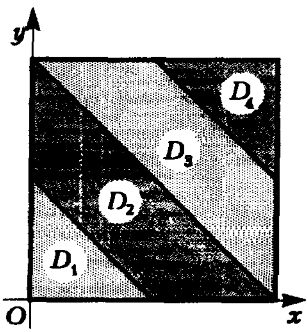

Рис. 6

$$I = \sum_{k=1}^{4} \iint\limits_{D_k} [x+y]\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{4} (k-1)P_k = P_2 + 2P_3 + 3P_4,$$

где P_k — жорданова мера множества D_k. Поскольку $P_2 = P_3 = \frac{3}{2}$, $P_4 = P_1 = \frac{1}{2}$, то окончательно получаем

$$I = 3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 6. ▶$$

27. $I = \iint\limits_D \sqrt{[y - x^2]}\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$.

◀ Исходя из симметрии заключаем, что

$$I = 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{[y - x^2]}\,dx\,dy,$$

где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2, x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$. Части кривых $\gamma_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y = x^2 + j\}$, $j = 1, 2, 3$, лежащие внутри компакта D_1, разбивают его на множества D_k $(k = \overline{1, 4})$ (рис. 7). Если (x, y) — внутренняя точка множества D_k, то $\sqrt{[y - x^2]} = \sqrt{k-1}$, $k = \overline{1, 4}$. Из свойства аддитивности двойного интеграла следует равенство

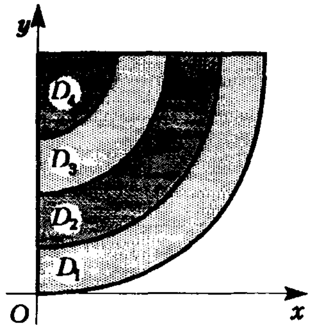

Рис. 7

$$I = 2 \sum_{k=1}^{4} \sqrt{k-1} \iint\limits_{D_k} dx\, dy = 2 \sum_{k=1}^{4} \sqrt{k-1} P_k,$$

где P_k — жорданова мера множества D_k. Из представления множества D_k в виде

$$D_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-k},\ x^2 + k - 1 \leqslant y \leqslant x^2 + k\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{4-k} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-(k-1)},\ x^2 + k - 1 \leqslant y \leqslant 4\right\},$$

имеем

$$P_k = \int\limits_0^{\sqrt{4-k}} dx \int\limits_{x^2+k-1}^{x^2+k} dy + \int\limits_{\sqrt{4-k}}^{\sqrt{5-k}} dx \int\limits_{x^2+k-1}^{4} dy =$$
$$= \sqrt{4-k} + (5-k)\left(\sqrt{5-k} - \sqrt{4-k}\right) - \frac{1}{3}\left((5-k)^{\frac{3}{2}} - (4-k)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Следовательно,

$$I = 2 \sum_{k=1}^{4} \sqrt{k-1} P_k = 2\left(P_2 + \sqrt{2} P_3 + \sqrt{3} P_4\right) = 2\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{4}{3}\left(4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right). \blacktriangleright$$

28. Вычислить $F'(t)$, если $F(t) = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t}} e^{-\frac{tx}{y^2}}\, dx\, dy$.

◀ Произведя в интеграле замену переменных по формулам $x = tu$, $y = tv$, $t > 0$, получаем $F(t) = ct^2$, где

$$c = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}\, du\, dv.$$

Дифференцируя по t, имеем

$$F'(t) = 2ct = \frac{2}{t} \cdot ct^2 = \frac{2F(t)}{t}, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

29. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iint\limits_{D(t)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, где $D(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-t)^2 + (y-t)^2 \leqslant 1, t \in \mathbb{R}\}$.

◀ Заменяя в интеграле переменные по формулам $x - t = \rho\cos\varphi$, $y - t = \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, получим

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} \sqrt{(t + \rho\cos\varphi)^2 + (t + \rho\sin\varphi)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Phi(\varphi, t)\, d\varphi,$$

где $\Phi(\varphi, t) = \int\limits_0^1 \sqrt{(t+\rho\cos\varphi)^2 + (t+\rho\sin\varphi)^2}\,\rho\,d\rho$.

Согласно формуле Лейбница (формуле дифференцирования интеграла по параметру), имеем

$$F'(t) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\Phi(\varphi, t)}{\partial t}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{(t+\rho\cos\varphi) + (t+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{(t+\rho\cos\varphi)^2 + (t+\rho\sin\varphi)^2}}\rho\,d\rho = \iint\limits_{D(t)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy. \blacktriangleright$$

30. Пусть линии уровня функции f — простые замкнутые кривые, и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v_1\}, \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v_2\}, \quad v_1 < v_2.$$

Доказать, что

$$I = \iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

где $F(v)$ — переменная площадь фигуры, ограниченной кривой γ_1 и кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v,\ v_1 \leqslant v \leqslant v_2\}$.

◀ Предположим, что функция F дифференцируема на сегменте $[v_1, v_2]$. Тогда $F'(v) \geqslant 0$ $\forall v \in]v_1, v_2[$, так как F — возрастающая функция. Пусть $\Pi = \{v_1 = \overline{v}_0, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n = v_2\}$ — произвольное разбиение сегмента $[v_1, v_2]$, где $\overline{v}_i < \overline{v}_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$. Принимая во внимание неравенства $\overline{v}_i \leqslant f(x, y) \leqslant \overline{v}_{i+1}$, $(x, y) \in S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1})$ и свойство аддитивности двойного интеграла, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{v}_i\,\Delta S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1}) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \iint\limits_{S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1})} f(x, y)\,dx\,dy = I \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \overline{v}_{i+1}\,\Delta S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1}), \tag{1}$$

где $\Delta S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1}) = F(\overline{v}_{i+1}) - F(\overline{v}_i)$ — площадь компакта $S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1})$. Согласно формуле конечных приращений, получаем

$$\Delta S(\overline{v}_i, \overline{v}_{i+1}) = F'(\tilde{v}_i)\,\Delta\overline{v}_i, \quad \text{где} \quad \overline{v}_i < \tilde{v}_i < \overline{v}_{i+1}.$$

Из очевидных соотношений $\overline{v}_i = \tilde{v}_i + \alpha_i^{(1)}(\Delta\overline{v}_i)$, $\overline{v}_{i+1} = \tilde{v}_i + \alpha_i^{(2)}(\Delta\overline{v}_i)$, где $\alpha_i^{(1)}$ и $\alpha_i^{(2)}$ — бесконечно малые при $\Delta\overline{v}_i \to 0$ функции, следует, что неравенства (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(1)} F'(\tilde{v}_i)\,\Delta v_i + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_i F'(\tilde{v}_i)\,\Delta v_i \leqslant I \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_i F'(\tilde{v}_i)\,\Delta\overline{v}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(2)} F'(\tilde{v}_i)\,\Delta\overline{v}_i.$$

После перехода к пределу в этих неравенствах получим

$$I = \int\limits_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv.$$

Пусть, например, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$. Тогда $F(v) = \pi(v-1)$, $F'(v) = \pi$,

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy = \pi \int\limits_1^3 v\,dv = \frac{\pi}{2}v^2\Big|_1^3 = 4\pi. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

31. $I = \iiint\limits_K \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, где $\partial K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

◀ Переходя к обобщенным сферическим координатам по формулам $x = a\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и заменяя тройной интеграл повторным, получим, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2\sin\theta$,

$$I = abc\int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho^4\,d\rho = \frac{2}{5}\pi abc\cos\theta\Big|_\pi^0 = \frac{4}{5}\pi abc. \ ▶$$

32. $I = \iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x^2+y^2 = z^2$, $z = 1$.

◀ Край ∂K состоит из части конической поверхности и части плоскости, заданной уравнением $z = 1$; а компакт K проектируется на круг

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

Перейдем в интеграле к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Принимая во внимание, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $\rho \leqslant z \leqslant 1$, $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi, z)} = \rho$, получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho^2\,d\rho\int\limits_\rho^1 dz = 2\pi\int\limits_0^1 \rho^2(1-\rho)\,d\rho = \frac{\pi}{6}. \ ▶$$

33. $I = \iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant z\}$.

◀ Перейдем в интеграле к сферическим координатам, приняв во внимание, что $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \cos\theta$, $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2\sin\theta$.

Тогда получим

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\cos\theta} \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{10}\cos^5\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{10}. \ ▶$$

34. $I = \iiint\limits_K x^2\,dx\,dy\,dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h\,(h > 0)$.

◀ Представив множество K в виде

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant h,\ \sqrt{\frac{z}{b}} \leqslant y \leqslant \sqrt{\frac{z}{a}},\ \frac{z}{\beta} \leqslant x \leqslant \frac{z}{\alpha}\right\}$$

и заменяя тройной интеграл повторным, получим

$$I = \int\limits_0^h dz\int\limits_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy\int\limits_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2\,dx = \frac{1}{3}(\alpha^{-3}-\beta^{-3})\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)\int\limits_0^h z^{\frac{7}{2}}\,dz = \frac{2}{27}(\alpha^{-3}-\beta^{-3})\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)h^{\frac{9}{2}}. \ ▶$$

35. $I = \iiint\limits_K xyz\,dx\,dy\,dz$, где компакт K расположен в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и ограничен поверхностями, заданными уравнениями $z = \dfrac{x^2+y^2}{m}$, $z = \dfrac{x^2+y^2}{n}$, $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = \beta x$ $(0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$, $0 < m < n)$.

◀ Произведем в интеграле замену, полагая $xy = u$, $y = vx$, $z = z$. Тогда получим

$$I = \iiint\limits_{K'} x(u,\, v)y(u,\, v)z \left|\frac{\mathcal{D}(x,\, y,\, z)}{\mathcal{D}(u,\, v,\, z)}\right| du\,dv\,dz,$$

где K' — компакт, отображающийся на компакт K, причем

$$K' = \left\{(u,\, v,\, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leqslant u \leqslant b^2,\, \alpha \leqslant v \leqslant \beta,\, \frac{u(v+v^{-1})}{n} \leqslant z \leqslant \frac{u(v+v^{-1})}{m}\right\}.$$

Поскольку при указанной замене $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, $z = z$, то $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,z)} = \frac{1}{2v}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} u\,du \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dv}{v}\int\limits_{\frac{u(v+v^{-1})}{n}}^{\frac{u(v+v^{-1})}{m}} z\,dz = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\int\limits_{a^2}^{b^2} u^3\,du\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(v+\frac{1}{v}\right)^2\frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{16}(m^{-2}-n^{-2})(b^8-a^8)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(v+\frac{2}{v}+\frac{1}{v^3}\right)dv =$$

$$= \frac{1}{16}(m^{-2}-n^{-2})(b^8-a^8)\left(\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2\ln\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}(\alpha^{-2}-\beta^{-2})\right) =$$

$$= \frac{1}{32}(m^{-2}-n^{-2})(b^8-a^8)\left((\beta^2-\alpha^2)(1+\alpha^{-2}\beta^{-2})+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right). \blacktriangleright$$

36. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}, \quad \text{где} \quad a^2+b^2+c^2 > r^2.$$

◀ Согласно теореме о среднем для кратных интегралов, имеем

$$I = f(M)\mu K = f(M)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3,$$

где $f(M)$ — значение подынтегральной функции в некоторой точке шара $K = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2\}$. Поскольку $a^2+b^2+c^2 > r^2$, то функция $\varphi : (x,\, y,\, z) \mapsto \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, $(x,\, y,\, z) \in K$, не принимает экстремальных значений внутри шара K, а достигает наибольшего и наименьшего значений на его крае $\partial K = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x,\, y,\, z) = \varphi(x,\, y,\, z) + \lambda(x^2+y^2+z^2-r^2)$$

и найдем ее экстремальные точки. Имеем

$$F'_x = \frac{x-a}{\varphi}+2\lambda x = 0, \quad F'_y = \frac{y-b}{\varphi}+2\lambda y = 0, \quad F'_z = \frac{z-c}{\varphi}+2\lambda z = 0.$$

Решая полученную систему уравнений совместно с уравнением связи $x^2+y^2+z^2 = r^2$, найдем λ и точки M_1, M_2 условного экстремума функции φ:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2r}, \quad M_1 = \left(\frac{ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\, \frac{rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\, \frac{rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

$$M_2 = \left(-\frac{ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\, -\frac{rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\, -\frac{rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

Поскольку

$$\varphi(M_1) = \sqrt{a^2+b^2+c^2} - r, \quad \varphi(M_2) = \sqrt{a^2+b^2+c^2} + r,$$

то справедливы неравенства $\varphi(M_1) < \varphi(M) < \varphi(M_2)$, которые можно записать как одно неравенство

$$\left|\varphi(M) - \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right| < r, \quad M \in K \setminus \partial K.$$

Обозначая $\theta = \frac{\varphi(M)-\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r}$, получим равенство $\varphi(M) = \sqrt{a^2+b^2+c^2} + r\theta$, где $|\theta| < 1$. Принимая во внимание, что $f(M) = \frac{1}{\varphi(M)}$, имеем оценку

$$I = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+r\theta}}, \quad |\theta| < 1. \blacktriangleright$$

37. Доказать, что если функция $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^3$ и $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 0$ для любой области $\omega \subset K$, то $f(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in K$.

◀ Пусть $\boldsymbol{P}$ — любая внутренняя точка множества K и $S(\boldsymbol{P}, \varepsilon)$ — открытый шар. По теореме о среднем и из условия задачи имеем

$$f(\overline{\boldsymbol{P}}) = \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} \iiint\limits_{S(\boldsymbol{P},\, \varepsilon)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 0, \quad \overline{\boldsymbol{P}} \in S(\boldsymbol{P}, \varepsilon).$$

Стягивая шар $S(\boldsymbol{P}, \varepsilon)$ к точке $\boldsymbol{P}$, получаем, что $f(\boldsymbol{P}) = 0$. Таким образом, функция f обращается в нуль в каждой внутренней точке множества K. В силу ее непрерывности на компакте K она будет равна нулю и в точках, принадлежащих его краю ∂K. Следовательно, $f(x, y, z) \equiv 0$, если $(x, y, z) \in K$. ▶

38. Найти $F'(t)$, если:

а) $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где f — непрерывная функция;

б) $F(t) = \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t \\ 0 \leqslant z \leqslant t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz$, где f — дифференцируемая функция.

◀ а) Перейдя в интеграле к сферическим координатам и заменяя после этого тройной интеграл повторным, получим

$$F(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{t} \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho = 4\pi \int\limits_0^{t} \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho.$$

Дифференцируя функцию F, находим $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

б) Заменим тройной интеграл повторным

$$F(t) = \int\limits_0^t dx \int\limits_0^t dy \int\limits_0^t f(xyz)\,dz$$

и вычислим производную функции F по параметру t:

$$F'(t) = \int\limits_0^t dy \int\limits_0^t f(tyz)\,dz + \int\limits_0^t dx \left(\int\limits_0^t f(xtz)\,dz + \int\limits_0^t f(xyt)\,dy \right) =$$

$$= \int_0^t dy \int_0^t f(tyz)\,dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xtz)\,dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xyt)\,dy. \qquad (1)$$

Поскольку функция f дифференцируема, то можем вычислить повторный интеграл $F(t)$, применив формулу интегрирования по частям, полагая при этом $dv = dz$, $u = f(xyz)$:

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dy \left(zf(xyz)\Big|_{z=0}^{t} - \int_0^t zf'(xyz)xy\,dz \right) =$$

$$= t\int_0^t dx \int_0^t f(xyz)\,dy - \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyzf'(xyz)\,dz. \qquad (2)$$

Заменяя тройной интеграл $F(t)$ повторными

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t f(xyz)\,dy = \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t f(xyz)\,dx$$

и применив формулу интегрирования по частям, получим

$$F(t) = t\int_0^t dx \int_0^t f(xtz)\,dz - \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t xyzf'(xyz)\,dy, \qquad (3)$$

$$F(t) = t\int_0^t dy \int_0^t f(tyz)\,dz - \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t xyzf'(xyz)\,dx. \qquad (4)$$

Складывая левые и правые части равенств (2), (3), (4) и принимая во внимание равенство (1), имеем

$$\frac{3}{t}\left(F(t) + \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyzf'(xyz)\,dz \right) = F'(t),$$

откуда получаем

$$F'(t) = \frac{3}{t}\left(F(t) + \iiint\limits_{K(t)} xyzf'(xyz)\,dx\,dy\,dz \right),$$

где $K(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant t,\ 0 \leqslant y \leqslant t, 0 \leqslant z \leqslant t\}$. ►

39. Пусть $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на множестве $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : 0 \leqslant x_j \leqslant x,\ j = \overline{1, m}\}$. Доказать равенство

$$I(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} f(\boldsymbol{x})\,dx_m = \int_0^x dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \ldots \int_{x_2}^x f(\boldsymbol{x})\,dx_1.$$

◄ Из непрерывности функции f и теоремы Фубини следует равенство

$$I(x) = \int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Представляя множество K в виде

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : 0 \leqslant x_m \leqslant x,\ x_{i+1} \leqslant x_i \leqslant x,\ i = m-1,\ m-2, \ldots, 1\}$$

и применив теорему Фубини, получим

$$I(x) = \int_0^x dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \ldots \int_{x_2}^x f(x)\, dx_1. \blacktriangleright$$

40. Доказать, что

$$I(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-1}} f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_m)\, dt_m = \frac{1}{m!}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)^m,$$

где f — непрерывная функция.

◀ Запишем $I(t)$ в виде

$$I(t) = \int_0^t f(t_1)\, dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2)\, dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m)\, dt_m$$

и обозначим

$$\varphi(t_{m-2}) = \int_0^{t_{m-2}} f(t_{m-1})\, dt_{m-1} \int_0^{t_{m-1}} f(t_m)\, dt_m.$$

Представив $\varphi(t_{m-2})$ в виде

$$\varphi(t_{m-2}) = \frac{1}{2}\int_0^{t_{m-2}} d\left(\int_0^{t_{m-1}} f(t_m)\, dt_m\right)^2,$$

получим

$$\varphi(t_{m-2}) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_{m-2}} f(y)\, dy\right)^2.$$

Предполагая справедливым равенство

$$\varphi(t_1) = \int_0^{t_1} f(t_2)\, dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m)\, dt_m = \frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^{t_1} f(\tau)\, d\tau\right)^{m-1},$$

имеем

$$I(t) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t f(t_1)\, dt_1 \left(\int_0^{t_1} f(\tau)\, d\tau\right)^{m-1} = \frac{1}{m!}\int_0^t d\left(\int_0^{t_1} f(\tau)\, d\tau\right)^m = \frac{1}{m!}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)^m.$$

Методом математической индукции формула доказана. ▶

41. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} x_1 x_2 \ldots x_m\, dx_m.$$

◀ Применив формулу, доказанную в примере 40, получим

$$I = \frac{1}{m!}\left(\int_0^1 x\, dx\right)^m = \frac{1}{2^m m!}. \blacktriangleright$$

42. Привести к однократному интегралу m-кратный интеграл

$$I = \int\limits_K f(\|\boldsymbol{x}\|)\, d\boldsymbol{x},$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$, f — непрерывная функция,

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \|\boldsymbol{x}\|^2 \leqslant r^2\}.$$

◀ Произведем в интеграле замену переменных по формулам (14), п.1.8. Принимая во внимание формулу (15), п.1.8, получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi_2\, d\varphi_2 \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi_3\, d\varphi_3 \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin^{m-2}\varphi_{m-1}\, d\varphi_{m-1} \int\limits_0^{r} f(\rho)\rho^{m-1}\, d\rho =$$

$$= 2^{m-1}\pi \prod_{j=2}^{m-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j\, d\varphi_j \int\limits_0^{r} f(\rho)\rho^{m-1}\, d\rho.$$

В каждом интеграле, входящем в произведение, произведем замену переменной $\sin\varphi_j = t_j^{\frac{1}{2}}$. Тогда $d\varphi_j = \frac{1}{2} t_j^{-\frac{1}{2}}(1-t_j)^{-\frac{1}{2}}\, dt_j$, в силу чего получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j\, d\varphi_j = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t_j^{\frac{j}{2}-1}(1-t_j)^{-\frac{1}{2}}\, dt_j = \frac{1}{2} B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)},$$

$$\prod_{j=2}^{m-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j\, d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2) \ldots \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int\limits_0^r f(\rho)\rho^{m-1}\, d\rho = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int\limits_0^r f(\rho)\rho^{m-2}\, d\rho^2.$$

Полагая в последнем интеграле $\rho^2 = t$, имеем

$$I = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int\limits_0^{r^2} f(\sqrt{t})\, t^{\frac{m}{2}-1}\, dt. \ ▶$$

43. Доказать равенство

$$I = \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{m-1}} f(x_m)\, dx_m = \int\limits_0^x f(u)\frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\, du,$$

где f — непрерывная функция.

◀ Согласно формуле, доказанной в примере 39, имеем

$$I = \int\limits_0^x f(x_m)dx_m \int\limits_{x_m}^x dx_{m-1} \int\limits_{x_{m-1}}^x dx_{m-2} \ldots \int\limits_{x_3}^x dx_2 \int\limits_{x_2}^x dx_1.$$

Поскольку

$$\int_{x_3}^{x} dx_2 \int_{x_2}^{x} dx_1 = \frac{(x-x_3)^2}{2},$$

то можем предположить, что справедливо равенство

$$\int_{x_{m-1}}^{x} dx_{m-2} \int_{x_{m-2}}^{x} dx_{m-3} \ldots \int_{x_3}^{x} dx_2 \int_{x_2}^{x} dx_1 = \frac{(x-x_{m-1})^{m-2}}{(m-2)!}.$$

При таком предположении получаем

$$\int_{x_m}^{x} dx_{m-1} \ldots \int_{x_3}^{x} dx_2 \int_{x_2}^{x} dx_1 = \frac{1}{(m-2)!} \int_{x_m}^{x} (x-x_{m-1})^{m-2}\, dx_{m-2} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}(x-x_{m-1})^{m-1} \Big|_{x_{m-1}=x}^{x_{m-1}=x_m} = \frac{(x-x_m)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Таким образом, применив метод математической индукции, имеем

$$I = \int_0^x f(x_m)\frac{(x-x_m)^{m-1}}{(m-1)!}\, dx_m = \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\, du. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dx\, dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

разбивая область интегрирования на квадраты, вершины которых находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

2. Компакт $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ разбит на конечное число квадрируемых частей K_i, $i = \overline{1, n}$, диаметром меньше чем δ каждая, без общих внутренних точек. При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| \iint\limits_K \sin(x+y)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\mu K_i \right| < 0{,}001,$$

где $(x_i, y_i) \in K_i$, μK_i — жорданова мера множества K_i?

3. Доказать равенство

$$\iint\limits_K P(x)Q(y)\, dx\, dy = \int_a^A P(x)\, dx \int_b^B Q(y)\, dy,$$

где $K = [a, A] \times [b, B]$, а функции P и Q непрерывны соответственно на сегментах $[a, A]$, $[b, B]$.

4. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\, dx,$$

где знак равенства возможен лишь при $f(x) = \mathrm{const}$.

5. Какой знак имеет интеграл

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\, dx\, dy?$$

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

6. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{0} f(x, y)\, dy$. 7. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx$.

8. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$. 9. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$.

Ввести вместо x и y новые переменные и произвести замену переменных в следующих интегралах, предполагая, что подынтегральная функция непрерывная:

10. $I = \iint\limits_K f(x, y)\, dx\, dy$, где: а) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$; б) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2\}$, если $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

11. $I = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\ \alpha x\leqslant y\leqslant \beta x}} f(x, y)\, dx\, dy$, если $u = x + y$, $uv = y$.

12. $I = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\ 0\leqslant y\leqslant b}} f(x, y)\, dx\, dy$, если $u = y + \alpha x$, $uv = y$.

13. $I = \iint\limits_K f(x, y)\, dx\, dy$, если $x = \rho\cos^3\varphi$, $y = \rho\sin^3\varphi$, где

$$\partial K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\right\}.$$

14. В интеграле $\iint\limits_K f(x, y)\, dx\, dy$ край ∂K компакта K задан уравнениями $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $x = a$ $(\alpha < \beta)$. Произвести в интеграле такую замену переменных, чтобы после нее интегрирование производилось в прямоугольнике.

15. В интеграле $\iint\limits_K f(x, y)\, dx\, dy$, где $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, произвести такую замену переменных, чтобы после нее интегрирование производилось: а) в прямоугольнике; б) в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Вычислить двойные интегралы:

16. $I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} x^2\, dx\, dy$.

17. $\iint\limits_K xy^2\, dx\, dy$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

18. $\iint\limits_K \frac{dx\, dy}{\sqrt{2a-x}}$, $a > 0$, если край ∂K компакта K состоит из кратчайшей дуги окружности с центром в точке (a, a) радиуса a, касающейся осей координат и отрезков осей координат.

19. $\iint\limits_K (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, если K — параллелограмм со сторонами, заданными уравнениями $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ и $y = 3a$ $(a > 0)$.

20. $\iint\limits_K y^2\, dx\, dy$, если край ∂K компакта K состоит из отрезка оси абсцисс и одной арки циклоиды

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}.$$

21. $\iint\limits_K \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, где $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\pi^2\}$.

22. $\iint\limits_K (x+y)\,dx\,dy$, где $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant x + y\}$.

Вычислить тройные интегралы:

23. $\iiint\limits_K xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

24. $\iiint\limits_K \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

25. $\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

26. $\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где край ∂K компакта K — поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

27. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz$, где m, n, p — целые неотрицательные числа.

Вычислить следующие m-кратные интегралы:

28. $\int\limits_K \|x\|^2\,dx$, где $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m x_i^2$, $K = [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$.

29. $\int\limits_K \left(\sum\limits_{i=1}^m x_i\right)^2 dx$, где $K = [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$.

30. $\int\limits_K dx$, где $K = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geqslant 0\ (i = \overline{1, m}),\ \sum\limits_{i=1}^m x_i \leqslant a\right\}$.

31. $\int\limits_K \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m x_i}\,dx$, $K = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geqslant 0\ (i = \overline{1, m}),\ \sum\limits_{i=1}^m x_i \leqslant 1\right\}$.

32. Доказать равенство

$$\int\limits_0^x x_1\,dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_m} f(x_{m+1})\,dx_{m+1} = \frac{1}{2^m m!}\int\limits_0^x (x^2 - u^2)^m f(u)\,du.$$

33. Найти потенциал на себя однородного шара радиуса r и плотности μ_0, т.е. вычислить интеграл

$$U = \frac{\mu_0}{2} \iiiint\!\!\!\iint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant r^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant r^2}} \frac{dx_1\,dy_1\,dz_1\,dx_2\,dy_2\,dz_2}{\rho_{1,2}},$$

где $\rho_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$.

§ 2. Несобственные кратные интегралы

2.1. Несобственный m-кратный интеграл Римана.

Определение 1. *Точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ называется особой точкой для интегрирования функции $f : \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ (функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$), если f не ограничена в любой окрестности $S(x_0, \delta)$.*

Предположим, что все особые точки функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ образуют замкнутое множество Z меры 0 (которое, в частности, может быть пустым). Возьмем последовательность множеств (E_n), $n \in \mathbb{N}$, обладающих свойствами: 1) каждое множество E_n является открытым, измеримым по Жордану; 2) $\overline{E}_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^m \setminus Z$, где $\overline{E}_n$ — замыкание множества E_n. Такую последовательность множеств назовем *допустимой для интегрирования функции f с множеством особых точек Z*, или, короче, *допустимой*.

Пусть функция f непрерывна почти всюду в области определения, т.е. разрывна лишь на множестве лебеговой меры 0. Так как $\overline{E}_n \subset E_{n+1}$ и $E_{n+1} \cap Z = \varnothing$, то у каждой точки $x \in E_n$ есть окрестность $S(x,\, \delta(x))$, в которой значения функции f ограничены. По теореме Гейне–Бореля, из указанного семейства окрестностей можно выбрать их конечное число $S(x_i,\, \delta_i)$, $i = \overline{1,\, k}$, покрывающих множество $\overline{E}_n$. Пусть в окрестности $S(x_i,\, \delta_i)$, $i = \overline{1,\, k}$, значения функции f ограничены числом M_i. Тогда на множестве E_n значения функции f ограничены числом $M = \max\{M_1,\, M_2,\, \ldots,\, M_k\}$. Поскольку функция f непрерывна почти всюду в области определения и ограничена на каждом множестве E_n, то ее сужение на это множество интегрируемо по Риману.

Рассмотрим последовательность m–кратных интегралов Римана

$$I_n = \int\limits_{E_n} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Определение 2. *Если для произвольной допустимой последовательности множеств (E_n) последовательность интегралов Римана (I_n) имеет при $n \to \infty$ конечный предел I, не зависящий от выбора допустимой последовательности, то существует (сходится) несобственный m–кратный интеграл Римана*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\, dx, \tag{2}$$

равный числу I. Если $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$ или вообще не существует, то несобственный интеграл (2) *не существует (расходится).*

Согласно определению, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\, dx. \tag{3}$$

Определение 3. *Несобственный интеграл* (2) *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\, dx. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду и неотрицательна. Если существует такая допустимая последовательность множеств (E_n), что последовательность (1) *ограничена, то интеграл* (2) *сходится.*

Эта теорема значительно упрощает исследование абсолютной сходимости несобственного интеграла. Для решения вопроса об абсолютной сходимости интеграла (2) достаточно исследовать на ограниченность последовательности

$$\left(\int\limits_{E_n} |f(x)|\, dx \right) \tag{5}$$

для какой-нибудь одной, специально выбранной допустимой последовательности множеств (E_n). Если при этом последовательность (5) окажется ограниченной, то несобственный интеграл (2) абсолютно сходится; если последовательность (5) не ограничена, то интеграл (4) равен $+\infty$, и интеграл (2) не является абсолютно сходящимся.

***Теорема 2.** Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду в области определения. Если несобственный интеграл (2) сходится абсолютно, то он сходится.*

Следующая теорема сводит проблему сходимости несобственного m–кратного интеграла Римана к проблеме его абсолютной сходимости.

***Теорема 3.** Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду. Если несобственный интеграл (2) сходится, то он сходится абсолютно.*

2.2. Несобственный m–кратный интеграл Римана функции, заданиой иа подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывная почти всюду на множестве E функция, не интегрируема по Риману в собственном смысле. Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus E. \end{cases}$$

Определение. *Несобственный m–кратный интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} F(x)\,dx$$

назовем несобственным интегралом той же кратности от функции f и обозначим символом

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx.$$

2.3. Некоторые признаки сходимости m-кратных несобственных интегралов.

Признак 1. *Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ почти всюду непрерывная, локально ограниченная функция и существует предел*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x)\|x\|^{\alpha} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

то несобственный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx$$

сходится при $\alpha > m$.

Признак 2. *Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — почти всюду непрерывная функция, ограниченная вне некоторой окрестности начала координат O, и существует предел*

$$\lim_{\|x\| \to 0} f(x)\|x\|^{\alpha} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

то несобственный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx$$

сходится при $\alpha < m$.

Признак 3 (сравнения). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, — почти всюду непрерывные неотрицательные функции и $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in E$. Тогда из сходимости интеграла*

$$\int\limits_{E} g(x)\,dx$$

следует сходимость интеграла $\int\limits_E f(x)\,dx$ а из расходимости интеграла

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx$$

следует расходимость интеграла $\int\limits_E g(x)\,dx$.

2.4. Замена переменных в несобственном m-кратном интеграле.

Теорема. *Пусть ξ — C^1-диффеоморфизм открытого множества E' евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ на открытое множество E того же пространства. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна всюду на E, за исключением замкнутого множества точек Z меры 0, и несобственный интеграл*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \tag{1}$$

существует, то интеграл

$$\int\limits_{E'} f(\xi(t))|\det \xi'(t)|\,dt \tag{2}$$

сходится и справедливо равенство

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E'} f(\xi(t))|\det \xi'(t)|\,dt. \tag{3}$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы:

44. $\displaystyle\iint\limits_E \frac{\varphi(x,\, y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy$, $E = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geqslant 1\}$, $0 < m \leqslant |\varphi(x,\, y)| \leqslant M$.

◀ Обозначим подынтегральную функцию через f. Поскольку $\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leqslant |f(x,\, y)| \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2)^p}$ и сходимость несобственного двойного интеграла эквивалентна его абсолютной сходимости, то по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится или расходится вместе с интегралом

$$I = \int\limits_E \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}.$$

Поскольку $\frac{1}{(x^2+y^2)^p} = O\left(\frac{1}{\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^{2p}}\right)$ при $x^2+y^2 \to +\infty$, то, согласно признаку 1, интеграл I сходится при $2p > 2$, т.е. при $p > 0$. Поэтому исследуемый интеграл также сходится при $p > 1$. ▶

45. $\displaystyle I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$.

◀ Пусть (E_n) — допустимая последовательность областей такая, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^2$. Возьмем такой квадрат $K_{1n} \subset E_n$, сторона которого равна $2\alpha_{1n}$, и такой квадрат $K_{2n} \supset E_n$, сторона которого равна $2\alpha_{2n}$, чтобы $\alpha_{jn} \to +\infty$ при $n \to \infty$, $j = 1,\, 2$. Тогда справедлива оценка

$$\iint\limits_{K_{1n}} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \leqslant \iint\limits_{E_n} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \leqslant \iint\limits_{K_{2n}} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)},$$

из которой следуют неравенства

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{K_{1n}} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \leqslant I \leqslant \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{K_{2n}} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна, то

$$\iint\limits_{K_{jn}} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} = \int\limits_{a-\alpha_{jn}}^{a+\alpha_{jn}} \frac{dx}{1+|x|^p} \int\limits_{b-\alpha_{jn}}^{b+\alpha_{jn}} \frac{dy}{1+|y|^q},$$

где (a, b) — центр всех квадратов K_{jn}. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{K_{jn}} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+|x|^p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+|y|^q}.$$

Таким образом, сходимость интеграла I эквивалентна одновременной сходимости двух одномерных несобственных интегралов, сходящихся лишь при $p > 1$ и $q > 1$. Заметим, что поскольку подынтегральная функция положительная, то исследование интеграла I достаточно провести при выборе фиксированной допустимой последовательности(E_n). ▶

46. $I = \iint\limits_E \frac{\varphi(x, y)\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$, $E = \mathbb{R} \times [0, 1]$, $0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M$.

◀ Вполне очевидно, интеграл I сходится и расходится одновременно с интегралом

$$I_1 = \iint\limits_E \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy.$$

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x, y)\,dx\,dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

Так как функция F неотрицательна, то достаточно рассмотреть и исследовать на сходимость последовательность интегралов

$$\left(\iint\limits_{E_n} F(x, y)\,dx\,dy \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

для одной допустимой последовательности множеств (E_n).

Возьмем $E_n = [-n, n] \times [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда получим

$$\iint\limits_{E_n} F(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}.$$

Если $p \leqslant 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n} F(x, y)\,dx\,dy = +\infty$ и интеграл I_1, а вместе с ним и интеграл I расходятся. При $p > 0$ справедливы оценки

$$\int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(2+x^2)^p} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leqslant \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \leqslant \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2)^p} = \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2)^p}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leqslant I_1 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p}, \quad p > 0,$$

откуда получаем, что I_1 сходится, если $2p > 1$, т.е. если $p > \frac{1}{2}$, и расходится, если $p \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, интеграл I сходится, если $p > \frac{1}{2}$, и расходится, если $p \leqslant \frac{1}{2}$. ▶

47. $I = \iint\limits_E \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q}$, $p > 0$, $q > 0$, где $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geqslant 1\}$.

◀ Очевидно, сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = \iint\limits_{E'} \frac{dx\,dy}{x^p + y^q},$$

где $E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^p + y^q \geqslant 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x, y)\,dx\,dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^p + y^q}, & \text{если} \quad (x, y) \in E', \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E'. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, y) \geqslant 0$, то

$$I_1 = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{E_n} F(x, y)\,dx\,dy,$$

где (E_n) — произвольная фиксированная последовательность допустимых множеств такая, что $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^2$. Возьмем

$$E_n = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < \rho < n,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}.$$

Произведя в интеграле

$$I_n = \iint\limits_{E_n} F(x, y)\,dx\,dy$$

замену переменных по формулам $x = \rho^{\frac{1}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi$, $y = \rho^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi$, получим

$$I_n = \frac{2}{pq} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi\,d\varphi \int\limits_1^n \rho^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\,d\rho = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} \left(n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} - 1\right).$$

Следовательно, последовательность (I_n) имеет конечный предел при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 < 0$. Таким образом, интеграл I сходится, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. ▶

48. $I = \iint\limits_E \frac{\sin x \sin y}{(x + y)^p}\,dx\,dy$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geqslant 1\}$.

◀ Заменяя в интеграле переменные по формулам $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, получим

$$I = \frac{1}{2^{1+\frac{p}{2}}} \iint\limits_{E'} \frac{\cos\sqrt{2}v - \cos\sqrt{2}u}{u^p}\,du\,dv, \quad E' = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ v \in \mathbb{R}\right\}.$$

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I = \frac{1}{2^{1+\frac{p}{2}}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(u, v)\,du\,dv,$$

где

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{\cos\sqrt{2}v - \cos\sqrt{2}u}{u^p}, & \text{если} \quad (u, v) \in E', \\ 0, & \text{если} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus E'. \end{cases}$$

Множества $E_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -n < u < n, -n < v < n\}$ допустимые для интегрирования функции F, а последовательность двойных интегралов

$$I_n = \iint\limits_{E_n} F(u, v)\, du\, dv$$

можно заменить последовательностью повторных интегралов, так как F — непрерывная функция. Таким образом,

$$I_n = \int\limits_1^n \frac{du}{u^p} \int\limits_{-n}^n \left(\cos\sqrt{2}v - \cos\sqrt{2}u\right) dv = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}n \int\limits_1^n \frac{du}{u^p} - 2n \int\limits_1^n \frac{\cos\sqrt{2}u}{u^p}\, du.$$

Поскольку последовательность (I_n) не имеет предела при $n \to \infty$, то интегралы $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(u, v)$ и I расходятся. ▶

49. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \pi,$$

где $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < n, |y| < n\}$, тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E'_n} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = 0,$$

где

$$E'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2n\pi\}.$$

◀ Из непрерывности функции $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, следует равенство

$$\iint\limits_{E_n} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int\limits_{-n}^n dx \int\limits_{-n}^n \sin(x^2 + y^2)\, dy = 2\int\limits_{-n}^n \sin x^2\, dx \int\limits_{-n}^n \cos y^2\, dy,$$

в силу которого получаем после перехода к пределу произведение интегралов Френеля:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2\, dy = \pi.$$

Для проверки второго предельного соотношения достаточно перейти к полярным координатам и вычислить интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{0<\rho<\sqrt{2\pi n} \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho\sin\rho^2\, d\rho\, d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2\pi n}} \rho\sin\rho^2\, d\rho = \pi\cos\rho^2\Big|_{\sqrt{2\pi n}}^0 = 0.$$

Этот пример показывает, что двойной несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

расходится. ▶

50. Показать, что интеграл:

$$I = \iint\limits_E \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 1,\ y \geqslant 1\},$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx$$

существуют.

◀ Для доказательства первой части утверждения достаточно показать, что интеграл I абсолютно расходится, т.е. что интеграл

$$I' = \iint\limits_E \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x, y)\,dx\,dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2+y^2)^2}, & \text{если} \quad (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

расходится.

В качестве допустимой последовательности множеств E_n возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -n < x < n,\ -n < y < n\}$. Тогда получим, принимая во внимание, что $|x^2 - y^2| = \begin{cases} x^2 - y^2, & \text{если} \quad x > y, \\ y^2 - x^2, & \text{если} \quad x < y: \end{cases}$

$$I_n' = \iint\limits_{E_n} F(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_1^n dx \int\limits_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy + \int\limits_1^n dx \int\limits_x^n \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy =$$

$$= \int\limits_1^n \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\Bigg|_{y=0}^{y=x} + \frac{y}{x^2 + y^2}\Bigg|_{y=n}^{y=x} \right) dx = \int\limits_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{n}{x^2 + n^2} \right) dx = \ln n - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = +\infty$, то интеграл I расходится.

Вычислим интегралы I_1 и I_2. Имеем

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty} \right) dx = \int\limits_{+\infty}^1 \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{\pi}{4}, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\Bigg|_{x=+\infty}^{x=1} \right) dy = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Этот пример показывает, что существование лишь повторных интегралов не обеспечивает сходимости соответствующего двойного несобственного интеграла. ▶

Вычислить следующие интегралы:

51. $I = \iint\limits_E \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

◀ Подынтегральная функция принимает положительные значения, поэтому достаточно вычислить интеграл

$$I' = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x, y)\,dx\,dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, & \text{если} \quad (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E, \end{cases}$$

для любой фиксированной допустимой последовательности множеств (E_n). Возьмем $E_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots\right\}$.

Тогда получим

$$I_n = \iint\limits_{E_n} F(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho = 2\pi\sqrt{1-\rho^2}\Big|_{1-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = 2\pi\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right),$$

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = 2\pi. \blacktriangleright$$

52. $I = \iint\limits_E \frac{dx\, dy}{x^4 + y^2}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2 + 1\}$.

◀ Согласно определению п.2.2, имеем

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x, y)\, dx\, dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^4+y^2}, & \text{если} \quad (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

Так как подынтегральная функция F неотрицательная, то достаточно вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, где

$$I_n = \iint\limits_{E_n} F(x, y)\, dx\, dy,$$

для любой фиксированной последовательности допустимых множеств (E_n). Возьмем $E_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -n < x < n,\ -n < y < n\right\}$. Тогда получим

$$I_n = \int\limits_{-\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n-1}} dx \int\limits_{1+x^2}^{n} \frac{dy}{x^4 + y^2} = 2\int\limits_{+0}^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2}\Big|_{y=1+x^2}^{y=n} dx = 2\int\limits_{+0}^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{x^2} - \operatorname{arctg}\frac{1+x^2}{x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{x}\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{x^2} - \operatorname{arctg}\frac{1+x^2}{x^2}\right)\Big|_{\sqrt{n-1}}^{+0} + 4\int\limits_0^{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{2x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{n}{x^4 + n^2}\right) dx.$$

Внеинтегральный член стремится к нулю при $x \to +0$ и при $n \to \infty$. Принимая во внимание оценку $\int\limits_0^{\sqrt{n-1}} \frac{n}{x^4+n^2}\, dx < \frac{1}{n} \int\limits_0^{\sqrt{n-1}} dx = \frac{\sqrt{n-1}}{n}$, получаем

$$I = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n-1}} \frac{dx}{2x^4 + 2x^2 + 1} = 2\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n-1}} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Представляя подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей и интегрируя эти дроби, имеем

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\ln\frac{x^2+\sqrt{\sqrt{2}-1}x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{\sqrt{2}-1}x+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{n-1}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}=\pi\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}. ►$$

53. $I=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$, где $a<0$, $ac-b^2>0$.

◄ Применив известное преобразование координат по формулам $x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$, где числа x_0, y_0, α удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} ax_0+by_0+d=0,\\ bx_0+cy_0+e=0,\end{cases}\qquad b\operatorname{tg}^2\alpha-(c-a)\operatorname{tg}\alpha-b=0,$$

квадратичную форму $\varphi=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ приведем к каноническому виду:

$$\varphi=Ax'^2+Cy'^2+f',$$

где

$$A=-(a\cos^2\alpha-2b\sin\alpha\cos\alpha+c\sin^2\alpha)<0,\quad f'=\frac{\Delta}{\delta},$$

$$C=-(a\sin^2\alpha-2b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha)<0,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a & b\\ b & c\end{vmatrix}>0.$$

Между коэффициентами a, b, c и A, C существует следующая связь

$$AC=ac-b^2=\delta,\quad A+C=a+c.$$

После указанной выше замены переменных интеграл I принимает вид

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{Ax'^2+Cy'^2+f'}\,dx'\,dy'=e^{f'}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{Ax'^2+Cy'^2}\,dx'\,dy'.$$

В качестве допустимой последовательности множеств (E_n) выберем

$$E_n=\left\{(x',y')\in\mathbb{R}^2:-n<Ax'^2+Cy'^2<-\frac{1}{n}\right\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Заменяя в интегралах $I_n=\iint\limits_{E_n}e^{Ax'^2+Cy'^2}\,dx'\,dy'$ переменные по формулам

$$x'=\frac{\rho}{\sqrt{-A}}\cos\varphi,\quad y'=\frac{\rho}{\sqrt{-C}}\sin\varphi,$$

получим, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x',y')}{\mathcal{D}(\rho,\varphi)}=\frac{\rho}{\sqrt{AC}}$:

$$I_n=\frac{1}{\sqrt{AC}}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}}\rho e^{-\rho^2}\,d\rho=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{-\rho^2}\Bigg|_{\sqrt{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\left(e^{-\frac{1}{n}}-e^{-n}\right),\quad \lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Окончательно имеем

$$I = e^{f'} \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}. \blacktriangleright$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные тройные интегралы:

54. $\iiint\limits_E \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz$, где $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geqslant 1\}$, $0 < m \leqslant |\varphi(x, y, z)| \leqslant M$.

◀ В силу оценки для функции φ и теоремы об абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла требуется фактически исследовать на сходимость интеграл

$$I = \iiint\limits_E \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}.$$

Поскольку подынтегральная функция под знаком интеграла положительная, то в качестве допустимой последовательности множеств (E_n) можно взять любую фиксированную последовательность, например $E_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{1}{n} < x^2+y^2+z^2 < n\right\}$. В интегралах

$$I_n = \iiint\limits_{E_n} \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

перейдем к сферическим координатам по формулам

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta\ (0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi).$$

Тогда $\sqrt{1+\frac{1}{n}} < \rho < \sqrt{n}$ и, заменив тройные интегралы повторными, получим

$$I_n = \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} \rho^{2(1-p)}\, d\rho = \frac{4\pi}{3-2p}\rho^{3-2p}\Big|_{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} = \frac{4\pi}{3-2p}\left(n^{\frac{3}{2}-p} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}-p}\right).$$

Если $p > \frac{3}{2}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{4\pi}{2p-3}$ и интеграл I сходится, а вместе с ним сходится и исследуемый интеграл. Если $p \leqslant \frac{3}{2}$, то исследуемый интеграл расходится. ▶

55. $\iiint\limits_E \frac{dx\, dy\, dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y|+|z| \geqslant 1\}$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$.

◀ Сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = \iiint\limits_{E'} \frac{dx\, dy\, dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}, \ p > 0,\ q > 0,\ r > 0,$$

где $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^p+|y|^q+|z|^r \geqslant 1\}$.

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}, & \text{если} \quad (x, y, z) \in E', \\ 0, & \text{если} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus E'. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, y, z) \geqslant 0$ на всем пространстве $\mathbb{R}^3$, то в качестве допустимой последовательности множеств (E_n) можно взять любую фиксированную последовательность, например, $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{1}{n} < |x|^p + |y|^q + |z|^r < n\}$. Тогда $I_1 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, где

$$I_n = \iiint\limits_{E_n} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 8 \iiint\limits_{E'_n} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

E'_n — вся часть множества E_n, лежащая в первом октанте. После замены переменных в интегралах I_n по формулам

$$x = \rho^{\frac{1}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \theta \cos^{\frac{2}{p}} \varphi, \quad y = \rho^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta \sin^{\frac{2}{q}} \varphi, \quad z = \rho^{\frac{1}{r}} \cos^{\frac{2}{r}} \theta,$$

принимая во внимание, что

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \frac{4}{pqr} \rho^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1} \sin^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1} \theta \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{r}-1} \theta,$$

получим

$$I_n = \frac{32}{pqr} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{r}-1} \theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi\, d\varphi \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{n} \rho^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-2} d\rho =$$

$$= \frac{8}{pqr} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \left.\frac{\rho^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1}\right|_{1+\frac{1}{n}}^{n}.$$

Вполне очевидно, что конечный предел последовательности (I_n) существует лишь при выполнении условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Тогда и исследуемый интеграл сходится при выполнении этого условия. ▶

56. Доказать формулу Дирихле

$$I = \iint\limits_E \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_m^{p_m-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_m + 1)},$$

где

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}\right\},\ p_i > 0,\ i = \overline{1, m}.$$

◀ При $m = 2$ имеем

$$\iint\limits_{\substack{x_1 \geqslant 0,\, x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 \leqslant 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1}\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_0^1 x_1^{p_1-1}\, dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1}\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{p_2} \int\limits_0^1 x_1^{p_1-1}(1 - x_1)^{p_2}\, dx_1 = \frac{1}{p_2} B(p_1, 1 + p_2) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2 + 1)}.$$

Следовательно, при $m = 2$ формула Дирихле справедлива. Допустим, что она справедлива для $(m-1)$ -кратного интеграла. При таком предположении получим

$$I = \int\limits_0^1 x_m^{p_m-1}\, dx_m \iint\limits_{E'} \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_{m-1}^{p_{m-1}}\, dx_1 \cdots dx_{m-1},$$

где

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i \leqslant 1 - x_m, \; x_i \geqslant 0, \; i = \overline{1, m-1} \right\}.$$

Отображение, определяемое системой

$$x_1 = (1 - x_m)\xi_1, \quad x_2 = (1 - x_m)\xi_2, \; \ldots, \; x_{m-1} = (1 - x_m)\xi_{m-1},$$

является C^1-диффеоморфизмом множества

$$E'' = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \leqslant 1, \; \xi_i \geqslant 0, \; i = \overline{1, m-1} \right\}$$

на множество E'. Принимая во внимание равенства

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1})} = (1 - x_m)^{m-1},$$

$$x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} = \xi_1^{p_1-1} \xi_2^{p_2-1} \ldots \xi_{m-1}^{p_{m-1}-1} (1 - x_m)^{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}-m+1},$$

в силу предположения индукции, получим

$$\iint\limits_{E'} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{m-1} =$$

$$= (1 - x_m)^{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}} \iint\limits_{E''} \cdots \int \xi_1^{p_1-1} \xi_2^{p_2-1} \ldots \xi_{m-1}^{p_{m-1}-1} d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} =$$

$$= (1 - x_m)^{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}} \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} + 1)}.$$

Тогда интеграл I примет вид

$$I = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} + 1)} \int_0^1 x_m^{p_m-1} (1 - x_m)^{p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}} \, dx_m =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} + 1)} B(p_m, \, p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1} + 1) =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{m-1})\Gamma(p_m)\Gamma(p_1 + \cdots + p_{m-1} + 1)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{m-1} + 1)\Gamma(p_1 + \cdots + p_m + 1)} = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_m + 1)}.$$

Методом математической индукции формула Дирихле доказана. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

34. $I = \iint\limits_E \frac{\varphi(x, y) \, dx \, dy}{(1 - x^2 - y^2)^p}$, $\quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M$, $(x, y) \in E$.

35. $I = \iint\limits_E \frac{\varphi(x, y) \, dx \, dy}{(x^2 + xy + y^2)^p}$, $\quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$, $0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M$, $(x, y) \in E$.

36. $I = \iiint\limits_E \frac{f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\left((y - \varphi(x))^2 + (z - \psi(x))^2\right)^p}$, $\quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant a, \; 0 \leqslant y \leqslant a, \; 0 \leqslant z \leqslant a\}$, $0 < m \leqslant |f(x, y, z)| \leqslant M$, $(x, y, z) \in E$, φ, ψ — непрерывные на сегменте $[0, a]$ функции.

37. $I = \iiint\limits_E \frac{dx \, dy \, dz}{|x + y - z|^p}$, $\quad E =]0, 1] \times]0, 1] \times]0, 1]$.

Вычислить несобственные интегралы:

38. $I = \iint\limits_E \frac{dx \, dy}{x^p y^q}$, $\quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 1, \; xy \geqslant 1\}$, $p > 0$, $q > 0$.

39. $I = \iint\limits_E \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$, $\quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant 1\}$.

40. $I = \iint\limits_E e^{-(x+y)}\,dx\,dy$, $\quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$.

41. $I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

42. $\iint\limits_E \exp\left\{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right\} dx\,dy$, $\quad E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1\right\}$, $a > 0$, $b > 0$.

43. $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy \exp\left\{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right\} dx\,dy$, $\quad 0 < |\varepsilon| < 1$.

44. $\iint\limits_E \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $\quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

45. $\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$, $\quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

46. $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

47. $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-P(x_1, x_2, x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ где $P(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} = a_{ji}$ — положительно-определенная квадратичная форма.

48. Доказать обобщенную формулу Дирихле

$$\iint\limits_E \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_m^{p_m-1}\,dx_1 \cdots dx_m = \frac{a_1^{p_1} \cdots a_m^{p_m}}{\alpha_1 \cdots \alpha_m} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_m}{\alpha_m}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_m}{\alpha_m} + 1\right)},$$

где $E = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum\limits_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} \leqslant 1\right\}$, $a_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $p_i > 0$.

49. Доказать формулу Лиувилля

$$\iint\limits_E \cdots \int \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) x_1^{p_1-1} \ldots x_m^{p_m-1}\,dx_1 \ldots dx_m = \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_m)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p_1 + \cdots + p_m - 1}\,du,$$

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i \leqslant 1\right\},\ p_i > 0,\ i = \overline{1, m},$$

в предположении абсолютной сходимости интеграла в правой части равенства.

§ 3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики

3.1. Вычисление меры множества, измеримого по Жордану.

Если E — жорданово множество (см.определение 4, п.1.4), то его *жордановой мерой* μE (или *m-мерным объемом*) называется интеграл

$$\mu E = \int\limits_E dx. \tag{1}$$

При $m = 2$ жорданова мера множества называется его *площадью* и обозначается через P. В этом случае

$$P = \iint\limits_E dx\,dy. \tag{2}$$

При $m = 3$ объем обозначают через V, а формула (1) принимает вид

$$V = \iiint\limits_E dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

Объемы тел, лежащих в пространстве $\mathbb{R}^3$, можно также вычислять с помощью двойных интегралов. Если

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\},$$

где D — компакт, $f \in C(D)$, то

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

3.2. Вычисление площади куска гладкой поверхности, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Если множество точек $S = \boldsymbol{\Phi}(D)$ пространства $\mathbb{R}^3$ задано двухпараметрическим векторным уравнением

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big), \quad (u, v) \in D,$$

где D — область пространства $\mathbb{R}^2$, то S называется *многообразием* размерности $p = 2$ класса C^1, или гладкой поверхностью, если компоненты отображения $\boldsymbol{\Phi}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. В каждой точке $M = (x, y, z)$ гладкой поверхности S существует касательная плоскость, определяемая векторами

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\right).$$

Определение 1. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,du$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}\,dv$, называется элементом площади поверхности S и обозначается через dS.*

Согласно этому, элемент площади поверхности dS определяется через определитель Грама (см. п.1.1):

$$dS = \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}\,du, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\,dv\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}\,du, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\,dv\right) = \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right\rangle du^2 & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle du\,dv \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle du\,dv & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle dv^2 \end{vmatrix} = (EG - F^2)\,du^2\,dv^2,$$

где $E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right\rangle$, $G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle$ — коэффициенты Гаусса.

Таким образом, согласно определению, имеем

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{1}$$

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, т.е.

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

то формула (1) принимает вид

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy. \tag{2}$$

Определение 2. *Площадью P куска гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ называется интеграл*

$$P = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{3}$$

Если $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy$, то формула (3) принимает вид

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy. \tag{4}$$

3.3. Приложения двойных и тройных интегралов к решению задач механики.

Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки $D \subset \mathbb{R}^2$ и $\mu = \mu(x, y)$ — поверхностная плотность вещества пластинки, то x_0 и y_0 можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\mu(x, y)\, dx\, dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\mu(x, y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

где $m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dx\, dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородная, то $\mu(x, y)$ является константой, которую принимают равной единице.

Моменты инерции I_x, I_y пластинки D относительно осей координат Ox и Oy можно вычислить по формулам

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x, y)\, dx\, dy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Центробежный момент инерции I_{xy} вычисляется по формуле

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy\mu(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Полагая в формулах (2) и (3) $\mu = 1$, получим геометрические моменты инерции однородной пластинки — замкнутой области D.

Если x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела $T \subset \mathbb{R}^3$ и $\mu = \mu(x, y, z)$ — его объемная плотность, то x_0, y_0, z_0 можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_T x\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_T y\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_T z\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{4}$$

где $m = \iiint\limits_T \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ — масса тела.

Если тело T однородное, то в формулах (4) полагаем $\mu = 1$.

Моментами инерции тела T относительно координатных плоскостей называются соответственно интегралы

$$I_{xy} = \iiint\limits_T z^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad I_{yz} = \iiint\limits_T x^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_T y^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

Моментом инерции тела T относительно некоторой прямой l называется интеграл

$$I_l = \iiint\limits_T r^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{6}$$

где r — расстояние от точки $M = (x, y, z)$ тела до прямой l. Для осей координат имеем

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}. \tag{7}$$

Моментом инерции тела T относительно начала координат называется интеграл

$$I_0 = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{8}$$

Из формул (5) получаем

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}. \tag{9}$$

Ньютоновым потенциалом, или потенциалом поля тяготения тела T в точке $P = (x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}, \tag{10}$$

где $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — объемная плотность тела, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Материальная точка массы m притягивает тело T с силой F, проекции которой F_x, F_y, F_z на оси координат Ox, Oy и Oz выражаются формулами

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \iiint\limits_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ F_y &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma m \iiint\limits_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ F_z &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma m \iiint\limits_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned} \tag{11}$$

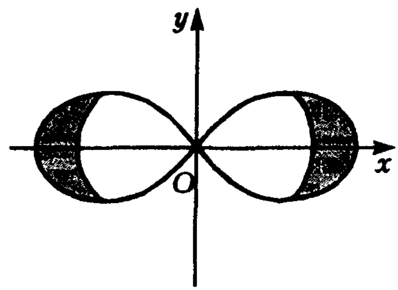

Рис. 8

где γ — гравитационная постоянная.

Найти площади плоских фигур D, края которых заданы уравнениями:

57. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(x^2 + y^2 \geqslant a^2)$.

◄ Перейдя к полярным координатам ρ и φ, получим уравнения края компакта D в виде $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ и $\rho^2 = a^2$. Требуется вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной частью лемнискаты Бернулли и частью окружности радиуса a, лежащей вне круга радиуса a (рис. 8). Легко убедиться в том, что точка $\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$ является одной из четырех точек пересечения лемнискаты с окружностью. Принимая во внимание симметрию фигуры, площадь которой требуется найти, приходим к выводу, что искомая площадь равна учетверенной площади фигуры

$$D_1 = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Согласно формуле (2), п.3.1, имеем

$$P = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. ►$$

58. $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

◄ Для вычисления площади P плоской фигуры воспользуемся решением примера 5, в), полагая там $f(x, y) = 1$. При этом получим

$$P = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Полагая в интеграле $t = \arcsin \frac{x}{a}$, имеем

$$P = 4a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = 2a^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2. ►$$

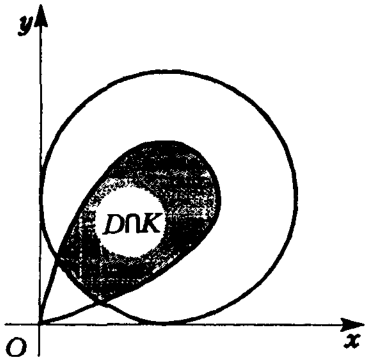

Рис. 9

59. $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$, $(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$ $(a>0,\ (x-a)^2+(y-a)^2 \leqslant a^2)$.

◄ Требуется вычислить площадь общей части круга $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-a)^2 \leqslant a^2\}$ и компакта $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \leqslant 8a^2xy\}$. Пересечение этих множеств $D \cap K$ лежит в первом квадранте плоскости xOy (рис. 9). Переходя к полярным координатам, получим представление множества $D \cap K$ в виде

$$D \cap K = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a\left((\sin\varphi+\cos\varphi) - \sqrt{\sin 2\varphi}\right) \leqslant \right.$$
$$\left. \leqslant \rho \leqslant 2a\sqrt{\sin 2\varphi},\ \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right\}.$$

Принимая во внимание симметрию точек множества $D \cap K$ относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, получим

$$P = \iint\limits_{D\cap K} dx\,dy = 2\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{a((\sin\varphi+\cos\varphi)-\sqrt{\sin 2\varphi})}^{2a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\,d\rho = a^2\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin 2\varphi + 2(\sin\varphi+\cos\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi} - 1\right) d\varphi =$$

$$= a^2\left(\cos\left(\arcsin\frac{1}{8}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right) + 2a^2\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin\varphi+\cos\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi}\,d\varphi.$$

Принимая во внимание равенства

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{8}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad -\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}$$

и произведя в интеграле замену переменной $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, получим

$$P = a^2\left(\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8} + 2\sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2t}\sin t\,dt\right).$$

Вычислим

$$I = 2\sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2t}\sin t\,dt = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)} \sqrt{1-(\sqrt{2}\cos t)^2}\,d(\sqrt{2}\cos t).$$

После замены переменной $\sqrt{2}\cos t = \sin z$ имеем

$$I = 2\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \cos^2 z\,dz = \arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Таким образом,

$$P = a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right).$$

Обозначив $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}=\alpha$, получим

$$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{8},\quad \alpha=\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Окончательно имеем

$$P=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right). \blacktriangleright$$

60. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $a>0$, $b>0$, $h>0$, $k>0$.

◀ Записав уравнение края ∂D компакта $D\subset\mathbb{R}^2$ в виде

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}$$

и произведя в двойном интеграле

$$P=\iint\limits_D dx\,dy$$

замену переменных по формулам

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=\rho\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=\rho\sin\varphi,$$

а также принимая во внимание, что

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi)}=ab\rho,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}},$$

получим

$$P=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}\rho\,d\rho=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right). \blacktriangleright$$

61. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0,\ b>0,\ h>0,\ k>0)$.

◀ Плоская фигура, площадь которой требуется вычислить, лежит в первом квадранте. Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x=a\rho\cos^{\frac{2}{3}}\varphi,\quad y=b\rho\sin^{\frac{2}{3}}\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Тогда уравнения границы фигуры примут вид

$$\rho=\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi\ \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right),\ \varphi=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2},$$

а якобиан $\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi)}$ будет равен $\frac{2}{3}ab\rho\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi$.

После замены переменных в интеграле $\iint\limits_D dx\,dy$ и замены двойного интеграла повторным получим

$$P=\frac{2}{3}ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi}\rho\,d\rho=\frac{ab}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi\right)^2d\varphi=$$

$$= \frac{ab}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4}\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{\frac{7}{3}}\varphi + \frac{b^4}{k^4}\sin^{\frac{7}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi + \frac{2a^2b^2}{h^2k^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{ab}{3}\left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{a^4}{2h^4}B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) + \frac{b^4}{2k^4}B\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{ab}{3}\left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right)B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{ab}{3}\left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{ab}{3}\left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right)\right). \blacktriangleright$$

62. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a > 0$, $b > 0$.

◄ В интеграле

$$P = \iint\limits_D dx\,dy$$

произведем замену переменных по формулам

$$x = a\rho\cos^2\varphi, \quad y = b\rho\sin^2\varphi.$$

Тогда уравнение кривой, являющейся частью края компакта D, примет вид

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2} - \frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}}, \quad \text{где} \quad \frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2} - \frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2} \geqslant 0.$$

Из условий $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $|\operatorname{tg}\varphi| \leqslant \sqrt{\frac{ak}{bh}}$ имеем $0 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных перейдем от двойного интеграла к повторному. При этом получим

$$P = 2ab\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2} - \frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}}} \rho\,d\rho =$$

$$= ab\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^5\varphi\sin\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^5\varphi\cos\varphi\right)d\varphi = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^6\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^6\varphi\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{0} =$$

$$= \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}\left(1 - \cos^6\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}\right)\right) - \frac{b^2}{k^2}\sin^6\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}\right)\right) = \frac{a^4bk(ak + 2bh)}{6h^2(ak + bh)^2}$$

(так как $\cos(\operatorname{arctg}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\sin(\operatorname{arctg}\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$). ►

63. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d)$.

◄ Из уравнений границы области видно, что она лежит в первом квадранте. Заменяя в интеграле

$$P = \iint\limits_D dx\,dy$$

переменные по формулам $x^2 = uy$, $x^3 = vy^2$, получим

$$a \leqslant u \leqslant b, \quad c \leqslant v \leqslant d, \quad x = u^2v^{-1}, \quad y = u^3v^{-2}, \quad \left|\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)}\right| = u^4v^{-4},$$

$$P = \iint\limits_{\substack{a \leqslant u \leqslant b \\ c \leqslant v \leqslant d}} u^4 v^{-4}\, du\, dv = \int\limits_a^b u^4\, du \int\limits_c^d v^{-4}\, dv = \frac{1}{15}(b^5 - a^5)(c^{-3} - d^{-3}). \blacktriangleright$$

64. $y = ax^p$, $y = bx^p$, $y = cx^q$, $y = dx^q$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b,\ 0 < c < d)$.

◀ Запишем уравнения края компакта D в виде $y = ax^p$, $y = bx^p$, $x = c^{-\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{q}}$, $x = d^{-\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{q}}$ и в интеграле

$$P = \iint\limits_D dx\, dy$$

произведем замену переменных по формулам $y = ux^p$, $x = vy^{\frac{1}{q}}$, задающим взаимно однозначное соответствие между точками прямоугольника

$$D' = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant u \leqslant b,\ d^{-\frac{1}{q}} \leqslant v \leqslant c^{-\frac{1}{q}}\right\}$$

и компакта D. Поскольку $x = u^{\frac{1}{q-p}} v^{\frac{q}{q-p}}$, $y = u^{\frac{p}{q-p}} v^{\frac{pq}{q-p}}$, $\left|\frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)}\right| = \frac{q}{q-p} u^{\frac{p+1}{q-p}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}$, то

$$P = \frac{q}{q-p} \int\limits_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}}\, du \int\limits_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}\, dv = \frac{q-p}{(p+1)(q+1)} \left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right) \left(c^{-\frac{p+1}{q-p}} - d^{-\frac{p+1}{q-p}}\right). \blacktriangleright$$

65. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $x > 0$, $y > 0$.

◀ В интеграле $P = \iint\limits_D dx\, dy$ заменим переменные согласно формулам $x = a\rho\cos^3\varphi$, $y = b\rho\sin^3\varphi$. Тогда

$$\frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(\rho,\, \varphi)} = 3ab\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi,\ 1 \leqslant \rho \leqslant 8,\ \operatorname{arctg} 1 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2,$$

$$P = 3ab \int\limits_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi \int\limits_1^8 \rho\, d\rho = \frac{189}{2}ab \int\limits_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{189}{8}ab \int\limits_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{189}{16}ab \int\limits_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{189}{16}ab \left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1 - \sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\Big|_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2}\right) = \frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{6}{25}\right). \blacktriangleright$$

66. Найти площадь области D, ограниченной эллипсом, заданным уравнением $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$, где $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

◀ В интеграле $P = \iint\limits_D dx\, dy$ произведем замену переменных по формулам $a_1x + b_1y + c_1 = u$, $a_2x + b_2y + c_2 = v$, отображающим круг $D' = \{(u,\, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ на область D. Используя известное свойство якобиана, выраженное формулой $\frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,\, v)}{\mathcal{D}(x,\, y)}}$, получаем, что $\left|\frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)}\right| = \frac{1}{|\delta|}$. Таким образом, имеем $P = \frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{D'} du\, dv = \frac{\pi}{|\delta|}$. ▶

Применяя формулу (4), п. 3,1, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

67. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

◀ Тело T, объем V которого требуется вычислить, представляет собой замкнутое множество

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}.$$

Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Следовательно,

$$V = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{88}{105}. \blacktriangleright$$

68. $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

◀ Поверхность $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ пересекается с плоскостью $\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ по кривой, уравнение проекции которой на плоскость xOy имеет вид $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Поэтому множество D в формуле (4), п.3.1, представляет собой замкнутый треугольник $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, который запишем в виде $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1-x}{1+x}\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \frac{1-x}{1+x} \leqslant y \leqslant 1 - x\right\}.$$

На множестве D_1 функция f в формуле (4), п.3.1, имеет вид $f(x, y) = xy$, а на множестве D_2 $f(x, y) = 1 - (x + y)$. Представив интеграл

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

в виде суммы интегралов по множествам D_1 и D_2 и перейдя от двойных интегралов к повторным, получим

$$V = \int\limits_0^1 x\, dx \int\limits_0^{\frac{1-x}{1+x}} y\, dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1 - x - y)\, dy =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{1+x}\right) dx = \frac{17}{12} - 2\ln 2. \blacktriangleright$$

69. $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$.

◀ Тело ограничено сверху и снизу относительно плоскости xOy конической поверхностью $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy\}$, а с боков — цилиндрической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2,\ z \in \mathbb{R}\}$. В силу симметрии точек тела относительно плоскостей, заданных уравнениями $z = 0$, $z = x + y$, можем вычислить значение $\frac{1}{4}$ части объема V и умножить полученный результат на 4. При этом множеством D в формуле (4), п.3.1, является $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Таким образом, имеем

$$V = 4 \iint\limits_D \sqrt{xy}\, dx\, dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам и заменяя двойной интеграл повторным, находим

$$V = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi\, d\varphi \int\limits_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{4}{3} a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} a^3 B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4a^3}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). ▶$$

70. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0.$

◀ Тело ограничено сверху параболоидом вращения $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, снизу — плоскостью xOy, извне — цилиндрической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z \in \mathbb{R}\}$, изнутри — цилиндрической поверхностью $S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},\ z \in \mathbb{R}\right\}$. Эти цилиндрические поверхности вырезают из плоскости xOy замкнутую область D, которая в полярной системе координат определяется неравенствами $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi$. Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^3\, d\rho = \frac{15}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{15}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi\, d\varphi = \frac{15}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{45}{32}\pi. ▶$$

71. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y.$

◀ Параболоид вращения и плоскость пересекаются по кривой, уравнение проекции которой на плоскость xOy имеет вид $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому тело T является множеством:

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant x + y\right\},$$

а формула (4), п.3.1, запишется в виде

$$V = \iint\limits_D (x + y - x^2 - y^2)\, dx\, dy, \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Заменяя в интеграле переменные по формулам $x - \frac{1}{2} = \rho\cos\varphi$, $y - \frac{1}{2} = \rho\sin\varphi$, получаем

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\rho}{2} - \rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{8}. ▶$$

72. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0,\ a>0,\ b>0,\ c>0)$.

◀ Тело ограничено конической поверхностью и поверхностью эллипсоида. Коническая поверхность вырезает из поверхности эллипсоида кусок, проекция которого на плоскость xOy ограничена кривой $\gamma=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}\right\}$. Из геометрических соображений и формулы (4), п.3.1, заключаем, что искомый объем тела может быть найден с помощью интеграла

$$V=\iint\limits_D\left(z_1(x,\ y)-z_2(x,\ y)\right)dx\,dy,\quad D=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

где

$$z_1(x,\ y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad z_2(x,\ y)=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

Переходя в интеграле к обобщенным полярным координатам по формулам $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, получим

$$V=abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)\,d\rho=\frac{2}{3}\pi abc\left(\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}+\rho^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}=\frac{\pi}{3}abc(2-\sqrt{2}).\ ▶$$

73. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ $(a>0,\ b>0)$.

◀ Если $z=0$, то $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqslant1$, т.е. $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b\left(1-\frac{x}{a}\right)$. Требуется вычислить объем тела

$$T=\left\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3:0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\left(1-\frac{x}{a}\right),\ 0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\right\}.$$

В интеграле

$$V=c\iint\limits_D\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy,\quad D=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right\}$$

произведем замену переменных по формулам $x=a\rho\cos^2\varphi$, $y=b\rho\sin^2\varphi$. Принимая во внимание равенство $\frac{\mathcal{D}(x,\,y)}{\mathcal{D}(\rho,\,\varphi)}=2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi$, а также пределы изменения φ и ρ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\rho\leqslant1\right)$, получим

$$V=2abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=\frac{abc}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0=\frac{abc}{3}.\ ▶$$

74. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

◀ Тело ограничено частью поверхности эллипсоида и частью цилиндрической поверхности, вырезающей из плоскости xOy замкнутую область

$$D=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\leqslant\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right\}.$$

Принимая во внимание симметрию точек тела относительно координатных плоскостей, а также симметрию точек области D относительно осей Ox и Oy, можем вычислить величину V объема тела по формуле

$$V = 8c \iint\limits_{D_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy, \quad D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}.$$

После замены переменных по формулам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ находим

$$V = 8abc \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho = \frac{8}{3}abc \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{\cos 2\varphi}}^{0} d\varphi = \frac{8}{3}abc \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\sqrt{2}\sin^3\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}abc\left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\varphi - 1)\, d(\cos\varphi)\right) = \frac{8}{3}abc\left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}abc(3\pi + 20 - 16\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

75. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

◄ Тело T, объем которого требуется вычислить, представим в виде $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$, где D — криволинейный четырехугольник, край которого задан уравнениями $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

В интеграле

$$V = \iint\limits_D xy\, dx\, dy$$

заменим переменные по формулам $x^2 = uy$, $y^2 = vx$, отображающим квадрат $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant u \leqslant 2,\ 1 \leqslant v \leqslant 2\}$ на множество D. Тогда $\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \frac{1}{3}$,

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} uv\, du\, dv = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 u\, du \int\limits_1^2 v\, dv = \frac{3}{4}. \blacktriangleright$$

76. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

◄ Требуется вычислить объем тела

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant c\sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n}\right)}\right\},$$

где $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}}\right\}$. Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = c\iint\limits_D \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n} - \frac{y^n}{b^n}}\, dx\, dy.$$

Полагая в интеграле $x = a\rho\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$, получим

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = \frac{2}{n}ab\rho\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi,$$

$$V = \frac{2}{n}abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n}\, d\rho = \frac{abc}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n}\, d\rho.$$

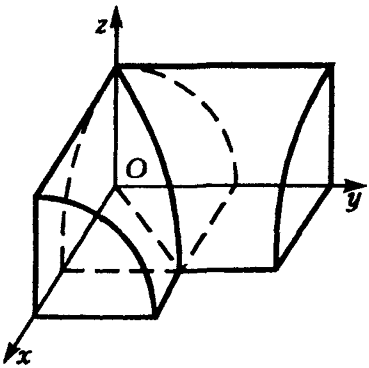

Рис. 10

В интеграле $I = \int\limits_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n}\, d\rho$ заменим переменную по формуле $\rho = t^{\frac{1}{n}}$. Тогда

$$I = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{2}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\, dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{abc}{n^2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}. \blacktriangleright$$

Применяя формулу (4), п.3.2, найти:

77. Площадь поверхности тела, ограниченного полыми цилиндрами

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2,\ y \in \mathbb{R}\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = a^2,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

◀ Из рис. 10 видно, что $\frac{1}{16}$ часть поверхности тела, образованного в результате пересечения двух цилиндров, проектируется в плоскости xOy на множество

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x\},$$

поэтому

$$P = 16 \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy,$$

где $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Поскольку $1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, то

$$P = 16a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^x dy = 16a \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \sqrt{a^2 - x^2}\Big|_a^0 = 16a^2. \blacktriangleright$$

78. Площадь части сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, заключенной внутри цилиндрической поверхности

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z \in \mathbb{R}\right\}, \quad b \leqslant a.$$

◀ Цилиндрическая поверхность, пересекаясь со сферой, вырезает из нее симметричные относительно плоскости xOy куски, каждый из которых рассекается координатными плоскостями xOz и yOz на четыре равные части. При $z \geqslant 0$ имеем

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad 1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Согласно формуле (4), п.3.2, получаем

$$P = 8a \iint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \\ x\geqslant 0,\, y\geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 8a\int\limits_0^a \left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right) dx = 8a^2\arcsin\frac{b}{a}. ▶$$

79. Площадь части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2xy\}$, отсекаемой плоскостями, заданными уравнениями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

◀ Дифференцируя левую и правую части равенства $z^2 = 2xy$, получаем $z\,dz = y\,dx + x\,dy$, откуда $z'_x = \frac{y}{z}$, $z'_y = \frac{x}{z}$, $1 + z'^2_x + z'^2_y = \frac{(x+y)^2}{z^2} = \frac{(x+y)^2}{2xy}$.

Принимая во внимание, что точки поверхности S симметричны относительно плоскости xOy и что верхняя ее часть относительно этой плоскости проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, находим

$$P = 2\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \right) dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right) dx = 2\sqrt{2}\left(B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} + \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} \right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. ▶$$

80. Площадь части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, заключенной внутри полого цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x,\ z \in \mathbb{R}\}$.

◀ Поверхность, площадь которой требуется определить, вырезается цилиндром S_1 из конической поверхности S. Цилиндр S_1 пересекается с плоскостью xOy по окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, которая является краем компакта D — круга радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$. На поверхности S имеем $z = \sqrt{x^2+y^2}$, поэтому $z'_x = \frac{x}{z}$, $z'_y = \frac{y}{z}$, $1 + z'^2_x + z'^2_y = 1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} = 2$. Следовательно, $P = \iint\limits_D \sqrt{2}\,dx\,dy = \pi\sqrt{2}$. ▶

81. Площадь части S_1 поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 - y^2}\right\}$, заключенной внутри полого цилиндра

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

◀ Цилиндр S_2 вырезает из конической поверхности S симметричные относительно плоскости yOz и равные между собой куски, а $\frac{1}{4}$ часть поверхности S_1 проектируется в плоскость xOy на замкнутую область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \leqslant a^2(x^2-y^2),\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Поскольку для рассматриваемого случая $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}$, то

$$P = 4\sqrt{2}\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам получим

$$P=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho=2\sqrt{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2}\,d(\sqrt{2}\sin\varphi).$$

Полагая в последнем интеграле $\sqrt{2}\sin\varphi=t$, имеем

$$P=2a^2\int\limits_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi a^2}{2}. ►$$

82. Площадь части S_1 поверхности $S=\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3:z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x-y=\pm1$, $x+y=\pm1$.

◄ Четвертая часть поверхности S_1 проектируется в плоскость xOy на замкнутую область $D=\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$. Поскольку $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$, то

$$P=4\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам, получим

$$P=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}}\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left.(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1+\frac{1}{2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)d\varphi=-\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\operatorname{cosec}^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}d\varphi=$$

$$=-\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3+\operatorname{ctg}^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{3}{2}}d\varphi.$$

Полагая в интеграле $\operatorname{ctg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=t$, имеем

$$P=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3\sqrt{2}}I,\quad\text{где}\quad I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(3+t^2)^{\frac{3}{2}}}{1+t^2}\,dt.$$

Для вычисления интеграла I представим его в виде

$$I=\int\limits_{-1}^{1}\left(1+\frac{2}{1+t^2}\right)\sqrt{3+t^2}\,dt=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{3+t^2}\,dt+2\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3+t^2}}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\left.\left(\frac{t}{2}\sqrt{3+t^2}+\frac{3}{2}\ln\left(t+\sqrt{3+t^2}\right)\right)\right|_{-1}^{1}+2\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}+4\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}=$$

$$=2+\frac{3}{2}\ln 3+2\ln\left.\left(t+\sqrt{3+t^2}\right)\right|_{-1}^{1}+4\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}=2+\frac{7}{2}\ln 3+4I_1,$$

где $I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}$. Осталось вычислить интеграл I_1. Полагая в нем $t = \sqrt{3}\operatorname{tg} z$, получим

$$I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z\,dz}{\cos^2 z + 3\sin^2 z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sqrt{2}\sin z)}{1+(\sqrt{2}\sin z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin z)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно имеем

$$P = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right) + \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

83. Площадь части поверхности S, заданной уравнением $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ и отсекаемой плоскостями, уравнения которых $x = 1$ и $x = 2$ $(y \geqslant 0)$.

◀ Из условия следует, что $0 \leqslant \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \leqslant 1$, откуда $0 \leqslant y \leqslant \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)$. Дифференцируя обе части равенства $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, получаем $\cos z\,dz = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,dx + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y\,dy$, откуда $z'_x = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\cos z}$, $z'_y = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\cos z}$. Следовательно,

$$1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{\cos^2 z} = 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y)}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}.$$

Согласно формуле (4), п.3.2, имеем

$$P = \int\limits_1^2 \operatorname{ch} x\,dx \int\limits_0^{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \frac{\operatorname{ch} y\,dy}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}} = \int\limits_1^2 \operatorname{ch} x\,dx \int\limits_0^{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \frac{d(\operatorname{sh} y)}{\sqrt{1 - (\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)^2}} =$$

$$= \int\limits_1^2 \operatorname{cth} x \left(\arcsin(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)\Big|_{y=0}^{y=\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \right) dx = \int\limits_1^2 \arcsin 1 \cdot \operatorname{cth} x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_1^2 \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \ln(\operatorname{sh} x)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} \ln\frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} = \frac{\pi}{2} \ln\frac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(e + \frac{1}{e}\right). \blacktriangleright$$

84. Площадь части сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

◀ Пусть φ_1, φ_2 — долготы меридианов $(\varphi_2 > \varphi_1)$, а ψ_1, ψ_2 — широты параллелей $(\psi_2 > \psi_1)$. Тогда координаты любой точки $M = (x, y, z)$, принадлежащей указанной части сферы, можно записать в параметрической форме

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \quad y = a\sin\varphi\cos\psi, \quad z = a\sin\psi \quad (\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2,\ \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2).$$

Найдем коэффициенты Гаусса E, G и F:

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = a^2\cos^2\psi, \quad G = (x'_\psi)^2 + (y'_\psi)^2 + (z'_\psi)^2 = a^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\psi + y'_\varphi y'_\psi + z'_\varphi z'_\psi = 0.$$

Таким образом, $\sqrt{EG-F^2}=a^2\cos\psi$ и, согласно формуле (3), п.3.2, имеем

$$P=a^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}\cos\psi\,d\psi=a^2(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1). \blacktriangleright$$

85. Площадь части поверхности тора, заданного векторным уравнением

$$\Phi=\Phi(\varphi,\psi)=\big((b+a\cos\psi)\cos\varphi,\ (b+a\cos\psi)\sin\varphi,\ a\sin\psi\big),\quad 0<a\leqslant b,$$

ограниченной двумя меридианами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и двумя параллелями $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$. Чему равна площадь поверхности всего тора?

◀ Вычислим гауссовы коэффициенты тора:

$$E=\langle\Phi'_\varphi,\Phi'_\varphi\rangle=(b+a\cos\psi)^2,\quad G=\langle\Phi'_\psi,\Phi'_\psi\rangle=a^2,\quad F=\langle\Phi'_\varphi,\Phi'_\psi\rangle=0.$$

Следовательно, $\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi)$ и, применив формулу (3), п.3.2, имеем

$$P=a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}(b+a\cos\psi)\,d\psi=a(\varphi_2-\varphi_1)\big(b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)\big).$$

Подставляя в полученное выражение $\varphi_1=0$, $\varphi_2=2\pi$, $\psi_1=0$, $\psi_2=2\pi$, находим, что площадь всей поверхности тора равна $4\pi^2ab$. ▶

Применяя формулу (3), п.3.1, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

86. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$.

◀ Тело T, объем которого требуется вычислить, представляет собой следующее множество точек:

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant x,\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2(x^2+y^2)\right\}.$$

Применяя формулу (3), п.3.1, получим

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1dx\int\limits_{x^2}^{x}dy\int\limits_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)}dz=\int\limits_0^1dx\int\limits_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{3}{35}. \blacktriangleright$$

87. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

◀ Поскольку $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ xy\leqslant z\leqslant x+y\}$, то

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_{xy}^{x+y}dz=\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}(x+y-xy)\,dy=\int\limits_0^1\left(x-x^2+\frac{(1-x)^3}{2}\right)dx=\frac{7}{24}. \blacktriangleright$$

88. $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $a>0$.

◀ Тело T ограничено частью поверхности параболоида вращения и частью конической поверхности, пересекающихся по кривой, проекция которой на плоскость xOy является окружностью $\gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=a^2\}$. Поэтому

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: -a\leqslant x\leqslant a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{x^2+y^2}{a}\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

В интеграле $V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$ перейдем к цилиндрическим координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей xOz и yOz, а также равенство $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi,z)} = \rho$, получим

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} dz = 2\pi \int\limits_0^a \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{a}\right) d\rho = \frac{\pi a^3}{6}. \blacktriangleright$$

89. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

◀ Тело T лежит в первом октанте и ограничено частью параболоида вращения, заданного уравнением $az = a^2 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0,\,0,\,a)$), и частью плоскости, уравнение которой $z = a - x - y$, в силу чего его можно представить в виде $T = T_1 \cup T_2$, где

$$T_1 = \left\{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ a - x \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2},\ 0 \leqslant z \leqslant a - \frac{x^2 + y^2}{a}\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a - x,\ a - x - y \leqslant z < a - \frac{x^2 + y^2}{a}\right\}.$$

формула (3), п.3.1, принимает вид

$$V = \iiint\limits_{T_1} dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{T_2} dx\,dy\,dz.$$

После перехода к цилиндрическим координатам получим

$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{a} \rho\,d\rho \int\limits_0^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}} \rho\,d\rho \int\limits_{a - \rho(\sin\varphi + \cos\varphi)}^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{a} \rho\left(a - \frac{\rho^2}{a}\right) d\rho + \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}} \rho\left(\rho(\sin\varphi + \cos\varphi) - \frac{\rho^2}{a}\right) d\rho \right) d\varphi =$$

$$= a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6(\sin\varphi + \cos\varphi)^2}\right) d\varphi = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{24}\left(6\varphi + 2\operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{24}(3\pi - 4). \blacktriangleright$$

90. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

◀ Тело T ограничено конической поверхностью $S = \left\{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ и поверхностью параболоида вращения, заданного уравнением $z = 6 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0,\,0,\,6)$).

Решая уравнение $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ относительно $\sqrt{x^2 + y^2}$, получаем, что $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, откуда следует, что конус и параболоид пересекаются по кривой, проекцией которой на плоскость xOy является окружность $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. Следовательно, множество точек тела T имеет вид

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 6 - x^2 - y^2\right\}.$$

В интеграле $V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$ перейдем к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Принимая во внимание симметрию точек тела T относительно плоскостей xOz и yOz, получим

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho \int\limits_\rho^{6-\rho^2} dz = 2\pi \int\limits_0^2 \rho(6 - \rho^2 - \rho)\,d\rho = \frac{32}{3}\pi. \blacktriangleright$$

91. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

◀ Точки тела T симметричны относительно всех координатных плоскостей, поэтому в первом октанте находится его $\frac{1}{8}$ часть. Переходя в интеграле $V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$ к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8, получим

$$V = 8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} \rho^2\,d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(\sqrt{-\cos 2\theta})^3\,d\theta.$$

Полагая в интеграле $\frac{\pi}{2} - \theta = t$, находим

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cos^{\frac{3}{2}} 2t\,dt = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}} d(\sin t) = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - 2u^2\right)^{\frac{3}{2}} du,$$

где $u = \sin t$. Замена переменной $\sqrt{2}u = \sin z$ приводит к интегралу

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z\,dz = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

92. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $h > 0$.

◀ Для вычисления объема тела, ограниченного данной поверхностью, удобно перейти к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (9), п.1.8, $\alpha = \beta = 1$. Тогда $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ (так как $x \geqslant 0$). Принимая во внимание, что $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt[3]{\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{h}}$, $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2\sin\theta$, имеем

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = abc\int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{h}}} \rho^2\,d\rho = \frac{a^2bc}{3h}\int\limits_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{\pi a^2 bc}{3h}. \blacktriangleright$$

93. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

◀ Из уравнения границы тела T видно, что его точки симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8\iiint\limits_{T'} dx\,dy\,dz,$$

где T' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте. Заменим в этом интеграле переменные по формулам (9), п.1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 1$. В сферических координатах уравнение границы тела принимает вид $\rho^2 = \sin^2\theta - \cos^2\theta$, откуда заключаем, что $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. После замены переменных и перехода к повторному интегралу получим

$$V = 8abc\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\left(1-2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\,d\theta = \frac{4}{3}\pi abc\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\,d(\cos\theta).$$

Произведем в интеграле замену $\sqrt{2}\cos\theta = \sin t$. Тогда

$$V = \frac{8}{3\sqrt{2}}\pi abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi abc B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}abc. \ ▶$$

94. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$.

◀ Найдем уравнение проекции на плоскость xOy кривой, по которой пересекаются данные поверхности. Для этого подставим $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ в уравнение поверхности эллипсоида. Решив полученное уравнение относительно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, тело T представляет собой множество точек

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \leqslant z \leqslant c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right\},$$

где $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

В интеграле

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$$

целесообразно перейти к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\rho\cos\varphi,\ y = b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\rho\sin\varphi,\ z = z\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi,z)} = \frac{ab}{2}(\sqrt{5}-1)\rho$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей xOz и yOz, после замены переменных и перехода от тройного интеграла к повторному имеем

$$V = 2ab(\sqrt{5}-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{c\rho^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}^{c\sqrt{1-\frac{\rho^2(\sqrt{5}-1)}{2}}} dz = \pi abc(\sqrt{5}-1)\int_0^1 \left(\rho\sqrt{1-\frac{\rho^2(\sqrt{5}-1)}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\rho^3\right) d\rho =$$

$$= \pi abc(\sqrt{5}-1)\left(\frac{2}{3(\sqrt{5}-1)}\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 - \frac{\sqrt{5}-1}{8}\right) =$$

$$= \pi abc\left(\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3\right) - \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{5}{12}\pi abc(3-\sqrt{5}). \blacktriangleright$$

95. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

◀ Принимая во внимание симметрию точек тела T относительно координатных плоскостей, имеем

$$V = 8\iiint\limits_{T'} dx\,dy\,dz,$$

где

$$T' = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : (x,\, y) \in D,\, 0 \leqslant z \leqslant c\sqrt[4]{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2}\right\},$$

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0\right\}.$$

Затем приходим к выводу о целесообразности перехода в тройном интеграле к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам (12), п.1.8, полагая там $\alpha = 1$. Заменив переменные, получим

$$V = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{c\sqrt[4]{1-\rho^4}} dz = 4\pi abc\int_0^1 \rho(1-\rho^4)^{\frac{1}{4}}\, d\rho.$$

Полагая $\rho = t^{\frac{1}{4}}$, выразим объем V через Γ–функцию Эйлера:

$$V = \pi abc\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{4}}\, dt = \pi abc\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) =$$

$$= \pi abc\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{\pi\sqrt{\pi}abc\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{abc}{3}\,\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \blacktriangleright$$

96. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h}-\frac{y}{k},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ h > 0,\ k > 0.$

◀ Множество всех точек тела T принадлежит первому октанту. В интеграле

$$V = \iiint\limits_{T} dx\,dy\,dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п. 1 8, полагая в них $\alpha = \beta = 2$. Из условия $\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \geqslant 0$ получаем неравенство $\frac{a\sin^2\theta\cos^2\varphi}{h} - \frac{b\sin^2\theta\sin^2\varphi}{k} \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных в тройном интеграле перейдем к повторному интегралу. Получим

$$V = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{a\sin^2\theta\cos^2\varphi}{h} - \frac{b\sin^2\theta\sin^2\varphi}{k}} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{2abc}{3\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9\theta\,d(\sin\theta) \int_{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{0} \left(\frac{a\cos^2\varphi}{h} - \frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)^3 d\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h} - \frac{b\sin^2\varphi}{k}\right) =$$

$$= \frac{2abc}{3\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)}\left.\frac{\sin^{10}\theta}{10}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h} - \frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)^4}{4}\right|_{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{0} = \frac{abc}{60}\,\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)}. \blacktriangleright$$

97. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

◄ В интеграле

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая там $\alpha = \beta = 4$. Тогда

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

$$V = 16abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin^7\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{4}{3}abc\,B(4,\,2)B(2,\,2) = \frac{abc}{90}. \blacktriangleright$$

98. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$

◄ Точки тела T симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8\iiint_{T'} dx\,dy\,dz,$$

где T' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте.

Заменяя в тройном интеграле переменные по формулам (9), п.1.8 (полагая там $\alpha = \beta = 3$), получим

$$V = 72\,abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^5\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^2\,d\rho =$$

$$= 6abc\,B\left(3,\,\frac{3}{2}\right)B\left(\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}\right) = 6abc\frac{\Gamma(3)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{4}{35}\pi abc. \blacktriangleright$$

99. $x^2+z^2=a^2,\ x^2+z^2=b^2,\ x^2-y^2-z^2=0\ (x>0,\ a<b)$.

◀ Точки тела T, объем которого требуется вычислить, симметричны относительно плоскостей xOz и xOy, которые разделяют его на четыре равные части. Граница тела состоит из частей конической и цилиндрических поверхностей. В силу всего сказанного выше имеем

$$V=4\iiint\limits_{T'}dx\,dy\,dz,$$

где множество точек T' принадлежит первому октанту.

Заменив в тройном интеграле переменные по формулам $z=\rho\cos\varphi,\ x=\rho\sin\varphi,\ y=y$, получим

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ a\leqslant\rho\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant\rho\sqrt{-\cos 2\varphi},\ \frac{\mathcal{D}(z,x,y)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi,y)}=\rho,$$

$$V=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_a^b\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho\sqrt{-\cos 2\varphi}}dy=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-\cos 2\varphi}\,d\varphi\int\limits_a^b\rho^2\,d\rho=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-\cos 2\varphi}\,d\varphi.$$

Произведем в интеграле замену переменной, полагая $t=\frac{\pi}{2}-\varphi$. Тогда

$$V=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2t}\,dt.$$

В полученном интеграле целесообразно произвести замену $\sin 2t=z^{\frac{1}{2}}$, после чего имеем $dt=\frac{z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}}{4}\,dz$,

$$V=\frac{b^3-a^3}{3}\int\limits_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{4}}\,dz=\frac{b^3-a^3}{3}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).\ ▶$$

100. $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right),\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ x=0,\ x=a\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$.

◀ Полагая в уравнении поверхности $z=0$, получаем уравнение прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, по которой поверхность пересекается с плоскостью xOy. В тройном интеграле

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$$

произведем замену переменных, полагая $\frac{x}{a}=u,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=v,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=w$. При этом получим

$$0\leqslant u\leqslant 1,\quad \frac{2w}{\pi}\arcsin w\leqslant v\leqslant 1,\quad -1\leqslant w\leqslant 1,\quad \frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\mathcal{D}(u,v,w)}{\mathcal{D}(x,y,z)}}=abc,$$

$$V=abc\int\limits_0^1du\int\limits_{-1}^1dw\int\limits_{\frac{2w}{\pi}\arcsin w}^1dv=abc\int\limits_{-1}^1\left(1-\frac{2}{\pi}w\arcsin w\right)dw=2abc\left(1-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1w\arcsin w\,dw\right)=$$

$$=2abc\left(1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{w^2}{2}\arcsin w\Big|_{-1}^1-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1\frac{w^2\,dw}{\sqrt{1-w^2}}\right)\right)=abc\left(1+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1\frac{w^2\,dw}{\sqrt{1-w^2}}\right)=$$

$$= abc\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-w^2}\,dw + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}\right) = abc\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}abc. \blacktriangleright$$

101. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

◀ В интеграле

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz$$

заменим переменные по формулам $a_ix+b_iy+c_iz=u_i$ $(i=1,2,3)$, отображающим шар $T'=\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 : u_1^2+u_2^2+u_3^2\leqslant h^2\}$ на тело T. Тогда, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\Delta}$, получим

$$V = \frac{1}{|\Delta|}\iiint_{T'} du_1du_2du_3 = \frac{4}{3}\frac{\pi h^3}{|\Delta|}. \blacktriangleright$$

102. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$, $n>1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $h>0$.

◀ Тело T находится в полупространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ и его точки симметричны относительно плоскостей xOz и yOz, в силу чего имеем

$$V = 4\iiint_{T'} dx\,dy\,dz,$$

где T' — четвертая часть тела, находящаяся в первом октанте.

Перейдем в интеграле к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая в них $\alpha=\beta=1$. Тогда

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt[3]{\frac{c\cos\theta\sin^{2n-4}\theta}{h(\sin^{2n}\theta+\cos^{2n}\theta)}}=\rho(\theta),$$

$$V = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\rho(\theta)}\rho^2\,d\rho = \frac{2\pi}{3h}abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin^{2n-3}\theta}{\sin^{2n}\theta+\cos^{2n}\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{3h}abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^{2n-3}\theta\,d(\operatorname{tg}\theta)}{1+\operatorname{tg}^{2n}\theta}.$$

Полагая $\operatorname{tg}^{2n}\theta=t$, получаем

$$d(\operatorname{tg}\theta)=\frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{2n}\,dt,$$

$$V=\frac{\pi abc^2}{3nh}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt=\frac{\pi abc^2}{3nh}B\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi abc^2}{3nh}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi^2abc^2}{3nh\sin\frac{\pi}{n}}. \blacktriangleright$$

103. Найти объем m-мерной пирамиды

$$T=\left\{x\in\mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{a_i}\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0\ (i=\overline{1,m})\right\},\ a_i>0,\ i=\overline{1,m}.$$

◄ Объем тела T вычисляется по формуле

$$V = \int\limits_T dx = \int\limits_0^{a_1} dx_1 \int\limits_0^{a_2\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \ldots \int\limits_0^{a_m\left(1-\frac{x_1}{a_1}-\cdots-\frac{x_{m-1}}{a_{m-1}}\right)} dx_m.$$

Заменим в интеграле переменные по формулам $x_i = a_i t_i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда получим, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_m)}{\mathcal{D}(t_1, \ldots, t_m)} = a_1 a_2 \ldots a_m$:

$$V = a_1 a_2 \ldots a_m \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{1-t_1-\ldots-t_{m-1}} dt_m =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_m \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{1-t_1-\ldots-t_{m-2}} \big(1-(t_1+\ldots+t_{m-1})\big)\, dt_{m-1} =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_m \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{1-t_1-\ldots-t_{m-3}} \left.\frac{\big(1-(t_1+\ldots+t_{m-1})\big)^2}{2}\right|_{t_{m-1}=1-(t_1+\cdots+t_{m-2})}^{t_{m-1}=0} dt_{m-2} =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 a_2 \ldots a_m \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{1-t_1-\ldots-t_{m-3}} \big(1-(t_1+\ldots+t_{m-2})\big)^2\, dt_{m-2} =$$

$$= \frac{1}{3!} a_1 a_2 \ldots a_m \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{1-t_1-\ldots-t_{m-4}} \big(1-(t_1+\ldots+t_{m-3})\big)^3\, dt_{m-3} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} a_1 a_2 \ldots a_m \int\limits_0^1 (1-t_1)^{m-1}\, dt_1 = \frac{1}{m!} a_1 a_2 \ldots a_m. \blacktriangleright$$

104. Найти объем M-мерного шара

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leqslant a^2 \right\}.$$

◄ Заменяя в интеграле

$$V = \int\limits_T dx$$

переменные по формулам (14), п.1.8, и принимая во внимание формулу (15) того же пункта, получим

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi_2\, d\varphi_2 \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi_3\, d\varphi_3 \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin^{m-2}\varphi_{m-1}\, d\varphi_{m-1} \int\limits_0^{a} \rho^{m-1}\, d\rho =$$

$$= 2^{m-1} \frac{\pi a^m}{m} \prod_{j=2}^{m-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j\, d\varphi_j.$$

Каждый интеграл, входящий в произведение, является B-функцией Эйлера:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j\, d\varphi_j = \frac{1}{2}B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\prod_{j=2}^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j\, d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2}\frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)\ldots\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \quad V = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}a^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

При $m = 2$ получим $V = \pi a^2$, а при $m = 3$ имеем $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, что известно из элементарного курса геометрии. ►

105. Найти объем m-мерного конуса, ограниченного поверхностью, заданной уравнением $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} = \frac{x_m^2}{a_m^2}$, и гиперплоскостью, уравнение которой $x_m = a_m$.

◄ В интеграле $V = \int_T dx$ заменим переменные по формулам

$$x_1 = a_1\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}, \quad x_j = a_j\rho\cos\varphi_{j-1}\prod_{i=j}^{m-2}\sin\varphi_i \quad (j = \overline{2, m-2}),$$

$$x_{m-1} = a_{m-1}\rho\cos\varphi_{m-2}, \quad x_m = x_m.$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-2}, x_m)} = a_1a_2\ldots a_{m-1}\rho^{m-2}\prod_{j=1}^{m-2}\sin^{j-1}\varphi_j$$

и решение предыдущего примера, получим

$$V = a_1a_2\ldots a_{m-1}\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2\,d\varphi_2\ldots\int_0^{\pi}\sin^{m-3}\varphi_{m-2}\,d\varphi_{m-2}\int_0^1\rho^{m-2}\,d\rho\int_{\rho a_m}^{a_m}dx_m =$$

$$= \frac{2\pi}{(m-1)m}a_1a_2\ldots a_m\cdot 2^{m-3}\prod_{j=2}^{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{j-1}\varphi_j\,d\varphi_j =$$

$$= \frac{2\pi}{(m-1)m}a_1a_2\ldots a_m\cdot 2^{m-3}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-3}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}a_1a_2\ldots a_m}{(m-1)m\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}a_1a_2\ldots a_m}{m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. ►$$

Применяя формулы (1), п.3.3, найти координаты центра тяжести:

106. Однородной пластинки D, граница которой задана уравнениями

$$ay = x^2, \quad x + y = 2a \quad (a > 0).$$

◄ Прямая $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2a\}$ и кривая $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ay = x^2\}$ пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = -2a$, $x_2 = a$. Однородная пластинка D является плоской замкнутой областью $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2a \leqslant x \leqslant a,\ \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant 2a - x\right\}$, а ее масса

$$m = \int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy = \int_{-2a}^{a}\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{9}{2}a^2.$$

По формулам (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{-2a}^{a} x\,dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{1}{m}\int\limits_{-2a}^{a}\left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a}\right)dx = -\frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y\,dy = \frac{1}{m}\int\limits_{-2a}^{a}\left(\frac{(2a-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2a^2}\right)dx = \frac{8}{5}a. \blacktriangleright$$

107. Однородной пластинки D, ограниченной частью кривой

$$\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\right\}$$

и отрезками $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

◀ Вычислим массу пластинки D:

$$m = \iint\limits_{D} dx\,dy = \int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{y(x)} dt = \int\limits_{0}^{a} y(x)\,dx,$$

где $y(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Полагая $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ и принимая во внимание, что возрастанию параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ соответствует убывание переменной x от a до 0, получим

$$m = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt = 3a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}a^2\frac{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{3}{32}\pi a^2.$$

Применив формулы (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{0}^{a} x\,dx \int\limits_{0}^{y(x)} dt = \frac{1}{m}\int\limits_{0}^{a} xy(x)\,dx = \frac{3a^3}{m}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\sin^4 t\,dt = \frac{3a^3}{2m}B\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{256a}{315\pi},$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{y(x)} t\,dt = \frac{1}{2m}\int\limits_{0}^{a} y^2(x)\,dx = \frac{3a^3}{2m}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,dt = \frac{3a^3}{4m}B\left(4, \frac{3}{2}\right) = \frac{256a}{315\pi}. \blacktriangleright$$

108. Однородной пластинки D, ограниченной кривой, заданной уравнением $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, и отрезком луча $\varphi = 0$.

◀ Применяя формулы пункта 3.3, получим

$$m = \iint\limits_{D} dx\,dy = \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a(1+\cos\varphi)} \rho\,d\rho = \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{4}\pi a^2,$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\,dx\,dy = \frac{1}{m} \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2\,d\rho = \frac{a^3}{3m} \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3m} \int\limits_0^{\pi} (3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi = \frac{2a^3}{3m} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi = \frac{a^3}{3m} \left(3B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)\right) = \frac{5}{6}a,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\,dx\,dy = \frac{1}{m} \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{3m} \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi = \frac{a^3}{3m} \int\limits_{\pi}^{0} (1+\cos\varphi)^3 d(\cos\varphi) = \frac{16a}{9\pi}.$$

При решении примера использовали переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным координатам. ▶

109. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$, если плотность ее вещества в точке (x, y) пропорциональна расстоянию от этой точки до точки $(a, 0)$.

◀ Из условия задачи следует, что плотность μ вещества пластинки D выражается формулой $\mu(x, y) = c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, где $c > 0$ — постоянная. Согласно формулам (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\mu(x, y)\,dx\,dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\mu(x, y)\,dx\,dy,$$

где $m = \iint\limits_D \mu(x, y)\,dx\,dy$. После замены переменных по формулам $x - a = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим

$$m = c \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-2a\cos\varphi} \rho^2\,d\rho = \frac{8}{3}ca^3 \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}ca^3 \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) = \frac{8}{3}ca^3 \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}ca^3,$$

$$x_0 = \frac{c}{m} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-2a\cos\varphi} (a + \rho\cos\varphi)\rho^2\,d\rho = \frac{c}{m} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-\frac{8}{3}a^4\cos^3\varphi + 4a^4\cos^5\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{4ca^4}{3m} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3\cos^5\varphi - 2\cos^3\varphi)\,d\varphi = \frac{4ca^4}{3m} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 4\sin^2\varphi + 3\sin^4\varphi)\,d(\sin\varphi) = -\frac{a}{5},$$

$$y_0 = \frac{c}{m}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{-2a\cos\varphi} \rho^3\, d\rho = \frac{4ca^4}{m}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0. \blacktriangleright$$

110. Найти моменты инерции относительно осей координат Ox и Oy однородной пластинки

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\; 0 \leqslant y \leqslant a - \sqrt{2ax - x^2}\right\}.$$

◀ Заменяя в формуле (2), п.3.3, для вычисления I_x двойной интеграл повторным, при $\mu(x,\, y) = 1$ получаем

$$I_x = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2\, dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^a \left(a - \sqrt{2ax - x^2}\right)^3 dx.$$

Полагая $x = 2a\sin^2 t$, находим

$$I_x = \frac{a^4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t(1 - \sin 2t)^3\, d(2t) = \frac{a^4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u(1 - \sin u)^3\, du =$$

$$= \frac{a^4}{6}\left(B\left(1,\, \frac{1}{2}\right) - 3B\left(\frac{3}{2},\, \frac{1}{2}\right) + 3B\left(2,\, \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{5}{2},\, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

Интеграл $I_y = \iint\limits_D x^2\, dx\, dy$ заменим повторным, в котором внешнее интегрирование производится по переменной y. При этом получим

$$I_y = \int\limits_0^a dy \int\limits_0^{a-\sqrt{2ay-y^2}} x^2\, dx = I_x = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi). \blacktriangleright$$

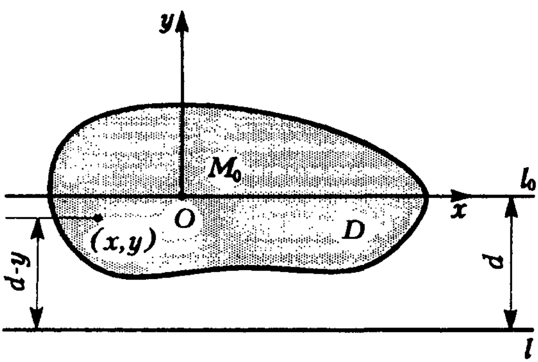

Рис. 11

111. Доказать формулу $I_l = I_{l_0} + md^2$, где I_l, I_{l_0} — моменты инерции плоской пластинки D относительно параллельных осей l и l_0, из которых l_0 проходит через центр тяжести пластинки, d — расстояние между осями, m — масса пластинки.

◀ Выберем систему координат xOy так, чтобы ее начало O совпадало с центром тяжести $M_0 = (x_0,\, y_0)$ пластинки D, а ось Ox — с прямой l_0 (рис. 11). Тогда, очевидно, $y_0 = 0$. Пусть $\mu(x,\, y)$ — плотность вещества пластинки. Расстояние точки $(x,\, y) \in D$ от прямой l равно $d - y$, в силу чего можем написать

$$I_l = \iint\limits_D (d - y)^2 \mu(x,\, y)\, dx\, dy = d^2 \iint\limits_D \mu(x,\, y)\, dx\, dy - 2d \iint\limits_D y\mu(x,\, y)\, dx\, dy + \iint\limits_D y^2 \mu(x,\, y)\, dx\, dy.$$

Из равенств

$$\iint\limits_D \mu(x,\, y)\, dx\, dy = m, \quad \iint\limits_D y\mu(x,\, y)\, dx\, dy = my_0 = 0, \quad \iint\limits_D y^2 \mu(x,\, y)\, dx\, dy = I_x = I_{l_0}$$

следует доказываемая формула.

112. Доказать, что момент инерции I плоской пластинки D относительно прямой, проходящей через центр тяжести $O = (0, 0)$ пластинки и составляющей угол α с осью Ox, определяется формулой

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy, I_{xy} — центробежный момент инерции (см. формулы (2) и (3), п.3.3).

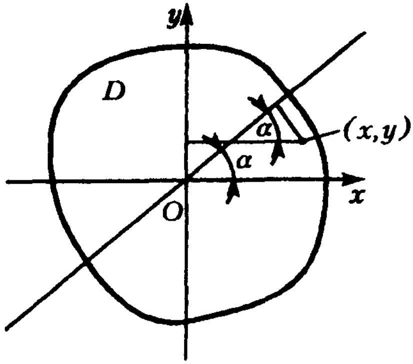

Рис. 12

◀ По условию центр тяжести пластинки D находится в начале координат системы xOy. Фиксируем точку (x, y). Ее расстояние до заданной прямой равно $(x - y \operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha = x\sin\alpha - y\cos\alpha$ (рис. 12), в силу чего имеем

$$I = \iint\limits_D (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 \mu(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \sin^2\alpha \iint\limits_D \mu(x, y)x^2\,dx\,dy - 2\sin\alpha\cos\alpha \iint\limits_D xy\mu(x, y)\,dx\,dy + \cos^2\alpha \iint\limits_D y^2\mu(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= I_y \sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_x\cos^2\alpha. \ ▶$$

113. Определить силу давления воды на боковую стенку цилиндрического сосуда $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$, $x \geqslant 0$, если уровень воды $z = h$.

◀ Согласно основному закону гидростатики, на элемент $d\sigma(M)$ цилиндрической поверхности, площадь которого $dS(M)$, действует сила давления $d\boldsymbol{P}(M)$, равная по величине произведению $dS(M)$ на плотность $\mu(M)$ жидкости и на расстояние элемента $d\sigma(M)$ от свободной поверхности жидкости. Эта сила направлена в сторону единичной внешней нормали к боковой поверхности цилиндра. Следовательно,

$$d\boldsymbol{P}(M) = dS(M)\mu(M)(h - z)\boldsymbol{n}(M), \quad M \in d\sigma.$$

Поскольку образующие цилиндра параллельны оси Oz, то

$$d\boldsymbol{P}(M) = dX(M)\boldsymbol{i} + dY(M)\boldsymbol{j},$$

где $dX(M) = dS(M)(h - z)\mu(M)\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}})$, $dY(M) = dS(M)(h - z)\mu(M)\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}})$. Суммируя по всем элементам $d\sigma(M)$ и принимая во внимание равенства

$$dS = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dy\,dz,$$

$$(\cos\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}}) = -\frac{x_y'}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \mu(M) = 1,$$

получаем следующие значения компонент X и Y вектора $\boldsymbol{P}$ — суммарного давления на стенку цилиндрического сосуда при $x \geqslant 0$:

$$X = \iint\limits_{\substack{-a \leqslant y \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant h}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}(h - z)\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}})\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} dy \int_0^h (h - z)\,dz = a(h - z)^2\Big|_h^0 = ah^2,$$

$$Y = \iint\limits_{\substack{-a \leqslant y \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant h}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}(h - z)\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}})\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} y\,dy \int_0^h (h - z)\,dz = 0. \ ▶$$

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

◀ Тело T однородно, ограничено частью конической поверхности $S=\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right\}$, частью плоскости $S_1=\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3:(x,\,y)\in\mathbb{R}^2,\ z=c\}$ и симметрично относительно оси Oz. Следовательно, его центр тяжести $M_0=(x_0,\,y_0,\,z_0)$ лежит на этой оси и $x_0=0$, $y_0=0$. Согласно одной из формул (4), п.3.3, имеем, полагая $\mu(x,\,y,\,z)=1$:

$$z_0=\frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz,$$

где V — объем тела T.

В интеграле $V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$ перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, $z=z$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. После замены получим

$$V=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_{c\rho}^{c}dz=2\pi abc\int_0^1\rho(1-\rho)\,d\rho=\frac{\pi}{3}abc.$$

Таким образом, имеем

$$z_0=\frac{ab}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_{c\rho}^{c}z\,dz=\frac{\pi abc^2}{V}\int_0^1\rho(1-\rho^2)\,d\rho=\frac{\pi abc^2}{4V}=\frac{3}{4}c. \ ▶$$

115. $x^2=2pz$, $y^2=2px$, $x=\frac{p}{2}$, $z=0$ $(p>0)$.

◀ Точки тела T симметричны относительно плоскости xOz, поэтому

$$V=2\iiint\limits_{T'}dx\,dy\,dz,$$

где $T'=\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3:0\leqslant x\leqslant\frac{p}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2px},\ 0\leqslant z\leqslant\frac{x^2}{2p}\right\}$. Заменяя тройной интеграл повторным, получим

$$V=2\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=\frac{1}{p}\int_0^{\frac{p}{2}}x^2dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\frac{1}{p}\int_0^{\frac{p}{2}}x^2\sqrt{2px}\,dx=\frac{p^3}{28}.$$

Применив формулы (4), п.3.3, найдем

$$x_0=\frac{2}{V}\int_0^{\frac{p}{2}}x\,dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=\frac{28}{p^4}\int_0^{\frac{p}{2}}x^3\sqrt{2px}\,dx=\frac{7}{18}p,$$

$$y_0=\frac{1}{V}\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}y\,dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=\frac{7}{p^4}\int_0^{\frac{p}{2}}\left(x^2y^2\Big|_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}}\right)dx=0,$$

$$z_0 = \frac{2}{V}\int\limits_0^{\frac{p}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2px}} dy \int\limits_0^{\frac{x^2}{2p}} z\,dz = \frac{7}{p^5}\int\limits_0^{\frac{p}{2}} x^4\sqrt{2px}\,dx = \frac{7}{176}p. \blacktriangleright$$

116. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ (n > 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

◀ Точки тела T принадлежат первому октанту. В интеграле

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая там $\alpha = \beta = \frac{2}{n}$. Тогда

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\quad \frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\theta,\varphi)} = \frac{4}{n^2}abc\,\rho^2\cos^{\frac{2}{n}-1}\theta\sin^{\frac{4}{n}-1}\theta\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi,$$

$$V = \frac{4}{n^2}abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{n}-1}\theta\sin^{\frac{4}{n}-1}\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{abc}{3n^2}B\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Применив формулы (4), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz = \frac{4a^2bc}{n^2V}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{6}{n}-1}\theta\cos^{\frac{2}{n}-1}\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^3\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{V}\frac{a^2bc}{4n^2}B\left(\frac{3}{n},\frac{1}{n}\right)B\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) = \frac{3a}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},$$

$$y_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz = \frac{3b}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},\quad z_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz = \frac{3c}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}. \blacktriangleright$$

117. Определить координаты центра тяжести тела, имеющего форму куба $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, если его плотность в точке (x,y,z) определяется формулой

$$\mu(x,y,z) = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},\ \text{где } 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ 0 < \gamma < 1.$$

◀ Найдем массу m тела T:

$$m = \iiint\limits_T \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\,dx\int\limits_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\,dy\int\limits_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}\,dz = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

Согласно одной из формул (4), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{m}\int\limits_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,dx\int\limits_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\,dy\int\limits_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha.$$

Аналогично находим $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$. ►

118. Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела T, ограниченного поверхностью, заданной уравнением

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}, \quad a>0,\ b>0,\ c>0.$$

◄ Применим формулы (5), п.3.3, и в интеграле

$$I_{xy}=\iiint\limits_T z^2\,dx\,dy\,dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, при $\alpha=\beta=1$. Уравнение границы тела T в сферических координатах примет вид $\rho^2=\sin^2\theta-\cos^2\theta$, откуда следует, что $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$. Множество $T'=\left\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3:\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{-\cos 2\theta},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}$ отображается на множество T. Принимая во внимание равенство $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\theta,\varphi)}=abc\,\rho^2\sin\theta$, после замены переменных и перехода от тройного интеграла к повторному получим

$$I_{xy}=abc^3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{-\cos 2\theta}}\rho^4\,d\rho=\frac{2}{5}\pi abc^3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}}\,d\theta.$$

Полагая в интеграле $\sqrt{2}\cos\theta=t^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}}\int\limits_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\frac{5}{2}}\,dt=\frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}}B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)=\frac{\pi^2abc^3}{128\sqrt{2}}.$$

Аналогично получим

$$I_{yz}=\frac{15\pi^2a^3bc}{256\sqrt{2}},\quad I_{zx}=\frac{15\pi^2ab^3c}{256\sqrt{2}}.\ ►$$

119. Найти момент инерции неоднородного шара $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leqslant r^2\}$ массы m относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $M=(x,y,z)$ пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

◄ По условию задачи имеем

$$\mu(x,y,z)=\gamma\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \gamma=\mathrm{const},\ \gamma>0.$$

Постоянную γ определим из условия

$$m=\gamma\iiint\limits_T\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Перейдя в интеграле к сферическим координатам, получим

$$m=\gamma\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r}\rho^3\,d\rho=\pi\gamma r^4,$$

откуда $\gamma=\frac{m}{\pi r^4}$.

Считая, что диаметр шара является отрезком оси Oz и применяя одну из формул (7), п.3.3, найдем

$$I_z = \frac{m}{\pi r^4} \iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{m}{\pi r^4} \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} \rho^5\,d\rho =$$

$$= \frac{2\pi m r^6}{3\pi r^4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta = \frac{1}{3} m r^2 B\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{3} m r^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{9} m r^2. ▶$$

120. Доказать, что момент инерции тела $T \subset \mathbb{R}^3$ относительно оси l, проходящей через его центр тяжести $O = (0, 0, 0)$ и образующей углы α, β, γ с осями координат, определяется по формуле

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат (см. формулы (7), п.3.3) и

$$K_{xy} = \iiint\limits_T xy\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$K_{xz} = \iiint\limits_T xz\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$K_{yz} = \iiint\limits_T yz\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

— центробежные моменты.

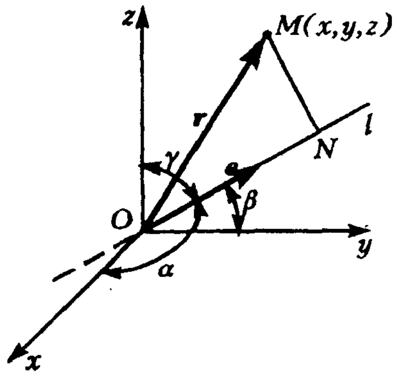

Рис. 13

◀ Найдем квадрат расстояния от точки $M = (x, y, z)$ тела до прямой l (т.е. до точки N — проекции точки M на прямую l, рис. 13). Пусть $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки M, а $\boldsymbol{e}$ — орт прямой l. Очевидно, $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $d^2 = |\boldsymbol{r}|^2 - \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\rangle$, где $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\rangle$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{e}$. Принимая во внимание равенства $|\boldsymbol{r}|^2 = x^2+y^2+z^2$, $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}\rangle = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, имеем

$$d^2 = (x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 =$$

$$= (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (x^2+z^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma.$$

Пусть $\mu(x, y, z)$ — плотность вещества тела T. Из определения момента инерции тела относительно некоторой оси (см. формулу (6), п.3.3) следует равенство

$$I_l = \iiint\limits_T d^2\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Подставив в интеграл найденное выше значение d^2 и пользуясь свойством аддитивности тройного интеграла, получим доказываемую формулу. ▶

121. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела T плотности μ_0, ограниченного поверхностью, заданной уравнением $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$.

◀ Применяя формулу (8), п.3.3, получим

$$I_0 = \mu_0 \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8. Очевидно, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant a\sin\theta$. После замены тройного интеграла повторным найдем

$$I_0 = 8\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin\theta} \rho^4\, d\rho = \frac{4}{5}\pi\,\mu_0 a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\, d\theta = \frac{2}{5}\pi\,\mu_0 a^5 B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}\mu_0 a^5. \blacktriangleright$$

122. Найти ньютонов потенциал в точке $P = (x, y, z)$ сферического слоя $T = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant r_2^2\}$, если плотность $\mu = f(r)$, где f — известная функция, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

◀ Повернем систему координат так, чтобы ось $O\zeta_1$ системы координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ проходила через точку P. В новых координатах сферический слой является множеством точек, определяемым неравенствами $r_1^2 \leqslant \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leqslant r_2^2$, по которому будем интегрировать, применяя формулу (10), п.3.3. Имеем

$$u(x, y, z) = u_1(0, 0, r) = \iiint\limits_{r_1^2 \leqslant \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leqslant r_2^2} \frac{f\left(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}\right)}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (\zeta_1 - z)^2}}\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8. Легко убедиться в том, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2$. Принимая это во внимание и переходя к повторному интегралу, получим

$$u(x, y, z) = \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho)\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r\cos\theta + r^2}} =$$

$$= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) \left(\left. \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r\cos\theta + r^2}}{\rho r} \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) d\rho = \frac{2\pi}{r} \int_{r_1}^{r_2} \rho f(\rho)\big(\rho + r - |\rho - r|\big)\, d\rho =$$

$$= \begin{cases} 4\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho f(\rho)\, d\rho, & \text{если} \quad \rho > r, \\ \frac{4\pi}{r} \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho)\, d\rho, & \text{если} \quad \rho < r, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ можно записать в более компактной форме. Если $\rho > r$, то $\frac{\rho^2}{r} > \rho$; если $\rho < r$, то $\frac{\rho^2}{r} < \rho$. Поэтому

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \min\left\{\frac{\rho^2}{r}, \rho\right\} f(\rho)\, d\rho. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

50. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{3}y$ (внутри каждой из кривых).

51. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. **52.** $x^4 + y^4 = 2a^2xy$. **53.** $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

54. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y > 0$. **55.** $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

56. $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$. **57.** $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$, $x > 0$, $y > 0$.

58. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y = m$, $y = n$ $(0 < a < b,\ 0 < m < n)$.

59. $y^2 = a^2 - 2ax$, $y^2 = b^2 - 2bx$, $y^2 = m^2 + 2mx$, $y^2 = n^2 + 2nx$ $(0 < m < n,\ 0 < a < b)$.

60. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$, $a > 0$. **61** $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

62. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2y^2}{c^4}$. **63.** $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$.

64. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

С помощью двойных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

65. $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$, $(a > b\sqrt{2})$. **66.** $x^2z^2 + a^2y^2 = c^2x^2$, $0 < x < a$.

67. $y^2 + z^2 = x$, $x = y$ $(z > 0)$. **68.** $z = \sin(x^2 + y^2)$, $z = 0$, $n\pi < x^2 + y^2 < (n+1)\pi$.

69. $x^2 + y^2 = \alpha z^2$, $x^2 + y^2 = ax\ (z > 0)$.

70. $z(x + y) = ax + by$, $z = 0$, $1 < x^2 + y^2 < 4$, $(x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ b > 0)$.

71. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^k + \frac{z}{c} = 1$, $z > 0$. **72.** $z^2 = 2xy$, $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

73. $z = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$, $x + y = 1$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

74. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}$ $(y > 0,\ z > 0)$.

75. $z = x^2y$, $y^2 = a^2 - 2ax$, $y^2 = m^2 + 2mx$, $y = 0$, $z = 0$.

Найти площади:

76. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : az = xy\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2,\ z \in \mathbb{R}\}$.

77. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, расположенной вне цилиндров $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax,\ z \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = -ax,\ z \in \mathbb{R}\}$, $a > 0$.

78. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2az\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy,\ z \in \mathbb{R}\}$.

79. Части цилиндра $S\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2,\ z \in \mathbb{R}\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

80. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1\right\}$, отсекаемой плоскостью xOy.

81. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1\right\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

82. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z\right\}$, вырезанной поверхностью $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z \geqslant 0\right\}$.

83. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z\right\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\ z \in \mathbb{R}\right\}$.

С помощью тройных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

84. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3)$, $a > 0$, $y > 0$, $z > 0$. **85.** $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(x - y)$.

86. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^8 = \frac{z^4}{h^4}$. **87.** $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \alpha^2\right)^2 = 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$, $\alpha^2 < 1$.

88. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{h}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

89. $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = 1$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

90. $(x^2+y^2+z^2)^3 = 3xyz$.

91. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z \geqslant 0,\ 0<a<b)$.

92. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. **93.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$.

94. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

95. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4 = \frac{xyz}{abc}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

96. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

97. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. **98.** $(x^2+y^2+z^2)^3 = \frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

Найти координаты центров тяжести однородных пластинок $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

99. $x^4+y^4=x^2y$. **100.** $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab}$. **101.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$.

102. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$. **103.** $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$, $x>0$, $y>0$.

Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy однородных пластинок $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

104. $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$, $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$, $y=0$ $(b_1>0,\ b_2>0,\ h>0)$. **105.** $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

106. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$. **107.** $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

108. Найти момент инерции правильного треугольника со стороной a относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

109. $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$, $0<z<h$. **110.** $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$.

111. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm1$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm1$, $z=0$.

112. $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ $(z \geqslant 0)$. **113.** $x^2+y^2=2z$, $x+y=z$.

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями (параметры положительны):

114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$. **115.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$.

116. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

117. Найти ньютонов потенциал в точке $P=(0,0,z)$ цилиндра $T=\{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3 : \xi^2+\eta^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant h\}$ постоянной плотности μ_0.

118. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности μ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен r, а угол осевого сечения сектора равен 2α.

§ 4. Интегрирование на многообразиях

4.1. Многообразия в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ и их ориентация.

Определение 1. *Множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется многообразием размерности $p \leqslant m$, принадлежащим классу C^1, если для каждой точки $a=(a_1,\ldots,a_m)$, $a \in M$, и некоторой окрестности $S(a,\delta)$ существует окрестность $S(a_p,\delta_1)$ точки $a_p=(a_1,\ldots,a_p)$ и такое отображение $\varphi : S(a_p,\delta_1) \to M \cap S(a,\delta)$ класса C^1, что $\varphi_j(a_p)=a_j$, $j=\overline{p+1,m}$, причем координаты точек $x \in M \cap S(a,\delta)$ удовлетворяют уравнениям*

$$x_j=\varphi_j(x_p)=\varphi_j(x_1,\ldots,x_p), \quad x_p \in S(a_p,\delta_1),\ j=\overline{p+1,m}. \tag{1}$$

Определение 2. *Параметрическим представлением множества $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leqslant m$, принадлежащим классу C^1, называется отображение $u \mapsto \Phi(u)$ открытого множества $O \subset \mathbb{R}^p$ в пространство $\mathbb{R}^m$, обладающее следующими свойствами:*

1) *Φ является гомеоморфизмом O на M;*
2) *Φ является отображением $O \to \mathbb{R}^m$, принадлежащим классу C^1;*

3) *в каждой точке* $u = (u_1, \ldots, u_p)$, $u \in \mathcal{O}$, *отображение* $d\boldsymbol{\Phi}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^m)$ *имеет ранг* p.

Последнее условие в определении 2 означает, что образ векторного пространства $\mathbb{R}^p$ при этом отображении является векторным подпространством в $\mathbb{R}^m$ размерности p, т.е. векторы $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$, линейно независимы в $\mathbb{R}^m$, в силу чего хотя бы один из определителей p-го порядка матрицы $\boldsymbol{\Phi}'(u)$, составленной из элементов $\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}(u)$ $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p})$, отличен от нуля.

Теорема. *Для того чтобы множество* $M \subset \mathbb{R}^m$ *было многообразием класса* C^1 *размерности* $p \leqslant m$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки* $a \in M$ *существовала такая открытая окрестность* $S(a, \delta)$, *чтобы множество* $M \cap S(a, \delta)$ *допускало параметрическое представление размерности* p, *принадлежащее классу* C^1.

Если $p = 1$, то говорят, что M есть *кривая класса* C^1 (или *гладкая кривая*), а в случае $p = 2$ многообразие M называют *поверхностью класса* C^1 (или *гладкой поверхностью*).

В случае, когда $p = m - 1$, многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ называется *гиперповерхностью*.

Если $m = 3$, $p = 2$, то, для того чтобы в окрестности точки $a \in M$ множество $M \subset \mathbb{R}^3$ было гладкой поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два эквивалентных условия:

1) с точностью до перестановки координат x_1, x_2, x_3 в окрестности точки $a = (a_1, a_2, a_3)$ множество M задается уравнением $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, где φ — функция класса C^1 в окрестности точки (a_1, a_2) и $\varphi(a_1, a_2) = a_3$;

2) в окрестности точки a множество M допускает параметризацию класса C^1

$$x_j = \varphi_j(u_1, u_2),\ 1 \leqslant j \leqslant 3,\ (u_1, u_2) \in S(\alpha, \delta),\ x_j(\alpha) = a_j,$$

и при этом хотя бы один из определителей

$$\frac{\mathcal{D}(\varphi_2, \varphi_3)}{\mathcal{D}(u_1, u_2)}, \quad \frac{\mathcal{D}(\varphi_3, \varphi_1)}{\mathcal{D}(u_1, u_2)}, \quad \frac{\mathcal{D}(\varphi_1, \varphi_2)}{\mathcal{D}(u_1, u_2)}$$

отличен от нуля для всех точек $(u_1, u_2) \in S(\alpha, \delta)$.

Определение 3. *Пусть отображение* $u \mapsto \boldsymbol{\Phi}(u)$, $u \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, *является параметрическим представлением множества* $M \subset \mathbb{R}^m$ *размерности* $p \leqslant m$ *класса* C^1 *в окрестности точки* $a \in M$, *причем* $\boldsymbol{\Phi}(\alpha) = a$, $\alpha \in \mathcal{O}$. *Тогда образ линейного отображения* $d\boldsymbol{\Phi}(\alpha) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ *есть векторное подпространство размерности* p. *Это подпространство называется касательным пространством к многообразию* M *в точке* a *и обозначается* $T_a(M)$.

Определение 4. *Системой ориентаций* $\mathcal{T}$ *дифференцируемого многообразия* M *называется выбор для каждой точки* $a \in M$ *некоторой ориентации его векторного касательного пространства* $T_a(M)$.

Определение 5. *Многообразие* $M \subset \mathbb{R}^m$ *размерности* $p \leqslant m$ *класса* C^1 *называется ориентируемым, если оно имеет хотя бы одну непрерывную систему ориентаций, а выбор такой фиксированной системы ориентаций называется ориентацией многообразия* M.

Если многообразие M является связным и ориентируемым, то оно обладает двумя возможными ориентациями, определяемыми выбором ориентации пространства $T_a(M)$.

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — гиперповерхность класса C^1, то ее трансверсально ориентируют выбором непрерывного поля единичных нормалей $\boldsymbol{n}(x)$, $x \in M$, а выбор одного из двух возможных направлений вектора $\boldsymbol{n}$ в произвольной точке $x \in M$ определяет трансверсальную ориентацию в целом.

Трансверсально ориентируемые гиперповерхности называются *двусторонними*.

Если, например, гладкая поверхность размерности $p = 2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана уравнением

$$f(x, y, z) = z - \varphi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D,\ D \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y),\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y),\ 1\right).$$

следовательно, векторы

$$n(x,\ y,\ z)=\left(\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\right), \tag{2}$$

где $p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\ y)$, $q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\ y)$, определяют два непрерывных поля единичных нормалей к поверхности в каждой ее точке. Выбор определенного знака перед радикалом $\sqrt{1+p^2+q^2}$ в произвольной точке поверхности фиксирует одно из этих полей, а значит, и определенную сторону поверхности, т.е. ориентирует ее трансверсально.

Если гладкая поверхность $M\subset\mathbb{R}^3$ задана параметрически в виде

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v),\ (u,\ v)\in\mathcal{O},\ \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2,$$

то

$$n=\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

где

$$A=\frac{\mathcal{D}(y,\ z)}{\mathcal{D}(u,\ v)},\quad B=\frac{\mathcal{D}(z,\ x)}{\mathcal{D}(u,\ v)},\quad C=\frac{\mathcal{D}(x,\ y)}{\mathcal{D}(u,\ v)}.$$

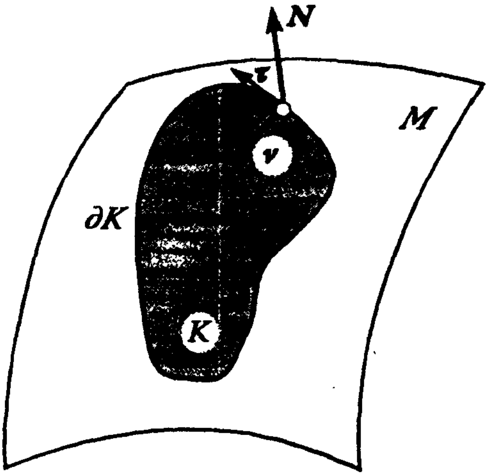

Рис. 14

Если $M\subset\mathbb{R}^m$ — гладкая кривая, то ее касательная ориентация называется *направлением обхода кривой*, а *положительным* считается обход, при котором вектор скорости $\Phi'(t)$, $t\in]a,\ b[$, в каждой точке t является положительным в смысле ориентации в этой точке. Трансверсальная ориентация этой кривой определяется заданием направления вращения вокруг нее.

Пусть $M\subset\mathbb{R}^m$ — ориентированное многообразие размерности $p=2$ класса C^1, а K — компакт, лежащий на этом многообразии. Обозначим через ∂K границу компакта K.

Определение 6. *Компакт $K\subset M$ называется **компактом с краем** класса C^1, если выполнены следующие условия:*

1) ∂K в пространстве $\mathbb{R}^m$ является кусочно-гладкой кривой класса C^1 (эта кривая лежит на многообразии M и имеет в общем случае конечное множество угловых точек);

2) всякая точка $a\in\partial K$, отличная от угловой, имеет такую открытую окрестность $S(a,\ \delta)$ на многообразии M, что множество $S(a,\ \delta)\cap C\partial K$ распадается на две связные компоненты, одна из которых состоит из точек $S(a,\ \delta)\cap CK$, а другая — из точек окрестности $S(a,\ \delta)$, принадлежащих компакту K.

Ориентации многообразия M сопоставляем ориентацию гладких дуг края ∂K по следующему правилу: в каждой регулярной точке $a\in\partial K$ рассмотрим в касательной плоскости к многообразию вектор $\tau(a)$, касательный к ∂K в точке a, направленный в сторону, определяемую ориентацией края ∂K, и вектор $\nu(a)$, ортогональный к вектору $\tau(a)$, направленный в ту сторону, где лежат внутренние точки компакта K. В случае, когда $M\subset\mathbb{R}^3$, векторы $\tau(a)$, $\nu(a)$ и $N=[\tau(a),\ \nu(a)]$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$, ориентирующий его так же, как и канонический базис $\{i,\ j,\ k\}$ (рис. 14).

Если $M\subset\mathbb{R}^m$ — многообразие размерности $p\leqslant m$ класса C^1, то всякое параметрическое представление Φ класса C^1 открытого множества $M\cap S(a,\ \delta)$ этого многообразия называется *локальной картой* класса C^1, или просто *картой*. Множество $\Phi(\mathcal{O})=M\cap S(a,\ \delta)$ называется *образом* этой карты. *Атласом* многообразия M называется множество карт открытых множеств из M, образы которых покрывают M.

4.2. Элемент p–мерного объема на многообразии $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leqslant m$ класса C^1.

Пусть $u \mapsto \boldsymbol{\Phi}(u)$, $u \in \mathcal{O}$, — C^1–гомеоморфизм области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$ на область $\boldsymbol{\Phi}(\mathcal{O})$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, а отображение $d\boldsymbol{\Phi}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^m)$ имеет ранг p в каждой точке $u \in \mathcal{O}$. Тогда множество $M = \boldsymbol{\Phi}(\mathcal{O})$ является многообразием размерности p класса C^1. Отображение $d\boldsymbol{\Phi}(u)$ в точке $u \in \mathcal{O}$ переводит систему p векторов базиса пространства $\mathbb{R}^p$ в систему линейно независимых векторов $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$, из $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим на множестве $\mathcal{O}$ брус B с вершиной в точке $u \in \mathcal{O}$, построенный на векторах $d\boldsymbol{u}_j = e_j\, du_j$, $j = \overline{1, p}$, $du_j > 0$, где e_j — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^p$. Объем этого бруса $V(B)$ равен произведению длин его ребер:

$$dV(B) = du_1\, du_2\, \ldots\, du_p. \tag{1}$$

Образом вектора du_j при отображении $d\boldsymbol{\Phi}(u)$ является вектор $\boldsymbol{\Phi}'(u)e_j\, du_j = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_j}(u)\, du_j$. Следовательно, дифференциал $d\boldsymbol{\Phi}(u)$ отображает брус B_j на параллелепипед H с вершиной в точке $\boldsymbol{\Phi}(u)$, построенный на векторах $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$.

Определение. *Объем $dV(H)$ параллелепипеда H называется элементом p–мерного объема на многообразии M.*

Согласно определению, имеем

$$dV(H) = \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_2}(u), \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_p}(u)\right)}\, du_1\, du_2 \ldots du_p, \tag{2}$$

где $\Gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_2}(u), \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_p}(u)\right)$ — определитель Грама от векторов $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$.

Пусть $m = 3$, $p = 2$, S — гладкая двусторонняя поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через x, y, z координаты точки в $\mathbb{R}^3$ со стандартным базисом $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. В окрестности каждой точки поверхности M рассмотрим ее параметрическое представление $(u, v) \mapsto \boldsymbol{\Phi}(u, v)$, определяемое тремя функциями класса C^1

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v), \ (u, v) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Так как поверхность S является многообразием размерности 2, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

равен 2. Поэтому по меньшей мере один из якобианов

$$A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)}$$

отличен от нуля во всех точках открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$.

Обозначим через dS элемент двумерного объема многообразия S и будем называть его элементом площади поверхности S[1]. Согласно формуле (2), получим

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\rangle \end{vmatrix}}\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{4}$$

где

$$E = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

---

[1] Об этом уже говорилось в пункте 3.2. Здесь строится мера на произвольном многообразии, частным случаем которой является dS.

— коэффициенты Гаусса.

Из тождества Лагранжа

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

следует, что $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, в силу чего имеем

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv. \tag{5}$$

В случае явного задания поверхности

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x, y), (x, y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2\}$$

получаем

$$\boldsymbol{\Phi}(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \; G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad F^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Следовательно,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{6}$$

Пусть $m = 3$, $p = 1$, γ — ориентированная кривая. Элемент одномерного объема называется *элементом длины кривой* γ. Если координаты x, y, z точек кривой γ являются функциями $x(t), y(t), z(t)$ класса C^1, производные которых $x'(t), y'(t), z'(t)$ нигде одновременно не обращаются в нуль в области изменения параметра t, то элемент длины кривой $dl(t)$ имеет вид

$$dl(t) = \sqrt{\langle \boldsymbol{\Phi}'(t), \boldsymbol{\Phi}'(t)\rangle}\, dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\Phi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (в предположении, что обход кривой γ в положительном направлении соответствует возрастанию параметра t).

4.3. Интегрирование на многообразии с краем. Криволинейные и поверхностные интегралы и их применения.

Пусть $K \subset M$ — многообразие с краем ∂K и $K = \boldsymbol{\Phi}(D)$, где $D \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, — замкнутая область с гладкой границей ∂D, $x \mapsto f(x)$, $x \in K$, — ограниченная числовая функция.

Определение 1. *Если функция $\varphi = f \circ \boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на множестве D, то интеграл*

$$\int\limits_D \varphi(u)\, dV(H), \tag{1}$$

где $dV(H)$ — элемент p-мерного объема на многообразии M, называется интегралом от функции f на компакте $K \subset M$ и обозначается

$$\int\limits_K f(x)\, dK. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\int\limits_K f(x)\, dK \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_D \cdots \int f(\boldsymbol{\Phi}(u)) \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u_p}(u)\right)}\, du_1 \ldots du_p. \tag{3}$$

При $p = 1$ интеграл (3) называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции f на гладкой кривой $\gamma = \boldsymbol{\Phi}(D)$, где $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, и обозначается

$$\int\limits_\gamma f(x)\, dl. \tag{4}$$

Поскольку $dl(t) = \sqrt{\langle \boldsymbol{\Phi}'(t), \boldsymbol{\Phi}'(t)\rangle}\, dt = \|\boldsymbol{\Phi}'(t)\|\, dt = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} \left(\frac{d\Phi_i}{dt}(t)\right)^2}\, dt$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(x)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f(\boldsymbol{\Phi}(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{d\Phi_i}{dt}(t)\right)^2}\, dt. \tag{5}$$

Если $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{6}$$

Если $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{7}$$

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой γ.

Если $p = 2$, то интеграл (3) называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции f на компакте K. Он не зависит от ориентации многообразия M.

При $p = 2$, $m = 3$ поверхностный интеграл первого рода обозначается

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS. \tag{8}$$

Если $S = \boldsymbol{\Phi}(D)$, $\boldsymbol{\Phi}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, то, согласно формуле (4), п.4.2, и формуле (3) настоящего пункта, имеем

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{9}$$

Если $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x, y),\ (x, y) \in D\}$, то

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, dx\, dy. \tag{10}$$

Теорема. *Интеграл* (3) *не зависит от выбора параметризации многообразия* M.

Поскольку интеграл на многообразии сводится к интегралу Римана, то он обладает свойствами интеграла Римана.

Если кривая $\gamma = \boldsymbol{\Phi}([a, b])$ кусочно-гладкая, то существует такое разбиение $\Pi = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$ сегмента $[a, b]$, что $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$, где $\gamma_i = \boldsymbol{\Phi}([t_i, t_{i+1}[)$ — гладкие кривые. Для этого случая полагаем

$$\int\limits_{\gamma} f(x)\, dl \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_i} f(x)\, dl. \tag{11}$$

Если поверхность $M = \boldsymbol{\Phi}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, не является гладкой, но существует такое представление $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, где $\mathcal{O}_i$ — области в $\mathbb{R}^2$ без общих внутренних точек, что каждое множество $M_i = \boldsymbol{\Phi}(\mathcal{O}_i)$ является поверхностью класса C^1, то множество M будем называть *кусочно-гладкой поверхностью*. Если $K \subset M$ и $f : K \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то полагаем

$$\int\limits_K f(x)\,dK \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{K_i} f(x)\,dK_i, \tag{12}$$

в предположении, что внутренность каждого компакта K_i является поверхностью класса C^1 и что все интегралы, входящие в сумму в правой части этой формулы, существуют.

Пусть вдоль гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ($\gamma \subset \mathbb{R}^2$) распределена масса с линейной плотностью $f(x, y, z)$ ($f(x, y)$), интегрируемой на γ. Тогда масса m этой кривой численно равна криволинейному интегралу первого рода

$$m = \int\limits_\gamma f(x, y, z)\,dl \quad \left(m = \int\limits_\gamma f(x, y)\,dl\right). \tag{13}$$

Если на гладкой или кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ распределена масса с поверхностной плотностью $f(x, y, z)$, интегрируемой на S, то интеграл (8) равен численному значению массы этой поверхности.

Статическими моментами M_x, M_y *и моментами инерции* I_x, I_y относительно осей координат Ox и Oy гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, вдоль которой распределена масса с линейной плотностью $p(x, y)$, интегрируемой на γ, называются интегралы

$$M_x = \int\limits_\gamma yp(x, y)\,dl, \quad M_y = \int\limits_\gamma xp(x, y)\,dl, \quad I_x = \int\limits_\gamma y^2 p(x, y)\,dl, \quad I_y = \int\limits_\gamma x^2 p(x, y)\,dl, \tag{14}$$

а координаты центра тяжести этой кривой вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m}\int\limits_\gamma xp(x, y)\,dl, \quad y_C = \frac{1}{m}\int\limits_\gamma yp(x, y)\,dl, \tag{15}$$

где $m = \int\limits_\gamma p(x, y)\,dl$ — масса кривой γ.

Если кривая γ однородна, то полагают $p(x, y) = 1$, а ее статические моменты и моменты инерции относительно осей координат называются *геометрическими*.

Статическими моментами M_{xOy}, M_{yOz}, M_{zOx} относительно координатных плоскостей гладкой или кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, по которой распределена масса с поверхностной плотностью $p(x, y, z)$, интегрируемой на S, называются интегралы

$$M_{xOy} = \iint\limits_S zp(x, y, z)\,dS, \quad M_{yOz} = \iint\limits_S xp(x, y, z)\,dS, \quad M_{zOx} = \iint\limits_S yp(x, y, z)\,dS, \tag{16}$$

а координаты центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ этой поверхности вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m}\iint\limits_S xp(x, y, z)\,dS, \quad y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_S yp(x, y, z)\,dS, \quad z_C = \frac{1}{m}\iint\limits_S zp(x, y, z)\,dS, \tag{17}$$

где $m = \iint\limits_S p(x, y, z)\,dS$ — масса поверхности S.

Пусть m_0 — масса, сосредоточенная в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, не лежащей на поверхности S. Тогда сила $\boldsymbol{F}$, с которой материальная поверхность S притягивает материальную точку с массой m_0, может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{F} = \varkappa\, m_0 \iint\limits_S p(x, y, z)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS, \tag{18}$$

где $\varkappa$ — постоянная тяготения,

$$\boldsymbol{r} = (x - x_0,\ y - y_0,\quad z - z_0),\ r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Моментом инерции I_z материальной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ относительно оси Oz называется интеграл

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2) p(x,\ y,\ z)\, dS. \tag{19}$$

Дадим определение криволинейных и поверхностных интегралов второго рода.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — ориентированное многообразие размерности $p < m$ класса C^1, заданное в виде $M = \boldsymbol{\Phi}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, где $\boldsymbol{\Phi}$ — отображение класса C^1 области $\mathcal{O}$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Если M — многообразие размерности $p = 1$ и $\gamma \in M$, где $\gamma = \boldsymbol{\Phi}([a,\ b])$ — гладкая кривая, то касательная ориентация этой кривой называется *направлением ее обхода*, а *положительным* считается обход, при котором вектор $\boldsymbol{\Phi}'(t)$ в каждой точке $t \in]a,\ b[$ является положительным в смысле ориентации в этой точке. Поскольку кривая γ принадлежит классу C^1, то

$$\|\boldsymbol{\Phi}'(t)\| \neq 0\ \forall\, t \in]a,\ b[,\ \text{где}\ \|\boldsymbol{\Phi}'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Phi_i'(t))^2}.$$

Пусть $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \gamma$, — вектор-функция с ограниченными компонентами F_i ($i = \overline{1,\ m}$), $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\Phi}'(t)}{\|\boldsymbol{\Phi}'(t)\|} = (\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \ldots,\ \cos\alpha_m)$ — единичный касательный вектор к кривой γ в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)$, $t \in]a,\ b[$, положительный в смысле ориентации этой кривой. Рассмотрим числовую функцию $\boldsymbol{x} \longmapsto \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\rangle$, $\boldsymbol{x} \in \gamma$, где $\langle \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{\tau}\rangle$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{\tau}$, и предположим, что существует криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\rangle\, dl = \int\limits_\gamma \big(F_1(\boldsymbol{x})\cos\alpha_1 + F_2(\boldsymbol{x})\cos\alpha_2 + \ldots + F_m(\boldsymbol{x})\cos\alpha_m\big)\, dl. \tag{20}$$

Определение 2. *Интеграл* (20) *называется общим криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции* $\boldsymbol{F}$ *на ориентированной кривой* γ *и обозначается*

$$\int\limits_\gamma F_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + \ldots + F_m(\boldsymbol{x})\, dx_m. \tag{21}$$

Исходя из определения криволинейного интеграла первого рода, получаем

$$\int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\rangle\, dl = \int\limits_a^b \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)),\ \frac{\boldsymbol{\Phi}'(t)}{\|\boldsymbol{\Phi}'(t)\|}\right\rangle \|\boldsymbol{\Phi}'(t)\|\, dt = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^m F_i(\boldsymbol{\Phi}(t))\, \Phi_i'(t)\, dt, \tag{22}$$

если положительному обходу кривой γ соответствует возрастание параметра t.

Таким образом, согласно определению, имеем

$$\int\limits_\gamma \sum_{i=1}^m F_i(\boldsymbol{x})\, dx_i = \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^m F_i(\boldsymbol{\Phi}(t))\Phi_i'(t)\right) dt. \tag{23}$$

Наряду с общим криволинейным интегралом второго рода рассматривают также криволинейные интегралы частного вида

$$\int\limits_\gamma F_i(\boldsymbol{x})\, dx_i. \tag{24}$$

Если кривая γ замкнута, то криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_\gamma \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\rangle\, dl \tag{25}$$

называется *циркуляцией вектора* $\boldsymbol{F}$ вдоль кривой γ.

Если $M\subset\mathbb{R}^m$ — многообразие размерности $p=m-1$, т.е. гиперповерхность класса C^1, трансверсально ориентированная выбором одного из двух непрерывных полей единичных нормалей $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in M$, то $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=\frac{N(x)}{\pm\|N(x)\|}$, где $N(x)$ — вектор нормали к гиперповерхности M в точке $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(u)$, $u\in\mathcal{O}$, $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{m-1}$,

$$\|N(\boldsymbol{x})\|=\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u_1}(u),\ \ldots,\ \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u_{m-1}}(u)\right)},\quad \Gamma\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u_1}(u),\ \ldots,\ \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u_{m-1}}(u)\right)$$

— определитель Грама от векторов $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u_j}(u)$, $j=\overline{1,\ m-1}$.

Предположим, что на компакте $K\subset M$ с краем ∂K, где $K=\boldsymbol{\Phi}(D)$, $D\subset\mathcal{O}$, $\overline{\mathcal{O}}\subset\mathbb{R}^{m-1}$, задана вектор-функция $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ с ограниченными компонентами $F_i(\boldsymbol{x})$, $i=\overline{1,\ m}$, и что существует поверхностный интеграл первого рода

$$\int_K \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\rangle\, dK. \tag{26}$$

Определение 3. *Интеграл* (26) *называется общим поверхностным интегралом второго рода на ориентированной гиперповерхности* K *и обозначается*

$$\int_K F_1(\boldsymbol{x})\,dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_m+F_2(\boldsymbol{x})\,dx_1\,dx_3\,\ldots\,dx_m+\ldots+F_m(\boldsymbol{x})\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{m-1}. \tag{27}$$

Если $K\subset\mathbb{R}^3$, $K=S=\boldsymbol{\Phi}(D)$, $D\subset\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\Phi}(u,\ v)=\big(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)\big)$, $(u,\ v)\in D$, $\boldsymbol{F}=(P,\ Q,\ R)$, то, согласно определению, имеем

$$\iint_S P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz+Q(x,\ y,\ z)\,dz\,dx+R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=\iint_S\langle \boldsymbol{F}(x,\ y,\ z),\ \boldsymbol{n}(x,\ y,\ z)\rangle\,dS=$$

$$=\pm\iint_D\Big(P(\boldsymbol{\Phi}(u,\ v))A+Q(\boldsymbol{\Phi}(u,\ v))B+R(\boldsymbol{\Phi}(u,\ v))C\Big)\,du\,dv, \tag{28}$$

поскольку $dS=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $A=\frac{\mathcal{D}(y,\ z)}{\mathcal{D}(u,\ v)}$, $B=\frac{\mathcal{D}(z,\ x)}{\mathcal{D}(u,\ v)}$, $C=\frac{\mathcal{D}(x,\ y)}{\mathcal{D}(u,\ v)}$, $\boldsymbol{n}(x,\ y,\ z)=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,\ B,\ C)$ (см. формулу (3), п.4.1, и формулу (5), п.4.2).

Если $S=\boldsymbol{\Phi}(D)$, где $\boldsymbol{\Phi}(x,\ y)=(x,\ y,\ z(x,\ y))$, $(x,\ y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, то формула (28) принимает вид

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=$$

$$=\pm\iint_D\left(-\frac{\partial z}{\partial x}(x,\ y)P(x,\ y,\ z(x,\ y))-\frac{\partial z}{\partial y}(x,\ y)Q(x,\ y,\ z(x,\ y))+R(x,\ y,\ z(x,\ y))\right)dx\,dy, \tag{29}$$

поскольку в рассматриваемом случае имеем

$$A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{\partial z}{\partial x},\quad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial z}{\partial y},\quad C=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Криволинейный интеграл второго рода имеет физический смысл работы силового векторного поля $\boldsymbol{F}$, а поверхностный интеграл второго рода — потока векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхность S.

Заметим, что криволинейные и поверхностные интегралы второго рода зависят от ориентации кривой γ и поверхности S: при изменении направления обхода кривой γ и изменении трансверсальной ориентации поверхности S скалярные произведения $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle$, $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}\rangle$ меняют знаки на противоположные.

4.4. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования.

Если дифференциальная форма $\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u, т.е. в некоторой области, содержащей кривую $\gamma = \boldsymbol{AB}$, выполняется равенство $P\,dx + Q\,dy = du$, то интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = u(\boldsymbol{B}) - u(\boldsymbol{A}) \tag{1}$$

не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего точку $\boldsymbol{A}$ с точкой $\boldsymbol{B}$.

Если функции P и Q определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, в которой выполняется равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2}$$

то дифференциальная форма $\omega = P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u и криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{3}$$

не зависит от выбора пути интегрирования из точки $\boldsymbol{A}$ в точку $\boldsymbol{B}$, лежащего в D. Равенство (2) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла (3) от пути интегрирования, лежащего в односвязной области D.

Для того чтобы дифференциальная форма

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

была полным дифференциалом некоторой функции w в замкнутой односвязной области $K \subset \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы в K выполнялись условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{4}$$

В этом случае интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{5}$$

не зависит от выбора пути интегрирования, если кривая $\gamma = \boldsymbol{AB}$ лежит в K.

Если в односвязных замкнутых областях $D \subset \mathbb{R}^2$ и $K \subset \mathbb{R}^3$ выполняются условия (2) и (4), то

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du, \quad P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = dw,$$

а функции u и w можно найти по формулам

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt + C, \tag{6}$$

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\, dt + C, \tag{7}$$

где (x_0, y_0) и (x_0, y_0, z_0) — фиксированные точки областей D и K, C — произвольная постоянная.

Вычислить следующие криволинейные интегралы первого рода:

123. $I = \int\limits_{\gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\, dl$, где γ — дуга астроиды, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

◀ Параметрические уравнения астроиды имеют вид

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

поэтому, согласно формуле (7), п.4.3, имеем

$$I = 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t)|\sin t \cos t|\, dt,$$

так как

$$x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t), \quad dl = \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2}\, dt = 3a|\sin t \cos t|\, dt.$$

Поскольку подынтегральная функция является $\frac{\pi}{2}$–периодической, то

$$I = 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t\, dt = 2a^{\frac{7}{3}}(\cos^6 t - \sin^6 t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 4a^{\frac{7}{3}}. \ ▶$$

124. $I = \int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = ax\}$, $a > 0$.

◀ Перейдя к полярным координатам, получим уравнение окружности γ в виде $\rho = a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Взяв в качестве параметра полярный угол φ, найдем параметрические уравнения окружности γ:

$$x = a\cos^2\varphi, \quad y = a\cos\varphi \sin\varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

На окружности γ имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = a\cos\varphi$. Поскольку $dl = a\, d\varphi$, то, согласно формуле (7), п.4.3, получим

$$I = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 2a^2. \ ▶$$

125. $I = \int\limits_{\gamma} x^2\, dl$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и плоскости, заданной уравнением $x + y + z = 0$.

◀ Плоскость проходит через начало координат и пересекается со сферой S по окружности радиуса a, длина которой равна $2\pi a$. Производя циклические перестановки, легко убедиться в справедливости равенств

$$\int_{\gamma} x^2\, dl = \int_{\gamma} y^2\, dl = \int_{\gamma} z^2\, dl,$$

из которых получаем интеграл I в виде

$$I = \frac{1}{3}\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2)\, dl.$$

На окружности γ выполнено равенство $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, в силу которого имеем $I = \frac{2}{3}\pi a^3$, так как

$$\int_{\gamma} dl = 2\pi a. \blacktriangleright$$

126. $I = \int\limits_{\gamma} z\, dl$, где γ — кривая, полученная в результате пересечения поверхностей, заданных уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$, пробегаемая от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (a, a, a\sqrt{2})$.

◀ В качестве параметра выберем переменную x. Тогда параметрические уравнения кривой γ примут вид

$$x = x, \quad y = \sqrt{ax}, \quad z = \sqrt{x^2 + ax} \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Поскольку

$$dz = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax}}\, dx, \quad dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\, dx, \quad dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx,$$

то, применив формулу (6), п.4.3, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}a^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2} - \frac{17}{32}a^2 \ln\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}} + \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\right)\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right). \blacktriangleright$$

Найти длины пространственных кривых (параметры считать положительными), заданных уравнениями:

127. $(x - y)^2 = a(x + y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (x_0, y_0, z_0)$.

◀ Параметризуем кривую, полагая $x + y = t(x - y)$. Тогда из уравнений кривой получаем $x - y = at$, $x + y = at^2$, $\frac{9}{8}z^2 = a^2 t^3$ $(t \geqslant 0)$, откуда

$$x = \frac{a}{2}(t^2 + t), \quad y = \frac{a}{2}(t^2 - t), \quad |z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}at^{\frac{3}{2}}.$$

При этом точке O соответствует значение $t = 0$, точке A — значение $t_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{2}{3}} z_0^{\frac{2}{3}}$. Обозначая через L искомую длину кривой, получим

$$L = \int_0^{t_0} \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \sqrt{2}a\int_0^{t_0} \left(t + \frac{1}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}(t^2 + t)\Big|_0^{t_0} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right). \blacktriangleright$$

128. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{c}$ от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (x_0, y_0, z_0)$.

◀ Параметризуем кривую, взяв в качестве параметра полярный угол φ. Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получаем $\rho^2 = cz$, $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{z}{c}$, откуда $z = c\varphi$, $\rho^2 = c^2\varphi$. Параметрические уравнения кривой принимают вид

$$x = c\sqrt{\varphi}\cos\varphi,\ y = c\sqrt{\varphi}\sin\varphi,\ z = c\varphi\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{z_0}{c}\right).$$

Вычисляя дифференциал кривой $dl = c\left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\right)d\varphi$ и интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до $\frac{z_0}{c}$, находим

$$L = \sqrt{cz_0}\left(\frac{2z_0}{3c} + 1\right). ▶$$

129. Найти массу m дуги параболы $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right\}$, если ее линейная плотность $p(x, y)$ в текущей точке (x, y) равна $|y|$.

◀ Вычислим дифференциал dl по формуле $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx$. Принимая во внимание равенство $p(x, y) = |y| = \sqrt{2px}$ и симметрию точек параболы относительно оси Ox, находим

$$m = \int\limits_\gamma \rho(x, y)dl = 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx = 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px + p^2}\,dx = \frac{2}{3p}(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2} - 1). ▶$$

130. Найти массу m кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, заданной уравнениями $x = at$, $y = \frac{at^2}{2}$, $z = \frac{at^3}{3}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, линейная плотность которой меняется по формуле $p(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

◀ Согласно формуле (13), п.4.3, имеем

$$m = \int\limits_\gamma p(x, y, z)\,dl = \int\limits_0^1 p\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Поскольку $p\big(x(t), y(t), z(t)\big) = t$, $dl = a\sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt$, то

$$m = a\int\limits_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = \frac{a}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{4}\left(\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + t^2 + t^4} + \frac{3}{4}\ln\left(t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + t^2 + t^4}\right)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{a}{8}\left((3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right). ▶$$

131. Найти координаты центра тяжести однородной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, заданной уравнением $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от точки $\boldsymbol{A} = (0, a)$ до точки $\boldsymbol{B} = (b, h)$ $(a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

◀ Воспользуемся формулами (15), п.4.3. Поскольку кривая γ однородна, то в формулах (15), п.4.3, следует взять $p(x, y) = 1$. Имеем

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a},\ dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx,$$

$$m = \int\limits_0^b \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{b}{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1} = \sqrt{h^2 - a^2},$$

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{\gamma} x\,dl = \frac{1}{m}\int\limits_0^b x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{m}\left(ax\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a^2\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^b = \frac{a}{m}\left(b\operatorname{sh}\frac{b}{a} - a\operatorname{ch}\frac{b}{a} + a\right) =$$

$$= \frac{a}{m}\left(b\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a} - 1} - h + a\right) = \frac{a}{m}\left(\frac{b}{a}\sqrt{h^2 - a^2} - h + a\right) = b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}},$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{\gamma} y\,dl = \frac{1}{m}\int\limits_0^b y(x)\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = \frac{a}{m}\int\limits_0^b \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{a}{2m}\int\limits_0^b\left(1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{a}{2m}\left(x + \frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right)\Big|_0^b = \frac{a}{2m}\left(b + a\operatorname{sh}\frac{b}{a}\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right) = \frac{a}{2m}\left(b + \frac{h\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right) = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}. \ \blacktriangleright$$

132. Найти координаты центра тяжести контура однородного сферического треугольника

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}.$$

◀ Сферический треугольник однороден, в силу чего имеем

$$x_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\gamma} x\,dl, \quad y_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\gamma} y\,dl, \quad z_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\gamma} z\,dl,$$

где γ — контур треугольника, $m = \frac{3}{2}\pi a$ — его длина.

В плоскости yOz выполняется тождество $x \equiv 0$, поэтому

$$x_C = \frac{1}{m}\left(\int\limits_{\gamma_1} x\,dl + \int\limits_{\gamma_2} x\,dl\right),$$

где γ_1 — часть кривой γ, лежащая в плоскости xOy, γ_2 — та ее часть, которая лежит в плоскости xOz. Кривые γ_1 и γ_2 можно задать соответственно параметрическими уравнениями

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi \quad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x = a\cos\psi, \quad y = a\sin\psi \quad \left(0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

причем $dl = a\,d\varphi$ на γ_1 и $dl = a\,d\psi$ на γ_2. Поэтому

6 Зак. 117

$$\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\right) = \frac{2a^2}{m} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Аналогично, $y_C = z_C = \frac{4a}{3\pi}$. ▶

133. Найти статические моменты дуги γ однородной астроиды, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, относительно осей координат.

◀ Воспользуемся формулами (14), п.4.3, полагая в них $p(x, y) = 1$. Записав параметрические уравнения астроиды в виде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ и принимая во внимание решение примера 123, имеем

$$M_x = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt = \frac{3}{5}a^2, \quad M_y = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t\,dt = \frac{3}{5}a^2. \ \blacktriangleright$$

134. Найти момент инерции однородной окружности $\gamma = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ относительно ее диаметра.

◀ Момент инерции однородной окружности γ совпадает с I_x или I_y (см. формулы (14), п.4.3), если система координат xOy выбрана так, что диаметр окружности γ является отрезком оси Ox, а начало координат совпадает с центром окружности. Принимая во внимание однородность окружности γ, имеем

$$I = I_x = \int\limits_{\gamma} y^2\,dl = a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi = \pi a^3$$

(при вычислении интеграла воспользовались параметрическими уравнениями окружности $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, и равенством $dl = a\,d\varphi$). ▶

135. Найти полярный момент инерции

$$I_0 = \int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2)\,dl$$

относительно точки $O = (0,\ 0)$ однородного контура квадрата

$$\gamma = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,\ |y|\} = a\}.$$

◀ Контур квадрата γ образован отрезками прямых, заданных уравнениями $y = \pm a$, $x = \pm a$. Если $x = \pm a$, то $x^2 + y^2 = a^2 + y^2$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $dl = dy$. Если же $y = \pm a$, то $x^2 + y^2 = x^2 + a^2$, $-a \leqslant x \leqslant a$, $dl = dx$.

Заменив криволинейный интеграл I_0 соответствующим интегралом Римана, получим

$$I_0 = 2\left(\int\limits_{-a}^{a} (a^2 + y^2)\,dy + \int\limits_{-a}^{a} (a^2 + x^2)\,dx\right) = \frac{32}{3}a^3. \ ▶$$

136. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка однородной винтовой линии

$$\gamma = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{ht}{2\pi},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\right\}.$$

◀ Обозначив через r_x, r_y, r_z расстояния от точки $M = (x,\ y,\ z)$, лежащей на однородной кривой γ, до соответствующих осей координат, можем написать формулы для вычисления моментов инерции:

$$I_x = \int\limits_{\gamma} r_x^2\,dl, \quad I_y = \int\limits_{\gamma} r_y^2\,dl, \quad I_z = \int\limits_{\gamma} r_z^2\,dl.$$

Воспользуемся очевидными равенствами $r_x^2 = y^2 + z^2$, $r_y^2 = x^2 + z^2$, $r_z^2 = x^2 + y^2$; следовательно, $r_x^2 = a^2\sin^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}$, $r_y^2 = a^2\cos^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}$, $r_z^2 = a^2$. Поскольку

$$dl = \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2}}{2\pi}\,dt,$$

то

$$I_x = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right) dt = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2},$$

$$I_y = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(a^2\cos^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right) dt = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2}.$$

$$I_z = \frac{a^2\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt = a^2\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}. \blacktriangleright$$

137. Вычислить логарифмический потенциал простого слоя

$$u(x, y) = \oint\limits_\gamma \varkappa \ln\frac{1}{r}\,dl,$$

где $\varkappa = \mathrm{const}$, $r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ и контур γ является окружностью, заданной уравнением $\xi^2+\eta^2 = R^2$.

◀ Перейдем к новой системе координат $\xi' O\eta'$, выбрав последнюю так, чтобы ее начало совпадало с началом координат системы $\xi O\eta$ и чтобы точка (x, y) находилась на оси $O\xi'$. Тогда получим

$$u(x, y) = \oint\limits_{\gamma'} \varkappa \ln\frac{1}{r'}\,dl',$$

где $\gamma' = \{(\xi', \eta') \in \mathbb{R}^2 : \xi'^2 + \eta'^2 = R^2\}$, $r' = \sqrt{(\xi'-\rho)^2+\eta'^2}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Параметрические уравнения окружности имеют вид $\xi' = R\cos\varphi$, $\eta' = R\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а $dl = R\,d\varphi$. Следовательно,

$$u(x, y) = -\frac{R\varkappa}{2}\int\limits_0^{2\pi} \ln(R^2-2R\rho\cos\varphi+\rho^2)\,d\varphi = -2\pi R\varkappa\ln R - \frac{R\varkappa}{2}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left(1-\frac{2\rho}{R}\cos\varphi+\frac{\rho^2}{R^2}\right)d\varphi.$$

Обозначив $\frac{\rho}{R} = \alpha$, вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{2\pi} \ln(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)\,d\varphi.$$

Дифференцируя по параметру α, получаем

$$I'(\alpha) = 2\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\alpha-\cos\varphi)\,d\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2z\bar z-(z+\bar z)}{(1-z)(1-\bar z)}\,d\varphi,$$

где $z = \alpha e^{i\varphi}$, $\bar z = \alpha e^{-i\varphi}$. Если $\alpha < 1$, то

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{z}{1-z}+\frac{\bar z}{1-\bar z}\right)d\varphi = -\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}(z+z^2+\ldots+z^n+\ldots+\bar z+\bar z^2+\ldots+\bar z^n+\ldots)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}(\alpha\cos\varphi+\alpha^2\cos 2\varphi+\ldots+\alpha^n\cos n\varphi+\ldots)\,d\varphi = 0.$$

Почленное интегрирование ряда возможно, поскольку он сходится равномерно. Таким образом, $I(\alpha) = C$, $C = I(0) = 0$, в силу чего имеем $u(x, y) = -2\pi R\varkappa\ln R = 2\pi R\varkappa\ln\frac{1}{R}$, если $\rho < R$. Если $\rho > R$, то $\alpha > 1$, и при этом получим

$$I'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{\bar z}}\right)d\varphi = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{z}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots+\frac{1}{\bar z}+\ldots+\frac{1}{\bar z^n}+\ldots\right)d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\cos\varphi}{\alpha} + \frac{\cos 2\varphi}{\alpha^2} + \ldots + \frac{\cos n\varphi}{\alpha^n} + \ldots\right) d\varphi = \frac{4\pi}{\alpha},$$

$$I(\alpha) = 4\pi \ln \alpha + C, \quad C = I(1) = 0, \quad I(\alpha) = 4\pi \ln \alpha,$$

$$u(x, y) = -2\pi R\varkappa \ln R - 2\pi R\varkappa \ln \frac{\rho}{R} = 2\pi R\varkappa \ln \frac{1}{\rho}. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

138. $I = \int\limits_\gamma (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2,\ |x| \leqslant 1\}$.

◀ Воспользуемся формулой (7), п.4.3, где роль параметра t играет переменная x. Подставляя в подынтегральное выражение $y = x^2$ и $dy = 2x\, dx$, получаем интеграл Римана

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)\, dx = -\frac{14}{15}. \blacktriangleright$$

139. $I = \int\limits_\gamma (2a - y)\, dx + x\, dy$, где γ — арка циклоиды, заданной уравнениями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

◀ На кривой γ выполняется равенство

$$(2a - y)\, dx + x\, dy = \big(2a - a(1 - \cos t)\big)\, d\big(a(t - \sin t)\big) + a(t - \sin t)\, d\big(a(1 - \cos t)\big) = a^2 t \sin t\, dt.$$

Применив формулу (23), п.4.3, получим

$$I = a^2 \int\limits_0^{2\pi} t \sin t\, dt = a^2\ \left(t \cos t\big|_{2\pi}^{0} + \sin t\,\big|_0^{2\pi}\right) = -2\pi a^2. \blacktriangleright$$

140. $\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где $ABCDA$ — контур квадрата с вершинами $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$, $D = (0, -1)$.

◀ Из свойства аддитивности криволинейного интеграла следует равенство

$$I = \int\limits_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}.$$

На отрезках AB и CD выполняются соответственно равенства $x + y = 1$ и $x + y = -1$, $dx + dy = 0$, откуда следует, что криволинейные интегралы на этих отрезках равны нулю. На отрезках BC и DA соответственно имеем $y - x = 1$ и $y - x = -1$, $dy = dx$, $|x| + |y| = 1$. Если $(x, y) \in BC$, то x убывает от 0 до -1; если $(x, y) \in DA$, то x возрастает от 0 до 1. Следовательно,

$$I = 2 \int\limits_0^{-1} dx + 2 \int\limits_0^{1} dx = -2 + 2 = 0. \blacktriangleright$$

141. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива оценка

$$\left| \int\limits_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \right| \leqslant LM,$$

где L — длина кривой γ и $M = \max\limits_{(x,y)\in\gamma} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$.

◄ Без ограничения общности можно считать кривую γ гладкой (если γ — кусочно-гладкая кривая, то интеграл можно представить в виде суммы интегралов по гладким кривым). Согласно определению криволинейного интеграла второго рода, имеем

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\gamma \langle F, \tau\rangle\,dl,$$

где $F = (P, Q)$, τ — единичный касательный вектор к кривой γ. Из оценки $|\langle F, \tau\rangle| \leqslant |F| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ получаем неравенство

$$\left|\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy\right| \leqslant \int\limits_\gamma \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}\,dl \leqslant \max_{(x,y)\in\gamma} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} \int\limits_\gamma dl = LM. \;►$$

142. Оценить интеграл $I_R = \oint\limits_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

Доказать, что $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.

◄ Для оценки интеграла воспользуемся неравенством, доказанным в предыдущем примере. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

$$\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Следовательно, $I_R \leqslant 2\pi R \cdot \max\limits_{(x,y)\in\gamma} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}$.

Приняв во внимание параметрические уравнения окружности $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, получим оценку

$$\max_{(x,y)\in\gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \max_{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi} \frac{1}{R^3(1 + \sin\varphi\cos\varphi)^2} = \frac{4}{R^3},$$

которая следует из неравенства

$$\frac{1}{(1 + \sin\varphi\cos\varphi)^2} = \frac{4}{(2 + \sin 2\varphi)^2} \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Окончательно получаем оценку $|I_R| \leqslant \frac{8\pi}{R^2}$, из которой следует предельное соотношение $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$. ►

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

143. $I = \int\limits_\gamma (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и плоскости S_1, заданной уравнением $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, пробегаемая в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x.

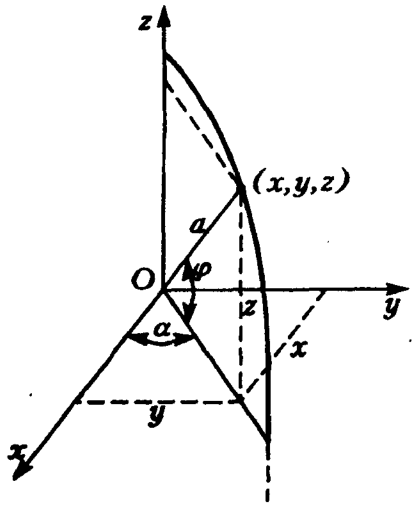

Рис. 15

◄ Окружность γ с центром в начале координат лежит в плоскости S_1, и ее радиус равен a. Пусть φ — угол между радиусом окружности и прямой, заданной уравнениями $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $z =$

0 (рис. 15). Тогда можем параметризовать окружность γ следующим образом:

$$x = a\cos\alpha\cos\varphi,\ y = a\sin\alpha\cos\varphi,\ z = a\sin\varphi$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Приводя криволинейный интеграл к интегралу Римана, получим

$$I = a^2\int_0^{2\pi}(\cos\alpha - \sin\alpha)\,d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). ▶$$

144. $I = \int\limits_\gamma y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, где γ — часть кривой Вивиани $\gamma = S_1\cap S_2$, $S_1 = \{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2\}$, $S_2 = \{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = ax\}$, $z\geqslant 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox.

◀ Переходя к полярным координатам, получим уравнение кривой Вивиани в виде

$$\rho = a\cos\varphi,\quad z = \sqrt{a^2-\rho^2}\quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Принимая во внимание это уравнение и выбирая в качестве параметра полярный угол φ, имеем

$$x = a\cos^2\varphi,\ y = a\sin\varphi\cos\varphi,\ z = a|\sin\varphi|\ \left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Для вычисления криволинейного интеграла I приведем его к интегралу Римана, вычислив значение подынтегрального выражения в точках параметризованной кривой γ. Получим

$$dx = -2a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,\quad dy = a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)d\varphi,\quad dz = \operatorname{sgn}\varphi(a\cos\varphi)d\varphi,\quad \varphi\neq 0,$$
$$y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz = a^3(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi + \operatorname{sgn}\varphi\cos^5\varphi)\,d\varphi,\quad \varphi\neq 0.$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \operatorname{sgn}\varphi\cos^5\varphi)\,d\varphi = 0,$$

находим

$$I = a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi)\,d\varphi =$$
$$= a^3\left(B\left(\frac12,\frac32\right) - 2B\left(\frac12,\frac52\right)\right) = a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi a^3}{4}. ▶$$

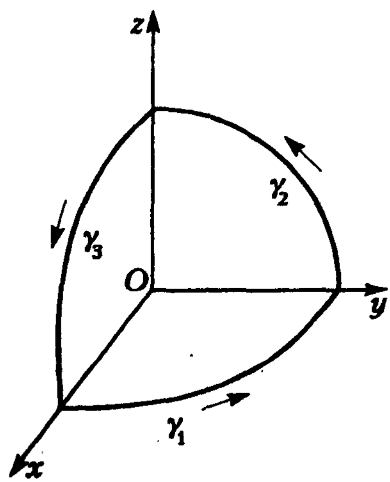

Рис. 16

145. $I = \int\limits_\gamma (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$,

где γ — контур, который ограничивает часть сферы $S = \{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

◀ Представим интеграл на ориентированной кривой γ в виде суммы интегралов по ориентированным кривым γ_j, $j = 1,\ 2,\ 3$, лежащим в координатных плоскостях (рис. 16). Каждая кривая γ_j представляет собой четверть окружности радиуса 1 с центром в начале координат. В плоскости xOy выполняются равенства $z = 0$, $dz = 0$, в силу чего на кривой γ подынтегральное выражение ω принимает вид $\omega = y^2\,dx - x^2\,dy$. Записав параметрические уравнения кривой γ_1 в виде

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi \quad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

получим

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_1} y^2\,dx - x^2\,dy = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)\,d\varphi = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Вполне очевидно, $\int\limits_{\gamma_2} \omega = \int\limits_{\gamma_3} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega = -\frac{4}{3}$. Следовательно, $I = 3\int\limits_{\gamma_1} \omega = -4$. ►

При решении примеров 146—151 будем пользоваться независимостью криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования, соединяющего две точки, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции в односвязной области D, содержащей кривую, по которой вычисляется интеграл. Если известна такая функция u, что $du = P\,dx + Q\,dy$, то можем сразу написать

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1 y_1) - u(x_0, y_0).$$

Если вид функции u нам неизвестен и в данной односвязной области D выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то, пользуясь свойством независимости криволинейного интеграла от выбора пути интегрирования из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_1), лежащего в D, будем брать в качестве пути ломаную, состоящую из отрезков прямых, параллельных координатным осям и не пересекающих границу области D. Тогда, в силу того что $dy = 0$, если $y = y_0$, и $dx = 0$, если $x = x_1$, получим формулу

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\,dy. \qquad \text{(A)}$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

146. $I = \int\limits_{(0, 1)}^{(3, -4)} x\,dx + y\,dy.$

◄ Поскольку $x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}\,d(x^2 + y^2)$, то

$$I = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\Big|_{(0, 1)}^{(3, -4)} = 12. ►$$

147. $I = \int\limits_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x - y)(dx - dy).$

◄ Из равенства $(x - y)(dx - dy) = (x - y)\,d(x - y) = \frac{1}{2}\,d(x - y)^2$ получаем

$$I = \frac{(x - y)^2}{2}\Big|_{(1, -1)}^{(1, 1)} = -2. ►$$

148. $\int\limits_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

◀ Здесь $P(x, y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x, y) = -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$. Следовательно, в любой односвязной области, не содержащей точек оси Oy, подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции. Применив формулу (**A**), получим

$$I = \int\limits_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int\limits_1^2 dy = -\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

149. $I = \int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через начало координат.

◀ Поскольку $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, то

$$I = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9. \blacktriangleright$$

150. $I = \int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих биссектрису первого координатного угла.

◀ Здесь $P(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$, и мы убеждаемся в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции во всякой односвязной области, содержащей точки $(0, -1)$, $(1, 0)$ и не содержащей точек прямой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Применив формулу (**A**), получим

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int\limits_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{x+1}\Big|_1^0 + \frac{1}{1-y}\Big|_{-1}^0 = 1. \blacktriangleright$$

151. $I = \int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

◀ В силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

можем применить формулу (**A**), в которой интеграл по переменной y равен нулю (так как путь интегрирования параллелен оси Ox):

$$I = \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right) dx = \left(x + \pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Big|_1^2 = 1 + \pi. \blacktriangleright$$

В примерах 152—156 будем находить первообразную функцию по известному ее дифференциалу du, пользуясь при этом формулами (6) и (7), п.4.4, или видоизменив их. Например, иногда вместо формулы (6) бывает полезна формула

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt + C, \qquad \textbf{(B)}$$

если путь из точки (x_0, y_0) в точку (x, y) выбран в виде ломаной, состоящей из отрезка, параллельного оси Oy и отрезка, параллельного оси Ox (рис. 17).

Найти первообразную функцию u, если:

152. $du = (x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy$.

◀ Применим формулу (6), п.4.4, взяв $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Получим

$$u(x,\,y) = \int_0^x t^2\,dt + \int_0^y (x^2-2xt-t^2)\,dt + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \ ▶$$

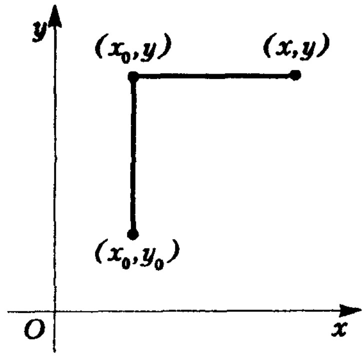

Рис. 17

153. $du = \dfrac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx + (x^2-2xy+y^2)\,dy}{(x+y)^3}$.

◀ Применим формулу (B) считая, что $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ — любое фиксированное. Приняв во внимание равенства

$$P(x,\,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3}, \quad Q(x,\,y) = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3},$$

получим

$$u(x,\,y) = \int_0^x \left(\frac{1}{t+y} + \frac{4y^2}{(t+y)^3}\right) dt + \int_{y_0}^y \frac{dt}{t} + C =$$

$$= \ln|x+y| - \ln|y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + 2 + \ln|y| - \ln|y_0| + C = \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1, \quad C_1 = \text{const}. \ ▶$$

154. $du = e^x\left(e^y(x-y+2)+y\right)\,dx + e^x\left(e^y(x-y)+1\right)\,dy$.

◀ Применим формулу (6), п.4.4, полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Получим

$$u(x,\,y) = \int_0^x e^t(t+2)\,dt + e^x\int_0^y (e^t(x-t)+1)\,dt + C = (t+1)e^t\Big|_0^x + e^x\left(e^t(x-t+1)+t\right)\Big|_0^y + C =$$

$$= e^{x+y}(x-y+1) + e^x y + C_1, \quad C_1 = C-1. \ ▶$$

Найти первообразную функцию w, если:

155. $dw = (x^2-2yz)\,dx + (y^2-2xz)\,dy + (z^2-2xy)\,dz$.

◀ Записав dw в виде

$$dw = x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz - 2(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) = d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz\right),$$

имеем

$$w(x,\,y,\,z) = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - 2xyz + C, \quad C = \text{const}. \ ▶$$

156. $dw = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}\,dz$.

◀ Выражение w является полным дифференциалом в любой области, не содержащей начала координат и точек плоскостей xOy, xOz. Применив формулу (7), п.4.4, получим

$$w(x,\,y,\,z) = \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right)dt + \int_{y_0}^y \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{t^2}\right)dt - \int_{z_0}^z \frac{xy}{t^2}\,dt + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка, $C = \text{const}$. Интегрируя, находим

$$w(x, y, z) = x\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) - x_0\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) + \frac{xy}{z_0} - \frac{x}{y} - \frac{xy_0}{z_0} + \frac{x}{y_0} + \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} + C.$$

Взяв, например, $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, получим

$$w(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C_1, \quad C_1 = \text{const}. \blacktriangleright$$

157. Найти работу, производимую силой тяжести, когда материальная точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2). Ось Oz направлена вертикально вверх.

◀ Сила тяжести есть вектор-функция

$$\boldsymbol{F} = (P, Q, R) = (0, 0, -mg),$$

где g — ускорение свободного падения, а выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -mg\,dz$ является полным дифференциалом функции $u = -mgz$. Поэтому работа силы $\boldsymbol{F}$ по перемещению материальной точки из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) не зависит от формы траектории и равна величине

$$A = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) = -mg(z_2 - z_1). \blacktriangleright$$

158. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$.

◀ Пусть $M = (x, y)$ — произвольная точка на кривой γ_1, положительной четверти эллипса γ, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от этой точки до начала координат. Тогда упругая сила $\boldsymbol{F}$, направленная из точки M в начало координат, имеет вид $\boldsymbol{F}(x, y) = \mu r \boldsymbol{e}(M, O)$, где μ — некоторая постоянная, $\boldsymbol{e}(M, O)$ — орт, направленный из точки M в начало координат. Поскольку $\boldsymbol{e}(M, O) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r} = (x, y)$ — радиус-вектор точки M, то $\boldsymbol{F}(x, y) = -\mu\boldsymbol{r} = (-\mu x, -\mu y)$.

Значение работы A найдем, вычислив интеграл

$$A = -\mu \int\limits_{\gamma_1} x\,dx + y\,dy = -\frac{\mu}{2} \int\limits_{\gamma_1} d(x^2 + y^2).$$

Как и в предыдущей задаче, работа A не зависит от формы траектории точки и равна разности значений потенциала $u(x, y) = -\frac{\mu}{2}(x^2 + y^2)$ силовой функции $\boldsymbol{F}$ в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$:

$$A = -\frac{\mu}{2}(b^2 - a^2). \blacktriangleright$$

159. Найти работу силы тяготения $|\boldsymbol{F}| = \frac{k}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается из точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

◀ Сила тяготения $\boldsymbol{F}$ является центральной силой, поскольку ее линия действия проходит через начало координат. Поэтому можем ее представить в виде

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{r^2}\boldsymbol{e}(M, O) = -\frac{k}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}(O, M)}{r} = -k\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right),$$

где $M = (x, y, z)$ — произвольная точка, $r(O, M) = (x, y, z)$ — радиус-вектор этой точки. Значение работы A получим с помощью интеграла, взятого вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2:

$$A = -k \int_{M_1}^{M_2} \frac{x}{r^3}\,dx + \frac{y}{r^3}\,dy + \frac{z}{r^3}\,dz = k \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{k}{r}\Big|_{M_1}^{M_2} = k\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, $i = 1, 2$. ►

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

160. $I = \iint\limits_S (x + y + z)\,dS$, где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqslant 0\}$.

◄ Интегрирование производится по верхней полусфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Так как в точках множества S выполняются равенства

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}, \quad z > 0,$$

то

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Применив формулу (10), п.4.3, получим

$$I = a \iint\limits_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1\right) dx\,dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам имеем

$$I = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a-0} \left(\frac{\rho(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + 1\right) \rho\,d\rho = \pi a^3,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} (\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi \int_0^{a-0} \frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 0. \ ►$$

161. $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dS$, где S — граница тела $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\right\}$.

◄ Интегрирование производится по боковой поверхности и основанию конуса T, в силу чего можем записать

$$I = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2)\,dS + \iint\limits_{S_2} (x^2 + y^2)\,dS,$$

где S_1 — боковая поверхность конуса, S_2 — его основание. На множестве S_2 имеем $dS = dx\,dy$, поэтому

$$\iint\limits_{S_2} (x^2 + y^2)\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

На боковой поверхности конуса $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2)\,dS = \sqrt{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получаем $I = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. ►

162. $I = \iint\limits_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида с полуосями a, b, c, а h — расстояние от центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу $d\sigma$ поверхности эллипсоида.

◄ Расстояние h определяется формулой

$$h = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали n к поверхности эллипсоида в точке $(x,\ y,\ z)$. Запишем параметрические уравнения поверхности эллипсоида в виде

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Применим формулу (9), п.4.3, полагая там $u = \theta$, $v = \varphi$. Исходя из симметрии, можем написать равенство

$$I = 8\iint\limits_{S_1} \frac{dS}{h},$$

где S_1 — восьмая часть поверхности эллипсоида, лежащая в первом октанте. Если $(x,\ y,\ z) \in S_1$, то $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вычислим направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали n в точке $(x,\ y,\ z) \in S_1 \setminus \partial S_1$, где ∂S_1 — край поверхности S_1. Для этого найдем

$$A = \frac{\mathcal{D}(y,\ z)}{\mathcal{D}(\theta,\ \varphi)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z,\ x)}{\mathcal{D}(\theta,\ \varphi)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x,\ y)}{\mathcal{D}(\theta,\ \varphi)}.$$

Имеем

$$A = bc\sin^2\theta\cos\varphi, \quad B = ac\sin^2\theta\sin\varphi, \quad C = ab\sin\theta\cos\theta.$$

Так как $C > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и указанный вектор единичной нормали n в каждой точке множества $S_1 \setminus \partial S_1$ образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то $\cos\gamma > 0$, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Заменив поверхностный интеграл соответствующим ему двойным, получим, принимая во внимание, что $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\theta\,d\varphi$,

$$I = 8\iint\limits_{\Omega} \frac{A^2+B^2+C^2}{Ax(\theta,\ \varphi) + By(\theta,\ \varphi) + Cz(\theta,\ \varphi)}\,d\theta\,d\varphi,$$

где $\Omega = \left\{(\theta,\ \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Сделав элементарные преобразования, находим

$$Ax(\theta,\ \varphi) + By(\theta,\ \varphi) + Cz(\theta,\ \varphi) = abc\sin\theta,$$

$$A^2+B^2+C^2 = b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta =$$
$$= a^2b^2c^2\sin^2\theta\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right).$$

Окончательно имеем

$$I = 8abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)d\varphi =$$

$$= 8abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta + \frac{\pi}{2c^2}\cos^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta =$$

$$= 4\pi abc \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) B\left(\frac{1}{2}, 2 \right) + \frac{1}{c^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\theta \, d(\cos\theta) \right) = \frac{4}{3}\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). ►$$

163. $I = \iint\limits_S z \, dS$, где S — часть поверхности геликоида, заданного параметрическими уравнениями

$$x = u\cos v, \; y = u\sin v, \; z = v \quad (0 < u < a, \; 0 < v < 2\pi).$$

◄ Применим формулу (9), п.4.3. Для этого рассмотрим отображение $\Phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ и вычислим коэффициенты Гаусса

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$
$$G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$
$$F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0.$$

Таким образом, $EG - F^2 = 1 + u^2$ и по формуле (9), п.4.3, поверхностный интеграл I выражается через повторный:

$$I = \int\limits_0^a \sqrt{1+u^2}\, du \int\limits_0^{2\pi} v\, dv = 2\pi^2 \int\limits_0^a \sqrt{1+u^2}\, du =$$
$$= \pi^2 \left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right) \Big|_0^a = \pi^2 \left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \right). ►$$

164. $I = \iint\limits_S (xy + yz + zx)\, dS$, где S — часть конической поверхности $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\}$, вырезанная цилиндром $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2ax, \; z \in \mathbb{R}\}$.

◄ Поверхность S проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 \leqslant a^2\}$, а $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, поэтому, применив формулу (9), п.4.3, получим

$$I = \sqrt{2} \iint\limits_D \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \right) dx\, dy.$$

Перейдем в интеграле к полярным координатам ρ, φ. Тогда

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \; 0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\varphi \right\}$$

и после замены переменных найдем

$$I = \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^3 d\rho = 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos^5\varphi + \cos^4\varphi)\sin\varphi + \cos^5\varphi \right) d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\, d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 B\left(3, \frac{1}{2} \right) = 4\sqrt{2}a^4 \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4. ►$$

165. Доказать формулу Пуассона

$$I = \iint\limits_S f(ax + by + cz)\, dS = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du,$$

где S — поверхность сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

◀ Запишем подынтегральную функцию f в виде

$$f(ax + by + cz) = f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

и перейдем к новым переменным u, v, w, выбрав плоскость, заданную уравнением $ax + by + cz = 0$, в качестве плоскости переменных u, v, полагая $w = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. При таком выборе новой прямоугольной системы координат единичная сфера S перейдет в единичную сферу S' и при этом $dS' = dS$. Поэтому можем написать равенство

$$\iint\limits_S f(ax + by + cz)\, dS = \iint\limits_{S'} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, w\right) dS'.$$

Из уравнения $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ находим $u^2 + v^2 = 1 - w^2$. Полагая $\frac{u}{\sqrt{1-w^2}} = \cos\varphi$, $\frac{v}{\sqrt{1-w^2}} = \sin\varphi$, получим параметрические уравнения сферы S' в виде

$$u = \sqrt{1 - w^2}\cos\varphi, \quad v = \sqrt{1 - w^2}\sin\varphi, \quad w = w \quad (|w| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Таким образом, $S' = \Phi(D)$, где

$$\Phi(w, \varphi) = \left(\sqrt{1 - w^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1 - w^2}\sin\varphi,\ w\right), \quad D =]-1, 1[\times]0, 2\pi[.$$

Вычислим коэффициенты Гаусса

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\rangle = \frac{1}{1 - w^2}, \quad G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 1 - w^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

и найдем площадь dS' элемента поверхности S':

$$dS' = \sqrt{EG - F^2}\, dw\, d\varphi = dw\, d\varphi.$$

Заменяя поверхностный интеграл соответствующим двойным, получим

$$I = \iint\limits_{S'} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, w\right) dS' = \int\limits_{-1}^{1} dw \int\limits_{0}^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, w\right) d\varphi = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, w\right) dw. \ ▶$$

166. Найти массу параболической оболочки

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\},$$

плотность которой меняется по закону $p(x, y, z) = z$.

◀ Масса m данной поверхности вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_S z\, dS.$$

На поверхности S выполняется равенство $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, а сама поверхность проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. Принимая во внимание равенство

$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$, заменим поверхностный интеграл соответствующим ему двойным и перейдем в последнем к полярным координатам. Имеем

$$m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+\rho^2}\, d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+\rho^2}\, d\rho.$$

После замены переменной $1 + \rho^2 = t^2$, окончательно получим

$$m = \pi \int_1^{\sqrt{3}} t^2(t^2 - 1)\, dt = \pi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3} + 1). \blacktriangleright$$

167. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = a\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)\}$ относительно координатных плоскостей.

◀ Применим формулы (16), п.4.3. Полагая $p(x, y, z) = 1$, имеем

$$M_{xOy} = \iint_S z\, dS, \quad M_{yOz} = \iint_S x\, dS, \quad M_{zOx} = \iint_S y\, dS.$$

Принимая во внимание равенства $z|_S = a - x - y$, $(x, y) \in D$, $dS = \sqrt{3}\, dx\, dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a - x\}$, получим

$$M_{xOy} = \sqrt{3} \iint_D (a-x-y)\, dx\, dy = \sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a-x-y)\, dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^a (a-x)^2\, dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a-x)^3 \Bigg|_a^0 = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

Вполне очевидно, что $M_{yOz} = M_{zOx} = M_{xOy} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. ▶

168. Найти момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (z \geqslant 0)\}$ с поверхностной плотностью вещества p_0.

◀ Согласно формуле (19), п.4.3, имеем

$$I_z = p_0 \iint_S (x^2 + y^2)\, dS,$$

где $dS = \frac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Заменяя поверхностный интеграл двойным, получим

$$I_z = p_0 a \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

В двойном интеграле перейдем к полярным координатам ρ и φ и заменим полученный интеграл повторным. Имеем

$$I_z = p_0 a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi p_0 a \left(\rho^2 \sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_a^0 + 2 \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho \right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi p_0 a\, (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi p_0 a^4. \blacktriangleright$$

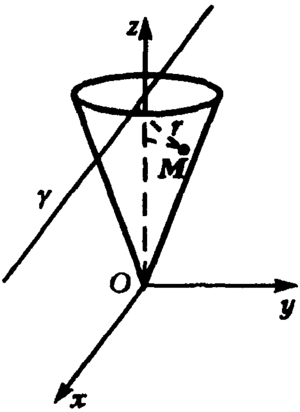

Рис. 18

169. Найти момент инерции однородной конической оболочки

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant b \right\}$$

с поверхностной плотностью p_0 относительно прямой γ, заданной в пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнениями $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$.

◀ Прямая γ параллельна оси Ox и лежит в плоскости xOz, отсекая на оси Oz отрезок длины b. Пусть точка $M = (x, y, z)$ принадлежит элементу $d\sigma$ поверхности S, площадь которого равна dS (рис. 18). Квадрат расстояния от точки M до прямой γ определяется по формуле $r^2 = x^2 + y^2 + (b-z)^2$, поэтому искомый момент инерции равен поверхностному интегралу

$$I_\gamma = p_0 \iint\limits_S (x^2 + y^2 + (b-z)^2)\, dS.$$

Принимая во внимание равенства

$$z\big|_S = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2}, \ (x, y) \in D, \ dS = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\, dx\, dy,$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$, получим

$$I_\gamma = \frac{p_0\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + b^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)^2 \right) dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам, окончательно найдем

$$I_\gamma = p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho \left(\rho^2 + b^2 \left(1 - \frac{\rho}{a} \right)^2 \right) d\rho =$$

$$= 2\pi p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int\limits_0^a \left(\rho^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) + b^2\rho - \frac{2b^2\rho^2}{a} \right) d\rho =$$

$$= 2\pi p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \left(\frac{a^4}{4} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a^2 b^2}{2} - \frac{2}{3} a^2 b^2 \right) = \frac{\pi}{6} p_0 a \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + b^2). \ ▶$$

170. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\},$$

вырезанной цилиндром $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax, \ z \in \mathbb{R}\}$.

◀ Для вычисления координат центра тяжести указанной части поверхности S воспользуемся формулами (17), п.4.3, полагая в них $p(x, y, z) = 1$, так как поверхность однородна. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy,$$

$$(x, y) \in D, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant ax\},$$

$$m = \iint\limits_S dS = \sqrt{2} \iint\limits_D dx\, dy = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} a^2,$$

$$x_C = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\,dS = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint\limits_D x\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{m}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3 B\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\,\frac{\pi a^3}{m} = \frac{a}{2},$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\,dS = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint\limits_D y\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{m}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \rho^2\,d\rho = \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi = 0,$$

$$z_C = \frac{1}{m}\iint\limits_S z\,dS = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{m}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3 B\left(2,\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3m}a^3\ \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)} = \frac{16a}{9\pi}. \ ▶$$

171. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности

$$S = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x+y \leqslant a\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)\right\}.$$

◀ Рассматриваемая часть сферы проектируется на множество $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a-x\}$, поэтому

$$m = \iint\limits_S dS = \iint\limits_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy = a\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= a\int\limits_0^a \left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=a-x}\right)dx = a\int\limits_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx.$$

Полагая в интеграле $\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = t$, найдем

$$m = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}\,dt = 2a^2\left(\frac{t}{1+\sin^2 t}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\sin^2 t}\right) =$$

$$= 2a^2\left(-\frac{\pi}{4} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d(\operatorname{ctg} t)}{2+\operatorname{ctg}^2 t}\right) = 2a^2\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\right) = \frac{\pi}{2}a^2(\sqrt{2}-1).$$

Применив формулы (17), п.4.3, вычислим сначала координату x_C. Имеем

$$x_C = \frac{a}{m}\int_0^a dy \int_0^{a-y} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{m}\left(\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy - \sqrt{2}\int_0^a \sqrt{y}\sqrt{a-y}\,dy\right).$$

Полагая в первом интеграле $y = a\sin\varphi$, а во втором $y = a\sin^2\theta$, получим

$$x_C = \frac{a^3}{m}\left(\int_0^{\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta\right) = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}m}(\sqrt{2}-1) = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Далее,

$$y_C = \frac{a}{m}\int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = x_C = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad z_C = \frac{a}{m}\iint_D dx\,dy = \frac{a^3}{2m} = \frac{a\left(1+\sqrt{2}\right)}{\pi}. ►$$

172. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\,ds$$

следующих поверхностей S: а) поверхности куба $S = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,\,|y|,\,|z|\} = a\}$; б) полной поверхности цилиндра $S = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

◄ а) Можем представить I_0 в виде

$$I_0 = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} (x^2+y^2+z^2)\,dS,$$

где S_i, $i = \overline{1,\,6}$, — грани куба. Рассмотрим грань $S_1 = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 : -a \leqslant x \leqslant a,\ -a \leqslant y \leqslant a,\ z = a\}$. На ней $dS = dx\,dy$, в силу чего получим

$$\iint_{S_1} (x^2+y^2+z^2)\,dS = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} (x^2+y^2+a^2)\,dy =$$

$$= 4\int_0^a dx \int_0^a (x^2+y^2+a^2)\,dy = 4\int_0^a \left(ax^2 + \frac{4}{3}a^3\right)dx = \frac{20}{3}a^4.$$

Интегралы, входящие в сумму, определяющую I_0, равны между собой, поэтому имеем

$$I_0 = 6\cdot\frac{20}{3}a^4 = 40a^4.$$

б) Представим I_0 в виде

$$I_0 = \iint_{S_н} (x^2+y^2+z^2)\,dS + \iint_{S_в} (x^2+y^2+z^2)\,dS + \iint_{S_б} (x^2+y^2+z^2)\,dS,$$

где $S_н$ — нижнее основание цилиндра S, $S_в$ — его верхнее основание, $S_б$ — его боковая поверхность.

На $S_{\text{н}}$ и $S_{\text{в}}$ выполняется равенство $dS = dx\,dy$, в силу чего первые два интеграла в правой части равенства являются двойными интегралами в замкнутой области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Принимая во внимание равенства $z|_{S_{\text{н}}} = 0$, $z|_{S_{\text{в}}} = H$, получим

$$\iint\limits_{S_{\text{н}}} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS + \iint\limits_{S_{\text{в}}} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS =$$

$$= \iint\limits_D \left(2(x^2 + y^2) + H^2\right)\,dx\,dy = \pi R^2 H^2 + 2 \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим

$$2 \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = 2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = \pi R^4.$$

На S_6 выполняются равенства $x^2 + y^2 = R^2$, $dS = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, причем S_6 проектируется на прямоугольник $D_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$, в силу чего имеем

$$\iint\limits_{S_6} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS = 2R \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int\limits_0^H (R^2 + z^2)\,dz = 4RH\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right) \int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 4RH\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right) \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi RH\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right).$$

Складывая полученные равенства, окончательно находим

$$I_0 = \pi R\left(R(R + H)^2 + \frac{2}{3}H^3\right). \blacktriangleright$$

173. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$S = \left\{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = \rho;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant b \leqslant \rho \leqslant a\right\}$$

с поверхностной плотностью p_0 материальную точку массы m, помещенную в вершине этой поверхности?

◀ Применив формулу (18), п.4.3, получим

$$\boldsymbol{F} = \varkappa m p_0 \iint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS,$$

где $\varkappa$ — постоянная тяготения,

$$\boldsymbol{r} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0), \quad r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Здесь следует взять $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, так как материальная точка находится в вершине конуса. Обозначая $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$, имеем

$$F_x = \varkappa m p_0 \iint\limits_S \frac{x}{r^3}\,dS, \quad F_y = \varkappa m p_0 \iint\limits_S \frac{y}{r^3}\,dS, \quad F_z = \varkappa m p_0 \iint\limits_S \frac{z}{r^3}\,dS.$$

Параметризуем поверхность S, полагая $S = \boldsymbol{\Phi}(D)$, где $\boldsymbol{\Phi}(r, \varphi) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi,\ \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi,\ \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, $D = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : b\sqrt{2} \leqslant r \leqslant a\sqrt{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$. Тогда

$$E = 1,\ G = \frac{r^2}{2},\ F = 0,\ dS = \sqrt{EG - F^2}\,dr\,d\varphi = \frac{r}{\sqrt{2}}\,dr\,d\varphi.$$

Заменяя поверхностные интегралы соответствующими двойными, найдем

$$F_x = \frac{1}{2}\varkappa m p_0 \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{2}\varkappa m p_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_z = \frac{1}{2}\varkappa m p_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = \pi\varkappa m p_0 \ln\frac{a}{b}.$$

Из физических соображений можно было сразу сделать вывод о том, что $F_x = 0$, $F_y = 0$, так как однородная поверхность S имеет ось симметрии Oz, на которой находится центр тяжести поверхности, в силу чего

$$\boldsymbol{F} = \pi\varkappa m p_0 \ln\frac{a}{b}\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{k}$ — орт оси Oz. ►

174. Найти потенциал однородной сферической поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ плотности p_0 в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, т.е. вычислить интеграл

$$U = \iint\limits_S \frac{p_0}{r}\, dS,$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

◄ Перейдем от системы координат $Oxyz$ к системе $O\xi\eta\zeta$, совершив поворот осей так, чтобы точка M_0 находилась на положительной полуоси $O\zeta$. В новой системе координат точка M_0 имеет координаты $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = r_0$, где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. При указанном переходе к новой системе координат сфера S перейдет в сферу $S' = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2\}$. Таким образом, требуется вычислить интеграл

$$U = p_0 \iint\limits_{S'} \frac{dS'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r_0)^2}}.$$

Представим множество S' в виде $S' = \Phi(D)$, где $\Phi(\theta, \varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$, $D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, и вычислим коэффициенты Гаусса, а также dS'. Имеем $E = a^2$, $G = a^2\sin^2\theta$, $F = 0$, $dS' = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Принимая во внимание равенство $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r_0)^2 = a^2 - 2ar_0\cos\theta + r_0^2$, получим

$$U = a^2 p_0 \iint\limits_D \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ar_0\cos\theta + r_0^2}} = a^2 p_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar_0\cos\theta + r_0^2}} =$$

$$= 2\pi a^2 p_0 \left.\frac{\sqrt{a^2 - 2ar_0\cos\theta + r_0^2}}{ar_0}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi a p_0}{r_0}(a + r_0 - |a - r_0|).$$

Если $a < r_0$, то $U = \frac{4\pi a^2 p_0}{r_0}$. Если $a > r_0$, то $U = 4\pi a p_0$. Оба случая объединяются одной формулой. Действительно, неравенство $a < r_0$ эквивалентно неравенству $\frac{a^2}{r_0} < a$, а неравенство $a > r_0$ — неравенству $\frac{a^2}{r_0} > a$. Следовательно, $U = 4\pi p_0 \min\left\{a, \frac{a^2}{r_0}\right\}$. ►

175. Вычислить интеграл

$$F(t)=\iint\limits_{S(t)} f(x,y,z)\,dS,$$

где

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{если} \quad z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & \text{если} \quad z<\sqrt{x^2+y^2},\end{cases} \qquad S(t)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=t^2\}.$$

◀ Из условия примера следует, что функция f отлична от нуля на той части поверхности $S(t)$, которая находится внутри части пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченной конической поверхностью $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{x^2+y^2}\}$, поэтому имеем

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=t^2\\ z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}}}(x^2+y^2)\,dS=|t|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{t^2}{2}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

После перехода в двойном интеграле к полярным координатам получим

$$F(t)=4|t|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{|t|}{\sqrt2}}\frac{\rho^3\,d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}=\pi|t|\int\limits_0^{\frac{|t|}{\sqrt2}}\frac{\rho^2\,d(\rho^2)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}=\frac23\pi|t|(2t^2+\rho^2)\sqrt{t^2-\rho^2}\Big|_{\rho=\frac{|t|}{\sqrt2}}^{0}=\frac{\pi}{6}(8-5\sqrt2)t^4. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

176. $I=\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$.

◀ Рассмотрим интеграл

$$I_1=\iint\limits_S z\,dx\,dy.$$

Плоскость $z=0$ пересекается со сферой S по окружности $\gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=a^2\}$, являющейся гладким краем компактов $S^+=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^+=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D\}$, $S^-=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^-=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D\}$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant a^2\}$. Ориентация кривой γ должна быть согласована с ориентацией многообразий $S^+\setminus\gamma$ и $S^-\setminus\gamma$ по правилу, указанному в п.4.1. Эти ориентации противоположны, поэтому

$$I_1=\iint\limits_{S+}z\,dx\,dy+\iint\limits_{S-}z\,dx\,dy=\iint\limits_D z^+\,dx\,dy-\iint\limits_D z^-\,dx\,dy=2\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам получим

$$I_1=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=\frac43\pi(a^2-\rho^2)^{\frac32}\Big|_a^0=\frac43\pi a^3.$$

Из очевидных равенств

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz=\iint\limits_S y\,dz\,dx=I_1$$

окончательно находим $I=4\pi a^3$. ▶

177. $I = \iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2=z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

◀ Коническая поверхность S проектируется на круг $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant h^2\}$. Из-за особой точки в начале координат множество S называют *псевдомногообразием.* В начале координат вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к S не определен, поэтому

$$I = \iint\limits_{S\setminus\{(0,\,0,\,0)\}} ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали $\boldsymbol{n}$ в точках множества $S\setminus\{(0,\,0,\,0)\}$. Множеством $\{(0,\,0,\,0)\}$ можно пренебречь при интегрировании в любом случае, поскольку оно имеет меру нуль.

Множество $S\setminus\{(0,\,0,\,0)\}$ трансверсально ориентируем выбором одного из двух возможных направлений вектора единичной нормали $\boldsymbol{n}$. Поскольку речь идет о внешней стороне поверхности S, то вектор $\boldsymbol{n}$ образует с ортом $\boldsymbol{k}$ оси Oz тупой угол, в силу чего имеем

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},$$

где $z(x,\, y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Заменяя поверхностный интеграл двойным и принимая во внимание, что

$$dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy,$$

получим

$$I = \iint\limits_D \Big((y-z(x,\,y))z_x' + (z(x,\,y)-x)z_y' + y - x\Big)\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy = 2\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^h \rho^2\,d\rho = \frac{2}{3}h^3\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi = 0. \text{ ▶}$$

178. $I = \iint\limits_S \left(\dfrac{dy\,dz}{x} + \dfrac{dz\,dx}{y} + \dfrac{dx\,dy}{z}\right)$, где S — внешняя сторона эллипсоида, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

◀ Множество S представим в виде

$$S = \boldsymbol{\Phi}(D),\ \boldsymbol{\Phi}(\theta,\, \varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi,\ b\sin\theta\sin\varphi,\ c\cos\theta),$$

где $D = \{(\theta,\, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$.

Согласно определению поверхностного интеграла по ориентированной поверхности S, имеем

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\cos\alpha}{x} + \frac{\cos\beta}{y} + \frac{\cos\gamma}{z}\right) dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вычисляются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$A = \frac{\mathcal{D}(y,\, z)}{\mathcal{D}(\theta,\, \varphi)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z,\, x)}{\mathcal{D}(\theta,\, \varphi)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(\theta,\, \varphi)},$$

x, y, z — компоненты вектора Φ (в примере 162 найдены следующие значения: $A = bc\sin^2\theta\cos\varphi$, $B = ac\sin^2\theta\sin\varphi$, $C = ab\sin\theta\cos\theta$). Поскольку $C > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $C < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то в формулах для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед радикалом выбираем знак "+", в силу того что на верхней половине поверхности эллипсоида $\cos\gamma > 0$, а на нижней его половине $\cos\gamma < 0$. Принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\theta\, d\varphi$, приводим поверхностный интеграл к двойному:

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{A}{x(\theta, \varphi)} + \frac{B}{y(\theta, \varphi)} + \frac{C}{z(\theta, \varphi)}\right) d\theta\, d\varphi = \iint\limits_D \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) = 4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right). ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

119. $\int\limits_\gamma \frac{dl}{x-y}$, где γ — отрезок прямой, заданный уравнением $y = \frac{x}{2} - 2$, заключенный между точками $A = (0, -2)$ и $B = (4, 0)$.

120. $\int\limits_\gamma y\, dl$, где γ — дуга параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$, отсеченная кривой, уравнение которой $x^2 = 2py$.

121. $\int\limits_\gamma xyz\, dl$, где γ — четверть окружности, лежащей в первом октанте, полученной в результате пересечения сферы $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$ и поверхности цилиндра $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, z \in \mathbb{R}\right\}$.

122. $\int\limits_\gamma \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl$, где γ — первый виток конической винтовой линии, заданной уравнениями $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

123. Найти массу дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln x$, между точками с абсциссами x_1 и x_2, если плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

124. Найти массу кривой γ, заданной уравнениями $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, от точки, соответствующей $t = 0$, до произвольной точки, если плотность кривой обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке $(1, 0, 1)$ равна единице.

125. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии, заданной уравнениями $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, относительно плоскости xOy, считая плотность пропорциональной квадрату расстояния от этой плоскости: $\mu = kz^2$, $k = \text{const}$.

126. Вычислить площадь данной цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью xOy и поверхностями, заданными уравнениями $y = \sqrt{2px}$, $z = y$, $x = \frac{8}{9}p$, $p > 0$.

Вычислить криволинейные интегралы:

127. $\int\limits_\gamma x\, dy$, где γ — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника, образованного отрезками осей координат и прямой, заданной уравнением $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

128. $\int\limits_\gamma \frac{x^2\, dy - y^2\, dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, где γ — четвертая часть астроиды, заданной уравнениями $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (от точки $(a, 0)$ до точки $(0, a)$).

129. $\int\limits_\gamma x\, dx + y\, dy + (x + y - 1)\, dz$, где γ — отрезок прямой линии, от точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$.

130. Доказать, что величина интеграла

$$\int\limits_{\gamma}(2xy - y)\,dx + x^2\,dy.$$

где γ — замкнутый контур, выражает площадь области, ограниченной этим контуром.

131. Доказать, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma}\varphi(y)\,dx + \left(x\varphi'(y) + x^3\right)\,dy$$

равен утроенному моменту инерции однородной плоской фигуры, ограниченной контуром γ, относительно оси ординат.

Найти функции по данным полным дифференциалам:

132. $du = \left(\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right)dx + \left(\frac{y}{(y-x)^2} - y^2\right)dy$. **133.** $du = \frac{2(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x-yz)^2}$.

Вычислить поверхностные интегралы:

134. $\iint\limits_{S}\frac{dS}{r^2}$, где S — цилиндр, заданный уравнением $x^2+y^2=R^2$, ограниченный плоскостями, уравнения которых $z=0$ и $z=H$, а r — расстояние от точки поверхности до начала координат.

135. $\iint\limits_{S}\frac{dS}{\rho^n}$, где S — сфера, заданная уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$ а ρ — расстояние элемента поверхности до точки $(0, 0, c)$, расположенной вне сферы.

136. $\iint\limits_{S} yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра, заданного уравнением $x^2+y^2=R^2$, и плоскостей, уравнения которых $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $z=H$.

137. $\iint\limits_{S} y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения, заданного уравнением $z=x^2+y^2$, цилиндра, заданного уравнением $x^2+y^2=1$, и координатных плоскостей.

138. $\iint\limits_{S}\left((z^n-y^n)\cos\alpha + (x^n-z^n)\cos\beta + (y^n-x^n)\cos\gamma\right)dS$, где S — верхняя половина сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности S.

§ 5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса

Пусть K — компакт с краем ∂K в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ с фиксированным базисом.

Определение 1. *Компакт K называется* ***элементарным****, если каждая прямая в пространстве $\mathbb{R}^m$, параллельная оси Ox_i, $i=\overline{1, m}$, либо не пересекается с K, либо имеет с K один общий сегмент, который может вырождаться в точку.*

Указанный в определении сегмент можно задать в виде

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \leqslant x_i \leqslant \psi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m), \tag{1}$$

где φ_i, ψ_i — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Определение 2. *Компакт $K\subset\mathbb{R}^m$ с краем ∂K называется* ***простым****, если существует его представление в виде*

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j, \tag{2}$$

где K_j — элементарные компакты без общих внутренних точек с краями ∂K_j, $j=\overline{1, m}$.

Теорема Остроградского. *Пусть на простом компакте $K \subset \mathbb{R}^3$ с ориентированным краем $\partial K = S$ определена вектор-функция $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, непрерывная на K вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда справедлива формула Остроградского*

$$\iiint\limits_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS, \tag{3}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *— направляющие косинусы вектора единичной нормали $\boldsymbol{n}$ в точках поверхности S.*

Если в равенстве (3) взять $P = x$, $Q = y$, $R = z$, то получим следующую формулу для вычисления объема V компакта K посредством поверхностного интеграла второго рода:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS. \tag{4}$$

Если D — простой компакт с ориентированным краем $\partial D = \gamma$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, а вектор-функция $\boldsymbol{F} = (P', Q')$ непрерывна на D вместе с частными производными $\frac{\partial P'}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q'}{\partial y}$, то формула Остроградского принимает вид

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}\rangle\, dl. \tag{5}$$

Если $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha', \cos\beta')$ — единичный касательный вектор к гладкой кривой γ, указывающий положительное направление ее обхода, то, принимая во внимание, что $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{k}]$, где $\boldsymbol{k}$ — орт оси Oz пространства $\mathbb{R}^3$, и пользуясь правилом циклической перестановки в смешанном произведении, имеем

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}\rangle\, dl = \big(\langle P'\boldsymbol{i}, [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{k}]\rangle + \langle Q'\boldsymbol{j}, [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{k}]\rangle\big)\, dl = \big(P'\langle \boldsymbol{\tau}, [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}]\rangle + Q'\langle \boldsymbol{\tau}, [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}]\rangle\big)\, dl =$$
$$= \big(P'\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{j}\rangle - Q'\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{i}\rangle\big)\, dl = \langle -Q'\boldsymbol{i} + P'\boldsymbol{j}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, dl.$$

Следовательно, согласно определению криволинейного интеграла второго рода, равенство (5) принимает вид

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_\gamma -Q'\, dx + P'\, dy. \tag{6}$$

Полагая $P' = x$, $Q' = y$, получим формулу для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной гладким контуром γ, посредством криволинейного интеграла второго рода:

$$P = \frac{1}{2}\oint\limits_\gamma x\, dy - y\, dx. \tag{7}$$

Из теоремы Остроградского и формулы (6) получаем, как следствие, теорему и формулу Грина.

Теорема Грина. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — простой компакт с ориентированным краем γ, на котором определена вектор функция $\boldsymbol{F} = (P, Q)$, непрерывная на D вместе с частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Грина*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_\gamma P\, dx + Q\, dy. \tag{8}$$

Для доказательства формулы (8) следует взять в формуле (6) $P' = Q$, $Q' = -P$.

Определение 3. *Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ с краем γ' называется элементарной, если ее можно задать уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, а также уравнениями*

$x = x(y, z)$, $(y, z) \in D'$, где D и D' — компакты в пространстве $\mathbb{R}^2$ с краями λ и λ', а функции z и x непрерывно дифференцируемы в D и D'.

Определение 4. *Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ с краем γ' называется простой, если существует ее представление в виде $S = \bigcup\limits_{j=1}^{n} S_j$, где S_j — элементарные поверхности без общих внутренних точек с краями γ_j.*

Если простая поверхность S трансверсально ориентирована и ориентации контуров γ' и γ_j, $j = \overline{1, n}$, согласованы с ориентацией поверхности, то общие части границ двух смежных поверхностей S_j и S_{j+1} будут противоположно ориентированными.

Теорема Стокса. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая простая поверхность с ориентированным краем γ', $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ — непрерывная на S вектор-функция, компоненты которой имеют непрерывные на S частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Стокса*

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint\limits_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{9}$$

где под умножением символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на функцию будем понимать выполнение соответствующей операции дифференцирования, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали $\boldsymbol{n}$.

179. Применяя формулу Грина (8), вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_{\gamma} e^x\big((1-\cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy\big),$$

где γ — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \sin x\}$.

◄ По формуле Грина (8) имеем

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x(\sin y - y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x(1-\cos y)\right)\right) dx\,dy = -\iint\limits_D ye^x\,dx\,dy = -\int\limits_0^{\pi} e^x\,dx \int\limits_0^{\sin x} y\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} e^x(1-\cos 2x)\,dx = -\frac{1}{4}e^x\left(1 - \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{5}(e^{\pi}-1). \ ►$$

180. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy, \quad I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

где AmB — отрезок прямой, соединяющий точки $A = (1, 1)$ и $B = (2, 6)$, и AnB — дуга параболы с вертикальной осью, проходящая через те же точки A, B и начало координат?

◄ Уравнение параболы, проходящей через начало координат и точки A, B, имеет вид $y = 2x^2 - x$, а разность $I_2 - I_1$ является криволинейным интегралом по замкнутому контуру $AnBmA$, ограничивающему область $D \subset \mathbb{R}^2$ и пробегаемому в положительном направлении, в силу чего можем применить формулу (8):

$$I_2 - I_1 = \oint\limits_{AnBmA} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-(x-y)^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2\right) dx\,dy =$$

$$= -4\iint\limits_D x\,dx\,dy = -4\int\limits_1^2 x\,dx \int\limits_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4\int\limits_1^2 (6x^2 - 4x - 2x^3)\,dx = (2x^4 + 8x^2 - 8x^3)\Big|_1^2 = -2.$$

Следовательно, $I_1 - I_2 = 2$. ▶

181. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A = (a,\, 0)$ до точки $O = (0,\, 0)$.

◀ На сегменте $[0,\, a]$ подынтегральное выражение равно нулю, поэтому интеграл по кривой AmO равен интегралу по замкнутому контуру $AmOA$, состоящему из кривой AmO и сегмента $[0,\, a]$, ограничивающему область $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}\right\}$, в силу чего можем применить формулу (8):

$$I = \int\limits_{AmOA} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - my) \right) dx\, dy =$$

$$= m \iint\limits_D dx\, dy = \frac{m}{8}\pi a^2. \ ▶$$

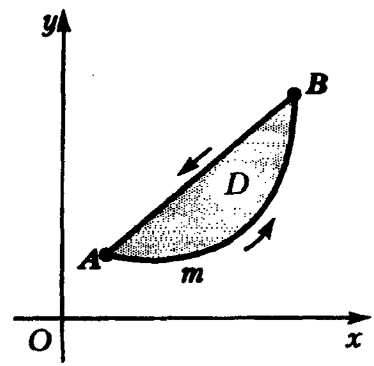

Рис. 19

182. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AmB} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy,$$

где φ, φ' — непрерывные функции, AmB — произвольный путь, соединяющий точки $A = (x_1,\, y_1)$ и $B = (x_2,\, y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB фигуру D, площадь которой равна данной величине P.

◀ Интеграл по кривой AmB представим в виде суммы интегралов по замкнутому контуру $AmBA$ и по отрезку AB (рис. 19):

$$I = \oint\limits_{AmBA} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy + \int\limits_{AB} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 вычислим, применив формулу (8):

$$I_1 = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi'(y) e^x - m\right) - \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(y) e^x - my) \right) dx\, dy = m \iint\limits_D dx\, dy = mP.$$

Для вычисления интеграла I_2 преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$(\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy =$$

$$= (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - mx)\, dy + m(x - 1)\, dy = du + m(x - 1)\, dy,$$

где du — полный дифференциал некоторой функции. Следовательно,

$$I_2 = \int\limits_{AB} du + m \int\limits_{AB} (x - 1)\, dy,$$

где первый интеграл в правой части этого равенства не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего точки A и B. Таким образом,

$$\int\limits_{AB} du = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\varphi(y_1)e^x - my_1)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} (\varphi'(y)e^{x_2} - mx_2)\,dy = \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(x_2y_2 - x_1y_1).$$

На отрезке AB выполняется равенство $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$, в силу чего имеем

$$m\int\limits_{AB} (x-1)\,dy = m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} (x-1)\,dx = m\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,\frac{(x-1)^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{m}{2}(y_2-y_1)(x_1+x_2-2) = \frac{m}{2}(y_2-y_1)(x_1+x_2) - m(y_2-y_1).$$

Складывая полученные значения интегралов, окончательно найдем

$$I = mP + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1) - m(y_2-y_1). \blacktriangleright$$

183. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_{\gamma} P(x+\alpha, y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy$$

для любого замкнутого контура γ не зависел от постоянных α и β.

◀ Если функции P и Q удовлетворяют поставленному условию, то должно выполняться равенство

$$\oint\limits_{\gamma} P(x+\alpha, y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy = \oint\limits_{\gamma} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

для любого замкнутого контура γ, в силу чего имеем

$$I_1 = \oint\limits_{\gamma} \overline{P}\,dx + \overline{Q}\,dy = 0,$$

где $\overline{P} = P(x+\alpha, y+\beta) - P(x, y)$, $\overline{Q} = Q(x+\alpha, y+\beta) - Q(x, y)$.

Для того чтобы криволинейный интеграл I_1 по любому замкнутому контуру γ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в односвязной области, ограниченной этим контуром, и на самом контуре выполнялось равенство $\frac{\partial\overline{Q}}{\partial x} = \frac{\partial\overline{P}}{\partial y}$ (которое следует из формулы Грина). Обозначив $x+\alpha = \xi$, $y+\beta = \eta$, получим написанное условие в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi, \eta) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y),$$

откуда имеем равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Левая часть этого равенства не зависит от ξ и η, поскольку правая его часть зависит только от x и y, следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C, \quad C = \text{const}.$$

Из условия $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$ получаем равенство $\frac{\partial}{\partial x}(Q(x, y) - Cx) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, справедливое лишь в том случае, когда $Q(x, y) - Cx = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \psi(y)$, $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x)$, где u, φ, ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Окончательно находим

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x), \quad Q = Cx + \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(y), \quad C = \text{const}. \ ▶$$

184. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{\gamma} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, где γ — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

◀ Если контур γ не окружает начало координат, то, применив формулу Грина, получим

$$I = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \right) dx\,dy = \iint\limits_{D} \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy = 0.$$

Если контур γ окружает начало координат, то применять формулу Грина нельзя, поскольку область D в этом случае неодносвязна. В этом случае будем вычислять интеграл I непосредственно.

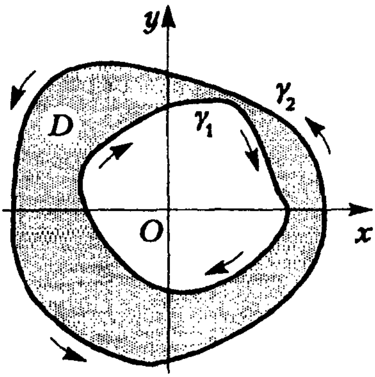

Рис. 20

Обозначим через ω дифференциальное выражение под знаком интеграла I. Покажем, что интеграл

$$I = \oint\limits_{\gamma} \omega$$

не зависит от выбора кривой γ, окружающей начало координат.

Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные непересекающиеся замкнутые гладкие или кусочно-гладкие контуры, окружающие начало координат и ограничивающие простую область $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. При положительной ориентации границы $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ области D направления обхода кривых γ_1 и γ_2 будут противоположны (рис. 20). Двухсвязная простая область D не содержит особой точки подынтегрального выражения ω, поэтому, согласно формуле Грина, имеем

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \right) dx\,dy = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega = 0,$$

откуда следует равенство

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega,$$

показывающее, что интеграл I не зависит от выбора замкнутой кривой γ, окружающей начало координат. Взяв окружность $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varepsilon \cos\varphi,\ y = \varepsilon \sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2\varphi + \varepsilon^2 \sin^2\varphi}{\varepsilon^2}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \ ▶$$

185. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой γ, заданной уравнением $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, и отрезками осей координат.

◀ Для решения примера воспользуемся формулой (7).

Полагая $x = a\rho\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим уравнение заданной кривой в полярных координатах, используя которое, находим ее параметрические уравнения

$$x = \frac{a\left(\cos^2\varphi\sin^{\frac{2}{n}}\varphi + \sin^2\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right)}{\sin^{\frac{2}{n}}\varphi}, \quad y = \frac{b\left(\cos^2\varphi\sin^{\frac{2}{n}}\varphi + \sin^2\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right)}{\cos^{\frac{2}{n}}\varphi}.$$

Из равенства $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}^{\frac{2}{n}}\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{na}\,\frac{\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}\,d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{ab}{n}\left(\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^{3-\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\right)d\varphi,$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $x\,dy - y\,dx = 0$ на отрезках осей координат, ограничивающих фигуру, то формула (7) принимает вид

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx.$$

Заменим криволинейный интеграл определенным, приняв во внимание равенство

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{3-\frac{2}{n}}\varphi\,d\varphi.$$

Получим

$$P = \frac{2ab}{n}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{ab}{n}\left(\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{ab}{n}\left(1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right). \blacktriangleright$$

186. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой γ, заданной уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n, \ a > 0, \ b > 0, \ c > 0, \ n > 0.$$

◀ Переходя к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho\cos^{\frac{2}{2n+1}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{2n+1}}\varphi$, получим уравнение кривой γ в виде $\rho = c\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi$, из которого заключаем, что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ кривая выходит из начала координат и возвращается в него, т.е. является петлей. Используя уравнение кривой γ в полярной системе координат, получим ее параметрические уравнения, в которых параметром служит угол φ:

$$x = ac\cos^{\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi, \quad y = bc\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Далее действуем по той же схеме, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}^{\frac{2}{2n+1}}\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{a(2n+1)}\,\frac{\sin^{\frac{2}{2n+1}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{2n+1}-1}\varphi}\,d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{abc^2}{2n+1}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$P = \frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx = \frac{abc^2}{2n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \ ►$$

187. Показать, что если γ — замкнутый контур и e — произвольное направление, то

$$I = \oint\limits_{\gamma}\cos(\widehat{e,\,n})\,dl = 0,$$

где n — внешняя единичная нормаль к контуру γ.

◄ Пусть $e = (\cos\alpha_0,\,\cos\beta_0)$ — произвольное направление. Поскольку $\|e\| = 1$ и $\|\boldsymbol{n}\| = 1$, то $\cos(\widehat{e,\,n}) = \langle e,\,\boldsymbol{n}\rangle$. Если кривая γ ограничивает область $D \subset \mathbb{R}^2$, то, применив формулу Остроградского (5), в которой $\boldsymbol{F} = e$, получим

$$I = \oint\limits_{\gamma}\langle e,\,\boldsymbol{n}\rangle\,dl = \iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0\right)dx\,dy = 0. \ ►$$

188. Найти значение интеграла

$$I = \oint\limits_{\alpha}\left(x\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{i}}) + y\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{j}})\right)\,dl,$$

где γ — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область D, и $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к ней ($\boldsymbol{i},\,\boldsymbol{j}$ — орты осей координат).

◄ Поскольку $\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{i}}) = \langle\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{i}\rangle$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{j}}) = \langle\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{j}\rangle$, то интеграл I преобразовывается к виду

$$I = \oint\limits_{\gamma}\left(x\langle\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{i}\rangle + y\langle\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{j}\rangle\right)dl = \oint\limits_{\gamma}\langle\boldsymbol{F},\,\boldsymbol{n}\rangle dl,$$

где $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (x,\,y)$. Осталось применить формулу (5):

$$I = \iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right)dx\,dy = 2\iint\limits_D dx\,dy = 2P,$$

где P — площадь области D. ►

189. Найти $\lim\limits_{d(D)\to 0}\dfrac{1}{B}\oint\limits_{\gamma}\langle\boldsymbol{F},\,\boldsymbol{n}\rangle\,dl$, где B — площадь области D, ограниченной контуром γ, окружающим точку $(x_0,\,y_0)$, $d(D)$ — диаметр области D, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к контуру γ и $\boldsymbol{F} = (P,\,Q)$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $D \cup \gamma$.

◄ Согласно формуле (5), имеем

$$\frac{1}{B}\oint\limits_{\gamma}\langle\boldsymbol{F},\,\boldsymbol{n}\rangle\,dl = \frac{1}{B}\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

При стягивании контура γ в точку (x_0, y_0) получим, применив теорему о среднем и пользуясь непрерывной дифференцируемостью функций P и Q:

$$\lim_{d(D)\to 0} \frac{1}{B} \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Следовательно,

$$\lim_{d(D)\to 0} \frac{1}{B} \oint\limits_\gamma \langle F, n\rangle\, dl = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \blacktriangleright$$

190. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и e — любое постоянное направление, то

$$I = \iint\limits_S \cos(\widehat{n, e})\, dS = 0,$$

где n — внешняя единичная нормаль к поверхности S.

◀ Пусть $e = (\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$ — единичный фиксированный вектор. Тогда можно написать равенство

$$\cos(\widehat{n, e}) = \langle n, e\rangle = \cos\alpha\cos\alpha_0 + \cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали n. Применив формулу Остроградского (3), получим

$$I = \iint\limits_S \langle n, e\rangle\, dS = \iiint\limits_K \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0 + \frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma_0\right) dx\, dy\, dz = 0. \blacktriangleright$$

191. Доказать, что объем V конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью S, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, и плоскостью, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$, вычисляется по формуле $V = \frac{PH}{3}$, где P — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, H — его высота.

◀ Не ограничивая общности, можем считать, что вершина конуса находится в начале координат, а плоскость, в которой расположено основание конуса, пересекает положительную полуось Oz (этого всегда можно добиться путем линейного преобразования координат). Для вычисления объема конуса воспользуемся формулой (4), которую запишем в виде

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_S \langle r, n\rangle\, dS = \frac{1}{3} \iint\limits_{S_1} \langle r, n\rangle\, dS + \frac{1}{3} \iint\limits_{S_2} \langle r, n\rangle\, dS,$$

где S_1 — основание конуса, S_2 — его боковая поверхность, $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$ на поверхности конуса, $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный вектор нормали к поверхности конуса (рис. 21). На боковой поверхности конуса векторы r и n ортогональны, поэтому

$$\iint\limits_{S_2} \langle r, n\rangle\, dS = 0.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \iint\limits_{S_1} \langle r, n\rangle\, dS$.

На множестве S_1 выполняется равенство

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C},$$

откуда получаем

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$V = -\frac{D}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\iint\limits_{S_1} dS = -\frac{DP}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где P — площадь основания конуса S. Из рис. 21 видно, что $H = -\frac{D}{C}\cos\gamma = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где H — высота конуса. Таким образом, $V = \frac{PH}{3}$. ►

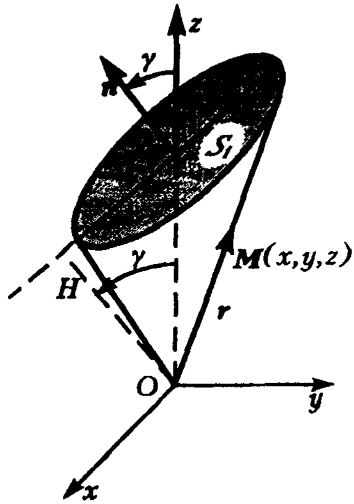

Рис. 21

192. Найти объем тела T, ограниченного поверхностями, заданными параметрическими уравнениями

$$x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, \quad y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v,$$

$$z = c\sin u, \quad z = \pm c \quad (a > 0,\ b > 0).$$

◄ Пусть $c > 0$. В плоскости xOy имеем

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2, \quad u = 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi.$$

Если $z = \pm c$, то $u = \pm\frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 \leqslant b^2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Следовательно, верхним и нижним основаниями тела T являются круги радиуса b. Таким образом,

$$T = \Phi(D), \text{ где } \Phi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big),$$

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\right\}.$$

Если $a^2 > b^2$, то при $z > 0$ единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ в каждой точке верхней части боковой поверхности образует с ортом $\boldsymbol{k}$ оси Oz острый угол, если же $a^2 < b^2$ — то тупой угол (рис. 22, 23).

Для вычисления объема V тела T воспользуемся формулой (4), записав ее в виде

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS,$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$, S — полная поверхность тела T. Разобьем интеграл на сумму интегралов

$$V = \frac{1}{3}\left(\iint\limits_{S_1}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS + \iint\limits_{S_2}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS + \iint\limits_{S_3}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS\right),$$

где S_1 и S_2 — соответственно верхнее и нижнее основания тела, S_3 — его боковая поверхность. На поверхности S_1 выполняются равенства $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, c)$, $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle = c$, а на поверхности S_2 имеем $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, -c)$, $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle = c$. Принимая во внимание, что на S_1 и на S_2 справедливо равенство $dS = dx\,dy$, получим

$$\iint\limits_{S_1}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS = \iint\limits_{S_2}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle\, dS = c\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant b^2} dx\,dy = \pi b^2 c.$$

Для вычисления интеграла по поверхности S_3 нам понадобятся направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}$. Вычислим $C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = (b^2 - a^2)\sin u\cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если $a^2 > b^2$, то $C < 0$, и поскольку $\cos\gamma > 0$, то

$$\cos\gamma = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

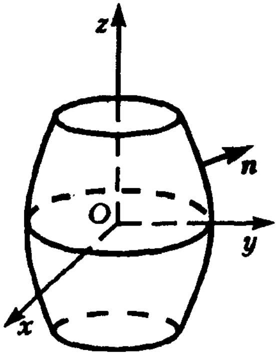

Рис. 22

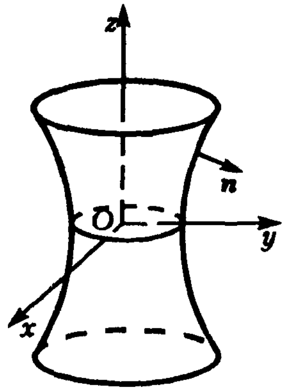

Рис. 23

Если $a^2 < b^2$, то $C > 0$, и поскольку $\cos\gamma < 0$, то

$$\cos\gamma = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Следовательно, принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$, имеем

$$\iint\limits_{S_3} \langle r,\ n\rangle\,dS = -\iint\limits_{D} \Big(x(u,\ v)A + y(u,\ v)B + z(u,\ v)C\Big)\,du\,dv,$$

где

$$A = \frac{\mathcal{D}(y,\ z)}{\mathcal{D}(u,\ v)} = -cx(u,\ v)\cos u, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z,\ x)}{\mathcal{D}(u,\ v)} = -cy(u,\ v)\cos u.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S_3} \langle r,\ n\rangle\,dS = \iint\limits_{D} \Big(c\big(x^2(u,\ v)+y^2(u,\ v)\big)\cos u + (a^2-b^2)z(u,\ v)\sin u\cos u\Big)\,du\,dv =$$

$$= a^2c\iint\limits_{D}\cos u\,du\,dv = a^2c\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du\int\limits_{0}^{2\pi}dv = 4\pi a^2c.$$

Складывая полученные значения, при $c > 0$ имеем

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2c + \frac{2}{3}\pi b^2c = \frac{4}{3}\pi c\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

Если $c < 0$, то, очевидно, получим

$$V = -\frac{4}{3}\pi c\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{4}{3}\pi|c|\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right). \blacktriangleright$$

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Остроградского (3).

Вычислить интегралы:

193. $I=\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$.

◀ Используя формулу Остроградского (3), находим

$$I=3\iiint\limits_K (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}$ — шар радиуса a. После перехода в интеграле к сферическим координатам получим

$$I=3\int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho^4d\rho=\frac{12}{5}\pi a^5. \ ▶$$

194. $I=\iint\limits_S (x-y+z)\,dy\,dz+(y-z+x)\,dz\,dx+(z-x+y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности, заданной уравнением $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

◀ Обозначим через T тело, ограниченное поверхностью S. Применив формулу (3), получим

$$I=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y+z)+\frac{\partial}{\partial y}(y-z+x)+\frac{\partial}{\partial z}(z-x+y)\right)dx\,dy\,dz=3\iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Произведем в интеграле замену переменных, полагая $u=x-y+z$, $v=y-z+x$, $w=z-x+y$. Принимая во внимание равенство

$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\mathcal{D}(u,v,w)}{\mathcal{D}(x,y,z)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{4},$$

находим

$$I=\frac{3}{4}\iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\leqslant1}du\,dv\,dw=6\iiint\limits_{\substack{u+v+w\leqslant1\\u\geqslant0,\ v\geqslant0,\ w\geqslant0}}du\,dv\,dw=6\int\limits_0^1du\int\limits_0^{1-u}dv\int\limits_0^{1-u-v}dw=$$

$$=6\int\limits_0^1du\int\limits_0^{1-u}(1-u-v)\,dv=6\int\limits_0^1\frac{(1-u)^2}{2}\,du=(1-u)^3\Big|_1^0=1. \ ▶$$

195. $I=\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$, где S — часть конической поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2=z^2$, $0\leqslant z\leqslant h$, и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали n к этой поверхности.

◀ Поскольку поверхность S незамкнута, то воспользоваться формулой Остроградского (3) нельзя. Рассмотрим замкнутую поверхность S_1, которую получим, присоединив ко всем точкам поверхности S множество точек круга $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\leqslant h^2,\ z=h\}$. Множество S_1 является псевдомногообразием, поскольку в вершине конуса и на окружности $\gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=h^2,\ z=h\}$ вектор n не определен. Этими множествами можно пренебречь, так как они имеют меру 0, и рассматривать интеграл на множестве

$S_3 = S_1 \setminus (\gamma \cup \{0, 0, 0\})$. Имеем равенство

$$I = \iint\limits_{S_3} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS - \iint\limits_{S_2 \setminus \gamma} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS.$$

К интегралу на множестве S_3 можем применить формулу Остроградского (3), а на множестве $S_2 \setminus \gamma$ имеем $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, $z^2 = h^2$, $dS = dx\,dy$. Поэтому получим

$$I = 2 \iiint\limits_T (x + y + z)\, dx\, dy\, dz - h^2 \iint\limits_{x^2+y^2<h^2} dx\, dy = 2 \iiint\limits_T (x + y + z)\, dx\, dy\, dz - \pi h^4,$$

где $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < h^2, \sqrt{x^2 + y^2} < z < h\}$.

В тройном интеграле перейдем к цилиндрическим координатам и заменим полученный интеграл повторным. Найдем

$$\iiint\limits_T (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \rho\, d\rho \int\limits_\rho^h (\rho(\sin\varphi + \cos\varphi) + z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \left(\rho(h - \rho)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{\rho^2}{2}\right) \rho\, d\rho = \frac{\pi}{4} h^4.$$

Окончательно имеем $I = \frac{\pi}{2} h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2} h^4$. ►

196. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r^2}\, dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая компакт $T \subset \mathbb{R}^3$, n — внешняя нормаль к поверхности S в ее точке (ξ, η, ζ), r — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ), и $z = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

◄ Рассмотрим два случая: а) поверхность S не окружает точку (x, y, z); б) поверхность S окружает точку (x, y, z).

В случае а) можем применить формулу Остроградского (3). Приняв во внимание равенство $\cos(\widehat{r, n}) = \frac{\langle r, n \rangle}{r}$, получим

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \left(\frac{\xi - x}{r^3} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r^3} \cos\beta + \frac{\zeta - z}{r^3} \cos\gamma\right) dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi - x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta - y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta - z}{r^3}\right)\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2 + 3(\eta - y)^2 + 3(\zeta - z)^2}{r^5}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iiint\limits_T \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0.$$

В случае б) формулу Остроградского применять нельзя, так как интеграл $I(x, y, z)$ становится несобственным. Поэтому вычислим его непосредственно. Для этого рассмотрим произвольный простой компакт T_1 с краем S_1, лежащий строго внутри тела T. Предположим, что $(x, y, z) \in \mathring{T}_1$, где $\mathring{T}_1$ — внутренность компакта T_1. Множество $T \setminus \mathring{T}_1$ не содержит точку (x, y, z) и является компактом с ориентированным краем $S \cup S_1^-$, где S_1^- — ориентированная граница компакта T_1, в каждой точке которой единичный вектор нормали n

направлен внутрь T_1. Применив формулу Остроградского (3) на компакте $T \setminus \mathring{T}_1$, получим равенство

$$\iint\limits_{S} \left\langle \frac{r}{r^3}, n \right\rangle dS + \iint\limits_{S_1^-} \left\langle \frac{r}{r^3}, n \right\rangle dS = 0,$$

из которого следует, что

$$I(x, y, z) = \iint\limits_{S_1} \left\langle \frac{r}{r^3}, n \right\rangle dS,$$

где S_1 — произвольная гладкая поверхность, все точки которой являются внутренними точками компакта T. Таким образом, интеграл $I(x, y, z)$ не зависит от вида поверхности, окружающей точку (x, y, z). Поэтому можем взять в качестве поверхности S_1 сферу достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$. При этом получим

$$I(x, y, z) = \iint\limits_{S_1} \frac{\langle r, n \rangle}{r^3} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{S_1} dS = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 4\pi,$$

поскольку на сфере S_1 векторы r и n коллинеарны и выполняется равенство $r = \varepsilon$. ▶

197. Тело T целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (закон Архимеда).

◀ Согласно закону Паскаля, погруженная в жидкость площадка испытывает давление, направленное по нормали к ней и равное весу столбика жидкости, основанием которого служит площадка, а высота столбика равна глубине погружения.

Пусть тело T ограничено гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S и μ — удельный вес жидкости. Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы свободная поверхность жидкости совпадала с плоскостью xOy, а ось Oz была направлена вверх. Рассмотрим элемент поверхности $d\sigma$, площадь которого равна dS, и пусть $M = (x, y, z) \in d\sigma$ — произвольная точка. Согласно закону Паскаля, можем написать приближенное равенство $d\boldsymbol{F}(M) = \mu z \boldsymbol{n}\, dS$, где $\boldsymbol{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке M, z — аппликата этой точки.

Суммируя по всем элементам $d\sigma$ и совершая предельный переход, когда диаметры этих элементов стремятся к нулю, получим формулу для вычисления силы $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \mu \iint\limits_{S} z\boldsymbol{n}(M)\, dS = \boldsymbol{i}\mu \iint\limits_{S} z \cos\alpha\, dS + \boldsymbol{j}\mu \iint\limits_{S} z \cos\beta\, dS + \boldsymbol{k}\mu \iint\limits_{S} z \cos\gamma\, dS.$$

Применив к каждому поверхностному интегралу формулу Остроградского (3), найдем

$$\iint\limits_{S} z \cos\alpha\, dS = \iint\limits_{S} z \cos\beta\, dS = 0, \quad \iint\limits_{S} z \cos\gamma\, dS = \iiint\limits_{T} dx\, dy\, dz = V,$$

где V — объем тела T.

Окончательно получаем $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{k}\mu V = \boldsymbol{k}P$, где P — вес тела T. ▶

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Стокса (9).

198. Пусть γ — замкнутый контур, расположенный в плоскости, заданной уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ и ограничивающий площадку S, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости. Найти

$$I = \oint\limits_{\gamma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур γ пробегается в положительном направлении.

◀ В обозначениях формулы Стокса имеем

$$P = z\cos\beta - y\cos\gamma, \quad Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha, \quad R = y\cos\alpha - x\cos\beta.$$

Применив формулу Стокса (9), получим

$$I = 2\iint\limits_S \cos\alpha\,dy\,dz+\cos\beta\,dz\,dx+\cos\gamma\,dx\,dy = 2\iint\limits_S (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\,dS = 2\iint\limits_S dS = 2B,$$

где B — площадь площадки S. ►

Применяя формулу Стокса (9), вычислить интегралы:

199. $I = \oint\limits_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ с плоскостью S_1, заданной уравнением $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

◄ Применим формулу Стокса, взяв в ней в качестве поверхности круг S_2 радиуса a, лежащий в плоскости S_1. Получим

$$I = -\iint\limits_{S_2} dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = -\iint\limits_{S_2} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости S_1. Так как вектор $\boldsymbol{n}$ и орт $\boldsymbol{k}$ оси Oz образуют острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Приняв во внимание, что $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, имеем

$$I = -\sqrt{3}\iint\limits_{S_2} dS = -\sqrt{3}\pi a^2,$$

так как площадь круга S_2 равна πa^2. ►

200. $I = \int\limits_\gamma (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где γ — кривая, полученная в результате пересечения поверхности S цилиндра $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ z \in \mathbb{R}\}$ с плоскостью S_1, заданной уравнением $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, $a > 0$, $h > 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

◄ По формуле Стокса (9) имеем

$$I = -2\iint\limits_{S_2} dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = -2\iint\limits_{S_2} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS,$$

где $S_2 = T \cap S_1$ — множество всех точек эллипса

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\right\},$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали n к плоскости S_1. Множество точек S_2 проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$. Поскольку нормаль к плоскости S_1 образует острый угол с ортом $\boldsymbol{k}$ оси Oz, то в каждой из формул

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Переходя от поверхностного интеграла к двойному и принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dx\,dy$, получим

$$I = 2\iint\limits_D \left(z'_x(x, y) + z'_y(x, y) - 1\right)\,dx\,dy.$$

Так как на множестве S_1 выполняется равенство $z = h - \frac{h}{a}x$, то $z'_x = -\frac{h}{a}$, $z'_y = 0$. Следовательно,

$$I = -2 \iint\limits_D \left(1 + \frac{h}{a}\right) dx\, dy = -2 \left(1 + \frac{h}{a}\right) \pi a^2 = -2\pi a(a+h). \blacktriangleright$$

201. $I = \oint\limits_\gamma (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$, где γ — кривая, полученная в результате пересечения полусферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ z > 0\}$ и поверхности $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2rx,\ z \in \mathbb{R}\}$, $0 < r < R$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне полусферы S наименьшая область остается слева.

◀ Применив формулу Стокса, получим поверхностный интеграл

$$I = 2 \iint\limits_{S_2} (y - z)\, dy\, dz + (z - x)\, dz\, dx + (x - y)\, dx\, dy =$$
$$= 2 \iint\limits_{S_2} \big((y - z) \cos\alpha + (z - x) \cos\beta + (x - y) \cos\gamma\big)\, dS,$$

где S_2 — кусок полусферы S, вырезанный из нее поверхностью S_1, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали n к S_2. На множестве S_2 выполнены равенства $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$, $z'_x = \frac{R-x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$. Так как вектор n и орт $\boldsymbol{k}$ оси Oz образуют острый угол, то в формулах для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy$, получим

$$I = 2 \iint\limits_D \big((y - z(x, y))(-z'_x(x, y)) + (z(x, y) - x)(-z'_y(x, y)) + (x - y)\big)\, dx\, dy =$$
$$= 2 \iint\limits_D \left(\frac{(y - z(x, y))(x - R) + (z(x, y) - x)y}{z(x, y)} + x - y\right) dx\, dy = 2R \iint\limits_D \left(1 - \frac{y}{z(x, y)}\right) dx\, dy,$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2rx\}$. Поскольку

$$\iint\limits_D \frac{y}{z(x, y)}\, dx\, dy = \int\limits_0^r dx \int\limits_{-\sqrt{2rx - x^2}}^{\sqrt{2rx - x^2}} \frac{y\, dy}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} = \int\limits_0^r \left(\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}\Big|_{y=\sqrt{2rx - x^2}}^{y=-\sqrt{2rx - x^2}} \right) dx = 0,$$

то окончательно имеем

$$I = 2R \iint\limits_D dx\, dy = 2\pi R r^2. \blacktriangleright$$

202. $I = \oint\limits_\gamma y^2 z^2\, dx + x^2 z^2\, dy + x^2 y^2\, dz$, где γ — замкнутая кривая, заданная уравнениями $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

◀ При изменении t от 0 до π подвижная точка $M = (x, y, z)$ пробегает часть кривой γ от точки $M_0 = (a, a, a)$ до точки $M_1 = (-a, a, -a)$, а при изменении t от π до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой γ в противоположном направлении — от точки M_1 до точки M_0. Таким образом, точки замкнутой кривой γ взаимно накладываются, и эта кривая не ограничивает никакой поверхности. Следовательно, $I = 0$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

139. $I = \oint\limits_{\gamma} xy^2\,dy - x^2y\,dx$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$.

140. $I = \oint\limits_{\gamma} (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$, где $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$.

141. $I = \oint\limits_{\gamma} e^{-(x^2+y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

142. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $(x, y) \mapsto F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} F(x, y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

143. Вычислить $I = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2}$, если $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ и простой замкнутый контур γ окружает начало координат $(ad - bc \neq 0)$.

144. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ и простой контур γ окружает начало координат, причем кривые, определяемые уравнениями $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, имеют несколько простых точек пересечения внутри контура γ.

145. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой γ, заданной уравнением

$$(x + y)^{n+m+1} = ax^n y^m, \; a > 0, \; n > 0, \; m > 0.$$

146. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура γ, расположенного в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$, равен

$$V = -\pi \oint\limits_{\gamma} y^2\,dx.$$

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, если гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали n к поверхности S:

147. $\iint\limits_{S} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$. **148.** $\iint\limits_{S} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

149. $\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS$.

150. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{S} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона границы куба $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant a\}$.

151. Найти объем тела T, ограниченного поверхностью S, заданной уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$, $u \geqslant 0$, $a > 0$, и плоскостями $x = 0$, $z = 0$.

152. Доказать формулу

$$\iiint\limits_{K} \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint\limits_{S} \cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})\,dS,$$

где S — край компакта K, $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности S в точке (ξ, η, ζ), $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 + (\zeta - z)^2}$ и $\boldsymbol{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$ — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ).

153. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, где $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$: а) непосредственно; б) используя формулу Стокса (в качестве поверхности S взять полусферу, заданную уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$). Интегрирование по окружности вести в положительном направлении.

154. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{\gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ с плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

155. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{AmB} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии, заданной уравнениями $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \frac{h}{2\pi}\varphi$, от точки $A = (a, 0, 0)$ до точки $B = (a, 0, h)$.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

156. $I = \oint\limits_{\gamma} (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, где γ — эллипс, заданный уравнениями $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

157. $I = \oint\limits_{\gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, где γ — сечение поверхности куба $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a\}$ плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

§ 6. Элементы векторного анализа

6.1. Скалярные и векторные поля.

Если каждой точке M пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, или некоторой области этого пространства поставлено в соответствие некоторое число $f(M)$, то говорят, что задано скалярное поле f (например, поле давления в атмосфере, поле плотности сплошного распределения массы в объеме V и т. д.).

Если каждой точке M пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, или области этого пространства поставлен в соответствие некоторый вектор $\boldsymbol{u}(M)$, то говорят, что задано векторное поле $\boldsymbol{u}$ (например, поле тяготения системы масс или сплошного распределения массы в ограниченном объеме, поле плотности импульса, поле плотности тока, поле магнитных сил и т. п.).

6.2. Плотность аддитивной функции областей. Восстановление аддитивной функции по ее плотности.

Пусть $\Phi(K)$ — аддитивная функция компакта K, т.е. функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi(K_1 \cup K_2) = \Phi(K_1) + \Phi(K_2)$$

для любых двух компактов без общих внутренних точек. Число

$$\varphi(M) = \lim_{K \to M} \frac{\Phi(K)}{\mu K}, \tag{1}$$

где μK — мера компакта K, называется *плотностью функции* Φ в точке $M \in K$.

Если плотность $\varphi(M)$ аддитивной функции областей Φ непрерывна или кусочно-непрерывна на компакте K, то

$$\Phi(K) = \int\limits_{K} \varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

6.3. Дифференциальный оператор Гамильтона.

Пусть $\{\varphi(M), \boldsymbol{u}(M), \dots\}$ — множество скалярных и векторных полей, имеющих непрерывные производные по всем координатам, и пусть $T(\boldsymbol{p}) = T(\boldsymbol{p}; \varphi(M), \boldsymbol{u}(M), \dots)$ — некоторое выражение, имеющее смысл скаляра или вектора, линейное относительно произвольного вектора $\boldsymbol{p}$:

$$T(\alpha_1 \boldsymbol{p}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{p}_2) = \alpha_1 T(\boldsymbol{p}_1) + \alpha_2 T(\boldsymbol{p}_2),$$

где α_1, α_2 — произвольные действительные числа.

Пусть $\boldsymbol{p} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$. Тогда, в силу линейности T, имеем

$$T(\boldsymbol{p}) = aT(\boldsymbol{i}) + bT(\boldsymbol{j}) + cT(\boldsymbol{k}). \tag{1}$$

Полагаем

$$T(\nabla) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} T(\boldsymbol{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T(\boldsymbol{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T(\boldsymbol{k}), \tag{2}$$

заменяя в (1) компоненты вектора $\boldsymbol{p}$ символами дифференцирования по x, y и z соответственно.

Символ ∇ (набла) называется *дифференциальным оператором Гамильтона.*

В векторном анализе наиболее важными выражениями T, о которых упоминалось выше, являются:

а) $T(\boldsymbol{p}; \varphi) = \boldsymbol{p}\varphi$ (φ — скалярное поле);
б) $T(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u} \rangle$ (скалярное произведение);
в) $T(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}]$ (векторное произведение).

На основании (2) получаем:

а) $T(\nabla) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$;

б) $T(\nabla) = \langle \nabla, \boldsymbol{u} \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, если $\boldsymbol{u} = (P, Q, R)$;

в) $T(\nabla) = [\nabla, \boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$

Вектор в правой части а) называется *градиентом скалярного поля* φ. Выражение в правой части б) называется *расходимостью* (или *дивергенцией*) *векторного поля* $\boldsymbol{u}$. Вектор в правой части в) называется *вихрем* (или *ротором*) *векторного поля* $\boldsymbol{u}$.

6.4. Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля.

Пусть φ — скалярное поле, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, γ — гладкая кривая, лежащая в Ω и проходящая через фиксированную точку $M_0 \in \Omega$, Δl — длина дуги кривой от точки M_0 до точки M. Если при $M \to M_0$ существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta\varphi(M_0)}{\Delta l} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l},$$

то он называется *производной скалярного поля* φ в точке M_0 вдоль кривой γ и обозначается $\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}. \tag{1}$$

Если функция φ дифференцируема в точке M_0, то ее производная вдоль кривой γ существует и для всех кривых, выходящих из точки M_0 с одной и той же касательной $\tau = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, значение этой производной одно и то же, а сама производная называется *производной по данному направлению* τ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0) = \langle \operatorname{grad}\varphi(M_0), \tau \rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0)\cos\alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0)\cos\beta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0)\cos\gamma_1. \tag{2}$$

Вектор $\operatorname{grad}\varphi(M_0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0)\right)$ направлен из точки M_0 в сторону быстрейшего возрастания скалярного поля φ, а его евклидова норма равна абсолютной величине производной поля φ в этом направлении.

На гладкой поверхности уровня $\varphi(M) = C$, $C = \text{const}$, касательная плоскость к поверхности в точке M_0 ортогональна вектору $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$.

6.5. Потенциальные векторные поля. Циркуляция векторного поля.

Любое векторное поле u, совпадающее с полем градиента некоторого скалярного поля φ, называется *потенциальным*, а функцию φ называют в этом случае *потенциалом поля* u.

Если вектор поля u имеет физический смысл силы, то потенциал φ этого поля имеет физический смысл работы. Работа A силы u на гладкой или кусочно-гладкой кривой γ, соединяющей точку M_0 с точкой M_1, вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{\gamma} \langle u, \tau \rangle \, dl, \tag{1}$$

где τ — единичный касательный вектор к кривой γ.

В силу условия $u = \operatorname{grad} \varphi$, из (1) получаем

$$A = \int\limits_{M_0M_1} \langle \operatorname{grad} \varphi, \tau \rangle \, dl = \int\limits_{M_0M_1} \frac{\partial \varphi}{\partial l} \, dl = \varphi(M_1) - \varphi(M_0), \tag{2}$$

т.е. работа силы на пути M_0M_1 равна разности потенциалов в точках M_1 и M_0.

Если u — произвольное непрерывное векторное поле, то интеграл по замкнутому контуру

$$\oint\limits_{\gamma} \langle u, \tau \rangle \, dl \tag{3}$$

называется *циркуляцией поля* u по контуру γ.

Циркуляция непрерывного потенциального векторного поля u по всякому замкнутому контуру γ, лежащему в односвязной области, равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если циркуляция непрерывного векторного поля u равна нулю по любому замкнутому контуру γ, лежащему в односвязной области, то поле u потенциально.

6.6. Поток и расходимость векторного поля.

Пусть S — конечная гладкая или кусочно-гладкая поверхность, u — векторное поле, заданное в области Ω, содержащей все точки поверхности S. Выражение

$$w(u; S) = \iint\limits_{S} \langle u, n \rangle \, dS, \tag{1}$$

где n — единичный вектор нормали, характеризующий сторону поверхности, называется *потоком поля* u через поверхность S. Вычисление потока является линейной операцией. Если поверхность S, ограничивающая область Ω, замкнута и при стягивании области Ω в точку M существует конечный предел

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{w(u; S)}{\mu\Omega},$$

где $\mu\Omega$ — жорданова мера множества Ω, то он называется *расходимостью* или *дивергенцией векторного поля* u в точке $M \in \Omega$ и обозначается $\operatorname{div} u(M)$:

$$\operatorname{div} u(M) = \lim_{\Omega \to M} \frac{1}{\mu\Omega} \iint\limits_{S} \langle u, n \rangle \, dS. \tag{2}$$

Таким образом, по определению $\operatorname{div} u(M)$ есть плотность аддитивной функции областей — потока векторного поля u через замкнутую поверхность S. Если компоненты поля $u = (P, Q, R)$ имеют в области Ω непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, то справедлива формула

$$\operatorname{div} u(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M), \tag{3}$$

получаемая на основании формулы (2), формулы Остроградского и теоремы о среднем.

Ранее, в п.6.3, показали, что $\operatorname{div} u = \langle \nabla, u \rangle$, где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

6.7. Вихрь векторного поля.

Пусть u — непрерывное векторное поле, заданное в конечной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей S, $n(M)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке M. Вектор-функция

$$Q(\Omega) = \iint\limits_S [n,\, u]\, dS \tag{1}$$

называется *циркуляцией поля u* по границе области Ω. Если существует конечный предел

$$q(P) = \lim_{\Omega \to P} \frac{Q(\Omega)}{\mu\Omega}, \tag{2}$$

то вектор q называется *вихрем* или *ротором поля u* в точке $P \in \Omega$ и обозначается $\operatorname{rot} u(P)$:

$$\operatorname{rot} u(P) = \lim_{\Omega \to P} \frac{1}{\mu\Omega} \iint\limits_S [n,\, u]\, dS, \tag{3}$$

где $\mu\Omega$ — жорданова мера множества Ω.

Таким образом, по определению, $\operatorname{rot} u(P)$ есть плотность аддитивной функции областей — циркуляции векторного поля u по границе области Ω.

Если компоненты поля $u = (P,\, Q,\, R)$ имеют непрерывные частные производные по переменным x, y и z, то вихрь поля u в точке $P' \in \Omega$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname{rot} u(P') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k. \tag{4}$$

В п.6.3 было показано, что $\operatorname{rot} u = [\nabla,\, u]$.

Классические формулы Остроградского и Стокса в обозначениях векторного анализа принимают соответственно вид

$$\iiint\limits_{\Omega \cup S} \operatorname{div} u\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \langle u,\, n\rangle\, dS, \tag{5}$$

$$\iint\limits_S \langle \operatorname{rot} u,\, n\rangle\, dS = \oint\limits_\gamma \langle u,\, \tau\rangle\, dl. \tag{6}$$

Определение. *Если в каждой точке M области Ω выполняется равенство* $\operatorname{rot} u(M) = 0$, *то поле u называется безвихревым.*

Теорема. В односвязной области всякое безвихревое поле потенциально.

6.8. Дифференциальные операции первого порядка.

В выражениях $T(\nabla;\, \varphi,\, u,\, \ldots)$, рассмотренных в п.6.3, можно производить любые тождественные преобразования, допускаемые правилами линейной алгебры, считая при этом символ ∇ вектором, например:

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi_1 + \varphi_2) &= \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2, \\ \langle \nabla,\, u_1 + u_2\rangle &= \langle \nabla,\, u_1\rangle + \langle \nabla,\, u_2\rangle, \\ [\nabla,\, u_1 + u_2] &= [\nabla,\, u_1] + [\nabla,\, u_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема. Если оператор ∇ действует на произведение (численное, скалярное, векторное) двух величин, то результат можно представать как сумму двух слагаемых того же вида, в каждом из которых ∇ действует на один из сомножителей и не действует на другой, аналогично правилу обычного дифференцирования произведения двух числовых функций.

203. Пусть $u = xy - z^2$, $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $M = (-9,\, 12,\, 10)$. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy?

◀ Используя определение градиента скалярного поля, получаем

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right) = (12, -9, -20), \quad \|\operatorname{grad} u(M)\| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2} = 25.$$

Направление $\operatorname{grad} u(M)$ определяется вектором

$$e(M) = \frac{\operatorname{grad} u(M)}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \left(\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5}\right) = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1).$$

Единичный вектор τ, выходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид $\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Согласно формуле (2), п.6.4, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \langle \operatorname{grad} u(M), \tau\rangle = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

204. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: а) перпендикулярен к оси Oz; б) параллелен оси Oz; в) равен нулю?

◀ Из определения градиента скалярного поля следует, что $\operatorname{grad} u(x, y, z) = \big(3(x^2 - yz), 3(y^2 - xz), 3(z^2 - xy)\big)$. В случае а) имеем $\langle \operatorname{grad} u, k\rangle = 3(z^2 - xy) = 0$, откуда $z^2 = xy$.

В случае б) вектор $\operatorname{grad} u(x, y, z)$ колинеарен орту k оси Oz, вследствие чего в каждой точке искомого множества должны одновременно выполняться равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$. Исключив из них z, найдем $x^3 - y^3 = 0$, откуда $x = y$ и $x^2 + xy + y^2 = 0$. Второе равенство выполняется лишь в случае, когда $x = y = 0$. Подставляя $x = y$ в любое из исходных равенств, получаем, что $x = y = z$. Следовательно, градиент скалярного поля u параллелен оси Oz в точках $x = y = 0$ и в точках $x = y = z$.

В случае в) получаем равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$, $z^2 - xy = 0$, которые должны выполняться одновременно. Используя результат, полученный при рассмотрении случая б), имеем $x = y = z$. ▶

205. Дано скалярное поле $u = \ln\frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ выполняется равенство $\|\operatorname{grad} u\| = 1$?

◀ Принимая во внимание равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}$, получаем $\|\operatorname{grad} u\| = \frac{1}{r}$.

Равенство $\|\operatorname{grad} u\| = 1$ выполняется на сфере единичного радиуса с центром в точке $M = (a, b, c)$, т.е. на множестве точек $r = 1$. ▶

206. Найти косинус угла α между градиентами поля $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A = (1, 2, 2)$ и $B = (-3, 1, 0)$.

◀ Косинус угла α вычислим по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\langle \operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B)\rangle}{\|\operatorname{grad} u(A)\|\,\|\operatorname{grad} u(B)\|}.$$

Обозначив $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, последовательно получим

$$u = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{r^4}, \quad r(A) = 3, \quad r(B) = \sqrt{10},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{7}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -\frac{4}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A) = -\frac{4}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(B) = -\frac{2}{25}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(B) = \frac{3}{50}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(B) = 0,$$

$$\langle \operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B)\rangle = -\frac{4}{405}, \quad \|\operatorname{grad} u(A)\|\,\|\operatorname{grad} u(B)\| = \frac{1}{90}, \quad \cos\alpha = -\frac{4}{405} : \frac{1}{90} = -\frac{8}{9}. \blacktriangleright$$

207. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

◀ Рассмотрим скалярное поле $\varphi(M) = f(r)$, $r \in \mathbb{R}$, где f — дифференцируемая функция. Его поверхности уровня — сферы с центром в начале координат $O = (0, 0, 0)$. Градиент поля

φ направлен по нормали к сфере, т.е. по радиусу OM. Функция f возрастает, если $f'(r) > 0$, и убывает, если $f'(r) < 0$, поэтому вектор $\operatorname{grad} f(r)$ направлен в сторону возрастания r, если $f'(r) > 0$, и в сторону убывания r, если $f'(r) < 0$, причем $\|\operatorname{grad} f(r)\| = |f'(r)|$. В силу сказанного выше, имеем

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радиус–вектор точки $M = (x, y, z)$.

В случае а) $f'(r) = 1$, поэтому $\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = e(O, M)$. В случае б) $f'(r) = 2r$, поэтому $\operatorname{grad} r^2 = 2\boldsymbol{r}$. В случае в) $f'(r) = -\frac{1}{r^2}$, в силу чего $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. ►

208. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\langle\nabla u, \nabla v\rangle$, где $\nabla^2 = \langle\nabla\cdot\nabla\rangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

◄ Записав $\nabla^2(uv) = \langle\nabla, \nabla(uv)\rangle$ и воспользовавшись правилами действий оператором Гамильтона, получим

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v, \quad \langle\nabla, \nabla(uv)\rangle = \langle\nabla, v\nabla u\rangle + \langle\nabla, u\nabla v\rangle =$$
$$= v\nabla^2 u + \langle\nabla u, \nabla v\rangle + u\nabla^2 v + \langle\nabla v, \nabla u\rangle = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\langle\nabla u, \nabla v\rangle. ►$$

209. Доказать, что если функция u дифференцируема в выпуклой области $V \subset \mathbb{R}^3$ и $\|\operatorname{grad} u\| \leqslant M$, где $M = \text{const}$, то для любых точек A и B из V имеем $|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A, B)$, где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B.

◄ Обозначив $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$, $P = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ и используя свойство дифференцируемости функции u, получим

$$|u(A) - u(B)| = |du(\boldsymbol{\xi})|, \quad \boldsymbol{\xi} \in V.$$

Поскольку

$$|du(\boldsymbol{\xi})| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})(x_0 - x_1) + \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{\xi})(y_0 - y_1) + \frac{\partial u}{\partial z}(\boldsymbol{\xi})(z_0 - z_1)\right| =$$
$$= |\langle\operatorname{grad} u(\boldsymbol{\xi}), P\rangle| \leqslant \|\operatorname{grad} u(\boldsymbol{\xi})\|\,\|P\| = \|\operatorname{grad} u(\boldsymbol{\xi})\|\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} =$$
$$= \|\operatorname{grad} u(\boldsymbol{\xi})\|\rho(A, B) \leqslant M\rho(A, B),$$

то $|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A, B)$. ►

210. Найти производную поля $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, в данной точке $M = (x, y, z)$ в направлении радиуса–вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

◄ По формуле (2), п.6.4, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M) = \left\langle\operatorname{grad} u(M), \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right\rangle = \frac{1}{r}\langle\operatorname{grad} u(M), \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{r}\left(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2}\right) = \frac{2}{r}u(M),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Из условия $\frac{\partial u}{\partial e}(M) = \|\operatorname{grad} u(M)\|$ получаем $\frac{\operatorname{grad} u(M)}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Последнее равенство, как легко проверить, выполняется, если $a = b = c$. ►

211. Найти дивергенцию поля $\boldsymbol{u} = \dfrac{-\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M = (3, 4, 5)$. Чему приближенно равен поток вектора $\boldsymbol{u}$ через бесконечно малую сферу

$$S_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = \varepsilon^2\}?$$

◄ С помощью формулы (3), п.6.6, получаем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}(M) = \frac{18}{125}.$$

Дивергенция поля $\boldsymbol{u}$ является плотностью аддитивной функции областей — потока $w(\boldsymbol{u};\ S)$, для восстановления которого следует применить формулу (2), п.6.2:

$$w(\boldsymbol{u};\ S) = \iiint\limits_T \operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz,$$

где $T = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \leqslant \varepsilon^2\}$.

Поскольку шар бесконечно мал, т.е. $\varepsilon \to +0$, то можем взять $\operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,\ y,\ z) \approx \operatorname{div} \boldsymbol{u}(M) = \frac{18}{125}$. При этом получим

$$w(\boldsymbol{u};\ S) \approx \iiint\limits_T \operatorname{div} \boldsymbol{u}(M)\, dx\, dy\, dz = \frac{18}{125} \cdot \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = \frac{24}{125}\pi\varepsilon^3. \ ▶$$

212. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В каком случае $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$?

◀ В примере 207 получена формула $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}$ в предположении, что функция f дифференцируема. Здесь будем считать, что она дважды дифференцируема. Обозначив $\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r)$, запишем упомянутую формулу в виде $\operatorname{grad} f(r) = \varphi(r)\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$.

Пользуясь оператором ∇ и правилами действий с ним, получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = \langle \nabla,\ \varphi(r)\boldsymbol{r}\rangle = \langle \boldsymbol{r},\ \nabla\varphi(r)\rangle + \varphi(r)\langle\nabla,\ \boldsymbol{r}\rangle =$$
$$= \langle \boldsymbol{r},\ \operatorname{grad}\varphi(r)\rangle + \varphi(r)\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{r},\ \operatorname{grad}\varphi(r)\rangle + 3\varphi(r),$$

так как $\operatorname{div}\boldsymbol{r} = 3$. Принимая во внимание равенства $\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r}\boldsymbol{r}$, $\langle \boldsymbol{r},\ \operatorname{grad}\varphi\rangle = \left\langle \boldsymbol{r},\ \frac{\varphi'(r)}{r}\boldsymbol{r}\right\rangle = \frac{\varphi'(r)}{r}r^2 = r\varphi'(r)$, находим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r) = f''(r) - \frac{f'(r)}{r} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r},$$

так как $\varphi'(r) = \frac{f''(r)}{r} + \frac{f'(r)}{r^2}$.

Приравнивая $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$ к нулю, получим дифференциальное уравнение $(rf'(r))' + f'(r) = 0$, решая которое, находим $rf'(r) + f(r) = c_1$. Применив метод вариации произвольной постоянной, окончательно получим $f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$, где $c_1,\ c_2$ — произвольные постоянные. ▶

213. Найти: а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

◀ Применив оператор ∇, получим:

а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = \langle\nabla,\ u \operatorname{grad} u\rangle = \langle \operatorname{grad} u,\ \nabla u\rangle + u\langle\nabla,\ \operatorname{grad} u\rangle = \langle \operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} u\rangle + u\langle\nabla,\ \nabla u\rangle = |\operatorname{grad} u|^2 + u\nabla^2 u = |\operatorname{grad} u|^2 + u\,\Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \langle\nabla,\ u \operatorname{grad} v\rangle = \langle \operatorname{grad} v,\ \nabla u\rangle + u\langle\nabla,\ \operatorname{grad} v\rangle = \langle \operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v\rangle + u\,\Delta v$. ▶

214. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против хода часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Найти расходимость вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и вектора ускорения $\boldsymbol{w}$ в точке $M = (x,\ y,\ z)$ пространства в данный момент времени.

◀ Линейная скорость $\boldsymbol{v}$ частицы жидкости в точке M равна вектору $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{r}]$, где $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$. Получаем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}\omega x - \boldsymbol{i}\omega y, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0.$$

Ускорение $\boldsymbol{w}(x,\ y,\ z)$ выражается формулой

$$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{\omega},\ [\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{r}]] = \boldsymbol{\omega}\langle\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{r}\rangle - \boldsymbol{r}\langle\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega}\rangle = \boldsymbol{k}\omega^2 z - \omega^2\boldsymbol{r} = -\omega^2(\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y).$$

Согласно формуле (3), п.6.6, имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w}(x,\ y,\ z) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega^2 x) + \frac{\partial}{\partial y}(-\omega^2 y) = -2\omega^2. \ ▶$$

215. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого системой притягивающих центров.

◀ Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P})$, создаваемое системой материальных точек m_j, $j = \overline{1, n}$, помещенных в точках M_j, $j = \overline{1, n}$. Это поле задано формулой

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{r^3(P, M_j)} \boldsymbol{r}(P, M_j), \quad P \neq M_j,$$

где $\boldsymbol{r}(P, M_j)$ — радиус-вектор, проведенный из точки P в точку M_j, $r(P, M_j)$ — его длина. Поскольку вычисление дивергенции является линейной операцией, то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div} \left(\frac{m_j}{r^3(P, M_j)} \boldsymbol{r}(P, M_j) \right).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению расходимости поля $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{P}) = \varphi_j(r)\boldsymbol{r}$, где $\varphi_j(r) = \frac{m_j}{r^3(P, M_j)}$, рассмотренного в примере 212. Там было показано, что $\operatorname{div} \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{P}) = r\varphi_j'(r) + 3\varphi_j(r)$. Подставив сюда $r\varphi_j'(r) = -3\frac{m_j}{r^3}$, получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{P}) = -\frac{3m_j}{r} + \frac{3m_j}{r} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}) = 0.$$

Результат объясняется тем, что поле тяготения не имеет источников вне масс m_j, в силу чего мощность источников этого поля, характеризуемая расходимостью, равна нулю. ▶

216. Доказать формулу $\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{u}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + [\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{u}]$.

◀ Применив оператор Гамильтона, находим

$$\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{u}) = [\nabla, \varphi \boldsymbol{u}] = [\nabla, \varphi \boldsymbol{u}_c] + [\nabla, \varphi_c \boldsymbol{u}],$$

где значок "с" указывает, что оператор набла на данный объект не действует. Если объект, на который оператор ∇ не действует, находится позади ∇, то будем индекс "с" опускать. Имеем

$$\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{u}) = -[\boldsymbol{u}, \nabla\varphi] + \varphi[\nabla, \boldsymbol{u}] = -[\boldsymbol{u}, \operatorname{grad}\varphi] + \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + [\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{u}]. \ ▶$$

217. Найти $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

◀ На основании формулы, доказанной в примере 216, имеем: $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r}) = [\nabla, f(r)\boldsymbol{r}] = f(r) \operatorname{rot} \boldsymbol{r} + [\operatorname{grad} f(r), \boldsymbol{r}]$. С помощью формулы (4), п.6.7, находим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Решая пример 207, мы нашли, что $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}$. Таким образом, окончательно имеем:

$$\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r}) = \left[\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\right] = 0. \ ▶$$

218. Найти а) $\operatorname{rot} \boldsymbol{c}f(r)$; б) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, f(r)\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

◀ а) Пользуясь обозначениями и правилами, которые были применены при решении примера 216, получаем:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{c}f(r) = [\nabla, \boldsymbol{c}f(r)] = [\nabla, \boldsymbol{c}f_c(r)] + [\nabla, \boldsymbol{c}_c f(r)] = f(r)[\nabla, \boldsymbol{c}] - [\mathbf{c}, \nabla f(r)] =$$

$$= f(r) \operatorname{rot} \boldsymbol{c} + [\operatorname{grad} f(r), \mathbf{c}] = \left[\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}\right] = \frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}].$$

б) Воспользуемся известной формулой векторной алгебры: $[a, [b, c]] = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$. Действуя оператором ∇ на вектор $[c, R]$, где $R = f(r)r$, находим:

$$\operatorname{rot}[c, R] = [\nabla, [c, R]] = [\nabla, [c, R_c]] + [\nabla, [c_c, R]] =$$
$$= c\langle\nabla, R_c\rangle - R\langle\nabla, c\rangle + c\langle\nabla, R\rangle - R\langle\nabla, c_c\rangle = \langle R, \nabla\rangle c - R\langle\nabla, c\rangle + c\langle\nabla, R\rangle - \langle c, \nabla\rangle R =$$
$$= \langle R, \nabla\rangle c - R\operatorname{div} c + c\operatorname{div} R - \langle c, \nabla\rangle R.$$

Так как c — постоянный вектор, то справедливы равенства

$$\langle R, \nabla\rangle c = f(r)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)c = f(r)\left(x\frac{\partial c}{\partial x} + y\frac{\partial c}{\partial y} + z\frac{\partial c}{\partial z}\right) = 0, \quad \operatorname{div} c = 0,$$

в силу которых

$$\operatorname{rot}[c, R] = c\operatorname{div} R - \langle c, \nabla\rangle R. \qquad (*)$$

При решении примера 212 мы нашли $\operatorname{div} R = rf'(r) + 3f(r)$. Чтобы решить пример до конца, требуется вычислить $\langle c, \nabla\rangle R$. Пусть вектор c имеет вид $c = (\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда получим:

$$\langle c, \nabla\rangle R = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f(r)r =$$
$$= \alpha\left(\frac{f'(r)}{r}xr + if(r)\right) + \beta\left(\frac{f'(r)}{r}yr + jf(r)\right) + \gamma\left(\frac{f'(r)}{r}zr + kf(r)\right) =$$
$$= f(r)c + \frac{f'(r)}{r}r\langle c, r\rangle.$$

Подставляя полученные выражения в $(*)$, находим:

$$\operatorname{rot}[c, f(r)r] = c\left(rf'(r) + 3f(r)\right) - f(r)c - \frac{f'(r)}{r}r\langle c, r\rangle =$$
$$= 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r}c\langle r, r\rangle - \frac{f'(r)}{r}r\langle c, r\rangle = 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r}\left(c\langle r, r\rangle - r\langle c, r\rangle\right). \blacktriangleright$$

219. Доказать формулу $\operatorname{div}[R_1, R_2] = \langle R_2, \operatorname{rot} R_1\rangle - \langle R_1, \operatorname{rot} R_2\rangle$.

◄ Действуя по той же схеме, что и при решении примеров 216—218, получаем:

$$\operatorname{div}[R_1, R_2] = \langle\nabla, [R_1, R_2]\rangle = \langle\nabla, [R_1, R_2^c]\rangle + \langle\nabla, [R_1^c, R_2]\rangle =$$
$$= \langle R_2, [\nabla, R_1]\rangle - \langle R_1, [\nabla, R_2]\rangle = \langle R_2, \operatorname{rot} R_1\rangle - \langle R_1, \operatorname{rot} R_2\rangle.$$

(воспользовались известным правилом векторной алгебры для смешанного произведения: $\langle a, [b, c]\rangle = \langle b, [c, a]\rangle = \langle c, [a, b]\rangle$). ►

220. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти вихрь вектора линейной скорости v в точке пространства $M = (x, y, z)$ в данный момент времени.

◄ Направление вектора угловой скорости ω совпадает с направлением e, поэтому $\omega = \omega e$. Вектор линейной скорости v частицы жидкости в точке M определяется формулой $v = [\omega, r]$, где $r = (x, y, z)$.

Для вычисления вихря векторного поля скоростей v воспользуемся формулой, полученной при решении примера 218, полагая в ней $c = \omega$, $f(r) = 1$. Находим: $\operatorname{rot} v = 2\omega$. ►

221. Найти поток вектора $r = (x, y, z)$: а) через боковую поверхность конуса $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z^2;\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$; б) через основание этого конуса.

◄ Для вычисления потока воспользуемся формулой (1), п.6.6, которая в данном случае принимает вид:

$$w(r; S) = \iint\limits_S \langle n(M), r(M)\rangle\, dS.$$

В случае а) единичный вектор нормали в каждой точке на боковой поверхности $S_б$ конуса ортогонален к вектору r, вследствие чего $w(r; S_б) = 0$.

В случае б) единичный вектор нормали коллинеарен орту k в каждой точке основания $S_\circ$ конуса, поэтому получаем:

$$w(r;\, S_\circ) = \iint\limits_{S_\circ} z\, dS = h \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} dx\, dy = \pi h^3. \blacktriangleright$$

222. Найти поток радиуса–вектора r через поверхность, уравнение которой $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

◀ Поверхность S конуса замкнута, поэтому здесь проще всего воспользоваться формулой восстановления аддитивной функции областей (в данном случае потока) с помощью формулы (2), п.6.2:

$$w(r;\, S) = \iiint\limits_V \operatorname{div} r\, dx\, dy\, dz.$$

Очевидно, $\operatorname{div} r = 3$, в силу чего имеем:

$$w(r;\, S) = 3 \iiint\limits_V dx\, dy\, dz = 3Q,$$

где Q — численное значение объема тела V. Тело V — прямой круговой конус, высота которого и радиус основания равны 1, поэтому $Q = \frac{\pi}{3}$. Окончательно получаем: $w(r;\, S) = \pi$. ▶

223. Найти поток вектора $R = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ через сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

◀ Как и при решении предыдущего примера, воспользуемся формулой

$$w(R;\, S) = \iiint\limits_V \operatorname{div} R\, dx\, dy\, dz,$$

где V — замкнутый шар $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x\}$. Подставив в интеграл значение $\operatorname{div} R = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, получим:

$$w(R;\, S) = 3 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам. После замены найдем:

$$w(R;\, S) = 3 \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sin\theta\cos\varphi} \rho^4\, d\rho = \frac{3}{5} \int\limits_0^\pi \sin^6\theta\, d\theta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{12}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\, d\varphi = \frac{12}{5}\, \frac{5!!}{6!!}\, \frac{\pi}{2}\, \frac{4!!}{5!!} = \frac{\pi}{5}. \blacktriangleright$$

224. Найти поток вектора $u = \dfrac{m}{r^3} r$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S, окружающую начало координат.

◀ По определению потока имеем (считая поверхность гладкой или кусочно–гладкой):

$$w(u;\, S) = \iint\limits_S \langle u,\, n\rangle\, dS = m \iint\limits_S \left(\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right) dS.$$

Решение примера свелось к вычислению интеграла Гаусса (см. пример 186), когда замкнутая поверхность окружает фиксированную точку (в данном случае начало координат). Таким образом, $w(\boldsymbol{u};\, S) = 4\pi m$. ▶

225. Найти поток вектора $\boldsymbol{F}(r) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$, где e_i — постоянные и r_i — расстояния точек M_i (источников) от переменной точки $M(r)$, через замкнутую поверхность S, окружающую точки M_i $(i = \overline{1, n})$.

◀ Векторное поле $\boldsymbol{u}(r)$, рассмотренное в предыдущем примере, можно представить в виде $\boldsymbol{u}(r) = \operatorname{grad}\left(-\frac{m}{r}\right)$, вследствие чего приходим к выводу, что рассматриваемое поле $\boldsymbol{F}(r)$ является суммой полей вида $\boldsymbol{u}(r)$, для которых $m = \frac{e_i}{4\pi}$. На основании решения предыдущего примера можно сразу записать:

$$w(\boldsymbol{F};\, S) = \sum_{i=1}^{n} 4\pi\, \frac{e_i}{4\pi} = \sum_{i=1}^{n} e_i. \ ▶$$

226. Найти работу вектора $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$ вдоль отрезка винтовой линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

◀ Работу поля $\boldsymbol{F}$ вычислим с помощью формулы (1), п.6.5. Найдем единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ в каждой точке кривой:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,\, a\cos t,\, b).$$

Таким образом, получим

$$A = b^2 \int\limits_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2 b^2$$

(приняв во внимание равенства $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, dt$). ▶

227. Найти работу поля $\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{i}}{y} + \frac{\boldsymbol{j}}{z} + \frac{\boldsymbol{k}}{x}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M = (1, 1, 1)$ и $N = (2, 4, 8)$.

◀ Очевидно, $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{|\overline{MN}|}(1, 3, 7) = \left(\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{7}{\sqrt{59}}\right)$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\overrightarrow{MN}$, в силу чего имеем:

$$\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \frac{1}{\sqrt{59}}\left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z} + \frac{7}{x}\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N, имеет вид $x - 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{7}$, и мы можем параметризовать эту прямую, выбрав в качестве параметра переменную x. При этом получим: $x = x$, $y = 3x - 2$, $z = 7x - 6$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{59}\, dx$,

$$A = \int\limits_{MN} \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, dl = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{3x-2} + \frac{3}{7x-6} + \frac{7}{x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln(3x-2) + \frac{3}{7}\ln(7x-6) + 7\ln x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{188}{21}\ln 2. \ ▶$$

228. Найти работу поля $\boldsymbol{R} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$ вдоль меньшей дуги окружности большого круга сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$, если эта дуга соединяет точки $M = (3, 4, 0)$ и $N = (0, 0, 5)$.

◀ Рассматриваемая дуга лежит в плоскости, уравнение которой $y = \frac{4}{3}x$, и представляет собой четверть окружности радиуса 5. Параметризуем эту кривую, выбрав в качестве параметра угол φ, образованный радиусом–вектором точки кривой, лежащим в упомянутой выше плоскости, с его проекцией на плоскость xOy. Тогда параметрические уравнения данной дуги будут иметь вид $x = 3\cos\varphi$, $y = 4\cos\varphi$, $z = 5\sin\varphi$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, и единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ в каждой ее точке будет выражаться формулой

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2}}\left(x'(\varphi),\, y'(\varphi),\, z'(\varphi)\right) = \left(-\frac{3}{5}\sin\varphi,\, -\frac{4}{5}\sin\varphi,\, \cos\varphi\right).$$

Вектор $\boldsymbol{R}$ на данной дуге принимает вид

$$\boldsymbol{R} = (4\cos\varphi + 5\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (5\sin\varphi + 3\cos\varphi)\boldsymbol{j} + (7\cos\varphi)\boldsymbol{k},$$

поэтому имеем: $\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 7\cos 2\varphi - \frac{12}{5}\sin 2\varphi$. Применив формулу (1), п.6.5, и приняв во внимание равенство $dl = 5\,d\varphi$, получим:

$$A = \int\limits_{MN} \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, dl = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(7\cos 2\varphi - \frac{12}{5}\sin 2\varphi\right) d\varphi = 5\left(\frac{7}{2}\sin 2\varphi + \frac{6}{5}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12. \ ▶$$

229. Найти циркуляцию Γ вектора $\boldsymbol{R} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$; б) вдоль окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$.

◀ Циркуляция поля $\boldsymbol{R}$ вдоль замкнутого контура γ равна, по определению, интегралу

$$\Gamma = \oint_\gamma \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, dl.$$

В случае а) возьмем параметрические уравнения окружности в виде $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Тогда получим: $\boldsymbol{\tau} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi + \boldsymbol{k}c$, $\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 1$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \oint_\gamma \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, dl = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В случае б) параметрические уравнения окружности берем в виде $x = 2 + \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. При этом получаем: $\boldsymbol{\tau} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}(2 + \cos\varphi) + \boldsymbol{k}c$, $\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 1 + 2\cos\varphi$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \int\limits_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi)\, d\varphi = 2\pi. \ ▶$$

230. Найти циркуляцию Γ вектора $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ вдоль контура γ в двух случаях: а) γ не окружает оси Oz; б) γ окружает ось Oz.

◀ Поле $\boldsymbol{R}$ — потенциальное, поэтому в случае а) его циркуляция Γ вдоль любого контура, не содержащего особых точек функции $(x, y) \mapsto \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, равна нулю.

В случае б) имеем:

$$\Gamma = \oint_\gamma \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, dl = \oint_\gamma \left\langle \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right), \boldsymbol{\tau}\right\rangle dl = \oint_\gamma \frac{\partial}{\partial l}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) dl = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_\gamma$$

(напомним читателю, что выражение $\langle \operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{\tau}\rangle$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор к некоторой кривой, равно производной скалярного поля φ вдоль этой кривой).

Обозначив $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, получаем, что циркуляция поля $\boldsymbol{R}$ по замкнутому контуру γ равна приращению угла θ при его обходе. При каждом полном обходе угол θ получает приращение

2π (так как контур γ окружает ось Oz и его проекция на плоскость xOy окружает начало координат), поэтому в общем случае $\Gamma = 2\pi n$, где n — число полных обходов контура γ вокруг оси Oz. ▶

231. Дано векторное поле $\boldsymbol{R} = \frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j} + \sqrt{xy}\boldsymbol{k}$. Вычислить $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}$ в точке $M = (1, 1, 1)$ и найти приближенно циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности $L = S \cap T$, где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = \varepsilon^2\}$, T — плоскость, заданная уравнением $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

◀ Применив формулу (4), п.6.7, получим:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{\sqrt{z}}\right)\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{xy})\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{z\sqrt{z}}\right)\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)\boldsymbol{j} - \frac{2}{\sqrt{z}}\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(M) = -\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Циркуляцию Γ поля $\boldsymbol{R}$ вдоль заданной окружности вычислим с помощью формулы Стокса

$$\Gamma = \iint_{\sigma} \langle \boldsymbol{n}, \operatorname{rot}\boldsymbol{R} \rangle \, d\sigma,$$

где σ — кусок плоскости T, ограниченный окружностью L. На плоскости T имеем: $z = 1 - \frac{1}{\cos\gamma}\big((x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta\big)$, $z'_x = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z'_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\langle \boldsymbol{n}, \operatorname{rot}\boldsymbol{R}(M)\rangle = -\cos\beta - 2\cos\gamma$.

Подставив скалярное произведение под знак интеграла, найдем:

$$\Gamma \approx -\iint_{\sigma} (\cos\beta + 2\cos\gamma)\, d\sigma = -(\cos\beta + 2\cos\gamma)\pi\varepsilon^2,$$

так как σ — круг радиуса ε, лежащий в рассматриваемой плоскости T. ▶

232. Показать, что поле $\boldsymbol{R} = yz(2x+y+z)\boldsymbol{i} + xz(x+2y+z)\boldsymbol{j} + xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ потенциальное и найти его потенциал.

◀ Поле потенциально, поскольку $\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ (убедиться в этом предоставляем читателю). В силу потенциальности поля $\boldsymbol{R}$, имеем: $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

Из равенств $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz(2x+y+z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz(x+2y+z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy(x+y+2z)$ находим: $\varphi(x, y, z) = xyz(x+y+z) + \psi(y, z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz(x+2y+z) = xz(x+2y+z) + \frac{\partial\psi}{\partial y}$, откуда $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$, $\psi = \Phi(z)$.

Из равенства $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy(x+y+2z) = xy(x+y+2z) + \Phi'(z)$ получаем: $\Phi'(z) = 0$, $\Phi(z) = C$, где $C = \text{const}$.

Окончательно имеем: $\varphi(x, y, z) = xyz(x+y+z) + C$, где C — произвольная постоянная. ▶

233. Найти потенциал гравитационного поля $\boldsymbol{R} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$, создаваемого массой m, находящейся в начале координат.

◀ Принимая во внимание равенство $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\frac{m}{r}$, находим потенциал φ поля $\boldsymbol{R}$: $\varphi = \frac{m}{r}$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

158. Найти угол φ между градиентами функции $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точках $M_1 = (1, 1)$ и $M_2 = (-1, -1)$.

159. Найти производную скалярного поля $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, в направлении $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. В каком случае эта производная равна нулю?

160. Найти производную поля u в направлении градиента поля v. В каком случае эта производная будет равна нулю?

161. Найти

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

162. Вычислить $\operatorname{div}(f(r)c)$, где c — постоянный вектор.

163. Найти $\operatorname{div}(f(r)r)$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?

164. Найти поток вектора $u = xyi + yzj + xzk$ через часть сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, лежащую в первом октанте.

165. Найти поток вектора $u = yzi + xzj + xyk$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $P = (0, 0, 2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$.

166. Доказать, что: а) $\operatorname{rot}(u + v) = \operatorname{rot} u + \operatorname{rot} v$; б) $\operatorname{rot}(vu) = v \operatorname{rot} u + [\operatorname{grad} v, u]$.

167. Найти направление и величину $\operatorname{rot} u$ в точке $M = (1, 2, -2)$, если $u = \frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k$.

168. Найти $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)$.

169. Движущаяся несжимаемая жидкость заполняет область Ω. Предполагая, что в области Ω отсутствуют источники и стоки, вывести уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность жидкости, v — вектор скорости, t — время.

170. Вычислить работу силового поля

$$F = yi + xj + (x + y + z)k$$

вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1 = (2, 3, 4)$ и $M_2 = (3, 4, 5)$.

171. Доказать, что поле $u = f(r)r$, где f — непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

§ 7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах

7.1. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Параметры Ламе.

Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ введена система координат q_1, q_2, q_3 посредством формул

$$x = x(q), \quad y = y(q), \quad z = z(q), \quad q = (q_1, q_2, q_3), \tag{1}$$

связывающих декартовы координаты x, y, z точки $M \in \mathbb{R}^3$ с координатами q_1, q_2, q_3, то ее называют *криволинейной системой координат*. При этом координаты q_i $(1 = 1, 2, 3)$ называют *криволинейными*.

Предположим, что отображение $\Phi = \big(x(q), y(q), z(q)\big)$, $q \in \mathbb{R}^3$, порождаемое системой равенств (1), является C^1-диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^3$ (т.е. Φ непрерывно дифференцируемое вместе с отображением Φ^{-1}).

Определение 1. *Криволинейная система координат q_1, q_2, q_3 называется ортогональной, если векторы $\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}(q)$ $(i = 1, 2, 3)$ взаимно ортогональны:*

$$\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}(q) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}(q), \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle = 0. \tag{2}$$

Сферическая и цилиндрическая системы координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ являются *ортогональными криволинейными системами*.

Действительно, если $\Phi(\rho,\theta,\varphi)=\big(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta\big)$, $\rho\geqslant 0$, $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$, и $\Psi(\rho,\varphi,z)=\big(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z\big)$, $\rho\geqslant 0$, $0<\varphi<2\pi$, $z\in\mathbb{R}$, то имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\big(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta\big),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\big(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ -\rho\sin\theta\big),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=\big(-\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi,\ 0\big),$$

$$\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial\rho},\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right\rangle=0,\quad \left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial\rho},\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\rangle=0,\quad \left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\rangle=0,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}=\big(\cos\varphi,\sin\varphi,0\big),\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}=\big(-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ 0\big),\quad \frac{\partial\Psi}{\partial z}=\big(0,0,1\big),$$

$$\left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial\rho},\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right\rangle=0,\quad \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial\rho},\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right\rangle=0,\quad \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right\rangle=0.$$

Если система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 ортогональна, то векторы $\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}$ $(i=1,2,3)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$, и базис $\left\{e_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}(q);\ i=1,2,3\right\}$, где $H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, является *ортонормированным*. Функции H_i называются *параметрами Ламе*. Базис $\{e_i;\ i=1,2,3\}$ и параметры Ламе изменяются при переходе от точки к точке.

Если в ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 одна координата фиксирована, то отображение Φ определяет многообразие класса C^1 размерности $p=2$ — гладкую поверхность, которую будем называть *координатной поверхностью*. В пространстве $\mathbb{R}^3$ существует три семейства координатных поверхностей. Через каждую фиксированную точку евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ проходит по одной поверхности каждого из трех семейств.

Рассмотрим элементарную ячейку, образованную тремя парами смежных координатных поверхностей, и обозначим dl_1, dl_2, dl_3 длины ребер ячейки. Имеем

$$dl_1=H_1\,dq_1,\quad dl_2=H_2\,dq_2,\quad dl_3=H_3\,dq_3,\tag{3}$$

где H_i $(i=1,2,3)$ — параметры Ламе.

Действительно,

$$dl_i=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}\,dq_i=H_i\,dq_i\quad(i=1,2,3).$$

Вычислим параметры Ламе для случаев перехода от декартовой прямоугольной системы координат к сферической и цилиндрической системам координат.

При переходе к сферической системе координат имеем

$$H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta}=1,\tag{4}$$

$$H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta}=\rho,\tag{5}$$

$$H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}=\rho\sin\theta,\tag{6}$$

а при переходе к цилиндрической системе координат получим

$$H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,\tag{7}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \rho, \tag{8}$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1, \tag{9}$$

Определение 2. *Элементом объема dV в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3, соответствующим приращениям dq_i координат q_i $(i = 1, 2, 3)$ в точке $q = (q_1, q_2, q_3)$, называется объем параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q)\, dq_i$.*

Согласно этому определению имеем

$$dV(q) = \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_1}(q)\, dq_1,\ \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_2}(q)\, dq_2,\ \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_3}(q)\, dq_3\right)}, \tag{10}$$

где $\Gamma\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q)\, dq_1, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q)\, dq_2, \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q)\, dq_3\right)$ — определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q)\, dq_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Принимая во внимание ортогональность векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, получим

$$dV(q) = \sqrt{\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_1}(q) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_2}(q), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_2}(q) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_3}(q), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_3}(q) \right\rangle}\, dq_1\, dq_2\, dq_3 =$$
$$= H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \tag{11}$$

Используя определение 2 и формулы (4)—(11), можно получить известные выражения для элементов объема в сферической и цилиндрической системах координат:

$$dV(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi, \quad dV(\rho, \varphi, z) = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \tag{12}$$

Параметры Ламе называют *масштабными множителями.* Координатные линии, вдоль каждой из которых изменяется лишь один параметр, можно представить как кривые в пространстве $\mathbb{R}^3$, на которые нанесены шкалы этих параметров. Параметры Ламе H_i на этих кривых преобразуют параметры q_i в длины дуг соответствующих кривых.

7.2. Градиент скалярного поля.

Пусть в области $D' \subset \mathbb{R}^3$ задано дифференцируемое скалярное поле $q \mapsto u(q)$. Компонентами вектора $\operatorname{grad} u(q)$ в базисе $\left\{e_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q);\ i = 1, 2, 3\right\}$ являются его проекции $\frac{\partial u}{\partial e_i}(q) = \langle \operatorname{grad} u(q), e_i \rangle$ на направления, определяемые векторами e_i. Поскольку $\langle \operatorname{grad} u(q), e_i \rangle = \frac{1}{H_i} \left\langle \operatorname{grad} u(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) \right\rangle = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}(q)$, то справедливо представление

$$\operatorname{grad} u(q) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}(q) e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}(q) e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}(q) e_3. \tag{1}$$

В частности, в сферической и цилиндрической системах координат вектор–градиент скалярного поля u имеет следующие представления:

$$\operatorname{grad} u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) e_\theta + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) e_\varphi, \tag{2}$$

$$\operatorname{grad} u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi, z) e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi, z) e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}(\rho, \varphi, z) e_z, \tag{3}$$

где $\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}$, $\{e_\rho, e_\varphi, e_z\}$ — ортонормированные базисы, порождаемые отображениями $\boldsymbol{\Phi}'(\rho, \theta, \varphi)$ и $\boldsymbol{\Psi}'(\rho, \varphi, z)$ (см. п.7.1).

7.3. Расходимость и вихрь векторного поля.

Для записи операций расходимости и вихря векторного поля $q \mapsto \boldsymbol{u}(q)$, $q \in D'$, в криволинейных координатах нам понадобятся некоторые вспомогательные вычисления.

Полагая в формуле (1), п.7.2, $u = q_1$, получим

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{1}{H_1} e_1. \tag{1}$$

Взяв операцию вихря от обеих частей равенства (1) и принимая во внимание, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad} q_1 = \mathbf{0}$, имеем

$$\operatorname{rot} \frac{1}{H_1} e_1 = \left[\nabla, \frac{e_1}{H_1}\right] = \frac{1}{H_1}[\nabla, e_1] - \left[e_1, \nabla \frac{1}{H_1}\right] = \frac{1}{H_1} \operatorname{rot} e_1 + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{H_1}, e_1\right] = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Согласно формуле (1), п.7.2, находим

$$\operatorname{grad} \frac{1}{H_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\right) e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1}\right) e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{H_1}\right) e_3 =$$
$$= -\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_3\right) = -\frac{1}{H_1^2} \operatorname{grad} H_1. \tag{3}$$

Таким образом, равенство (2) принимает вид

$$\frac{1}{H_1} \operatorname{rot} e_1 - \frac{1}{H_1^2}[\operatorname{grad} H_1, e_1] = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Следовательно, $\operatorname{rot} e_1 = \frac{1}{H_1}[\operatorname{grad} H_1, e_1]$. Поскольку $[\operatorname{grad} H_1, e_1] = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3$, то

$$\operatorname{rot} e_1 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3. \tag{5}$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\operatorname{rot} e_2 = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_1, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} e_3 = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_2. \tag{7}$$

Вычислим теперь расходимости векторов e_1, e_2, e_3 посредством формулы $\operatorname{div}[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = \langle\nabla, [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]\rangle = \langle \boldsymbol{u}_2, \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_1\rangle - \langle \boldsymbol{u}_1, \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_2\rangle$, полученной при решении примера 219. Приняв во внимание, что $e_1 = [e_2, e_3]$, $e_2 = [e_3, e_1]$, $e_3 = [e_1, e_2]$, имеем:

$$\operatorname{div} e_1 = \langle e_3, \operatorname{rot} e_2\rangle - \langle e_2, \operatorname{rot} e_3\rangle = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}; \tag{8}$$

$$\operatorname{div} e_2 = \langle e_1, \operatorname{rot} e_3\rangle - \langle e_3, \operatorname{rot} e_1\rangle = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}; \tag{9}$$

$$\operatorname{div} e_3 = \langle e_2, \operatorname{rot} e_1\rangle - \langle e_1, \operatorname{rot} e_2\rangle = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}. \tag{10}$$

Если $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, то, в силу линейности операции вычисления расходимости, получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{div}(u_1 e_1) + \operatorname{div}(u_2 e_2) + \operatorname{div}(u_3 e_3) = \langle\nabla, u_1 e_1\rangle + \langle\nabla, u_2 e_2\rangle + \langle\nabla, u_3 e_3\rangle =$$
$$= u_1 \operatorname{div} e_1 + u_2 \operatorname{div} e_2 + u_3 \operatorname{div} e_3 + \langle e_1, \operatorname{grad} u_1\rangle + \langle e_2, \operatorname{grad} u_2\rangle + \langle e_3, \operatorname{grad} u_3\rangle =$$
$$= \frac{u_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} +$$
$$+ \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{u_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_3} =$$
$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(u_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(u_3 H_1 H_2)\right). \tag{11}$$

Если в формуле (11) взять $u = \operatorname{grad} v$, то получим следующее выражение для оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\Delta v = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)\right). \tag{12}$$

Для вычисления вихря векторного поля u воспользуемся линейностью этой операции, формулами (5)—(7), примером 216 и формулой (1), п.7.2:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} u = {} & \operatorname{rot}(u_1 e_1) + \operatorname{rot}(u_2 e_2) + \operatorname{rot}(u_3 e_3) = \\
& = u_1 \operatorname{rot} e_1 + u_2 \operatorname{rot} e_2 + u_3 \operatorname{rot} e_3 + [\operatorname{grad} u_1,\ e_1] + [\operatorname{grad} u_2,\ e_2] + [\operatorname{grad} u_3,\ e_3] = \\
& = \frac{u_1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{u_1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3 + \frac{u_2}{H_2 H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{u_2}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_1 + \\
& + \frac{u_3}{H_3 H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{u_3}{H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_1}{\partial q_2} e_3 + \\
& + \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial u_2}{\partial q_3} e_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_3}{\partial q_1} e_2 = \\
& = \frac{1}{H_3 H_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(H_2 u_2)\right) e_1 + \frac{1}{H_3 H_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 u_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(H_3 u_3)\right) e_2 + \\
& + \frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 u_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 u_1)\right) e_3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Выражение (11) можно рассматривать как результат применения формулы Остроградского к параллелепипеду K, стороны которого равны смещениям вдоль координатных линий, соответствующих приращениям dq_i ($i = 1, 2, 3$), а выражение (13) — как результат применения теоремы Стокса к трем парам граней того же параллелепипеда:

$$\operatorname{div} u(q) = \lim_{K \to q} \frac{1}{\mu K} \iint\limits_S \langle n,\ u\rangle\, dS, \quad \langle \operatorname{rot} u,\ n\rangle = \lim_{S \to q} \frac{1}{\mu S} \oint\limits_L \langle \tau,\ u\rangle\, dl,$$

где $\mu K = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$ — объем параллелепипеда, S — его граница, n — вектор внешней единичной нормали к поверхности S, μS — площадь поверхности S, L — объединение контуров, ограничивающих грани параллелепипеда, τ — единичный касательный к L вектор. При этом следует принять во внимание, что векторы внешней единичной нормали n на гранях параллелепипеда K и векторы τ, касательные к кривой L, совпадают с векторами базиса $\{e_i;\ i = 1, 2, 3\}$ или противоположны им.

Для вычисления расходимости и вихря векторного поля $u = (u_1, u_2, u_3)$ в сферической и цилиндрической системах координат воспользуемся формулами (4)—(9), п.7.1, и формулами (11), (13) этого пункта. Имеем

$$\operatorname{div} u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u_1) + \frac{1}{\rho \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}(u_2 \sin\theta) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \tag{14}$$

$$\operatorname{div} u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} u(\rho, \theta, \varphi) = {} & \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(u_3\sin\theta) - \frac{\partial u_2}{\partial\varphi}\right) e_\rho + \\
& + \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u_3)\right) e_\theta + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u_2) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right) e_\varphi,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\operatorname{rot} u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) e_\rho + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial\rho}\right) e_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u_2) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right) e_z. \tag{17}$$

Если $(\rho, \theta, \varphi) \mapsto u(\rho, \theta, \varphi)$ и $(\rho, \varphi, z) \mapsto v(\rho, \varphi, z)$ — дважды дифференцируемые скалярные поля, то, применив формулу (12) этого пункта и используя формулы (4)—(9), п.7.1.

получим запись оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах:

$$\Delta u = \langle \nabla, \nabla u \rangle = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \tag{18}$$

$$\Delta v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{19}$$

234. Вычислить $\operatorname{grad} u$, где $u(\rho, \theta, \varphi) = 3\rho^2 \sin\theta + e^\rho \cos\varphi - \rho$.

◀ Применим формулу (2), п.7.2. Получим

$$\operatorname{grad} u(\rho, \theta, \varphi) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \left(6\rho \sin\theta + e^\rho \cos\varphi - 1, 3\rho\cos\theta, -\frac{e^\rho \sin\varphi}{\rho \sin\theta} \right). \ ▶$$

235. Вычислить $\operatorname{grad} u$, где $u(\rho, \varphi, z) = \rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z \sin\varphi$.

◀ Согласно формуле (3), п.7.2, имеем

$$\operatorname{grad} u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(2(\rho + \cos\varphi), -\left(2\sin\varphi + \frac{e^z \cos\varphi}{\rho} \right), e^z \sin\varphi \right). \ ▶$$

236. Вычислить $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$, если $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\rho^2, -2\cos^2\varphi, \frac{\varphi}{\rho^2 + 1} \right)$.

◀ Применив формулу (14), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 u_1 \right) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin\theta) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^4 \right) - \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2\cos^2\varphi \sin\theta \right) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varphi}{\rho^2 + 1} \right) = \\ &= 4\rho - \frac{2}{\rho} \cos^2\varphi \operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\rho(\rho^2 + 1)\sin\theta}. \ ▶ \end{aligned}$$

237. Вычислить $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\varphi \operatorname{arctg} \rho, 2, -z^2 e^z \right)$.

◀ Согласно формуле (15), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \varphi \operatorname{arctg} \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2) - \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 e^z \right) = \\ &= \frac{\varphi}{\rho} \left(\operatorname{arctg} \rho + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) + 2ze^z + z^2 e^z. \ ▶ \end{aligned}$$

238. Найти $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, если $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\rho^2, 2\cos\theta, -\varphi \right)$.

◀ Применим формулу (16). Получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\rho, \theta, \varphi) = \\ &= \left(\frac{1}{\rho \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_3 \sin\theta) - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_3), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) = \\ &= \left(-\frac{\varphi}{\rho} \operatorname{ctg}\theta, \frac{\varphi}{\rho}, \frac{2\cos\theta}{\rho} \right). \ ▶ \end{aligned}$$

239. Вычислить $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\cos\varphi, -\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho^2 \right)$.

◀ Согласно формуле (17), имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial z},\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial \rho},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_2) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^2) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}\right),\ \frac{\partial}{\partial z}(\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2),\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(-\cos\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\cos\varphi)\right) =$$

$$= \left(0,\ -2\rho,\ \frac{\sin\varphi}{\rho}\right). \ ▶$$

240. Доказать, что векторное поле $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{2\cos\theta}{\rho^3}, \frac{\sin\theta}{\rho^3}, 0\right)$ потенциальное.

◀ Поскольку класс потенциальных векторных полей совпадает с классом безвихревых полей, то достаточно показать, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Применив формулу (16), получим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\rho, \theta, \varphi) =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(0\cdot\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\theta}{\rho^3}\right)\right),\ \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2\cos\theta}{\rho^3}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(0\cdot\rho),\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sin\theta}{\rho^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2\cos\theta}{\rho^3}\right)\right) =$$

$$= \left(0,\ 0,\ -\frac{2\sin\theta}{\rho^4} + \frac{2\sin\theta}{\rho^4}\right) = (0, 0, 0). \ ▶$$

241. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\rho^2\theta, \rho e^{2\theta}, 0\right)$ через внешнюю сторону верхней полусферы S радиуса R с центром в начале координат.

◀ Пусть σ — часть координатной поверхности $q_1 = C$, где $C = \text{const}$, ограниченная координатными линиями

$$q_1 = \alpha_1,\ q_2 = \alpha_2\ (\alpha_1 < \alpha_2); \quad q_3 = \beta_1,\ q_3 = \beta_2\ (\beta_1 < \beta_2).$$

Тогда поток вектора $\boldsymbol{u}(q_1, q_2, q_3) = \big(u_1(q_1, q_2, q_3), u_2(q_1, q_2, q_3), u_3(q_1, q_2, q_3)\big)$ через поверхность σ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$ вычисляется по формуле

$$w(\sigma; \boldsymbol{u}) = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} u_1(C, q_2, q_3)\, H_2(C, q_2, q_3)\, H_3(C, q_2, q_3)\, dq_2\, dq_3. \tag{20}$$

Полусфера S является частью координатной поверхности $\rho = \text{const}$, т.е. $\rho = R$. На поверхности S имеем

$$q_1 = \rho = R,\ q_2 = \theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad q_3 = \varphi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Принимая во внимание, что в сферических координатах

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\theta = \rho, \quad H_3 = H_\varphi = \rho\sin\varphi,$$

по формуле (20) получаем

$$w(S; \boldsymbol{u}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2\pi} R^4\theta\sin\theta\, d\varphi = 2\pi R^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta\, d\theta = 2\pi R^4. \ ▶$$

242. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\rho, z, 0)$ через замкнутую поверхность S, образованную плоскостями, уравнения которых $z = 0$, $z = 1$, и цилиндром, уравнение которого $\rho = 1$.

◀ Воспользуемся формулой Остроградского

$$w(S; \boldsymbol{u}) = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dV.$$

Согласно формуле (15), имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 2.$$

Таким образом,

$$w(S;\, \boldsymbol{u}) = 2\iiint\limits_V dV = 2|V| = 2\pi,$$

поскольку объем цилиндра равен π. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

172. Найти градиенты скалярных полей:

а) $u = \rho\cos\varphi + z\sin^2\varphi - 3^\rho$; б) $u = \rho^2\cos\theta$; в) $u = C\frac{\cos\theta}{\rho^2}$, $C = \text{const}$.

173. Вычислить расходимости векторных полей $\boldsymbol{u}$:

а) $\boldsymbol{u} = (\rho,\, z\sin\varphi,\, e^\varphi\cos z)$; б) $\boldsymbol{u} = \left(\frac{2\cos\theta}{\rho^3},\, \frac{\sin\theta}{\rho^3},\, 0\right)$.

174. Вычислить роторы векторных полей:

а) $\boldsymbol{u} = (2\rho + \alpha\cos\varphi,\, -\alpha\sin\theta,\, \rho\cos\theta)$, $\alpha = \text{const}$; б) $\boldsymbol{u} = \left(\sin\varphi,\, \frac{\cos\varphi}{\rho},\, -\rho z\right)$.

175. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{u}$ через заданную поверхность S, если $\boldsymbol{u} = (\rho,\, -\cos\varphi,\, z)$, S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром, уравнение которого $\rho = 2$, и плоскостями, уравнения которых $z = 0$, $z = 2$.

Ответы

Глава 1

2. Непрерывна. **3.** Непрерывна. **4.** Непрерывна при $y \neq 0$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** $\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **8.** 0. **14.** Непрерывно дифференцируема. **15.** Непрерывно дифференцируема при $y \neq 0$. **18.** Равномерно. **19.** Равномерно. **20.** Равномерно. **21.** Равномерно. **22.** Неравномерно. **23.** Неравномерно. **24.** Неравномерно. **25.** Неравномерно. **26.** 1. **27.** $\frac{\pi}{2}$. **28.** 0. **31.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+\alpha}\,dx$.

32. $\frac{\pi}{3}|\alpha|^3$. **33.** $\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi a^2}{8}$ при $0 \leqslant a < 2$; $\frac{\pi}{2}$ при $a \geqslant 2$. **34.** $\frac{\pi}{4}$. **35.** $\frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}$. **36.** $\pi\left(e^{-|a|}-\frac{1}{2}\right)$.

37. $\frac{1}{2}\ln(1+a^2)$. **38.** $\sqrt{\pi}\frac{d}{da}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\right)$. **39.** $\frac{d}{da}(\Gamma(a+1))$. **40.** $\frac{1}{|a|}\int\limits_0^b e^{-\frac{b_2^2}{|a|}}\,db_2\int\limits_0^{b_2} e^{\frac{b_1^2}{|a|}}\,db_1$.

41. $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. **42.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **43.** 0. **44.** 0. **47.** $\frac{\sqrt{3}}{60\pi}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$. **48.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **49.** $\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}}$.

50. $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)3^k(k+1)!(k+6)!}{(2k+8)!}$. **51.** $\frac{45}{256}$. **55.** $\frac{\sin\lambda}{\lambda^2}-\frac{\cos\lambda}{\lambda}$. **56.** $\frac{\lambda}{\lambda^2-1}(1+\cos\lambda\pi)$. **57.** $\frac{\sin 2\pi\lambda}{\lambda^2-1}$.

58. $\frac{\sin\lambda}{\lambda^2}-\frac{\cos\lambda}{\lambda}+\frac{\sin 2\lambda+\lambda\cos 2\lambda}{e^2(1+\lambda^2)}$. **59.** $\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}$. **60.** $\frac{\sin\lambda}{\lambda}+\frac{\cos\lambda-1}{\lambda^2}+\frac{\cos\lambda-\lambda\sin\lambda}{e(1+\lambda^2)}$. **61.** $\frac{\cos\lambda\frac{\pi}{2}-1}{\lambda^2}$.

62. $i\lambda\bar{f}(\lambda)$; $-\lambda^2\bar{f}(\lambda)$. **63.** $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{\varphi}(\lambda)e^{i\lambda x}}{1+3i\lambda-\lambda^2}\,d\lambda$.

Глава 2

1. 9,88. Точное значение $2\pi(7-\sqrt{24})$. **2.** $\delta < 0{,}00022$. **5.** Отрицательный. **6.** $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

7. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy$. **8.** $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$.

9. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx$.

10. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int\limits_0^a f(u\cos v,\, u\sin v)u\,du$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int\limits_a^b f(u\cos v,\, \sin v)u\,du$. **11.** $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int\limits_0^{\frac{a}{1-v}} f(u-uv,\, uv)u\,du$.

12. $\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\frac{b}{a\alpha+b}} dv \int\limits_0^{\frac{a\alpha}{1-v}} uf\left((1-v)\frac{u}{\alpha},\, uv\right)du + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\frac{b}{a\alpha+b}}^{1} dv \int\limits_0^{\frac{b}{v}} uf\left((1-v)\frac{u}{\alpha},\, uv\right)du$.

13. $3\int\limits_0^a \rho\,d\rho \int\limits_0^{2\pi} f(\rho\cos^3\varphi,\ \rho\sin^3\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$. **14.** $y = uv$, $x = v$. **15.** а) Перейти к полярным координатам; б) положить $x^2 = u$, $y^2 = v$. **16.** $\frac{1}{3}$. **17.** $\frac{p^5}{21}$. **18.** $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}$. **19.** $14a^4$. **20.** $\frac{35}{12}\pi a^4$. **21.** $-6\pi^2$. **22.** $\frac{\pi}{2}$. **23.** $\frac{1}{364}$. **24.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **25.** $\frac{\pi}{6}$. **26.** $\frac{\pi}{10}$. **27.** 0, если одно из чисел m, n, p нечетное; $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\,\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если m, n, p четные. **28.** $\frac{m}{3}$. **29.** $\frac{m(3m+1)}{12}$.

30. $\frac{a^m}{m!}$. **31.** $\frac{2}{(m-1)!(2m+1)}$. **33.** $U=\frac{16}{15}\pi^2\mu_0^2r^5$. **34.** Сходится при $p<1$. **35.** Сходится при $p<1$. **36.** Сходится при $p<1$. **37.** Сходится при $p<1$. **38.** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p>q>1$. **39.** $\frac{\pi}{p-1}$, $p>1$. **40.** $\frac{1}{2}$. **41.** $\frac{\pi}{2}$. **42.** $\frac{\pi ab}{e}$. **43.** $-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **44.** $\frac{\pi}{2}$. **45.** $2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)$, $p<1$. **46.** $\pi^{\frac{3}{2}}$. **47.** $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, где $\Delta=\det(a_{ij})$. **50.** $\frac{3a^2}{16}(4\pi-1-3\sqrt{3})$. **51.** $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. **52.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **53.** $\frac{\pi ab}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **54.** $\frac{ab}{12}$. **55.** $\frac{a^5b}{10h^4}$. **56.** $\frac{21\pi ab}{256}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **57.** $\frac{ab}{42}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **58.** $\frac{2}{3}(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{n^3}-\sqrt{m^3})$. **59.** $\frac{1}{3}(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{m}-\sqrt{n})p$, где $p=a+b+m+n+\sqrt{ab}+\sqrt{mn}$. **60.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **61.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. **62.** $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^8}$. **63.** $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. **64.** $\frac{65ab}{108}$. **65.** πab^2. **66.** $\frac{\pi ac^2}{2}$. **67.** $\frac{\pi}{32}$. **68.** 2π. **69.** $\frac{4a^3}{9\sqrt{a}}$. **70.** $\frac{3\pi}{8}(a+b)$. **71.** $\pi abc\frac{k}{k+1}$. **72.** $\frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3$. **73.** $\frac{8}{35}$. **74.** $\left(\frac{\pi}{8}-\frac{4}{15}\right)abc$. **75.** $\frac{am}{192}(a+m)(3a^2-5am+3m^2)$. **76.** $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. **77.** $8a^2$. **78.** $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. **79.** $2a^2$. **80.** $\frac{\pi}{6}(3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10}))$. **81.** $\frac{abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{c^3}\right)$. **82.** $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$. **83.** $\frac{5}{9}ab$. **84.** $\frac{\pi a^3}{8}$. **85.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **86.** $\frac{4\pi abc^7}{21h^6}$. **87.** $2\pi^2(1-\alpha^2)abc$. **88.** $\frac{abch}{60}\frac{5c+4h}{(c+h)^2}$. **89.** $\frac{2\pi h}{\Delta}$. **90.** $\frac{1}{2}$. **91.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. **92.** $\frac{\pi^2}{4}abc$. **93.** $\frac{8}{5}\pi abc$. **94.** $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **95.** $\frac{abc}{554400}$. **96.** $\frac{abc}{3}$. **97.** $\frac{abc}{1680}$. **98.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **99.** $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi},\frac{1}{4}\right)$. **100.** $\left(\frac{3\pi a}{64},\frac{3\pi b}{64}\right)$. **101.** $\left(\frac{a}{5},\frac{a}{5}\right)$. **102.** $\left(\frac{a^2b}{14c^2},\frac{ab^2}{14c^2}\right)$. **103.** $\left(\frac{\pi a}{8},\frac{\pi a}{8}\right)$. **104.** $I_x=\frac{bh^3}{12}$, $I_y=\frac{h|b_1^3-b_2^3|}{12}$, $b=|b_1-b_2|$. **105.** $I_x=\frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y=\frac{49}{32}\pi a^4$. **106.** $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **107.** $I_x=I_y=\frac{9a^4}{8}$. **108.** $I_\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. **109.** $\left(0,0,\frac{3h}{4}\right)$. **110.** $\left(\frac{9\pi a}{8(3\pi-4)},0,0\right)$. **111.** $\left(0,0,\frac{7c}{30}\right)$. **112.** $\left(0,0,\frac{3a}{8}\right)$. **113.** $\left(1,1,\frac{5}{3}\right)$. **114.** $I_{xy}=\frac{\pi}{5}abc^3$, $I_{yz}=\frac{\pi}{20}a^3bc$, $I_{xz}=\frac{\pi}{20}ab^3c$. **115.** $I_{xy}=\frac{2}{225}abc^3(15\pi-16)$, $I_{yz}=\frac{2}{1575}a^3bc(105\pi-92)$, $I_{xz}=\frac{2}{1575}ab^3c(105\pi-272)$. **116.** $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$, $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$, $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$. **117.** $u=\pi\mu_0\left(a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\right|+(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-((h-z)|h-z|+z|z|)\right)$. **118.** $F=(0,0,-\pi k\mu_0 r\sin^2\alpha)$. **119.** $\sqrt{5}\ln 2$. **120.** $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **121.** $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. **122.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$. **123.** $\frac{1}{3}\left((x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$. **124.** $(1+e^{-t})\sqrt{3}$. **125.** $\frac{8}{15}k\sqrt{2}\left(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1\right)$. **126.** $\frac{98}{81}p^2$. **127.** 3. **128.** $\frac{3}{16}\pi a\sqrt[3]{a}$. **129.** 13. **132.** $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$. **133.** $u=\frac{2x}{x-yz}+C$. **134.** $2\pi\operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. **135.** $\frac{2\pi a}{c(n-2)}\left(\frac{1}{(c-a)^{n-2}}-\frac{1}{(c+a)^{n-2}}\right)$, $n\neq 2$. **136.** $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. **137.** $\frac{\pi}{8}$. **138.** 0. **139.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **140.** $-2\pi ab$. **141.** 0. **142.** $\frac{\partial}{\partial x}(xF(x,y))=\frac{\partial}{\partial y}(yF(x,y))$. **143.** $\operatorname{sgn}(ad-bc)$. **144.** $\sum\operatorname{sgn}\frac{\mathcal{D}(\varphi,\psi)}{\mathcal{D}(x,y)}$, где сумма распространяется на все точки пересечения кривых, определяемых уравнениями $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$, лежащие внутри контура γ. **145.** $\frac{a^2}{2}B(2m+1,2n+1)$. **147.** $3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. **148.** $2\iiint\limits_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **149.** $\iiint\limits_V\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$. **150.** $3a^4$. **151.** $\frac{2a^3}{9}$. **153.** $-\frac{\pi R^6}{8}$. **154.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **155.** $\frac{h^3}{3}$. **156.** 0. **157.** $-\frac{9a^3}{2}$. **158.** $\varphi=\pi$. **159.** $\frac{\partial u}{\partial e}=-\frac{\cos(\widehat{e,r})}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial e}=0$, если $e\perp r$. **160.** $\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\langle\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v\rangle}{|\operatorname{grad}v|}$; $\frac{\partial u}{\partial e}=0$, если $\operatorname{grad}u\perp\operatorname{grad}v$. **161.** 0. **162.** $\frac{f'(r)}{r}\langle c,r\rangle$. **163.** $3f(r)+rf'(r)$; $f(r)=\frac{C}{r^3}$, $C=\text{const}$. **164.** $\frac{3\pi}{16}$. **165.** $\frac{1}{6}$. **167.** $\operatorname{rot}u(M)=-\frac{5}{4}i-j+\frac{5}{2}k$, $|\operatorname{rot}u(M)|=\frac{1}{4}\sqrt{141}$. **168.** 0. **170.** $\frac{33}{2}$. **171.** $u(x,y,z)=\int\limits_{r_0}^{r}tf(t)\,dt$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **172.** а) $\left(\cos\varphi - 3^{\rho}\ln 3,\ \frac{z}{\rho}\sin 2\varphi - \sin\varphi, \sin^2\varphi\right)$; б) $(2\rho\cos\theta,\ -\rho\sin\theta,\ 0)$; в) $\left(-C\frac{2\cos\theta}{\rho^3},\ -C\frac{\sin\theta}{\rho^3},\ 0\right)$. **173.** а) $2+\frac{z}{\rho}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin z$; б) 0. **174.** а) $\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta},\ -\left(2\cos\theta + \frac{\alpha\sin\varphi}{\rho\sin\theta}\right),\ -\frac{\alpha\sin\theta}{\rho}\right)$; б) $\left(0,\ z,\ -\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)$. **175.** 24π.

Оглавление

Ляшко Иван Иванович, Боярчук Алексей Климентьевич, Гай Яков Гаврилович, Головач Григорий Петрович

Справочное пособие по высшей математике. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы. — М.: Едиториал УРСС, 2001. — 224 с.

ISBN 5–354–00019–X

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 3 по содержанию соответствует второй половине второго тома «Справочного пособия по математическому анализу». В нем рассматриваются интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.