Лекции по Анализ-2 част за студенти от инженерните специалности при УАСГ

доц.д-р Г.Тачев,кат. Математика

1. Обикновени ДУ-дефиниция, съставяне.Уравнения с отделящи се променливи.

Дефиниция. Обикновено диференциално уравнение от I-ви ред наричаме

$$y'(x) = f(x, y),\ x \in \Delta$$

$$y = f(x)$$

-функция, която търсим така, че да удовлетворява горното уравнение за всяко x.

Номера на реда на уравнението е равен на най-високата производна на функцията:

$$y'' + y = \sin(x) - \text{II-ред.}$$

$$z = z(x, y),\ z = ?,$$

$$(x^2 + xy)\frac{\partial z}{\partial x} - (y^2 + xy)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

е частно диференциално уравнение от първи ред.

Общ вид на обикновеното ДУ е

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Решението на (1.1) е от вида

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),\ C_i \text{ са произволни константи.}$$

Пример: $y' + y^2 - 1 = 0$. Общото решение е от вида

$$y(x) = \sin(x + C_1),\ y'(x) = \cos(x + C_1).$$

Дефиниция При конкретна стийност на константата C получаваме частно решение:

$$C_1 = \frac{\pi}{6}, \quad y(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}),\ y_{2,3}(x) = \pm 1.$$

Дефиниция Линейно ОДУ от n ред наричаме

$$a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n)}(x) = 0.$$

Нелинейно уравнение е например:

$$yy'' - y'^2 = e^x.$$

Теорема за съществуване на решението
Ако $f(x, y)$ е непрекъсната функция на двата си аргумента и $\frac{\partial f}{\partial y}$ е също непрекъсната, то съществува решение на ОДУ (1.1).

2.Съставяне на диференциални уравнения.

Пример 1 Процес на разпад на радиоактивно вещество. Нека $Q(t)$ е количеството радиоактивно вещество в момент t. Нека $Q_0 = Q(t_0)$ е наличното количество в началния момент t_0.

$$\Delta Q = Q(t) - Q(t_0) < 0$$

е изменение в количеството радиоактивно вещество. $\Delta t = t - t_0 > 0$ е изменение на времето. Имаме следната зависимост

$$\Delta Q = -k \cdot \Delta t, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k,$$

т.е.

$$Q'(t) = \frac{dQ}{dt} = -k.$$

Тогава след интегриране пт t на двете страни на горното равенство получаваме

$$\int dQ(t) = -k \int dt, \Rightarrow Q(t) = -kt + C_1 - \text{общото решение.}$$

При $t = t_0$ получаваме

$$Q_0 = Q(t_0) = -kt_0 + C_1, \Rightarrow C_1 = Q_0 + kt_0,$$

$$Q(t) = -kt + Q_0 + kt_0 - \text{частното решение.}$$

Пример 2 Даден е снопът от прави линии

$$y = kx + b.$$

На кое ОДУ съответствува тази фамилия криви? Диференцираме по x и получаваме
$$y'(x) = k.$$

Пример 3 Дадена е фамилията криви
$$y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$
Диференцираме последователно два пъти по x и получаваме
$$y''(x) = -k^2 y,$$
което е линейно ОДУ от втори ред.

Пример 4 Да се намери гладка функция $y = y(x)$, такава че за всяко x, ако допирателната права към графиката на y в т.$M(x, y)$ пресича координатните оси в точки A и B, то M да се окаже среда на отсечката AB.

Съставяйки уравнението на допирателната права към графиката на y в т.M получаваме
$$\eta - y = y'(x)(\xi - x)$$
и за координатите на пресечните точки с двете координатни оси следва
$$A\left(\frac{xy' - y}{y'},\, 0\right),\ B\left(0,\, y - xy'\right).$$
От факта, че M е среда на AB следва
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{xy' - y}{y'}\right),$$
което води до следното ОДУ
$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}.$$
Това е така нареченото уравнение с разделящи се променливи. Интегрираме двете страни на последното уравнение,
$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x},\ \Rightarrow\ \ln y = -\ln x + \ln C = \ln(\frac{C}{x}).$$

Приемаме че $x > 0,\ y > 0$, т.е. т.М е в първи квадрант. След антилогаритмуване получаваме $y = \frac{C}{x}$-общото решение. Ако искаме да намерим това частно решение, графиката на което минава през т.(2,3), то лесно се получава, че $C = 6,\ y = \frac{6}{x}$ е търсеното решение.

Дефиниция Уравнение с разделящи се променливи наричаме уравнение от вида

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0.$$

От тук следва

$$\frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = -\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx.$$

Вземаме неопределен интеграл от двете страни и получаваме

$$f(y) = g(x) + c.$$

2.Хомогенни ОДУ и приводими към тях.

Дефиниция Хомогенно ОДУ наричаме уравнение от вида

$$y' = f(\frac{y}{x}).$$

Пример 1.

$$(x + y)dx + xdy = 0.$$

$$x + y + x\frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow y' = -\frac{(x + y)}{x} = -1 - \frac{y}{x} = f(\frac{y}{x}).$$

Ако $x \equiv 0, dx = 0$-частно решение. Нека $x \neq 0$. Правим следната субституция

$$y = x \cdot z,\ z = z(x) - \text{нова функция}$$

Лесно следва $y' = z + xz'$, т.е.

$$xz' = f(z) - z.$$

Разглеждаме първо случая когато $f(z) - z \neq 0$. Получаваме следното уравнение с разделящи се променливи:

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}, \Rightarrow\ F(z) = \ln(Cx),$$

или $F(\frac{y}{x}) = \ln(Cx)$. За пример 1 този метод води до

$$\int \frac{dz}{1+2z} = -\int \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+2z) = \ln\frac{C}{x},$$

или след елементарни преобразувания получаваме

$$y = \frac{x}{2}(1+\frac{C^2}{x^2}).$$

За решенията на уравнението $f(z) - z = 0$, $z_1, z_2, \dots$ получаваме също решения на изходната задача $y = z_i x$. За нашия пример това е $y = -\frac{x}{2}$.

Приводими към хомогенни ОДУ: Това са уравнения от вида

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

Разглеждаме два случая:

I случай.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В този случай правим следната субституция

$$z(x) = ax + by.$$

II случай.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В този случай системата

$$\begin{aligned} ax+by+c &= 0 \\ a_1x+b_1y+c_1 &= 0 \end{aligned}$$

има единствено решение (α, β). Правим следната субституция $x = \alpha + \xi$, $y = \beta + \eta$, където ξ е новата променлива, а η е новата функция. След заместване получаваме

$$\eta' = f\left(\frac{a(\alpha+\xi)+b(\beta+\eta)+c}{a_1(\alpha+\xi)+b_1(\beta+\eta)+c_1}\right),$$

$$\eta' = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right),$$

което вече е хомогенно уравнение .

Пример 2 Решете уравнението

$$y' = \frac{3x + 5y}{x - y + 2}.$$

Упътване: Положете $x = \xi - \frac{5}{4}$, $y = \eta + \frac{3}{4}$.

3.Линейно ОДУ от първи ред. Уравнения на Бернули и Рикати.

Дефиниция. Линейно ОДУ от първи ред наричаме уравнение от вида

$$y'(x) = X(x) \cdot y(x) + X_1(x),\ x \in [a, b]. \tag{3.1}$$

Това уравнение се решава на два етапа:

I. Решаваме първо уравнението

$$y'(x) = X(x)y(x). \tag{3.2}$$

Получаваме следното уравнение с разделящи се променливи

$$\int \frac{dy}{y} = \int X(x)dx.$$

$$\ln y = \int X(x)dx + \ln C,$$

$$y(x) = Ce^{\int X(x)dx} \text{ – решение на (3.2).}$$

II. Решението на (3.1) сега търсим във вида

$$y(x) = Ce^{\int X(x)dx} \cdot u(x),$$

където $u(x)$ е нова функция, която ще търсим така, че $y(x)$ от горното уравнение да бъде решение на ОДУ (3.1). След изчисляване на y' и заместване в (3.1) получаваме

$$Ce^{\int X(x)dx} \cdot u'(x) = X_1(x),$$

което е уравнение с разделящи се променливи. Получаваме

$$u(x) = \int du = \frac{1}{C}\int e^{-\int X(x)dx} \cdot X_1(x)\, dx + C_1.$$

След заместване на $u(x)$ във формулата за $y(x)$ получаваме окончателно формулата за общото решение на линейно ОДУ от първи ред

$$y(x) = e^{\int X(x)dx} \cdot \left[\int e^{-\int X(x)dx} \cdot X_1(x)dx + C \right]. \qquad (3.3)$$

До линейно ОДУ от първи ред може да се сведат и някои уравнения от вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

$$P(x,y)\frac{dx}{dy} + Q(x,y) = 0.$$

$$x'(y) = -\frac{Q}{P},$$

което може да се окаже линейно ако разглеждаме сега x като функция на y. Например така може да решим следното уравнение:

Пример 1 Решете уравнението $y = (2x + y^3)y'$.

2. Уравнение на Бернули.

Това е уравнение от вида

$$y'(x) = X(x)y(x) + X_1(x)y^m(x),\ m \in R,\ m \neq 0, 1. \qquad (3.4)$$

Очевидно $y \equiv 0$ е решение на горното уравнение. По нататък ще разглевдаме $y \neq 0$. Това уравнение се свежда до линейно ако въведем новата функция $z(x)$ чрез субституцията

$$z(x) = y^{1-m},\ y = z^{\frac{1}{1-m}}.$$

След заместване и елементарни преобразувания получаваме линейното ОДУ спрямо новата функция z:

$$z'(x) = (1-m)[X_1(x) + X(x) \cdot z(x)].$$

3. Уравнение на Рикати.

Това е уравнение от вида

$$y'(x) = X(x)y(x) + X_1(x)y^2(x) + X_2(x),\ X_2(x) \neq 0. \qquad (3.5)$$

За да можем да решаваме това уравнение първо трябва да ни е дадено (или сами да намерим) едно частно решение на уравнението $y_1(x)$. Тогава общото решение на уравнението на Рикати (3.5) се намира със субституцията:

$$y(x) = z(x) + y_1(x).$$

Така отиваме към уравнение на Бернули спрямо новата функция $z(x)$.

$$z'(x) = [X(x) + 2X_1(x)y_1]z + X_1(x)z^2.$$

Пример 2. Решете уравнението

$$y' = 1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2},$$

ако е дадено едно частно решение на горното уравнение $y_1(x) = x$.

Начална задача на Коши наричаме уравнението

$$y'(x) = f(x, y), \tag{3.6}$$

с начално условие $y(x_0) = y_0$.

Теорема за съществуване и единственост на решението на началната задача на Коши. Нека в затворената област $G\{|x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ функциите f и f'_y са непрекъснати. Тогава в интервала $x_0 - d \leq x \leq x_0 + d$ съществува единствено решение на (3.6), удовлетворяващо началното условие $y(x_0) = y_0$. При това можем да вземем $d = \min\{a; \frac{b}{m}\}$, където a, b са посочени по-горе, а m можем да вземем всяко число, за което $|f| \leq m$, $(x, y) \in G$.

Решението на началната задача на Коши можем да получим по следния метод на последователните приближения:

$$y(x_0) = y_0,\ y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{k-1}(s))\, ds,$$

чрез който се генерира редица от функции $\{y_k\}$, която е равномерно-сходяща към единственото решение на (3.6).

4. Точни ОДУ. Интегриращ множител

Разглеждаме уравнението

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{4.1}$$

Дефиниция Казваме, че уравнението (4.1) е точно ако съществува $F(x, y)$, такава че
$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$
Замествайки в (4.1) ще се окаже че
$$dF(x, y) = 0, \Rightarrow F(x, y) = C-$$
общото решение на (4.1).

Теорема 4.1 Необходимото и достатъчно условие (4.1) да бъде точно ОДУ е
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Доказателство: (Необходимост.) Получаваме последователно:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$
От теоремата за равенство на смесените производни следва, че десните страни на горните две равенства са равни, т.е. равни са и левите страни, т.е. установихме (4.2).

(Достатъчност.) Нека сега е дадено, че уравненията (4.2) са изпълнени. Ще докажем, че съществува $F(x, y)$, такава че $dF = P(x, y)dx+Q(x, y)dy$, т.е. уравнението (4.1) е точно. Ще намерим аналитичен израз за F. Уравнението
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$$
интегрираме по x при фиксирано y. Получаваме
$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y).$$
Остава да определим функцията $\varphi(y)$. Диференцираме последното равенство по y.
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi'(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right) = Q(x, y). \tag{4.3}$$

Функцията $\varphi(y)$ ще определим от горното равенство, ако съумеем да покажем, че

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)$$

не зависи от x. А за последното е достатъчно да покажем

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) = 0.$$

Последното равенство обаче е изпълнено защото

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = 0.$$

Доказателството на Теорем 4.1 е завършено.

Пример 1. Решете уравнението

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 + 4y^3)dy = 0.$$

Решение. Лесно се вижда, че

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = 12xy.$$

От

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P = 3x^2 + 6xy^2$$

получаваме

$$F(x,y) = \int(3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Следователно

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q = 6x^2y + 4y^3 = \varphi'(y) + 6x^2y \;\Rightarrow\; \varphi'(y) = 4y^3.$$

$$\varphi(y) = y^4 + C.$$

Окончателно общото решение на задачата е

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Ако уравнението не е точно, то търсим функция $\mu(x,y)$-интегриращ множител, така че новото уравнение

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dx = 0 \tag{4.4}$$

да бъде вече точно. Лесно се проверява, че ако

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{Q(x,y)} = f(x),$$

то интегриращият множител се намира по формулата

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Аналогично можем да намерим интегриращ множител като функция на y:

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy},\ g(y) = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \frac{1}{P(x,y)}.$$

5. ДУ решими чрез предварително диференциране. Уравнения на Лагранж и Клеро

1. Уравнения, нерешени относно производната. Понякога не е възмохно да определим $y' = f(x,y)$ от общия вид на ОДУ от първи ред

$$F(x,y,y') = 0.$$

Но може да се окаже възможно да определим y като функция на x, y', т.е. $y = f(x,y')$. Такива уравнения се решават с въвеждане на параметър

$$p = \frac{dy}{dx} = y', \tag{5.1}$$

$$y = f(x,p). \tag{5.2}$$

Вземайки пълен диференциал от двете страни на (5.2) и замествайки dy с pdx получаваме уравнение от вида

$$M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0. \tag{5.3}$$

Ако намерим решение на последното уравнение от вида $x = \varphi(p)$, то използвайки (5.2) полъчаваме общото решение на изходното уравнение в параметричен вид $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Пример 1. Решете уравнението $y = x + y' - \ln y'$.
Решение: Въвеждаме параметъра $p = y'$:

$$y = x + p - \ln p. \tag{5.4}$$

Вземаме пълен диференциал от двете страни, заместваме dy с pdx и получаваме

$$pdx = dx + dp - \frac{dp}{p}. \tag{5.5}$$

Пренасяме събираемите съдържащи dx от едната страна и тези с dp от другата страна и получаваме

$$(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dx. \tag{5.6}$$

а) Ако $p \neq 1$, то съкращавайки на $p-1$ получаваме

$$dx = \frac{dp}{p},\ x = \ln p + C$$

Замествайки в (5.4) получаваме решението в параметричен вид

$$x = \ln p + C,\ y = p + C. \tag{5.7}$$

В този случай можем да изключим параметъра p и да получим решението в явен вид

$$p = e^{x-C},\ y = e^{x-C} + C. \tag{5.8}$$

б) Разгелждаме случая, когато в (5.6) имаме $p = 1$. Замествайки $p = 1$ в (5.5) следва решението

$$y = x + 1. \tag{5.9}$$

Дефиниция Решението $y = \varphi(x)$ на уравнението $F(x, y, y') = 0$ се нарича **особено** , ако във всяка точка от графиката му минава графиката и на друго решение на изходното уравнение, като двете графики имат обща допирателна, както и двете решения са различни в произволно-малка околност на точката.

Ако функцията $F(x, y, y')$ и производните и $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ са непрекъснати, то всяко особено решение на уравнението $F(x, y, y') = 0$ удовлетворява и уравнението

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

За да получим особеното решение, изключваме y' от последните две уравнения. Полученото уравнение $\psi(x, y) = 0$ се нарича дискриминантна крива. За всеки клон от дискриминантната крива проверяваме -явява ли се решение на изходното уравнение и ако да, то особено ли е това решение, т.е. дали във всяка негова точка се допира и друго решение.

Пример 2

Да намерим особеното решение на уравнението от пример 1. Диференцираме двете части по y',

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}.$$

Изключваме y' от двете уравнения и получаваме

$$y = x + 1.$$

Това след проверка се вижда че е решение на изходното уравнение. За да установим дали е особено, трябва да видим дали във всяка точка от графиката му, се допира и графиката на друго решение от фамилията криви (5.8). Условията за допиране на графиките на двете криви $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в т. с абсциса x_0 са

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0).$$

В нашия случай това са уравненията

$$e^{x_0 - C} + C = x_0 + 1,\ e^{x_0 - C} = 1.$$

От второто равенство получаваме $C = x_0$. Замествайки в първото равенство получаваме $1 + x_0 = 1 + x_0$. А това равенство е изпълнено за всяко x_0. Установихме, че за всяко x_0 в т. с абсциса x_0 към графиката на особеното решение $y = x + 1$ се допира графиката на точно едно решение от фамилията общи решения, което се получава при $C = x_0$.

2. Уравнение на **Лагранж**.

Уравнение на Лагранж е уравнение от вида

$$y = xf(y') + \varphi(y'),\ f(y') \neq y'. \tag{5.10}$$

За да намерим общото и особени решения на това уравнение , използваме метода описан по-горе. Полагаме $y' = p = p(x)$-нова функция. Следва $y = xf(p) + \varphi(p)$. Дифернцираме по x двете страни и получаваме

$$p = f(p) + xf'(p)p' + \varphi'(p)p',\ p' = \frac{dp}{dx}$$

.

$$p - f(p) = [xf'(p) + \varphi'(p)] \cdot \frac{dp}{dx}. \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{p - f(p)} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{1}{[xf'(p) + \varphi'(p)]},$$

$$\frac{dx}{dp} = x'(p) = x \cdot \frac{f'(p)}{p - f(p)} + \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}.$$

Така получихме линейно ОДУ от първи ред с неизвестна функция $x = x(p)$. Решавайки го като използваме формулата за общото решение на линейното уравнение получаваме

$$x = x(p, C),\ y = x(p, C) \cdot f(p) + \varphi(p).$$

Последното представлява общото решение на уравнението на Лагранж в параметричен вид.

Ако уравнението $p - f(p) = 0$ има корени $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то следва $f(p_i) = p_i$, $y = xp_i + \varphi(p_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Получихме декартовото уравнение на прави линии, които могат да се окажат особени решения на уравнението на Лагранж.

3. Уравнение на **Клеро**.

Уравнение на Клеро е уравнение от вида

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{5.12}$$

Аналогично полагаме $y' = p = p(x)$-нова функция. Следва $y = xp + \varphi(p)$. Диференцираме двете страни по x и получаваме

$$0 = [x + \varphi'(p)]p' = [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Разглеждаме два случая:

а) $\frac{dp}{dx} = 0, \Rightarrow p = C$.

Получената фамилия прави линии $y = xC + \varphi(C)$ представляват общото решение на уравнението на Клеро.

б) $x + \varphi'(p) = 0$. От тук следва

$$x = -\varphi'(p)$$
$$y = -\varphi'(p)p + \varphi(p)$$

Последното представлява параметричен вид на особеното решение на уравнението на Клеро.

Пример 3 Решете уравнението на Клеро $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

По описания по-горе метод ще получите , че общото решение са фамилията прави $y = xC + \sqrt{1 + C^2}$, а особеното решение ще се окаже окръжността $x^2 + y^2 = 1$.

6. ОДУ от n-ред. Понижаване на реда.

1. Ако в уравнението не участвува търсената функция y, т.е. то има вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, то можем да понижим реда като вземем за неизвестна функция най-ниската производна, участвуваща в уравнението или правим субституцията $y^{(k)} = z$.

2. Ако в уравнението не участвува променливата x, т.е то има вида $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то редът се понижава, ако вземем за нова променлива y, а за нова функция $y' = p(y)$.**Пример 1** Да разгледаме уравнението $2yy'' = y'^2 + 1$. В това уравнение не участвува x. Полагаме $y' = p(y)$. Тогава

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p.$$

Замествайки в даденото уравнение получаваме

$$2ypp' = p^2 + 1,$$

което е уравнение на Бернули с неизвстна функция $p = p(y)$. Решавайки го ще получим $p = \pm\sqrt{Cy - 1}$. Следователно $y' = \sqrt{Cy - 1}$. А това пък е уравнение с разделящи се променливи. Неговото общо решение (както и на изходната задача) е $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$.

3. Ако уравнението е еднородно относно y и неговите производни, т.е. не се променя при едновременната замяна на $y, y', y'', \dots$ със $ky, ky', ky'', \dots,$

то редът се понижава чрез субституцията $y' = yz(x)$, където $z = z(x)$ е нова функция.

4. Порядъкът се понижава и ако уравнението се оказва еднородно в обобщен смисъл относно x и y, т.е. не се променя при замяната на x с kx и на y с $k^m y$, (при това y' се заменя с $k^{m-1}y'$, y'' с $k^{m-2}y''$ и т.н. За да узнаем явява ли се уравнението еднородно в обобщен смисъл и да намерим съответното m трябва да приравним степенните показатели на k във всяко събираемо на изходното уравнение, след извършване на горните субституции.

Пример 2 Да разгледаме уравнението $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$. Търсената стойност на m трябва да удовлетворява

$$4 + (m - 2) = 2m = 4.$$

Следва $m = 2$. Следващата стъпка е да направим смяна както в променливата, така и в неизвестната функция, която търсим чрез субституциите $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, където $z = z(t)$ е новата функция, а t е новата променлива. Ще получим уравнение, в което не участвува независимата нова променлива t. Редът на новото уравнение се понижава като в т.2.

5. Редът се понижава и ако успеем да преобразуваме уравнението така, че и двете му страни да бъдат производни на някакви функции-отделяне на пълни диференциали от двете страни.

Пример 3 Да разгледаме уравнението $yy'' = y'^2$. Делим двете му страни на yy' и получаваме последователно

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}, \Rightarrow\ (\ln y')' = (\ln y)'\ \Rightarrow\ \ln y' = \ln y + \ln C, \Rightarrow\ y' = yC.$$

Редът е понижен.

Пример 4 Нека материална т.P с маса m е подложена на сила $\vec{F}$, насочена към началото на абсцисната ос-т.O. Нека $s(t)$ е разстоянието от т.P до т.O в момент t-(времето). Диференциалното уравнение, което описва този процес е:

$$s''(t)m = -k^2 \cdot s(t).$$

Или получаваме

$$s'' = -\frac{k^2}{m} \cdot s.$$

В последното уравнение липсва променливата t. Затова го решаваме като в т.2. s става аргумент, а за нова функция полагаме $s' = p = p(s)$. Така стигаме до уравнението

$$p'p = -\frac{k^2}{m}s,\ k > 0.$$

Получаваме уравнението с разделящи се променливи

$$\frac{dp}{ds}p = -\frac{k^2}{m}s.$$

$$\int pdp = -\frac{k^2}{m} \cdot \int s\,ds,$$

$$p^2 = -\frac{k^2}{m} \cdot s^2 + C_1.$$

Ако разгледаме случая

$$p = \sqrt{C_1 - \frac{k^2}{m}s^2},$$

то стигаме отново до уравнение с разделящи се променливи, а именно

$$\frac{ds}{dt} = s' = p = \sqrt{C_1 - \frac{k^2}{m}s^2}.$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{C_1 - \frac{k^2}{m}s^2}} = \int dt = t + C_2.$$

От тук вече лесно смятаме формулата за $s(t)$-закона за движение на материалната точка

$$s(t) = \frac{Cm}{k} \cdot \sin\left((t + C_2)\frac{k}{\sqrt{m}}\right).$$

Последната функция описва така - нареченото хармонично трептене на материална точка. Константите C, C_2 могат да се определят от началните условия

$$\left| \begin{array}{l} s(0) = s_0 \\ s'(0) = s_1. \end{array} \right.$$

7. Линейни хомогенни и нехомогенни ОДУ от n-ти ред. Общи решения.

Началната задача на Кочи за уравнение от $n-$ ти ред изглежда така

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

с начални условия:

$$\left| \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Ако предположим, че F, както и частните и производни $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial F}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$ съществуват и са непрекъснати в интервал Δ, $x \in \Delta$, то както и в случая на уравнение от първи ред задачата на Коши има единствено решение, удовлетворяващо посочените по-горе начални условия.

Дефиниция. Линейно ОДУ от $n-$ ред наричаме уравнение от вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y(x) = f(x),\ x \in \Delta. \quad (7.1)$$

Тук a_i са функции на x, които предполагаме че са непрекъснати в Δ. Тогава линейното ОДУ (7.1) с горе-посочените начални условия от началната задача на Коши притежава единствено решение

$$y(x) = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Ако $f(x) = 0$ уравнението (7.1) се нарича **хомогенно**, а ако $f(x) \neq 0$, то се нарича **нехомогенно**. Да разгледаме най-напред хомогенното линейно ОДУ от $n-$ти ред. Следният израз

$$L(y, x) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y(x), \quad (7.2)$$

се нарича линеен диференциален оператор от $n-$ти ред. Очевидно е изпълнено

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1(x)) + c_2L(y_2(x)),\ c_i = const.$$

Така хомогенното линейно ОДУ от $n-$ти ред добива вида

$$L(y) = 0. \quad (7.3)$$

Ако $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са решение на уравнението (7.3), то и $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ е също решение на това уравнение. Излиза, че съвкупността от всички решения е линейно пространство.

Дефиниция. Казваме, че $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ са линейно-зависими функции в интервала Δ, ако съществуват константи $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, поне една от тях $\neq 0$, такива че

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \cdots + \alpha_ny_n(x) \equiv 0, \text{за всяко} x \in \Delta.$$

Пример 1 Системата от функции $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x - 1$, $y_3(x) = 2x - 1$ е линейно-зависима в R, защото $y_1 + 2y_2 - y_3 \equiv 0$.

Дефиниция. Казваме, че $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ са линейно-независими функции в интервала Δ, ако от

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \cdots + \alpha_ny_n(x) \equiv 0,$$

да следва, че

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Пример 2 Лесно се вижда, че системата от функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ е линейно-независима в произволен интервал. Ще приемем без доказателство следното важно твърдение

Теорема 7.1 Всяко линейно хомогенно ОДУ от $n-$ти ред притежава n линейно-независими решения

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x),\ L(y_i(x)) = 0, 1 \leq i \leq n.$$

Такава система от решения се нарича **фундаментална система от решения**. Всяко друго решение $y(x)$ на уравнението $L(y) = 0$ се получава по единствен начин като линейна комбинация на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т.е.

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

Дефиниция. Детерминанта на Вронски за системата от функции

$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ наричаме

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Нарича се още Вронскиан.

Теорема 7.2 Ако $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно-зависими в Δ, то $W(x) \equiv 0$ за всяко $x \in \Delta$.

Доказателство: От даденото следва съществуването на константи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, поне една от които $\neq 0$, такива че

$$\left| \begin{array}{llll} \alpha_1 y_1(x)+ & \alpha_2 y_2(x)+ & \ldots & +\alpha_n y_n(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x)+ & \alpha_2 y_2'(x)+ & \ldots & +\alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1''(x)+ & \alpha_2 y_2''(x)+ & \ldots & +\alpha_n y_n''(x) = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x)+ & \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x)+ & \ldots & +\alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array} \right. ,$$

като горните равенства са изпълнени за всяко $x \in \Delta$. Фиксираме произволно x_0 от интервала Δ и разглеждаме горната система от уравнения с неизвестни α_i, $1 \leq i \leq n$. Понеже тази система има ненулево решение, то следва че детерминантата и е 0, т.е. $W(x_0) = 0$. И понеже x_0 беше избрано произволно от Δ получаваме $W(x) \equiv= 0$. Теоремата е доказана. Установихме едно необходимо условие така щото една система от функции да бъде линейно-зависима в Δ. Сега ще покажем, че обратното твърдение на Теорем 7.2 не е вярно.

Теорема 7.3 Ако $W(x) \equiv 0, x \in \Delta$ от тук не следва , че системата от функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ е линейно-зависима в Δ.

Доказателство: Нека дефинираме следните две функции за $x \in (0, 2)$:

$$y_1(x) = \begin{cases} (1-x)^\alpha, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in [1,2). \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ (x-1)^\alpha, & x \in [1,2). \end{cases}$$

За тези две функции лесно се вижда, че $W(x) \equiv 0$, $x \in (0,2)$. (Проверете го !). Въпреки това тези две функции са линейно-независими в (0,2). (Проверете го !) Сега ще докажем следното достатъчно условие за линейна-независимост на система от функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

Теорема 7.4 Ако $W(x) \neq 0$ за поне едно $x \in \Delta$, то системата от функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ е линейно-независима в Δ.

Доказателство: Допускаме, че $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно-зависими в Δ. Съгласно Теорема 7.2 ще имаме $W(x) \equiv 0$ за всяко $x \in \Delta$. Получихме противоречие с даденото в условието на теоремата, т.е. допускането ни не е вярно. Теоремата е доказана.

2.Нехмогенни линейни ОДУ от $n-$ти ред. Метод на Лагранж за намиране на частно решение.

Нека да разгледаме сега нехомогенното уравнение

$$L(y,x) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_n(x)y(x) = f(x),\ f \neq 0. \tag{7.4}$$

Общото решение на (7.4) се намира на два етапа:

I. етап. Решаваме го като хомогенно и нека сме намерили фундаментална система от решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Както вече знаем всяко друго решение на хомогенното уравнение се получава като линейна комбинация на функциите $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

II етап. Търсим частно решение $\eta(x)$ на нехомогенното уравнение $L(y) = f(x)$. Тогава произволно друго решение $y(x)$ на нехомогенното уравнение (7.4) изглежда така

$$y(x) = \eta(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Това е така, защото $y(x) - \eta(x)$ е решение на хомогенното уравнение и както вече казахме то е линейна комбинация на функциите от фундаменталната система.

Метод на Лагранж. Частното решение търсим във вида:

$$\eta(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x). \tag{7.5}$$

Искаме $\eta(x)$ да бъде решение на нехомогенното уравнение. Последователно получаваме

$$\eta'(x) = c_1' \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 + \cdots + c_n' y_n + (c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n').$$

Ще поискаме

$$c_1' y_1' + c_2' \cdot y_2 + \cdots + c_n' y_n = 0.$$

Тогава за втората производна на η получаваме

$$\eta''(x) = c_1' \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' + \cdots + c_n' y_n' + (c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots + c_n y_n'').$$

Аналогично ще поискаме

$$c_1' \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' + \cdots + c_n' y_n' = 0.$$

И така продължаваме докато стигнем до

$$\eta^{(n)}(x) = c_1' \cdot y_1^{(n-1)} + c_2' \cdot y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} + (c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)}).$$

Сега пък ще положим

$$c_1' \cdot y_1^{(n-1)} + c_2' \cdot y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

И така неизвестните функции $c_i(x)$ от (7.5) удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + \cdots + c_n' y_n'' = 0 \\ \ldots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{array} \right. \tag{7.6}$$

Последната система има единствено решение, защото основната и детерминанта е тъкмо детерминантата на Вронски за фундаменталната система от решения на хомогенното уравнение $\det = W(y_1, y_2, , y_n)$, която е различна от 0. Да означим получените решения $c_i'(x) = f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$. От тук следва $c_i(x) = \int f_i(x)dx$.

Пример 3. Намерете общото решение на нехомогенното линейно уравнение от втори ред

$$x^2 \ln x \cdot y' + x \cdot y' + y = 1.$$

8. Линейни хомогенни ОДУ от $n-$ти ред с постоянни коефициенти. Уравнение на Ойлер.

Да разгледаме следното линейно ОДУ с постоянни коефициенти

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{8.1}$$

тук a_i са константи. Решение на уравнението (8.1) ще търсим от вида $y = e^{rx}$. След заместване в (8.1) и разделяйки двете страни на полученото равенство на e^{rx} стигаме до извода, че r трябва да е корен на следното алгебрично линейно уравнение от n-та степен

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_n = 0. \tag{8.2}$$

Уравнението (8.2) се нарича **характеристично** уравнение. Разглеждаме следните 4 случая в зависимост от вида корени на характеристичното уравнение:

I случай. Уравнението (8.2) има n на брой реални и различни корена $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Така получаваме n на брой решения на хомогенното уравнение (8.1) $y_i(x) = e^{r_i x}$, $1 \leq i \leq n$. За детерминантата на Вронски за тези n функции получаваме

$$W = e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & \ldots & r_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{(n-1)} & r_2^{(n-1)} & r_3^{(n-1)} & \ldots & r_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

защото последната детерминанта е детерминантата на Вандермонт за различните числа r_i, която знаем, че е ралична от 0. Така установихме, че в този първи случай, $y_i(x) = e^{r_i x}$, $1 \leq i \leq n$ образуват фундаментална система от решения на (8.1). Тогава общото решение на (8.1) се получава по формулата

$$Y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

Пример 1 Решете $y''' - 7y' + 6y = 0$. Характеристичното уравнение е $r^3 - 7r + 6 = 0$. Корените му са $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = -3$. Така стигаме до общото решение

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$$

II случай. Нека имаме сега k- кратен реален корен r_i на характеристичното уравнение (8.2). На този корен съответствуват k -на брой решения от фундаменталната система решения:

$$e^{r_i x},\ x e^{r_i x},\ x^2 e^{r_i x}, \ldots, x^{(k-1)} e^{r_i x}.$$

Пример 2. Решете $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 - 2r + 1 = 0$ има двукратен корен $r_1 = r_2 = 1$. Така общото решение на това линейно уравнение от втори ред е $Y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$.

III случай. Характеристичното уравнение (8.2) има прост(еднократен) комплексен корен $r = \alpha + i\beta$. От формулата на Ойлер

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i \sin\beta,$$

следва, че на този корен съответствува решение от вида

$$e^{rx} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

Като имаме в предвид , че и спрегнатото число на r също е корен на (8.2), то можем да запишем решението, съответствуващо на тези два корена в реален вид като

$$Y(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right].$$

IV случай. Нека сега комплексното число $r = \alpha + i\beta$ е k-кратен корен на характеристичното уравнение. С такава кратност ще бъде и спрегнатото му комплексно число. Общо за двата корена съответствува следното решение на хомогенното уравнение:

$$Y(x) = e^{\alpha x} \cdot \big((a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}) \cos(\beta x) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{k-1} x^{k-1}) \sin$$

2. Уравнения на Ойлер.

Дефиниция. Уравнение на Ойлер наричаме уравнение от вида:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \qquad (8.3)$$

Това уравнение се свежда до уравнение с постоянни коефициенти по следния начин: Ако $x > 0$ правим субституцията $x = e^t$, $t = \ln x$, t-нова променлива, ако пък $x < 0$, то полагаме $x = -e^t$. След извършване на субституцията получаваме последователно

$$y = y(x) = y(e^t) = y_t(t),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_t(t)}{dx} = \left(\frac{dy_t(t)}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} e^{-t},$$

където използвахме, че

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}.$$

За да пресметнем на колко е равна втората производна y'' след заместването постъпваме по аналогичен начин

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\dot{y} e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t}(\ddot{y} e^{-t} + \dot{y} e^{-t}) = e^{-2t}(\ddot{y} + \dot{y}).$$

След изчисляване на всички производни до n-ти ред и заместване в (8.3) получаваме следното уравнение с постоянни коефициенти b_i:

$$y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{y}_t + b_n y_t = 0.$$

За да изчислим новото характеристично уравнение-съответствуващо на последното уравнение с постоянни коефициенти постъпваме по следния начин:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1) + a_1 \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Пример 3 Решете следното уравнение на Ойлер: $x^2 y'' - x y' - 3y = 0$, $x > 0$.

Полагаме $x = e^t$. Получаваме уравнението с постоянни коефициенти $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0$, с характеристично уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, с корени $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. На тях съответстват решенията на хомогенното уравнение

$$y_1(t) = e^{-t} = \frac{1}{x},\ y_2(t) = e^{3t} = x^3.$$

Крайният отговор е

$$Y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^3.$$

9.Намиране частно решение на нехомогенно линейно ОДУ от n-ти ред с постоянни коефициенти.

Всяко нехомогенно линейно уравнение с постоянни коефициенти

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{9.1}$$

с произволна дясна част f се решава като варираме константите-или методът на Лагранж, описан по-рано в 7 въпрос. Намираме най-напред решението на хомогенното уравнение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$, а след това частно решение на нехомогенното уравнение (9.1) се търси като

$$Y = C_1(x) y_1 + \cdots + C_n(x) y_n.$$

Неизвестните функции $C_i(x)$ определяме като решение на системата (7.6).

Ако дясната страна на (9.1) се състои от суми и произведения на функции от следния вид $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos(\beta x)$, $\sin(\beta x)$, то частно решение можем да търсим и по следния начин:

Ако дясната част е от вида $P_m(x) e^{\gamma x}$, където $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$,то частното решение има вида

$$y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x} \qquad (9.2),$$

където $Q_m(x)$-е полином от същата степен m. Числото s е равно на 0, ако γ не е корен на харктеристичното уравнение на (9.1), ако γ е корен, то s е равно на кратността на този корен. За да намерим коефициентите на Q_m замесваме изразът от (9.2) в (9.1) и определяме по метода на неопределените коефициенти.

Ако в дясната част участвуват синус и косинус, то използваме формулите на Ойлер:

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \ \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}.$$

Ако коефициентите в дясната част са реални, то мовем да минем и без горните формули. Например ако дясната част е от вида

$$e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right),$$

то можем да търсим частно решение във вида:

$$y_1 = x^s e^{\alpha x}|left(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x,$$

където $s = 0$, ако $\alpha + i\beta$ не е корен на характеристичното уравнение на (9.1) и s е равно на кратността му в противен случй. Полиномите R_m и T_m са от степен m, равно на по-голямата от степените на P и Q. Коефициентите на R_m и T_m се намират точно след заместване в (9.1) и по метода на неопределените коефициенти. Ако дясната страна на (9.1) е сума $f_1 + f_2 + \cdots + f_p$, то частното решение е сума от частните решения съответни на десни части $f_1, \ldots, f_p$.

Пример 1. Решете уравнението

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \tag{9.3}$$

Характеристичното уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ има двукратен корен $\lambda_1 = 3$ и прост корен $\lambda_2 = 0$. Затова решението на хомогенното уравнение е $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + C_3$. Дясната част на (9.3) се състои от две събираеми: за първото имаме $\gamma = \alpha + i\beta = 3$, а за ворото $\gamma = \alpha + i\beta = 3 + 3i$. Търсим поотделно частните решения на уравненията:

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} \tag{9.4}$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x \qquad (9.5).$$

Числото $\gamma = 3$ се явява корен с кратност $s = 2$, затова частно решение на (9.4) търсим във вида $y_1 = x^2(ax + b)e^{3x}$. Замествайки в (9.4) намираме $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{18}$.

Понеже $\alpha + i\beta = 3 + 2i$ не е корен на характеристичното уравнение, то частно решение на (9.5) търсим във вида $y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$. След заместване в (9.5) намираме $c = -\frac{3}{52}$, $d = -\frac{1}{26}$. Общото решение на (9.3) е $y = y_0 + y_1 + y_2$.

10. Линейни хомогенни и нехомогенни системи ОДУ от първи ред - основни понятия, общи решения, метод на Лагранж за намиране на частно решение на нехомогенна система.

За по-лесно възприемане на материята ще започнем със случая на 3 неизвестни функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, които се търсят като решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} x' = f_1(t,x,y,z) \\ y' = f_2(t,x,y,z) \\ z' = f_3(t,x,y,z) \end{array} \right. ,(10.1)$$

която се нарича система от първи ред в **нормален вид**, което означава че от лявата страна стоят производните на неизвестните функции, а от дясната страна са функции само на t, x, y, z. Горната система лесно се обобщава и за n неизвестни функции.

Линейна система от първи ред ОДУ с постоянни коефициенти се нарича системата:

$$\left| \begin{array}{l} x' + a_1x + a_2y + a_3z = f_1(t,x,y,z) \\ y' + b_1x + b_2y + b_3z = f_2(t,x,y,z) \\ z' + c_1x + c_2y + c_3z = f_3(t,x,y,z) \end{array} \right. , \quad a_i, b_i, c_i = const.(10.2)$$

Ако въведем матриците

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \ \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

то системата (10.2) можем да запишем в матричен вид като

$$X'(t) + AX(t) = \bar{f}.$$

Ако $f_1 = f_2 = f_3 \equiv 0$, системата (10.2) се нарича **хомогенна**.Ако поне една от функциите f_1, f_2, f_3 е различна от константата 0 в интервала Δ, в който се изменя променливата t, то системата се нарича **нехомогенна**. Да разгледаме системата (10.2) в случая когато е хомогенна, т.е. $f_1 = f_2 = f_3 \equiv 0$. Нека сме намерили три тройки от решения на тази система $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, $1 \leq i \leq 3$. Ако за произволни константи C_1, C_2, C_3 означим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

то лесно се проверява, че така-дефинирата тройка от функции x, y, z е също решение на хомогенната система (10.2). (Проверете го !)

Дефиниция. Казваме, че тройката от решения (x_i, y_i, z_i), $1 \leq i \leq 3$ на хомогенната система (10.2) е **фундаментална система от решения** ако е изпълнено:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ за всяко} t \in \Delta. \tag{10.3}$$

Теорема 1 Нека (x_i, y_i, z_i), $1 \leq i \leq 3$ са три тройки от решения на хомогенната система (10.2), които образуват фундаментална система от решения. Тогава всяко друго решение на хомогенната система (10.2) се представя по единствен начин като следната линейна комбинация

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \tag{10.4}$$

където C_i са константи.

Доказателство: Че представянето (10.4) ни дава едно поредно решение на хомогенната система (10.2) вече изяснихме. Сега ще покажем обратното, а именно, че ако имаме решение на хомогенната система (10.2), то обезателно трябва да има вида, представен в (10.4). Поради това, че (10.3) е налице за всяко фиксирано $t \in \Delta$, то лесно се вижда, че съществуват единствен набор от функции $C_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$, така щото да е изпълнено

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + C_3(t)x_3(t) \\ y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) + C_3(t)y_3(t) \\ z(t) = C_1(t)z_1(t) + C_2(t)z_2(t) + C_3(t)z_3(t) \end{array} \right. \tag{10.5}$$

Изчислявайки производните на $x(t), y(t), z(t)$, представени в (10.5) и замествайки в хомогенната система, като имаме в предвид, че $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$ са решения на хомогенната система, стигаме до следните три уравнения

$$\left| \begin{array}{l} C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 = 0 \\ C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = 0 \\ C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Поради факта, че основната детерминанта на последната система е различна от 0 (виж (10.3)) то следва че единственото решение на последната система е $C_1' = C_2' = C_3' = 0 \Rightarrow C_1 = const$, $C_2 = const$, $C_3 = const.$. С това теоремата е доказана.

11. Нехомогенни линейни системи ОДУ от първи ред. Метод на Лагранж.

Ще разгледаме как се определят всички решения на нехомогенната система (10.2). Както и при нехомогенните линейни ОДУ от n -ти ред, първо намираме фундаментална система от решения на хомогенната система на (10.2). Как става това за система с постоянни коефициенти - ще разгледаме в следващия параграф. Нека сме намерили фундаменталната система $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))_{i=1}^3$. След това ще търсим едно частно решение на нехомогенната система $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$.Както и в случая на уравнение от n-ти ред , всяко друго решение на нехомогенната система се получава като

$$\left| \begin{array}{l} X(t) = \xi(t) + C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ Y(t) = \eta(t) + C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \quad (11.1), \\ Z(t) = \zeta(t) + C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 \end{array} \right.$$

където в (11.1) C_i са константи. Частното решение ξ, η, ζ намираме по метода на Лагранж като

$$\begin{array}{l} \xi(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + C_3(t)x_3(t) \\ \eta(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) + C_3(t)y_3(t) \\ \zeta(t) = C_1(t)z_1(t) + C_2(t)z_2(t) + C_3(t)z_3(t) \end{array} \qquad (11.2)$$

Ще намерим неизвестните функции $C_i(t)$, така че (ξ, η, ζ), дефинирани в (11.2) да са решения на нехомогенната система (10.2). Изчислявайки първите производни и замествайки в (10.2), като използваме че $(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^3$ са решения на хомогенната система на (10.2) стигаме до системата за намиране на $C_i'(t)$, $1 \le i \le 3$:

$$\left| \begin{array}{l} C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t) \\ C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = f_2(t) \quad (11.3) \\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 = f_3(t) \end{array} \right.$$

Системата (11.3) има единствено решение за всяко фиксирано $t \in \Delta$, поради (10.3). Определяме C_i' по формулите на Крамер. Нека имаме

$C_i'(t) = g_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$. След интегриране по t на последните равенства стигаме и до крайното решение.

12. Системи ОДУ от първи ред с постоянни коефициенти.

Нека да се опитаме да намерим фундаментална система от решения на хомогенната система с постоянни коефициенти за три функции

$$\left| \begin{array}{l} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{array} \right. . (12.1)$$

Ако въведем матриците

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

то системата (12.1) може да се запише в матричен вид като

$$X' = AX.$$

Решението на горното матрично уравнение се дава с така-наречената матрична експонента

$$X(t) = e^{At} = 1 + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots$$

Намирането на матрицата $X(t)$ по този начин при дадена матрица A не винаги е лесна задача. Затова ще се опитаме да намерим $X(t)$ по друг начин. Търсим решения от вида

$$\begin{array}{l} x(t) = \alpha e^{\lambda t} \\ y(t) = \beta e^{\lambda t} \\ z(t) = \gamma e^{\lambda t} \end{array} .$$

Търсим ненулево решение, т.е. поне едно от числата α, β, γ дабъде различно от нула. Лесно се вижда, че $x' = \alpha \cdot \lambda e^{\lambda t} = \lambda \cdot x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$. Заествайки в (12.1) и съкращавайки на $e^{\lambda t}$ получаваме

$$\left| \begin{array}{l} (a_1 - \lambda)\alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma = 0 \\ b_1 \alpha + (b_2 - \lambda)\beta + b_3 \gamma = 0 \\ c_1 \alpha + c_2 \beta + (c_3 - \lambda)\gamma = 0 \end{array} \right. \quad (12.2)$$

Системата (12.2) трябва да има ненулево решение, затова детерминантата и трябва да е 0, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = \det(A - \lambda E) = 0. \tag{12.3}$$

Последното уравнение се нарича характеристично уравнение на системата (12.1). Корените му са собствените числа на матрицата A. Нека λ е едно собствено число на A. Лесно се вижда, че

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' = AX = \lambda X,$$

т.е. $X(t)$ се оказва собствен вектор на A, съответстващ на собственото число λ. Следователно

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

т.е. (α, β, γ) се оказва собствен вектор на A.В зависимост от вида и кратността на корените на характеристичното уравнение различаваме следните случаи :

1.Всички собствени числа са реални и различни. Нека A има 3 реални различни собствени числа $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. На тях съответстват 3 собствени вектора

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \vec{p_2} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \vec{p_3} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix},$$

които дефинират следната тройка от решения:

$$\begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}, \ i = 1, 2, 3. \tag{12.4}$$

Получената система от решения (12.4) е фундаментална система от решения на хомогенната система (12.1), защото векторите $\vec{p_1}, \vec{p_2}.\vec{p_3}$ са линейно-независими, като собствени вектори, съответни на три различни собствени числа-факт , който знаем от линейната алгебра.И така общото решние на системата ОДУ (12.1) в този случай се дава като:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

2. Матрицата A има k-кратно собствено число λ. Определяме първо размерността на собственото подпространство, съответно на това собствено число m. Ако $r = rang(A - \lambda E)$ и n- е броя на неизвестните функции, то $m = n - r$. (В нашия случай $n = 3$.) Решението , съответстващо на $k-$ кратното собствено число търсим като произведения на полиноми от степен $k - m$ с $e^{\lambda t}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (a + \cdots + dt^{k-m})\lambda t, \\ y = (b + \cdots + gt^{k-m})\lambda t, \\ z = (p + qt + \cdots + st^{k-m})\lambda t. \end{array} \right. \qquad (12.5)$$

Коефициентите на полиномите в дясната страна на (12.5) определяме като заместим в изходната система (12.1) и приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на t по метода на неопределените коефициенти. От всички неизвестни коефициенти трябва да останат само k като свободни параметри, а всички останали - да се изразят като тяхна линейна комбинация.

Пример 1. Решете системата ОДУ:

$$\left| \begin{array}{l} x' = 2x + y + z \\ y' = -2x - z \\ z' = 2x + y + 2z \end{array} \right.$$

Решение: Характеристичното уравнение на тази система е :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Виждаме, че матрицата на тази система ОДУ има едно просто реално собствено число $\lambda_1 = 2$ и двукратно собствено число $\lambda_2 = 1$. Лесно се пресмята, че на еднократното собствено число съответния собствен вектор е $(1, -2, 2)$. За двукратното собствено число първо определяме размерността на собственото подпространство m. Рангът r на $A - 1 \cdot E$ е 2, а $n = 3$, т.е. $m = n - r = 3 - 2 = 1$. Тогава $k - m = 2 - 1 = 1$ и решението за това собствено число търсим като:

$$x = (a + bt)e^t,\ y = (c + dt)e^t,\ z = (f + gt)e^t.$$

От шестте коефициента по-горе трябва да останат два, а останалите четири да изразим чрез тях. Това става след заместване в системата и приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на t. Получаваме следна линейна система уравнения

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0, & b &= a + c + f, \\ -2b - d - g &= 0, & d &= -2a - c - f, \\ 2b + d + g &= 0, & g &= 2a + c + f. \end{aligned}$$

Получаваме $a = -d$, $b = 0$, $f = d - c$, $g = -d$, т.е. d, c остават като свободни параметри. Събираме решенията за двете собствени числа и окончателно получаваме решението на тази система

$$\begin{aligned} x &= -de^t + C_3e^{2t} \\ y &= (c + dt)e^t - 2C_3e^{2t} \\ z &= (d - c - dt)e^t + 2C_3e^{2t}. \end{aligned}$$

3.Матрицата A има комплексно собствено число. Изложеният в т.1 метод можем да приложим и тук, но ще получим решението в комплексен вид. Ако искаме да запишем решението в реален вид, използваме че реалната и имагинерна част на комплексното решение съответно на корена $\lambda = \alpha + i\beta$ се явяват линейно-независими решения.

Пример 2. Решете системата

$$\left| \begin{aligned} x' &= 4x - y \\ y' &= 5x + 2y \end{aligned} \right.$$

Характеристичното уравнение е $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, с корени $\lambda = 3 \pm 2i$. За корена $\lambda = 3 + 2i$ намираме собствен вектор (a, b) като решим системата

$$\left| \begin{array}{l} (1-2i)a - b = 0 \\ 5a - (1+2i)b = 0. \end{array} \right.$$

Вземаме $a = 1$, $b = 1 - 2i$. Имаме частно решение

$$x = e^{(3+2i)t},\ y = (1-2i)e^{(3+2i)t}.$$

Сега ще намерим реалната и имагинерна части на посочените по-горе функции както следва

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = Ree^{(3+2i)t} = e^{3t}\cos 2t, \\ y_1 = Re(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t), \\ x_2 = Ime^{(3+2i)t} = e^{3t}\sin 2t, \\ y_2 = Im(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{array} \right.$$

Общото решение в реален вид се записва като

$$x = C_1x_1 + C_2x_2,\ y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

4. Нехомогенна линейна система линейни ОДУ от първи ред. Ако имаме нехомогенната система с постоянни коефициенти

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = f_i(t),\ i = 1, \ldots, n, \tag{12.6}$$

в общия случай я решаваме по метода на Лагранж. Ако десните части на (12.6) се състоят от суми и произведения на $b_0 + b_1t + \cdots + b_mt^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$, то частно решение на нехомогенната система (12.6) можем да търсим по същия начин както в случая на уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти. Ако $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, където $P_{m_i}(t)$ е полином от степен m_i, то частно решение търсим като

$$x_i(t) = Q_{i,m+s}(t)e^{\gamma t},\ i = 1, \ldots, n,$$

където $Q_{i,m+s}(t)$ е полином от степен $m+s$, $m = \max m_i$, а $s = 0$ ако γ не е корен на характеристичното уравнение, а ако е корен, то $s =$ кратността на този корен. Коефициентите на полиномите $Q_{i,m+s}(t)$ се намират точно след заместване в системата.

Пример 3. Решете следната нехомогенна система с постоянни коефициенти

$$\left| \begin{array}{l} x' = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t) \\ y' = x + 2y + te^{3t}\cos t. \end{array} \right.$$