ЛЕКЦИИ ПО ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Емил Хорозов

9 март 2015 г.

Съдържание

Предговор

Тези лекции са предназначени за студентите, които изучават университетския курс по диференциални уравнения, както и за тези читатели, които искат да изучат предмета самостоятелно. Книгата е написана на основата на лекционни курсове, които авторът от много години води в СУ „Св. Климент Охридски" , а също и в някои други университети. Старал съм се текстът да съдържа всички необходими допълнителни сведения, като стане по възможност независим от други източници. Заедно с това, сме се опитвали да избегнем изкушението за включване на интересни и важни теми, но непокривани в стандартния курс. С други думи старанието ни е било това да е текст, колкото се може по-близък до лекционни записки.

Неотменна част от учебника са задачите, предназначени за самостоятелна работа. Нашето мнение е, че усвояването на всички предложени задачи е гаранция за добро владеене на материала.

Глава 1

Основни понятия, задачи и подходи

1.1 Предмет на диференциалните уравнения

Предметът на диференциалните уравнения е възникнал едновременно с математическия анализ и механиката в трудовете главно на Нютон, Лайбниц, братята Бернули. Типична задача в диференциалните уравнения е: да се възстанови пътят на движещо се тяло по неговата скорост. Както се вижда, задачата е изцяло в механични термини. Заедно с това, ако си припомним интерпретацията на скоростта като първа производна, бихме могли да напишем уравнение по следния начин. Нека $x(t)$ означава координатата (засега една) на движещото се тяло в момента t и нека скоростта (или все едно първата производна) е $\dot{x}(t)$. Ще предполагаме, че скоростта зависи от положението на тялото в даден момент t и от самия момент, т.е. има вида $v(x,t)$. Тогава уравнението за намиране на координатата $x(t)$ е:

$$\dot{x} = v(x(t), t) \tag{1.1}$$

Уравнение за неизвестна функция, в което участва и неговите производни (в една и съща точка) се нарича диференциално уравнение.

В случай, когато производните са само по една променлива, уравнението се нарича обикновено диференциално уравнение. До последната глава в този курс ще се занимаваме само с обикновени диференциални уравнения. Затова ще ги наричаме просто *диференциални уравнения* и даже само *уравнения*, когато няма опасност от объркване.

Това уравнение, както и неговите естествени обобщения, ще бъде обект на този курс. Някои от обобщенията ще включват и *частни диференциални уравнения*. Това са уравнения, в които неизвестната функция е на *много променливи* и в което участват няколко частни производни по различни променливи.

В началото ще уточним какво искаме да направим с това уравнение. Един очевиден отговор е: искаме да намерим всички решения, точно както правим обикновено с алгебричните уравнения.

Пример 1.1. *Тяло се движи със скорост $V(t)$, която може да зависи от времето, но не зависи от координатите. В този случай уравнението е*

$$\dot{x}(t) = V(t).$$

Всички решения на това уравнение, както е известно от курса по анализ, се дават с неопределения интеграл

$$x(t) = \int V(t)\mathrm{dt}.$$

Примери от този вид могат да обосноват названието на процедурата по явното намиране на решенията – *интегриране*, макар че често решенията се намират и с други методи.

Пример 1.1.1. Уравнение на нормалното размножаване.

Да предположим, че биологичен вид, чието количество в момента t означаваме с $x(t)$, се размножава със скорост, пропорционална на количеството в дадения момент. Такава ситуация се случва, когато необходимата хранителна среда е в относително голямо количество, т.е няма конкуренция. Съответното диференциално уравнение е

$$\dot{x} = kx$$

Ако забравим произхода на уравнението, можем да считаме, че неговата дефиниционна област е реалната права. Смисълът на задачата обаче подсказва, че правилният избор е положителната полуос.

Уравнението лесно се интегрира, (т.е. решава) като разделим двете страни с функциата x и след това интегрираме. Получаваме.

$$\int \frac{\dot{x}}{x}\mathrm{dt} = \int \mathrm{kdt}$$

Като решим интегралите получаваме

$$\ln x = kt + c,$$

където е произволна константа. Окончателно получаваме $x(t) = e^{kt}C$, където с C сме означили константата e^c.

Изложеното решение е типичната схема на решаване с метода на разделяне на променливите. Повечето уравнения, които могат да се интегрират, са такива защото горната схема е приложима, евентуално след преобразуване на уравнението в някое друго. В глава 2, ще видим много класове диференциални уравнениея, за които можем да намерим всички решения. Като цяло обаче, тази задача е нерешима. Например за следното уравнение Лиувил е показал, че не може да се реши явно

Пример 1.1.2.

$$\dot{x}(t) = x^2 - t$$

Впрочем точният математически смисъл на горните думи се придава чрез доста далече отиваща теория – диференциална теория на Галоа. В този курс няма да се занимаваме с нея.

1.2 Задача на Коши

В диференциалните уравнения, обаче има и други разумни задачи. От физическата постановка следва, че е естествено да намерим едно специално решение – това, което се реализира в действителност. За да добием представа за тези думи нека разгледаме простия пример, когато скоростта е постоянна, $v = v_0$. В този случая ние наистина можем да намерим всички решения. Те се дават с формулата

$$x(t) = v_0 t + x_0,$$

т.е. решенията се параметризират с константата x_0, която има очевиден механичен смисъл – началното положение на тялото в момента $t = 0$. С други думи задачата - да се намери пътят по скоростта - не е определена пълно; трябва да знаем още и началното положение. Точно по същия начин, имайки предвид механичната интерпретация, се досещаме, че ако зададем началното положение, решението се определя еднозначно. Това са евристични съображения, но те могат лесно да се прецизират. Нека (x_0, t_0) е точка от дефиниционната област на функцията $v(x, t)$.

Дефиниция 1.1. *1.1 Задача на Коши ще наричаме уравнението* (1.1) заедно с началното условие

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

С други думи, търсим решение на уравнението (1.1), което в точката t_0 има стойност x_0.

Една от основните теореми в диференциалните уравнения, а и в цялата математика е теоремата за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Във физически термини теоремата казва, че движението на тялото се възстановява еднозначно ако знаем закона за изменение на скоростта и началното положение. Разбира се ние трябва да наложим някакви условия върху функцията $v(x, t)$. Тези условия, обаче са най-естествените, които могат да се очакват. Например можем да предположим, че функцията $v(x, t)$ е диференцируема в някакво отворено множество, съдържащо точката (x_0, t_0).

Теорема 1.1. *При направените предположения съществува функция $x(t)$, дефинирана в достатъчно малка околност на точката t_0, която е решение на задачата на Коши. Тази функция е единствена, в смисъл, че всяко друго решение съвпада с $x(t)$ в сечението на дефиниционните им области.*

Ще докажем тази теорема в глава 3 . Нека да отбележим, че ние само *доказваме съществуването на решение*, но не го намираме явно. Оказва се, че можем да докажем още много свойства на решенията без да решаваме явно уравненията. Например, от фундаментално значение е да знаем как зависи решението от началното си условие или от други параметри. Ако решението не зависи непрекъснато от началното си условие, то движението или процеса, които то описва нямат практически смисъл, тъй като ние работим само приближено в реалните задачи. На въпроси от този вид е посветена глава 3 на нашите лекции.

1.3 Геометрични методи

Движенията в природата са най-често в многомерно пространство, например тримерно. При описание на движението на много точки или при по-сложни закони на движение дори в двумерното физическо пространство се налага да разглеждаме (този път - математически) пространства с повече размерности. Това естествено ни води до изучаването на *системи диференциални уравнения.*

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x_1}(t) = v_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \dot{x_2}(t) = v_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x_n}(t) = v_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{array}\right.$$

Най-често горната система се записва като едно векторно уравнение. Схемата за това е следната. Ще въведем векторите $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = (\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n})$ и $v(t, x) = (v_1, \ldots, v_n)$. Тогава нашата система ще се запише като следното уравнение:

$$\dot{x} = v(x, t). \tag{1.3}$$

Тези записи обосновават употребата на термините „уравнение" и „система" като еквивалентни. Ние ще употребяваме и двата. Уравнението (1.3) е обобщението на едно скаларно диференциално уравнение, за което стана дума по-горе.

Тук отново възниква въпросът какво ще изучаваме на това уравнение и отново най-простото нещо, което ще поискаме е да намерим явно всички решения. Естествено, най-често, както в скаларния случай, това не е възможно. Най-важният клас системи, които можем да изучим е класът на линейните системи с постоянни коефициенти. Това означава, че векторната функция $v(x, t)$ от (1.3) има вида $v(x, t) = Ax$, където A е матрица, чиито елементи не зависят от времето t. В глава 4 ще бъдат изведени явни формули за този случай и за някои негови варианти. Други въпроси, които можем да разглеждаме, са описаните по-горе теореми за съществуване, единственост, непрекъсната и диференцируема зависимост от параметри и др. Нека обърнем внимание, че тези свойства са по-скоро локални.

Но често ние бихме желали да изучим поведението на решенията в големи интервали от време (това е на практика; на теория те са безкрайни). Например бихме желали да знаем дали решенията, които започват движението си близо до друго дадено решение, вечно остават близко до него.

Има и други въпроси, които са по-скоро от качествен или геометричен характер. С помощта на геометричните методи изучаваме свойства на системата (1.3) или на някои нейни решения без да я решаваме явно, което най-често и не може да стане. За това има различни възможности. Най-често ще искаме да взаимното разположение и формата на кривите, зададени от решенията $x(t)$ на диференциалното уравнение. Нека обърнем внимание, че векторът $v(x(t),t)$ има интерпретация чрез допирателната към кривата $x(t)$. Следователно една проста геометрична картина, даваща идея за кривите, е да нарисуваме скоростта $v(x(t),t)$ във всяка точка на пространството. Най-полезна такава рисунка е, когато функцията $v(x(t),t)$ не зависи явно от t , т.е. има вида $v(x)$.

Пример 1.3.1. Да разгледаме двумерната система, описваща системата жертва-хищник и изведена от Волтера и Лотка:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = x(a-my) \\ \dot{y} = y(-b+nx) \end{array}\right.$$

Тук константите a, b, m, n зависят от конкретните условия. Векторното поле за на тази система е изобразено на Фигура 1.1.

В много случаи се интересуваме дали съществуват решения с определени свойства. Например в небесната механика, радиотехниката и други инженерни дисциплини е важно да знаем дали има периодични решения.

Пример 1.2. *Да разгледаме система, описваща малки трептения на махало.*

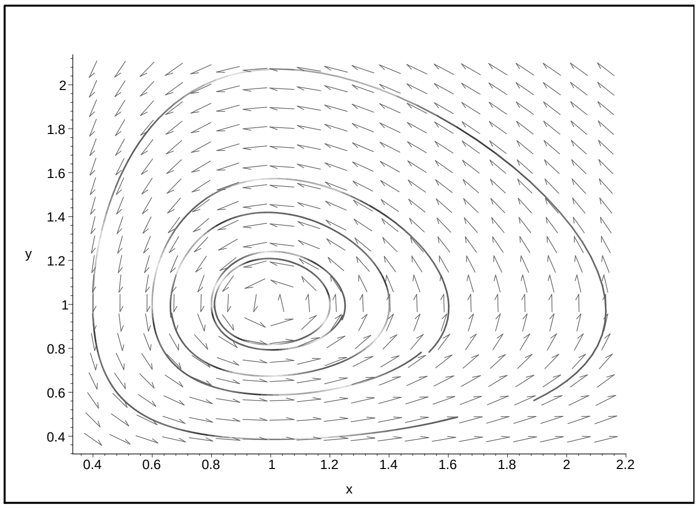
$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{array}\right.$$

Фигура 1.2 показва, че всички решения са периодични.

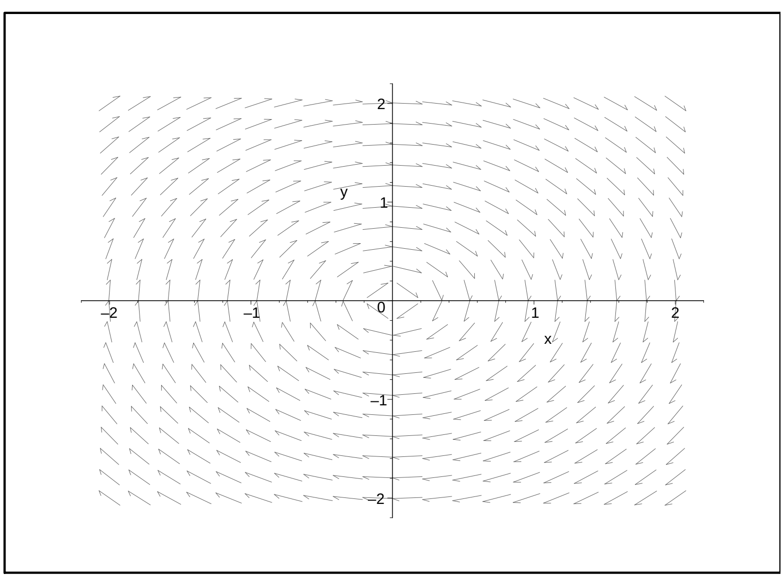
1.4 Какво описват диференциалните уравнения

В този параграф ще разгледаме примери на диференциални уравнения, заедно с описание на процесите или явленията, на които те съответстват.

sd



Фигура 1.1: Векторното поле на системата на Волтера-Лотка



Фигура 1.2: Векторното поле на системата на малките трептения

1.4.1 Механика

Както беше казано в началото, диференциалните уравнения в началото са описвали механични задачи. Най-важната от тях е описанието на планетните движения.

Пример 1.3. *Да разгледаме движението на планета около Слънцето. Можем да считаме, че Слънцето е неподвижно и поместено в началото на координатната система. Ще означим с* (x_1, x_2, x_3) *координатите на планетата (разглеждана като точка). Втория закон на Нютон твърди, че силата* F*, действуваща на едно тяло, е равна на масата на тялото* m *по ускорението на тялото* $\overrightarrow{a}$ *или с формули:*

$$m\overrightarrow{a} = F$$

Силата, действуваща на тялото се дава със закона (пак на Нютон) за всемирното привличане:

$$F = -\frac{GmMx}{||x||^3},$$

т.е. големината на силата на привличане между Слънцето и планетата е пропорционална на произведението на масата на Слънцето M *и масата на планетата* m *(с коефициент на пропорционалност* G*), разделено на разстоянието между двете тела. Векторът на силата е насочен към Слънцето. Като вземем предвид, че ускорението* $\overrightarrow{a} = \ddot{x}$ *получаваме следното (векторно) уравнение за движението на планета около Слънцето:*

$$\ddot{x} = -\frac{GmMx}{||x||^3} \tag{1.4}$$

Тук е уместно да отбележим, че решавайки именно това уравнение Халей е предсказал приближаването на известната комета, носеща неговото име.

Този пример ни показва един основен източник на диференциални уравнения – това е втория закон на Нютон. Поради всеобщата му валидност той се използва във всевъзможни физически процеси.

Едно обобщение на горния пример, изиграло централна роля в математиката, е задачата за n тела (особено популярно сред математиците е названието задачата за трите тела; тя съдържа всички трудности на по-общата задача). Да означим с r_k радиус-вектора на тяло с координати $r_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3})$. Пак по закона за всемирното привличане j-тото тяло привлича k-тото със сила $F_{j,k} = \frac{m_j m_k (r_j - r_k)}{||r_j - r_k||^3}$. Тогава уравненията за движение на се дават с:

$$m_k \ddot{r_k} = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} F_{j,k}, \quad k = 1, \dots, n$$

И така механиката ни дава примери на системи уравнения от вида:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t),$$

където x принадлежи на някаква област в $\mathbb{R}^n$. Можем да положим $y = \dot{x}$ и тогава нашата система става система, в която има само уравнения от първи ред:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = F(x, y, t),$$

1.4.2 Биология

Примери от съвсем друг характер ни дава биологията (популационна биология и екология). Ние вече разгледахме два от тях (виж Пример 1.1.1 и Пример 1.3.1). Тук ще продължим линията на примера за нормално размножаване. Той изглежда твърде идеализиран и поради това тук ще въведем някои по-реални ограничения за размножаването.

Пример 1.4. *Дотук разгледахме размножение в идеална среда, в която има достатъчно храна, независимо от количеството на*

1.4.3 Електрически вериги

Пример 1.5. *Уравнението*

$$\dot{v} = \frac{j}{C}, \quad \dot{j} = -\frac{R}{L}j - \frac{v}{L}$$

описва трептящ контур в LCR-верига. Тук $j(t)$ е силата на тока, $v_{nm}(t)$ е напрежение (разлика между потенциалите) във възлите m и n, R е съпротивлението, C е капацитет, L е индуктивност. Величините R, C и L са параметри на системата и не зависят от времето

Пример 1.6. Уравнение на Ван дер Пол *Да разгледаме модификация на горния пример при горните означения:*

$$L\dot{j} = v - f(j), \quad C\dot{v} = -j$$

Да въведем нови променливи $L^{-1}t = \tau, x_1 = j, x_2 = v$ и да означим $\frac{L}{C}$ с η. При $f(j) = \frac{j}{3} - j$ получаваме знаменитото уравнение на Ван дер Пол

$$\ddot{x} + \eta(x^2 - 1)\dot{x} + x$$

1.4.4 Икономика

Не малко модели в икономиката се описват с диференциални уравнения и с техни аналози, в които времето е дискретно. Една от общите им черти е, че формулировката им изисква доста повече усилия. Друга черта е, че наподобяват описания вече модел на Лотка - Волтера (хищник - жертва), което е естествено.

Пример 1.7. *Един от първите опростени модели на цикъл на растеж, разглеждан от Haavelmo (1956) изглежда така. Нека производствената функция е*

$$Y = KN^a,$$

където Y е продукцията, $K > 0$ е капиталово вложение (фиксирано), а N е предлаганата работна сила. Нарастването на заетостта се моделира като

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta\frac{N}{Y}, \qquad \alpha, \beta > 0$$

Като изразим Y от първото уравнение и заместим във второто получаваме нелинейно уравнение от първи ред за N:

$$\dot{N} = \alpha N - \beta\frac{N^{2-a}}{K}.$$

Това е уравнение на Бернули и решенията му се намират с явни формули, както ще видим в следващата глава.

1.4.5 Химия

Пример 1.8. *В следващия пример се моделира реакцията на окисляване на въглеродния окис върху платинов катализатор. Предлага се следния нелинеен кинетичен механизъм:*

1) $O_2 + 2Pt \leftrightarrows 2PtO$
2) $CO + Pt \leftrightarrows PtCO$
3) $PtCO + PtO \to 2Pt + CO_2$
4) $CO + Pt \leftrightarrows (PtCO)$

където PtO и $PtCO$ са адсорбираните кислород и въглероден окис, Pt - активният център на повърхността на платиновия катализатор, $(PtCO)$ - нереакционноспособна форма на CO върху повърхността на катализатора.

На схемата от реакции 1 - 4 при условия на постоянна температура и концентрация на веществата в газовата фаза, съответства следната система диференциални уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 2k_1z^2 - 2k_{-1}x^2 - k_3xy \\ \dot{y} = k_2z - k_{-2}y - k_3xy \\ \dot{s} = k_4z - k_{-4}s, \end{array}\right.$$

където $z = 1 - x - y - s; x, y, s$ *са безразмерните концентрации на веществата* Pt, PtO, $PtCO$, $(PtCO)$ *съответно,* k_i *са константите на скоростите на съответните химически реакции, разглеждани като параметри на модела.*

Глава 2

Методи за решаване на диференциални уравнения

В тази глава ще разгледаме по-подробно методи за решаване и по-общо – на изследване на сравнително прости диференциални уравнения. Тук под “решаване” разбираме изразяване на решенията чрез известни функции.

> Внимателният читетел едва ли е удовлетворен от горното обяснение на “решаване”. За избягване на недоразумения ще посочим, че точната дефиниция изисква солиден математически апарат - диференциална теория на Галоа, който излиза извън рамките на уводен курс. Ще успокоим тези читатели с обещанието, че във всеки конкретен случай няма да имат проблеми с разпознаването на термина, така както не са имали математици, инженери, физици и др. няколко века.

Методите, които се разглеждат в тази глава са класически в смисъл, че произхождат от създателите на предмета - братята Бернули, Ойлер, Клеро и др. Всъщност става въпрос за решаване на повече или по-малко на обособени класи уравнения, главно от първи ред. Срещат се практически във всеки уводен учебник и най-често се наричат елементарни методи за интегриране. В края на главата се разглеждат и методи за решаване или преработване на уравнения от по-висок ред. И тези методи са класически; известни са от няколко века.

Ще припомним, че според първа глава обикновените диференциални уравнения *от първи ред* имат вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \left(y' := \frac{dy}{dx}\right). \tag{2.1}$$

за някаква функция на три променливи $F(x, y, y')$. Най-често се разглеждат уравнения, решени спрямо производната:

$$y' = f(x, y) = 0. \tag{2.2}$$

С тях ще занимаваме преди всичко и ние.

В общия случай, функцията $F(x, y, y')$ е неразложима. Използвайки смени на променливите и обратни функции, трябва да приведем (2.1) в някое от уравненията от таблица 1.

Таблица 1.

$y' = f(x, y)$	уравнения, решени относно производната y'
$y = f(x, y')$	уравнения, решени относно y
$x = f(y, y')$	уравнения, решени относно x
$f(x, y') = 0$	уравнения, независещи от y
$f(y, y') = 0$	уравнения, независещи от x

След като сме се включили в таблица 1, търсим мястото на нашето диференциално уравнение в разширения ѝ вариант – таблица 2. За всяко уравнение от таблица 2 си има метод (а понякога и алгоритъм) за интегрирането му. Тези методи за интегриране са илюстрирани с примери в следващите параграфите.

Видът на решенията на уравненията от таблица 2 се съдържат в таблица 3 (в края на глава „Елементарни методи ...“).[1]

[1] Таблицата се отнася до диференциални уравнения от произволен ред.

Таблица 2.

Вид уравнение	Начин за интегриране
$y' = 0$	$y = C =$ константа
Точен диференциал $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, където $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$	P и Q се внасят под знака на диференциала: $d\,F(x,y) = 0$; интегрираме: $F(x,y) = C =$ константа
С разделящи се променливи $y' = f(x)g(y)$	$dy/g(y) = f(x)\,dx$; интегрираме: $G(y) = F(x) + C$
Хомогенно $y' = f(y/x)$	Полагаме $y(x) = xz(x)$ и получаваме уравнение с разделящи се променливи
Обобщено–хомогенно $y' = x^{k-1}f(y/x^k)$	Полагаме $y = z^k(x)$ и получаваме хомогенно уравнение
Линейно $y' = a(x)y + b(x)$	$y = \exp\int a(x)dx$ $\times\left[C + \int b(x)(\exp\int -a(x)dx)dx\right]$
Уравнение на Бернули $y' = a(x)y + b(x)y^n$	Полагаме $z(x) = y^{1-n}(x)$ и получаваме линейно уравнение за z
Уравнение на Рикати $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$	$z(x) = \big(y - \phi(x)\big)^{-1}$, $\phi(x)$ е частно решение, го свежда към линейно у-е
Решено относно y или независещо от y $ky = f(x, y')$, $k = 1$ или 0	$y' = p(x)$; диференцираме по x ; y изчезва; $dx/dp = g(x,p) \Rightarrow$ $x = x(p)$, $y = y(p)$,
Решено относно x или независещо от x $kx = f(y, y')$, $k = 1$ или 0	$y' = q(y)$; диференцираме по y ; x изчезва; $dy/dq = h(y,q) \Rightarrow$ $y = y(q)$, $x = x(q)$,

2.1 Уравнения с разделящи се променливи

Ще започнем с един от най-простите видове уравнения, които можем да решим явно. Това са *уравненията с разделящи се променливи* , при които дясната страна се записва като произведение на две функции, всяка от които зависи само от една променлива - $v(x,y) = h(x)\,g(y)$, т.е

$$\frac{dy}{dx} = y' = h(x)\,g(y)\ .$$

Такива уравнения се решават като прехвърлим изразите със y отляво, изразите със

x отдясно, т.е. като запишем уравнението във вида

$$= y'/g(y) = h(x) \ .$$

и интегрираме:

$$= \int \frac{y'\mathrm{dx}}{g(y)} = \int h(x)\mathrm{dx} \quad .$$

Пример 2.1.1. и решение.

$$\begin{aligned} y' &= e^{x+y} \\ \frac{dy}{dx} &= e^x e^y \\ e^{-y}\,dy &= e^x dx \\ -de^{-y} &= de^x \\ -e^{-y} &= e^x + C \ . \end{aligned}$$

Пример 2.1.2. Решете уравнението $y' = \cos(y+x)$.

Решение. Полагаме[2] $z = z(x) = y(x) + x$ и последователно пресмятаме

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= z' = y' + 1 = \cos z + 1 \\ dx &= \frac{dz}{\cos z + 1} = \frac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = d \tan \frac{z}{2} \\ \tan \frac{z}{2} &= x + C \\ z &= 2 \arctan(x + C) \\ y &= 2 \arctan(x + C) - x \ . \end{aligned}$$

Разделянето на променливите в последния пример беше проведено след смяна на променливите (полагане). Практически всички уравнения се решават с помощта тези две операции - смяна на променливите, която да доведе уравнението до уравнение са разделени променливи и интегрирането на това уравнение. Смяната на променливите може да е много трудна за намиране. Намирането ѝ за важни класове уравнения е източник на нови теории, които са допринесли за развитието на математиката и математическото естествознание. В следващите параграфи ние ще видим в прости ситуации някои схеми за интегриране на диференциални уравнения.

[2] Трябва сами да се досетим за това полагане, но то е логично.

2.2 Линейни уравнения и свеждащи се до тях

Линейни (*нехомогенни*) наричаме уравненията

$$y' = a(x)y + b(x) ,$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са функции на x. Нека отбележим, че ако $b(x) \equiv 0$ (такова уравнение се нарича *линейно хомогенно* уравнение) , то е с разделящи се променливи. Следователно можем да го решим. Общото му решение е

$$y(x) = \exp \int a(x)dx .$$

Ще е по-удобно да запишем явно зависимостта от произволната константа, т.е. ще изберем точка $x = x_0$ и ще запишем решението с определен интеграл:

$$y(x) = C \exp \int_{x_0}^{x} a(s)ds . \tag{2.3}$$

Ще решим нехомогенното уравнение (това е уравнението с $b(x) \neq 0$) по метода на Лагранж за вариране на константите. Методът се състои в това да търсим решение на нехомогенното уравнение от вида (2.3), но с "константа"C, която зависи от (т.е. C вече не е константа):

$$y_h(x) = C(x) \exp \int_{x_0}^{x} a(s)ds .$$

Ясно, е че ако намерим "константата" (функцията) $C(x)$, ще решим уравнението. С други думи вместо неизвестната функция $y(x)$ ще търсим неизвестната функция $C(x)$. Именно това е смяната на променливите.

И така чрез горното равенство въвеждаме нова неизвестна функция $C(x)$. След прости преобразования получаваме уравнение с разделящи се променливи относно$C(x)$ и x, което решаваме с едно интегриране. Крайната формула за решението $y(x)$ е

$$y = e^{\int a(x)dx} \left[C + \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx \right] .$$

Пример 2.2.1. Уравнението

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} + 2x(x^2+1)$$

е линейно, със $a(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ и $b(x) = 2x(x^2+1)$. Общото решение е

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}\left[C + \int e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx} 2x(x^2+1)dx\right] \\ &= e^{\ln(x^2+1)}\left[C + \int e^{-\ln(x^2+1)}\, 2x(x^2+1)\, dx\right] \\ &= (x^2+1)\left[C + \int 2xdx\right] \\ &= C.(x^2+1) + (x^2+1)^2\ . \end{aligned}$$

2.2.1 Уравнения на Бернули

Уравнения на Бернули наричаме уравненията

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^n\ ,$$

в които $a(x)$ и $b(x)$ са функции на x, а n е константа. Тези уравнения се интегрират чрез смяната на променливите $z(x) = y(x)^{1-n}$. Тази смяна ги свежда към линейно уравнение, което вече знаем как се решава.

Пример 2.2.2. В уравнението на Бернули $y' + y + xy^3 e^x = 0$, константата $n = 3$. Полагаме $z = z(x) = y^{-2}$. Диференцираме полагането, решаваме полученото линейно уравнение и заместваме обратно z със y^{-2}:

$$\begin{aligned} z' &= \left(y^{-2}\right)' = -2y^{-3}y' = 2y^{-3}(y + xy^3e^x) \\ &= 2y^{-2} + 2xe^x = 2z + 2xe^x = z' \qquad \text{(линейно уравнение)} \\ z &= e^{2x}\left[C + 2\int e^{-2x}xe^x\, dx\right] = Ce^{2x} - 2xe^x - 2e^x \\ y^{-2} &= Ce^{2x} - 2xe^x - 2e^x\ . \end{aligned}$$

2.2.2 Уравнения на Рикати

Уравнение на Рикати наричаме всяко уравнение от вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)\ ,$$

където $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ са функции на x.

За да решим дадено уравнение на Рикати, трябва да открием по някакъв начин поне едно негово решение, т.е. някое *частно решение*.

Алгоритъм за построяване на частно решение обаче не съществува: някои уравнения на Рикати (например $y' = y^2 - x$) нямат нито едно частно решение, изразяващо се чрез елементарни функции. Доказателството на този факт се основава на дълбоки съображения. Ние няма да даваме дефиниция за елементарна функция.

И така, търсим частно решение на уравнението на Рикати чрез налучкване и „близко до вида" на функциите $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$.

Още по-лесно се решава уравнение на Рикати, за които знаем две различни частни решения. Най-добре е, ако знаем три различни частни решения. В следващата таблица сме разгледали споменатите възможности, съответните смени на променливите и начини за окончателно интегриране.

Интегриране на уравнението на Рикати

Частни решения	Смяна на променливите	Свежда се към уравнението	Решение на уравнението за z
ϕ_1	$z = \dfrac{1}{y - \phi_1}$	$z' = p(x)z + q(x)$	Линейно уравнение
ϕ_1, ϕ_2	$z = \dfrac{y - \phi_2}{y - \phi_1}$	$z' = (\phi_2 - \phi_1)az$	$z = C\, exp \int (\phi_2 - \phi_1)adx$
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	$z = \dfrac{y - \phi_2}{y - \phi_1} \cdot \dfrac{\phi_3 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2}$	$z' = 0$	$\dfrac{y - \phi_2}{y - \phi_1} = C\,\dfrac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_3 - \phi_1}$

Пример с едно частно решение. За уравнението на Рикати

$$y' + y^2 \;=\; (2e^x + 1)\, y - e^{2x} \;, \tag{2.4}$$

е логично да търсим експоненциално частно решение $y = k \exp ax$, константите a и k засега са неизвестни.

Ако $a > 1$, то в (2.4) събираемото y^2 расте по-бързо от останалите събираеми и не може да има равенство. Аналогично, ако $a < 1$, то събираемото $e^x y$ няма с какво да се компенсира. Остава единствената възможност $a = 1$.

Веднага се вижда, че $y = \phi(x) = e^x$е частно решение. Полагаме

$$z \;=\; z(x) \;=\; \frac{1}{y(x) - e^x} \;, \qquad zy \;=\; 1 + ze^x \;,$$

диференцираме полагането, решаваме линейното относно z уравнение и сменяме обратно z с y:

$$\begin{aligned} z' \;&=\; -(y' - e^x)(y - e^x)^{-2} \;=\; \left[\, y^2 - (2e^x + 1)y + e^{2x} + e^x \,\right] z^2 \\ &=\; \left[\, (y - e^x)^2 - (y - e^x) \,\right] z^2 \;=\; -z + 1 \\ z \;&=\; e^{-x}\left[C + \int e^x\, dx\right] \;=\; Ce^{-x} + 1 \\ y \;&=\; e^x + \frac{e^x}{C + e^x} \quad . \end{aligned}$$

Пример с две частни решения. Тъй като коефицентите на уравнението на Рикати

$$3x^2y' + x^2y^2 + 2 \;=\; 0 \tag{2.5}$$

са полиноми, то търсим частно решение $y = \phi(x) = ax^n$, в което константите a и n засега са неизвестни. Заместваме предполагаемото частно решение $y = ax^n$ в (2.5) и получаваме

$$3anx^{1+n} + a^2x^{2+2n} + 2 \;=\; 0\,. \tag{2.6}$$

Лявата част на (2.6) е полином, тъждествено равен на нула. Следователно, две от степените на x са равни като най-големи, а други две от степените на x са равни като най-малки. Но в лявата част на (2.6) има три събираеми, и значи те трябва да имат равни степени по x.

Получаваме, че $1 + n = 2 + 2n = 0$, т.е. $n = -1$. Константата a определяме от оставащото от (2.6) равенство $-3a + a^2 + 2 = 0$. Открихме две частни решения:

$$\phi_1 = x^{-1}\,, \qquad \phi_2 = 2x^{-1}\,.$$

Сега вече полагаме

$$z(x) \;=\; \frac{y-\phi_2}{y-\phi_1} \;=\; \frac{y-2x^{-1}}{y-x^{-1}} \;=\; \frac{xy-2}{xy-1}\;,$$

диференцираме полагането, решаваме полученото линейно хомогенно уравнение и правим обратното полагане:

$$\begin{aligned} z' \;&=\; \frac{y+xy'}{(xy-1)^2} \;=\; \frac{3xy-2-x^2y^2}{3x(xy-1)^2} \;=\; \frac{-xy+2}{3x(xy-1)} \;=\; \frac{-1}{3x}\,z \\ z \;&=\; C\,\exp\left(-\int \frac{dx}{3x}\right) \;=\; Cx^{-1/3} \\ xy \;&=\; \frac{C-2x^{1/3}}{C-x^{1/3}}\;. \end{aligned}$$

При $C = \infty$ получаваме частното решение $y = \phi_1 = x^{-1}$. При $C = 0$ получаваме частното решение $y = \phi_2 = 2x^{-1}$.

Пример с три частни решения. За уравнението на Рикати

$$xy' \;=\; \frac{(y-x)(y-2x)}{(x-1)(x-2)} + y\;,$$

търсим полиномиални частни решения $y = \phi = ax^n$. Три такива решения са $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = 2x$ и $\phi_3(x) = x^2$. Веднага прилагаме формулата за общото решение:

$$\frac{y-x}{y-2x} \;=\; C\,\frac{x^2-x}{x^2-2x} \;=\; C\,\frac{x-1}{x-2}\ .$$

Забележка. Всяко уравнение на Рикати има общо решение

$$\frac{y-\phi_2(x)}{y-\phi_1(x)} \;=\; C\,\frac{\phi_3(x)-\phi_2(x)}{\phi_3(x)-\phi_1(x)}$$

където ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 са три различни частни решения, а C е произволна константа. На $C=\infty$ отговаря $y=\phi_1(x)$, на $C=0$ отговаря $y=\phi_2(x)$, а на $C=1$ отговаря $y=\phi_3(x)$.

Може също да се каже, че всяко уравнение на Рикати има общо решение

$$y \;=\; \frac{C\psi_1(x)+\psi_2(x)}{C\psi_3(x)+\psi_4(x)}\ ,$$

където $\psi_j(x)$ са функции на x и C е произволна константа. Тъй като в горния израз можем да съкратим функциите $\psi_j(x)$ на една и съща (произволна) функция, то решенията на фиксирано уравнение на Рикати зависят от три произволни функции[3] и от една произволна константа[4].

2.3 Точни диференциали

Диференциалните уравнения могат да се разглеждат и като уравнения между диференциали. Строгата дефиниция на понятието *диференциал* се обсъжда в курсовете по анализ и геометрия. Интуитивно, диференциалът е „нарастване“: $df = d\,f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ е нарастването на функцията на n променливата f в точката $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Ще използваме следните правила за пресмятане на диференциали и за връзката между диференциали и интеграли:

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx\ , \qquad d\,f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$
$$\int d\,f = f + \text{константа}\ , \qquad d\int f(x)dx = f(x)\,dx\ .$$

Диференциала $d\,f$ на функция f, т.е.

$$d\,f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \;:=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\ ,$$

наричаме *точен*[5].

[3] Колкото са функциите $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$, от които зависи уравнението на Рикати.

[4] Колкото е реда на уравнението на Рикати.

[5] Диференциалът $\omega = a_1(x)\,dx_1 + \cdots + a_n(x)\,dx_n$ е точен, ако $\partial a_i(x)/\partial x_j = \partial a_j(x)/\partial x_i$ за всички индекси i,j и за всяко x.

Уравнението $z' = 0$ се записва като $dz = 0.dt = 0$, откъдето по правилото за интегриране получаваме $z = C$.

Уравнението

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;=\; 0$$

наричаме *уравнение за точни диференциали*, ако лявата му част[6] е точен диференциал, т.е. ако

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \;=\; \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,.$$

Уравненията, които са точни диференциали, се решават, като $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ се внесат под знака на диференциала и после използваме правилото

$$dF \;=\; 0 \iff F = C = \text{константа.}$$

Пример 2.3.1. Уравнението $y\,dx + x\,dy = 0$ е точен диференциал, тъй като $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = x$ и $P_y = Q_x = 1$. Внасяме всичко под знака на диференциала и интегрираме:

$$\begin{aligned} y\,dx + x\,dy &= 0 \\ d\,(yx) &= 0 \\ yx = C &= \text{произволна константа}\,. \end{aligned}$$

Пример 2.3.2. и решение.

$$\begin{aligned} \frac{2x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2}dy &= 0 \\ \frac{dx^2}{x^2+y^2} + \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} + \frac{dy^2}{x^2+y^2} &= 0 \\ \frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2} - \frac{d(x/y)}{(x/y)^2+1} &= 0 \\ d\ln(x^2+y^2) - d\arctan(x/y) &= 0 \\ \ln(x^2+y^2) - \arctan(x/y) = C &= \text{константа}\,. \end{aligned}$$

Пример 2.3.3. Да се реши уравнението $3x^2 + y^2 + (2xy - 6y^2)y' = 0$.

Решение. Представяме y' като dy/dx, умножаваме по dx и внасяме последователно всички събираеми под знака на диференциала:

$$\begin{aligned} &(3x^2+y^2)dx + (2xy-6y^2)dy = 0 \\ &dx^3 + y^2dx + xdy^2 - 2dy^3 = 0 \\ &dx^3 + d(xy^2) - d(2y^3) = 0 \\ &d(x^3 + xy^2 - 2y^3) = 0\,. \end{aligned}$$

[6] В дясно стои нулевият диференциал, който винаги е точен.

Интегрираме и получаваме общото решение

$$x^3 + xy^2 - 2y^3 \;=\; C \;=\; \text{константа.}$$

Забележка 2.3.4. . Уравнението

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = d\,f(x,y) = 0$$

се свежда до уравнението $z'(t) = 0$ със смяната на променливите

$$z \;=\; f(x,y)\;, \qquad t = x\;.$$

2.4 Хомогенни и обобщено–хомогенни уравнения

Уравнение $y' = f(x,y)$, което запазва вида си („е инвариантно“) при смяна на променливите

$$t = ax\;, \qquad z = a^k y\;,$$

за някоя фиксирана константа k и за всяка ненулева константа a, се нарича *обобщено–хомогенно*. Ако $k = 1$, то такова уравнение се нарича *хомогенно*.

Обобщено–хомогенните уравнения се свеждат към уравнения с разделящи се променливи след смяната на $y(x)$ със $w = w(x) = y(x)x^{-k}$.

Технически, по–удобно е отначало да положим $z = y^{1/k}(x)$, което свежда обобщено–хомогенното уравнение до хомогенно. След това полагаме $u = \frac{z(x)}{x}$.

Пример 2.4.1. . Уравнението $(y-x)y' = 2x$ е хомогенно:

$$(ay - ax)\frac{d(ay)}{d(ax)} \;=\; 2ax \;\Longrightarrow\; (y-x)y' \;=\; 2x\;.$$

Полагаме $y = y(x) = xz(x)$, диференцираме полагането, интегрираме уравнението с разделящи се променливи и заместваме обратно $z = y/x$:

$$\begin{aligned}
y &= xz \\
y' &= z + xz' \;=\; \frac{2}{z-1} \\
x\frac{dz}{dx} &= \frac{2}{z-1} - z \;=\; \frac{-z^2+z+2}{z-1} \;=\; -\frac{(z-2)(z+1)}{z-1} \\
\frac{dx}{x} &= \frac{-(z-1)dz}{(z-2)(z+1)} \;=\; -\frac{dz}{z+1} - \frac{dz}{(z-2)(z+1)} \\
\ln x &= -\ln|z+1| - \tfrac{1}{3}\ln|z-2| + \tfrac{1}{3}\ln|z+1| + C \\
x^{-3} &= C(z-2)(z+1)^2 \;=\; Cx^{-3}(y-2x)(y+x)^2 \\
C &= (y-2x)(y+x)^2\;.
\end{aligned}$$

Пример 2.4.2. Уравнението

$$y' \;=\; \frac{1}{2y}\sin\frac{y^2}{x}+\frac{y}{2x}$$

не се мени при смяната $y \mapsto ay$, $x \mapsto a^2x$, и следователно е обобщено–хомогенно със $k=\frac{1}{2}$.

Полагаме $z=y^2$ и получаваме хомогенно уравнение:

$$z' \;=\; \left(y^2\right)' \;=\; 2yy' \;=\; \sin\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x} \;=\; \sin\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\;.$$

Правим второ полагане $u(x)=\frac{z(x)}{x}$, т.е. $z=xu(x)$, диференцираме полагането, интегрираме уравнението с разделящи се променливи и заместваме обратно u със z/x и z със y^2:

$$\begin{aligned}
z' &= xu'+u \;=\; \sin\frac{z}{x}+\frac{z}{x} \;=\; \sin u+u\\
x\,\frac{du}{dx} &= \sin u\\
\frac{dx}{x} &= \frac{du}{\sin u} \;=\; \frac{d\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}\,\tan\frac{u}{2}} \;=\; \frac{d\tan\frac{u}{2}}{\tan\frac{u}{2}} \;=\; d\,\ln\tan\frac{u}{2}\\
\ln x &= \ln\tan\frac{u}{2}+C\\
Cx &= \tan\frac{u}{2} \;=\; \tan\frac{y^2}{2x}\\
y^2 &= 2x\arctan Cx\;.
\end{aligned}$$

2.5 Уравнения, нерешени спрямо производната

Ако уравнението $F(x,y,y')=0$ не може да се реши спрямо производната y', то остава възможността, след евентуално преработване, да го представим в една от следните форми:

$y=f(x,y')$ – решено спрямо y,

$f(x,y')=0$ – независещо от y,

$x=f(y,y')$ – решено спрямо x,

$f(y,y')=0$ – независещо от x.

Ще разгледаме подробно уравнението

$$y \;=\; f(x,y')\;.$$

То се решава, като положим $y' = p(x)$ и диференцираме $y = f(x,p)$ по x. Тогава y изчезва и получаваме диференциално уравнение от първи ред за $x = x(p)$, но вече разрешено спрямо производната dx/dp.

Решаваме го по известните ни методи за интегриране на уравнения от първи ред, разрешени спрямо производната[7]. Получаваме функцията $x = x(p,C)$, след което непосредствено изразяваме $y = f\big(x(p,C),\, p\big)$. Окончателното решение е в параметричен вид, с параметър производната $p = y'$:

$y = f(x,y')$	Полагаме $y' = p(x)$
$y = f(x,p)$	Диференцираме по x
$p = f_x(x,p) + f_p(x,p)\cdot\dfrac{dp}{dx}$	Изразяваме $\dfrac{dx}{dp}$
$\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{f_p(x,p)}{f_x(x,p)-p}$	Интегрираме
$x = x(p,C)$	Изразяваме y
$y = f(x(p,C),p) = y(p,C)$	Получаваме решението

$$\left|\begin{array}{l} x = x(p,C) \\ y = y(p,C) \end{array}\right. , \quad C \text{ е произволна константа.}$$

Винаги разглеждаме и случая, когато p *не може да ни служи за параметър*, а именно $dp = 0$. Тогава $y'' = p' = 0$, откъдето $y = Ax+B$ (A и B са константи). Заместваме $y = Ax+B$ в уравнението $f(x,y') = y$ или 0 за да проверим кои A и B ни дават решение. По принцип, поне една от двете константи отпада.

Тъй като

$$F(x,y,y') \;=\; F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = F\left(x,y,\frac{1}{x'}\right) = 0\,, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}\right),$$

то променливите x и y са равноправни и случаите $f(y,y') = x$ и $0 = f(y,y')$ са аналогични на случая $y = f(x,y')$, само че x и y си разменят местата и вместо p пишем $q = \frac{1}{p}$.

Пример 2.5.1. . Да се реши уравнението $y = 2xy' - (y')^2$.

Решение. Полагаме $y' = p$, $x = x(p)$, $y = y(p)$. Диференцираме по x уравнението $y = 2xp - p^2$, разрешаваме спрямо $\frac{dx}{dp}$ и решаваме полученото линейно диференциално

[7] Ако това изобщо е възможно.

уравнение:

$$\begin{aligned} y &= 2xy' - (y')^2 \\ y &= 2xp\ -\ p^2 \\ p &= 2p + 2xp' - 2pp' \\ \frac{dx}{dp} &= \frac{dx}{dp}\ =\ -\frac{2x}{p} + 2 \\ x &= \frac{C}{p^2} + \frac{2p}{3}\,. \end{aligned}$$

Лесно пресмятаме и y:

$$y\ =\ 2xp - p^2\ =\ \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}\,.$$

Възможноста p да не е параметър, т.е. $p' = y'' = 0$, ни дава и евентуалните допълнителни решения $y = Ax+B$, A и B са константи. Заместваме в първоначалното уравнение и получаваме единственото допълнителното решение $y = 0$.

Пример 2.5.2. Уравнението $y^2(y')^3+2xy' = y$ се решава по x. След това диференцираме по y и полагаме $q = dx/dy$:

$$\begin{aligned} 2x &= yq - y^2q^{-2} \\ 2q &= q - 2yg^{-2} + (y + 2y^2q^{-3})q' \\ q^3 &= -2y \qquad\qquad \text{или} \qquad\qquad q = yq' \\ dx/dy &= -(2y)^{1/3} \qquad\quad \text{или} \qquad\qquad q = y\,dq/dy \\ x &= -\int (2y)^{1/3}dy = -3.2^{-5/3}y^{4/3} + A \qquad \text{или} \qquad y = Cq\,. \end{aligned}$$

От равенствата $32(x-A)^3 = -27y^4$, само при $A = 0$ получаваме решение на диференциалното уравнение. От втората възможност $y = Cq$ и от уравнението $2x = yq - y^2q^{-2}$ пресмятаме $2x = Cq^2 - C^2$.

Общото решение на диференциалното уравнение е

$$\left|\begin{array}{l} y = Cq \\ 2x = Cq^2 - C^2 \end{array}\right. \qquad \text{или} \qquad 32x^3 = -27y^4\ .$$

Пример 2.5.3. Пример за разпадащо се уравнение

Уравнението $xy'^2 = y$ се разпада на две отделни уравнения с разделящи се променливи:

$$\begin{aligned} x^{1/2}y' &= y^{1/2} &\qquad \text{или} \qquad& x^{1/2}y' = -y^{1/2} \\ y^{-1/2}\,dy &= x^{-1/2}\,dx &\qquad \text{или} \qquad& y^{-1/2}\,dy = -x^{-1/2}\,dx \\ y^{1/2} &= x^{1/2} + C &\qquad \text{или} \qquad& y^{1/2} = -x^{1/2} + C. \end{aligned}$$

2.6 Уравнения от втори и по-висок ред

За всяко диференциално уравнение от n–ти ред

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) \;=\; 0\;,$$

съществува число k, $0 \le k \le n$ и такова, че след смени на променливите и $k-$кратно интегриране, уравнението може се сведе до диференциално уравнение от ред $(n-k)$

$$G\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k\big) \;=\; 0\;.$$

G е някаква функция на $(n+2)$ променливи, последните k от които са произволни константи. Освен това, редът на полученото уравнение от $(n-k)-$ти ред не може повече да се понижава.[8]

Ако редът на някое уравнение се понижава със k, то това може да стане както с един ход, така и на няколко етапа, включително и след $k-$кратно понижаване на реда с единица.

Ако $n = k$, то казваме че уравнението се *решава*.

Причината, по която редът на дадено уравнение може да се понижи, е наличието на симетрии на уравнението. Ще разгледаме само няколко частни случаи на симетрии, заедно с конкретните начини за понижаване на реда на съответните уравнения.

2.6.1 Уравнения, които са пълни производни

Ако уравнението $F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$ се представя като *пълна производна*

$$0 \;=\; F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) \;=\; \frac{d}{dx} G\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$$

за някоя функция G, то след интегриране по променливата x понижаваме реда на F с единица. Получаваме уравнението

$$G\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) \;=\; C_1 = \text{ константа}$$

и търсим начини[9] за по-нататъшното понижаване на реда му.

Проверката, дали функцията F е пълна производна, е равносилна на пресмятането на интеграла $\int F\big(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big)\, dx$.

Пример. Уравнението $xy''y + x(y')^2 + yy' = 0$ може да се представи като точен диференциал и след това да се интегрира още веднъж:

$$\begin{aligned}
0.dx &= \big[\, xy''y + x(y')^2 + y' \,\big]\, dx \\
&= xy\, dy' + xy'\, dy + yy'\, dx \;=\; d\,(xyy') \\
C_1 &= 2xyy' \;=\; 2xy\,\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{dy^2}{d\,\ln x} \\
y^2 &= C_1 \,\ln x + C_2\;.
\end{aligned}$$

[8] Съществуват начини за доказване, че редът на дадено уравнение не се понижава.

[9] Търсим симетрии на уравнението $G\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) = C_1$.

2.6.2 Уравнения, независещи от $\mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(\mathbf{k})}$

Симетрията на уравнението

$$F\big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\big) \;=\; 0 \tag{2.7}$$

е, че в него не участва явно *нулевата производна*, както и производните на y до ред $(k-1)$ включително. $y^{(0)} := y(x)$ Полагаме

$$z = z(x) = y^{(k)}\,, \qquad z' = y^{(k+1)}\,, \quad z'' = y^{(k+2)}\,, \cdots\,, \quad z^{(n-k)} = y^{(n)}\,,$$

с което понижаваме реда на уравнението (2.7) със k.

Пример. Уравнението $x^2y'' = y'^2$ не зависи от y и след полагането $z = y'$, $z' = y''$ понижаваме реда му с единица. Полученото уравнение $x^2z' = z^2$ е с разделящи се променливи:

$$\begin{aligned}
x^2z' &= x^2\frac{dz}{dx} \;=\; z^2 \\
z^{-2}\,dz &= x^{-2}\,dx \\
\frac{1}{z} &= \frac{1}{x} + C_1 \;=\; \frac{1}{y'} \;=\; \frac{dx}{dy} \\
dy &= \frac{xdx}{1 + C_1x} \;=\; \frac{dx}{C_1} - \frac{dx}{C_1 + C_1^2x} \\
y &= \frac{x}{C_1} - \frac{\ln(C_1 + C_1^2x)}{C_1^2} + C_2 \\
y &= B_1x - B_1^2\ln(x + B_1) + B_2\;.
\end{aligned}$$

2.6.3 Уравнения, хомогенни спрямо y и производните на y

Нека някое диференциално уравнение не се мени при умножение на y и производните на y с произволна константа λ, т.е. за някое $k \in \mathbb{R}$,

$$F\big(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}\big) \;=\; \lambda^k F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) \;=\; 0 \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}\;.$$

Такива уравнения се наричат *хомогенни от степен k спрямо y и производните на y*. Полагаме

$$y' = \,z(x)\,y\,, \qquad y'' = \,(z' + z^2)\,y\,, \quad y''' = \,(z'' + 3z'z + z^3)\,y\;, \ldots,$$

с което понижаваме реда на уравнението с единица. Продължаваме да търсим още начини за понижаване на реда. След като (и ако) успеем да пресметнем z, решаваме линейното хомогенно уравнение $y' = zy$, в което $z = z(x)$ е вече известна функция.

Пример. Уравнението $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$ е хомогенно от степен $k = 2$ спрямо y и производните на y. Полагаме

$$y' = z(x)y \ , \qquad y'' \ = \ z'y + zy' \ = \ z'y + z^2y \ = \ (z' + z^2)\, y$$

в първоначалното уравнение, съкращаваме на y^2, интегрираме по x полученото уравнение и пресмятаме $\exp\int z(x)dx$:

$$\begin{aligned} z' + z^2 &= z^2 + 15\sqrt{x} \\ z &= 15\int \sqrt{x}\, dx \ = \ 10\, x^{3/2} + C_1 \ = \ y'/y \\ y &= C_2 \exp\left[\int z(x)\, dx\right] \ = \ C_2 \exp\left[\int (10x^{3/2} + C_1)dx\right] \\ &= C_2 \exp\left[4x^{5/2} + C_1 x\,\right] \ . \end{aligned}$$

2.6.4 Уравнения, независещи от x

Уравненията от вида $F\big(y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$ притежават

симетрията, че *не зависят от* x. Техния ред понижаваме с единица, като положим

$$y' = p(y) = p\,, \qquad y'' = p'p\,, \quad y''' = p''p^2 + (p')^2p\,,\ \ldots\,.$$

Пример. Уравнението $yy'' = y'^2 + y'$ не зависи по явен начин от x. Полагаме $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, интегрираме полученото линейно уравнение, полагаме обратно $p = dy/dx$ и интегрираме полученото уравнение с разделящи се променливи:

$$\begin{aligned} yp'p &= p^2 + p \\ p' &= y^{-1}p + y^{-1} \\ p &= e^{\int dy/y}\left[C_1 + \int e^{-\int dy/y} y^{-1}\, dy\right] \ = \ C_1y - 1 \ = \ \frac{dy}{dx} \\ C_1dx &= (C_1y-1)^{-1}C_1dy \ = \ d\,\ln\big(y - C_1^{-1}\big) \\ C_1x &= \ln\big(y - C_1^{-1}\big) + C_2 \\ y &= C_2e^{C_1x} + C_1^{-1}\ . \end{aligned}$$

Тъй като в един момент съкратихме на p, то разглеждаме и случая $p = 0$, т.е. $y' = 0$, т.е. $y = C$ в първоначалното уравнение. Но решенията $y = C$ се съдържат в общото решение $y = C_2e^{C_1x} + C_1^{-1}$ (при $C_2 = 0$ и $C_1^{-1} = C$).

2.7 Таблица на решенията на диференциални уравнения

Следващата таблица съдържа списък от разгледаните в предишните параграфи диференциални уравнения и вида на съответните им решения.

По тази таблица лесно можем да съставим диференциално уравнение. За целта избираме някакаво общо решение $F(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ и диференцираме n пъти по x (считайки, че $y = y(x)$). От получените n тъждества изключваме константите $C_1, C_2 \ldots, C_n$ и получаваме диференциално уравнение от n–ти ред.

Таблица 3.

Вид уравнение	Решение от вида
Точен диференциал	$F(x,y)=C$
С разделящи се променливи	$F(x)=G(y)+C$
Хомогенно	$y = x\,F(Cx)$
Обобщено–хомогенно	$y = x^k\,F(Cx)$
Линейно хомогенно	$y=Cp(x)$
Линейно нехомогенно	$y=Cp(x)+q(x)$
на Бернули	$y^{1-n}=Cp(x)+q(x)$
на Рикати	$\dfrac{y-\phi_2}{y-\phi_1}=C\dfrac{\phi_3-\phi_2}{\phi_3-\phi_1}$
Решено спрямо x или y, или независещо от x или y	$x=\int\phi(p,C)\,dp$, $y=\int p\,\phi(p,C)\,dp$
Пълна производна	$f\,(x,y,C_2,\ldots,C_n)=C_1$
Уравнение от n–ти ред, независещо от $y,y',\ldots,y^{(k)}$	$y=C_nx^{k-1}+C_{n-1}x^{k-2}+\cdots+C_{n-k+1}$ $+\iint\cdots\int\phi(x,C_1,..,C_{n-k})dx\,dx...dx$
Хомогенно по y и производните на y	$y=C_n\exp\int f(x,C_1,\ldots,C_{n-1})\,dx$
Независещо от x	$x=C_n+\int f(y,C_1,\ldots,C_{n-1})\,dy$
Уравнение на Нютон	$t-t_0=\sqrt{\frac{m}{2}}\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$
Разпадащо се уравнение	$f_1(x,y,A_1,\ldots,A_n)=0$ или $f_2(x,y,B_1,\ldots,B_n)=0$

2.8 Упражнения

1. Решете уравненията:

   а) $xy+(x+1)^2y'=0$, Отговор: $y=e^{-\frac{1}{1+x}}c/1+x$

   б) $y'=(2-y)\operatorname{tg}x$, Отговор: $y=2-c.\cos x$

в) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+y^2}=0,$ Отговор:

г) $y'\text{cotg}\ x+y=2$

2. Определете вида на следните уравнения и намерете техните общи решения

   а) $y'=3x^2y+x^5$

   б) $x^2y'=-xy-1$

   в) $y'+2y=y^2e^x$, Отговор:

   г) $y'=y\,\text{tg}\,x+y^4\cos x$

3. Потърсете частни решения на следните уравнения на Рикати от определен вид (например $y=\alpha x^k$, $\alpha\ k$) . С тяхна помощ намерете всички решения на уравненията.

   а) $3x^2y'+x^2y^2+2=0.$

   б) $y'+xy^2-x^3y-2x=0.$

   в) $y'4e^{2x}y-2y^2=2e^{4x}+2e^{2x}.$

   г) $y'=xy^2+(2x^2-1)y+x^3-x-1.$

   д) $y'-y^2+y\sin x-\cos x=0.$

4. Покажете, че ако знаем две частни решения φ_1, φ_2 на уравнението на Рикати, общото решение се намира чрез решаване на линейно уравнение.

   Упътване. Положете

$$w=\frac{y-\varphi_1}{y-\varphi_2}.$$

5. Покажете, че ако знаем три частни решения на уравнението на Рикати, общото решение се намира без квадратури, т..е без интегриране.

6. Решете уравненията:

   а) $xy'=y\cos(\ln y-\ln x)$

   б) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

   в) $x-y+1=(y-2x-1)y'$

   г) $y+\sqrt{xy}=xy'$

7. Проверете дали следните уравнения са точни диференциали. В случай, че е така ги решете. В противен случай отначало намерете интегриращ множител и пак ги решете:

   а) $(x^2-y^2+2xy)\mathrm{dx}+(\mathrm{x}^2-2\mathrm{xy})\mathrm{dy}=0$

   б) $(1+y)\mathrm{dx}+(\mathrm{x}+\mathrm{y})\mathrm{dy}=0$

в) $(x^2 - y^2)\mathrm{dx} + 2\mathrm{xydy} = 0$

г) $x\mathrm{dx} = (\mathrm{xdy} + \mathrm{ydx})\sqrt{1 + \mathrm{x}^2}$

д) $(y^4 - 2x^3y)\mathrm{dx} + (\mathrm{x}^4 - 2\mathrm{xy}^3)\mathrm{dy} = 0$

8. Решете уравненията

а) $y = 3xy' + 7y'^3$

б) $2yy' - x(y'^2 + 1) = 0$

в) $x = y'^3 + y'$

г) $xy' - y = \ln y'$

д) $y'^4 - y'^2 = y^2$

9. Понижете реда на следните уравнения. Ако след понижението е възможно, ги решете:

а) $x^2y'' = y'^2$

б) $y^3y'' + 1 = 0$

в) $y''' = 2(y'' - 1)\cot x$

г) $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$

Глава 3

Основни теореми

Физическата интуиция ни казва, че ако знаем началните условия на едно движение и законите на движението, можем да възстановим еднозначно движението. В тази глава ще се занимаем с отговори на въпроса дали интуицията не ни подвежда.

Ще докажем няколко теореми, които обосновават твърдението, че задачата на Коши е коректно поставена, т.е. че решението ѝ съществува, единствено е и непрекъснато зависи от началните данни, стига функциите, които задават закона на движение, да са естествени свойства.

3.1 Теорема за съществуване и единственост. Метод на последователните приближения

Ще разгледаме най-простия случай на скаларно уравнение. По-нататък ще видим, че общият случай практически не се различава от едномерния. Преди да припомним задачата на Коши ще въведем някои означения . Нека $v(t, x)$ е скаларна функция на аргументите $(t, x) \in W \subset \mathbb{R}^2$. Тогава задача на Коши се нарича съвкупността съставена от диференциалното уравнение и началното условие:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \qquad \text{където точката } (t_0, x_0) \in W \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Тук трябва да кажем кои функции ще допускаме в дясната страна на уравнението. Един много естествен клас за задачи от физиката и по-общо клас от еволюционни задачи е класът съставен от диференцируемите функции $v(t, x)$. Оказва се, че за целите на доказателството е удобно да се разглежда дори по-общ клас – класът от функции, удовлетворяващи условието на Липшиц.

Дефиниция 3.1.1. *Нека функцията f е дефинирана в множеството $U \subset \mathbb{R}$ Казваме, че $f : U \to \mathbb{R}$ е Липшицова ако*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{x, y} \in \text{U}.$$

Горното условие се нарича условие на Липшиц.

Ще покажем, че наистина условието на Липшиц е по-общо отколкото условието за непрекъснатост.

Лема 3.1.2. *Ако функцията f е непрекъснато диференцируема върху компактния интервал V на областта U, то тя е Липшицова, като $L = \sup_V |f^{'}|$.*

Доказателство. Нека $x, y \in V$ (фиг. 1). От теоремата за крайните нараствания имаме

$$f(y) - f(x) = f^{'}(\xi)(x - y)$$

Следователно

$$|f(y) - f(x)| = |f^{'}(\xi)|.|x - y| \leq max_{\xi \in V}|f^{'}(\xi)|.|x - y|.$$

□

С помощта на понятието липшицова функция ще формулираме и докажем основните теореми.

Най-напред ще въведем някои означения. Да предположим, че функцията $v(t, x)$ е липшицова по втория аргумент. По-точно ще предположим, че за някоя константа L е в сила

1) $|v(t, x) - v(t, y)| \leq L|x - y|$.

Нека обърнем внимание, че константата L е една и съща за всяко t.

Да впишем в областта W правоъгълника $\Pi := \{t, x : |t| \leq a,\ |x| \leq b\}$.

2) Ще предполагаме още, че $v(t, x)$ е непрекъсната в Π. С M ще означим една горна граница на v в Π. Накрая нека h е константа, дефинирана като $h = min(a, \frac{b}{M})$.

Теорема 3.1.3. *Нека $v(t, x)$ е непрекъсната и удовлетворява горните условия 1) и 2). Тогава съществува единствено решение $x(t)$ на задачата на Коши (*(3.1)), дефинирано в $(t_0 - h, t_0 + h)$.

Тази теорема ще докажем с помощта на метода на последователните приближеиния на Пикар. Нека отбележим, че доказателството на теоремата има и самостоятелна стойност, тъй като е модел (един от най-простите) на метода на последователните приближения.

Доказателство. Първо ще заместим задачата на Коши (3.1) с интегрално уравнение. Интегралните уравнения са далече по-удобни за прилагане на метода на последователните приближения.

Лема 3.1.4. *Всяко решение на задачата на Коши* (3.1) е непрекъснато решение на следното интегрално уравнение:

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x} ds = \int_{t_0}^{t} v(s, x(s)) ds. \tag{3.2}$$

Обратно, всяко непрекъснато решение на интегралното уравнение е решение на задачата на Коши (3.1).

Доказателство. на Лема 3.1.4

Нека x е решение на задачата на Коши (3.1). Тъй като $\dot{x}$ съществува, то x е непрекъсната функция. Следователно непрекъсната е и $v(t, x(t))$. Оттук следва, че $\dot{x}$ също е непрекъсната. Интегрираме от t_0 до t, използваме теоремата на Лайбниц-Нютон и началното условие и получаваме

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s, x(s))ds \tag{3.3}$$

Така показахме, че всяко решение на (3.1) е решение на интегралното уравнение. Обратно, нека $x(t)$ е непрекъснато решение на (3.2). Да диференцираме двете страни на интегралното уравнение. (Защо това е възможно?) Получаваме, че x удовлетворява диференциалното уравнение. Началното условие с получава с директно заместване в (3.2) $t = t_0$. □

Връщаме се към доказателството на теоремата. То се състои от серия стъпки, които ще опишем по-долу.

1) Дефиниране и коректност (отговор на въпроса дали съществуват) на последователните приближения.

2) Доказателство за тяхната равномерна сходимост.

3) Доказателство, че границата удовлетворява интегралното уравнение.

4) Доказателство за единственост.

Стъпка 1)

Последователните приближения дефинираме по начин, подсказан от интегралното уравнение. А именно, ако знаем $x_n(t)$, дефинираме следващото приближение $x_{n+1}(t)$ по формулата

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s, x_n(s))ds, \quad n = 1, \ldots \tag{3.4}$$

За нулево приближение взимаме $x_0(t) \equiv x_0$. Трябва да покажем, че функциите $x_n(t), \quad n = 1, \ldots$ са добре дефинирани по формулата (3.4) в интервала $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Това ще стане ако покажем, че функциите $x_n(t), \quad n = 0, 1, \ldots$ взимат стойности в дефиниционната област на $v(t, x)$. За x_0 това е очевидно и затова ще започнем от $x_1(t)$. Освен това ще предположим, че $t \geq t_0$. Другият случай не се различава принципиално. Имаме

$$|x_1(t) - x_0| = |\int_{t_0}^{t} v(s, x_0)ds| \leq \int_{t_0}^{t} |v(s, x_0)|ds \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b,$$

т.е. функцията $x_1(t)$ е в дефиниционната област. Да предположим, че $||x_k(t) - x_0|| \leq b$ за някое $k \geq 1$. За следващото приближение имаме

$$|x_{k+1}(t)-x_0| = |\int_{t_0}^{t} v(s,x_k(s))ds| \leq \int_{t_0}^{t} |v(s,x_k(s))|ds \leq M|t-t_0| \leq Mh < M\frac{b}{M} = b.$$

Според принципа на математическата индукция горната оценка е вярна за всеки елемент от редицата.

Очевидно, че всички функции $x_n(t), \quad n = 1, \ldots$ са непрекъснати.

Стъпка 2)

За да докажем, че редицата $\{x_n(t)\}$ е равномерно сходяща ще я заместим с естествено произлизащ от нея ред. За редове съществуват по-удобни критерии за равномерна сходимост като критерия на Вайерщрас. Да положим

$$y_0(t) = x_0(t),\, y_1(t) = x_1(t) - x_0(t), \ldots, y_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t).$$

Редицата от парциалните суми на реда $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$ е точно $\{x_n(t)\}$, т.е. сходимостта на реда и редицата е едно и също нещо.

За да приложим критерия на Вайерщрас трябва да оценим членовете на реда $\{y_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)\}$ с членовете на сходящ числов ред. За y_0 имаме оценка. За останалите членове ще направим най-напред оценка с функции, зависещи от t , а след това ще използваме оценката за t, която знаем: $|t-t_0| \leq h$

За $y_1(t)$ имаме

$$|y_1| = |x_1(t) - x_0(t)| \leq |\int_{t_0}^{t} v(s,x_0)ds| \leq \int_{t_0}^{t} |v(s,x_0)|ds \leq \int_{t_0}^{t} Mds| = M(t-t_0).$$

(Тук отново сме предположили, че $t \geq t_0$.) За да съобразим как изглежда оценката в общия случай нека да я направим и за y_2. Имаме

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |\int_{t_0}^{t} \big(v(s,x_1(s)) - v(s,x_0)\big)ds|$$

С помощта на неравенството на Липшиц намираме

$$\int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_0)|ds \leq \int_{t_0}^{t} LM(s-t_0)ds = \frac{LM(t-t_0)^2}{2}$$

Повтаряйки същите разсъждения намираме, че ако за някое $k \geq 1$ е изпълнено

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \frac{M(L)^{k-1}(t-t_0)^k}{k!},$$

то за следващото приближение е изпълнено съответното неравенство

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{M(L)^k (t-t_0)}{(k+1)!}.$$

Следователно неравенството е изпълнено за всяко n.

Да използваме сега, че $|t-t_0| \leq h$. Получаваме, че $|y_n(t)| \leq \frac{M(L)^{n-1}h^n}{n!}$. Можем да приложим критерия на Вайерщрас към реда $y_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}$. По този начин получихме, че редицата $x_n(t)$ е равномерно сходяща в интервала . Тъй като всичките ѝ членове са непрекъснати функции, то и границата ѝ $x(t)$ е също непрекъсната функция.

Стъпка 3)

Ще покажем, че граничната функция $x(t)$ удовлетворява интегралното уравнение. Нека ε е произволно положително число. Тогава съществува цяло положително число N, $n > N$, $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$. За такива n можем да оценим

$$|\int_{t_0}^t v(s, x_n(s))ds - \int_{t_0}^t v(s, x(s))ds| \leq L \int_{t_0}^t |x_n(s) - x(s)|ds \leq L\varepsilon.$$

Като използваме това неравенство, както и дефиницията на x_{n+1} получаваме:

$$|x_{n+1}(t) - x_0 - \int_{t_0}^t v(s, x(s))ds| \leq |\int_{t_0}^t v(s, x_n(s))ds - \int_{t_0}^t v(s, x(s))ds| \leq \varepsilon + L\varepsilon,$$

с което е показано, че $x_{n+1}(t)$ клони към $x_0 + \int_{t_0}^t v(s, x(s))ds$. От друга страна знаем, че тази граница е $x(t)$. □

Стъпка 4)

За доказване на единствеността отново ще използваме интегралното уравнение.

Остава да докажем единствеността. Отново ще използваме интегралното уравнение. Нека $x(t)$ и $z(t)$ са две решения на задачата на Коши в интервала $|t-t_0| \leq h$. Ще покажем, че $x(t) \equiv z(t)$. Да допуснем, че $x(t) - z(t)$ не е тъждествено нула. Ще положим

$$\beta = \max\{t > t_0, \text{ за които } x(s) = z(s) \text{ при } s \leq t\}.$$

Ясно е, че $\beta > t_0$. Нека η е положително число, което ще изберем по-късно. Полагаме

$$Q := \max_{[\beta, \beta+\eta]} |x(t) - z(t)|.$$

Тъй като функцията $|x(t) - z(t)|$ е непрекъсната, този максимум се достига в някаква точка $t_1 \in (\beta, \beta+\eta)$. Следователно

$$\begin{aligned} Q &= |x(t_1) - z(t_1)| = |\int_{t_0}^{t_1} |v(s, x(s)) - v(s, z(s))ds| \\ &= |\int_{t_0}^{\beta} |v(s, x(s)) - v(s, z(s))ds + \int_{\beta}^{t_1} v(s, x(s)) - v(s, z(s))ds| \end{aligned}$$

Първият интеграл е нула. За Q получаваме

$$\begin{aligned} Q &= |\int_{\beta}^{t_1} v(s,x(s)) - v(s,z(s))ds| \\ &\le \int_{\beta}^{t_1} |v(s,x(s)) - v(s,z(s))|ds \\ &\le \int_{\beta}^{t_1} L|x(s) - z(s)|ds \\ &\le \int_{\beta}^{t_1} L|x(t_1) - z(t_1)|ds \le \eta LQ. \end{aligned}$$

Ще изберем η така, че $\eta L < 1$. Оттук получаваме противоречивото неравенствоето $Q < Q$.

□

В случая, когато размерността на x е по-висока от едно, доказателството е практически същото. За упражнение формулирайте и докажете теоремата.

Пример 3.1.5. Да решим с метода на последователните приближения следната задача на Коши

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = x_0.$$

Решението $x(t) = x_0 e^{at}$ може лесно да бъде получено чрез разделяне на променливите. Следвайки процедурата, полагаме $x_0(t) = x_0$.

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t ax_0 ds = x_0(1 + at)$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t ax_1(s)ds = x_0 + \int_0^t ax_0(1 + as)ds = x_0(1 + at + \frac{a^2t^2}{2}).$$

По индукция доказваме, че

$$x_n(t) = x_0(1 + at + \ldots + \frac{a^nt^n}{n!}).$$

откъдето

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 e^{at}.$$

Следващият пример показва, че решенията могат и да не са дефинирани за всяко t.

Пример 3.1.6.

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

Общото решение е

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

и веднага се вижда, че то не може да се продължи отвъд $\bar{t} = \frac{1}{x_0}$.

Да се върнем към задачата на Коши (3.1). За всяко x_0 съществува максимален отворен интервал (α, β), съдържащ t_0, върху който е дефинирано решение $x(t)$, удовлетворяващо $x(t_0) = x_0$.

Наистина, по Теорема 1 има някакъв интервал, в който съществува единствено решение. Нека сега (α, β) (възможно е $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$ или и двете) е обединение на всички отворени интервали, съдържащи t_0 и върху които съществува решение на (7.3). По Теорема 2 върху всеки два такива интервала решенията съвпадат. Следователно съществува решение върху целия интервал (α, β).

Този интервал ще наричаме максимален интервал на продължимост на решението, а самото решение непродължимо.

3.2 Апроксимация на решенията. Метод на Ойлер

Една проста идея за приближено пресмятане на решенията на задачата на Коши е основната идея на диференциалното и интегралното смятане – заместването на графиката на функцията с нейната допирателна в малка околност на точката на допиране. Това е осъзнал Ойлер, който е предложил геометрично нагледен и интуитивен метод за приближено пресмятане. Сега методът на Ойлер не се използва в числените методи, но е основа за по-бързо сходящи методи от типа на Рунге-Кута.

В този параграф ще разгледаме метода на Ойлер за едно скаларно уравнение. Общият случай не се различава идейно и технически от разгледания по-долу, а само с по-сложни означения.

Нека фиксираме означенията. Нека $v(t, x)$ е скаларна функция на аргументите $(t, x) \in W \subset \mathbb{R}^2$. Ще разгледаме задачата на Коши (3.1).

Да допуснем, че задачата има решение $x(t)$, дефинирано в интервала $t \in [\alpha, \beta]$ с дължина μ. Да разделим този интервал на подинтервали $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$. Най-често се вземат интервали $[t_k, t_{k+1}]$ с еднаква дължина, която ще я означим с h. Една апроксимация на решението, поне в интервал с дължина се дава с формулата на Тейлър. Действително, да вземем развитие до втория член:

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t^*)\frac{(t - t_0)^2}{2}, \text{ за } t \in [t_0, t_1].$$

Нека напомним, че $\dot{x}(t_0) = v(t_0, x(t_0))$ и $\ddot{x}(t^*) = \frac{d}{dt}v(t, x(t))$. Да задържим първите два члена, а отстраним члена $\frac{(t-t_0)^2}{2}$, т.е. да положим

$$\xi(t) = x_0 + \dot{x}(t_0)(t - t_0).$$

Виждаме, че функциите $\xi(t)$ и $x(t)$ се различават с величина от порядък h^2. Това можем да считаме за пренебрежимо малка величина, както се прави при съставяне на модели във физиката, техниката и др. Нагледен пример е величината 1 см (=1/100 м). Тогава $h^2 = 1/10^4$ м, което е практически невидимо. За разликата $x(t_1) - \xi(t_1)$ получаваме оценката:

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| = |\dot{v}(t^*, x(t^*))\frac{h^2}{2}| \leq Mh^2.$$

В интервала $[t_1, t_2]$ можем да постъпим по същия начин. Тук, обаче, има проблем при избора на начално условие. Не знаем стойността на $x(t)$ в точката $t = t_1$. Но за начално условие можем да изберем точката $\xi(t_1)$, която, както видяхме малко се различава от $x(t_1)$. Предимствата са, че знаем нейната стойност, и че апроксимиращата функция ще е непрекъсната. Да означим с решението $\tilde{x}(t)$ с начални условия $(t_1, \xi(t_1))$. Нека за удобство означим с x_1 числото $x_0 + hv(t_0, x_0)$, т.е. стойността на $\xi(t)$ в точката t_1. Тогава

$$\tilde{x}(t) = x_1 + \dot{\tilde{x}}(t)(t - t_1) + \dot{v}(t, x(t))\frac{h^2)}{2}.$$

Естествено в следващия интервал $[t_1, t_2]$ дефинираме $\xi(t)$ с помощта на аналогична формула: $\xi(t) = x_1 + (t - t_1)v(t_1, x_1)$ и полагаме $x_2 = x_1 + hv(t_1, x_1)$. Продължаваме нататък и дефинираме по индукция:

$$x_k = \quad x_{k-1} + hv(t_{k-1}, x_{k-1}), \tag{3.5}$$
$$\xi(t) = \quad x_k + (t - t_k)v(t_k, x_k), \text{ за } t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{3.6}$$

Функцията $\xi(t)$ е дефинирана два пъти във възлите t_k, но веднага се вижда, че приема една стойност, а именно $\xi(t_k) = x_k$.

Вече видяхме, че функцията $\xi(t)$ апроксимира добре нашето решение в интервала $[t_0, t_1]$. В следващите интервали обаче грешката може да се натрупва (и това се случва!), а броят на интервалите расте с N . Освен това оценката, която знаем, е за апроксимация на други решения, различни от първоначалнато $x(t)$ (във всеки интервал различни!) и естествено, трябва да разберем какво общо имат те с $x(t)$.

Ще получаваме оценките последователно, т.е. по индукция. Нека видим какво става в следващия интервал $t \in [t_1, t_2]$. Най-напред да запишем $x(t)$ с помощта на формулата на Тейлър:

$$x(t) = x(t_1) + v(t_1, x(t_1)(t - t_1) + \frac{(t - t_1)^2}{2}\dot{v}(t^*, x(t^*)), \text{ за } t \in [t_1, t_2]$$

където t^* е число в интервала $[t_1, t]$. Тогава за разликата $\xi(t) - x(t)$ намираме:

$$\xi(t)-x(t)=\big[x_1-x(t_1)\big]+(t-t_1)\big[v(t_1,x_1)-v(t_1,x(t_1))\big]+\frac{(t-t_1)^2}{2}\dot{v}(t^*,x(t^*))$$

Следователно

$$\begin{aligned}|\xi(t)-x(t)| &\leq |x_1-x(t_1)|+h|v(t_1,x_1)-v(t_1,x(t_1))|+h^2M\\ &\leq |x_1-x(t_1)|+hL|x_1-x(t_1)|+h^2M\\ \leq |x_1-x(t_1)|(1+hL) &\leq h^2M \leq h^2M(1+hL)+h^2M,\end{aligned}$$

където M е една горна граница за производните на $v(t,x)$ в W. Буквално повтаряйки горните разсъждения, получаваме, че подобна формула е валидна във всеки интервал:

$$|\xi(t)-x(t)| \leq |x_{k-1}-x(t_{k-1})|(1+hL)+h^2M, \text{ за } t\in[t_{k-1},t_k]$$

Следователно, можем да получим по индукция оценката:

$$|\xi(t)-x(t)| \leq h^2M\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{l=0}^{j}(1+hL)^l, \text{ за } t\in[t_{k-1},t_k]$$

Ще заменим всяка степен l с N. Следователно

$$|\xi(t)-x(t)| \leq h^2M\sum_{j=0}^{k-1}(1+hM)^N = h^2Mk(1+hL)^N$$

Да си припомним, че $h=\frac{\mu}{N}$ и $k<N$. Получихме, че

$$|\xi_N(t)-x(t)| \leq M\frac{\mu^2}{N}(1+\frac{\mu L}{N})^N \leq M\frac{\mu^2}{N}e^{\mu L}, \text{ за } \ t\in[t_0,t_N]. \tag{3.7}$$

3.3 Непрекъсната зависимост на решението от начални условия и параметри

Тъй като диференциалните уравнения имат за основна цел предсказания на физически процеси, техните решения трябва да зависят непрекъснато от начални данни и параметри. В противен случай всяко физическо измерване губи смисъл. Разбира се, фактът, че въобще изучаваме диференциалните уравнения, показва, че те имат такива свойства. В този параграф ще формулираме съответните математически резултати.

3.3.1 Неравенство на Гронуол

Преди да формулираме и докажем теоремата за непрекъсната зависимост от начални условия нека въведем някои технически средства. Става въпрос за известното неравенство на Гронуол.

Лема 3.3.1. *Нека $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и неотрицателни функции. Нека за всяко $t \in [a, b]$ и $C \geq 0$ е изпълнено*

$$u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds. \tag{3.8}$$

Тогава

$$u(t) \leq C \exp(\int_a^t v(s)ds).$$

Доказателство. Нека най-напред константата C е положителна. Да означим дясната страна на (3.8) с $h(t)$, т.е.

$$h(t) := C + \int_a^t u(s)v(s)ds.$$

Следователно $\dot{h} = u(t)v(t)$, откъдето получаваме $\dot{h} = u(t)v(t) \leq h(t)v(t)$. Делим на $h(t)$ и интегрираме неравенството $\dot{h}(t)/h(t) =\leq v(t)$ в граници от a до t. Това дава

$$\ln h(t)|_C^t \leq \int_a^t v(s)ds \text{ т.е., } h(t) \leq Ce^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Като използваме отново, че $u(t) \leq h(t)$ получаваме търсеното неравенство при $C > 0$.

Нека сега $C = 0$. Заместваме C с произволна положителна константа ε. .Като приложим горното неравенство и направим граничен преход $\varepsilon \to 0$ получаваме $h(t) \equiv 0$ и следователно $u(t) \equiv 0$.

□

3.3.2 Теорема за непрекъсната зависимост от начални данни

След тази подготвителна работа да разгледаме задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = v(t, x), & (t, x) \in W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0, & (t_0, x_0) \in W \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Следната теорема прецизира свойството непрекъсната зависимост от начални данни:

Теорема 3.3.2. *Нека $v \in C(W)$ и е Липшицова по x с константа L. Нека $x(t)$ и $y(t)$ са съответно решения на задачата на Коши* (3.8) с начални данни, съответно $x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$. Тогава за всяко $t \in [t_0, t_1]$ е изпълнено неравенството

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x(t_0) - y(t_0)||e^{L(t-t_0)}.$$

Доказателство.

Полагаме $u(t) = ||x(t) - y(t)||$, $v = L$, $a = t_0$ и $C = ||x_0 - y_0||$, след което прилагаме неравенството на Гронуол. Това дава търсеното неравенство

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x_0 - y_0||e^{L(t-t_0)}.$$

□

3.3.3 Непрекъсната зависимост от параметри.

Нека сега системата зависи от параметри

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = v(t, x, \mu) & (t, x) \in W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 & \mu \in \mathbb{R}^l \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Да разгледаме спомагателната система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v(t, x, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Според горните теорема и следствие решението на ((3.11)) с начални условия (t_0, x_0, μ) е непрекъснато по начални условия. Следователно $x(t, x_0, \mu)$ е непрекъснато по параметрите μ.

Може да се докаже аналогична оценка за интервала на съществуване на тази от Теорема Теорема 3.1.3.

Обратно, ако имаме теорема за непрекъсната зависимост на решението по параметри, то веднага можем да получим непрекъснатата зависимост от начални условия.

Системата ((3.9)) след транслация $y = x - x_0$ приема вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y} = v(t, y + x_0) \\ y(t_0) = 0, \end{array} \right.$$

в която началното условие е параметър.

3.4 Диференцируемост на решенията

Често в приложенията ни е нужно не само да знаем,че решението на задачата на Коши е непрекъснато по отношение на началните условия и параметри, а също и да диференцираме по тях.

Ще започнем с едно наблюдение. Нека е зададена задача на Коши

$$\left| \begin{array}{l} \dot{z} = v(t,z), \quad z \in U \subset \mathbb{R}^n \\ z(t_0) = x, \quad x \in U \end{array} \right. \tag{3.12}$$

като $v \in C^2$. Нека $g(t,x)$ е решение на горната задача т.е. $\dot{g}(t,x) = v(t, g(t,x)), \quad g(t_0,x) = x$. Да допуснем, че можем да диференцираме решението g по x.

Нека $g(t,x) = (g_1(t,x), g_2(t,x), \ldots, g_n(t,x))$ и $\dot{g}_k(t,x) = v_k(t, g(t,x))$. Диференцирайки последното по x_l получаваме

$$\left(\frac{\partial g_k(t,x)}{\partial x_l}\right)^{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k(t, g(t,x))}{\partial z_j} \frac{\partial g_j(t,x)}{\partial x_l}.$$

Да означим с y_l векторът $y_l = (\frac{\partial g_1}{\partial x_l}, \frac{\partial g_2}{\partial x_l}, \ldots, \frac{\partial g_n}{\partial x_l})^t$. Тогава горната система може да бъде записана във вида $\dot{y}_l = v_*(t, g(t,x))y_l$

Системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{z} = v(t,z), \quad z \in U \subset \mathbb{R}^n \\ \dot{y}_l = v_*(t, g(t,x))y_l \end{array} \right. \tag{3.13}$$

се нарича система уравнения във вариации за системата ((3.12)) (или спрямо решението $g(t,x)$). Подреждайки y_l в матрица Y получаваме еквивалентно определение на системата във вариации

$$\left| \begin{array}{l} \dot{z} = v(t,z), \\ \dot{Y} = v_*(t, g(t,x))Y. \end{array} \right. \tag{3.14}$$

като най - естествено е да изберем началните условия така $g(t_0,x) = x, Y(t_0,x) = E$, където E е единичната матрица. Това Y не е нищо друго освен производната на решението по началните условия g_* и ако можем да диференцираме решението, то неговата производна удовлетворява системата уравнения във вариации.

Теорема 3.1. *Нека за системата ((3.12)) $v \in C^2$ в някаква околност на (t_0, x_0). Тогава решението $g(t,x)$ на ((3.12)) е непрекъснато диференцируемо по x в някаква евентуално по - малка околност на (t_0, x_0).*

$$v \in C^2 \Rightarrow g \in C^1_x.$$

Доказателство. Тъй като $v \in C^2$, то $v_* \in C^1$. Следователно, системата уравнения във вариации удовлетворява условията на Теоремата за съществуване и единственост (Теорема 3.1.3).

Нека изберем начални условия $\varphi_0 = x$ достатъчно близко до x_0 и $\psi_0 = E$. Да означим приближенията в схемата на Пикар с φ_n (за z) и ψ_n (за Y) т.е. полагаме

$$\varphi_{n+1}(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi_n(\tau,x))d\tau \tag{3.15}$$

$$\psi_{n+1}(t,x) = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_n(\tau,x))\psi_n(\tau,x)d\tau \tag{3.16}$$

Първо ще покажем, че $(\varphi_n)_* = \psi_n$ за всяко n.

Ясно е, че $(\varphi_0)_* = \psi_0$. Да допуснем, че за някое $n > 1$ е изпълнено $(\varphi_n)_* = \psi_n$. Ще докажем, че това е вярно и за $n+1$. Наистина

$$(\varphi_{n+1})_* = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_n(\tau,x))(\varphi_n)_* d\tau = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_n(\tau,x))\psi_n d\tau = \psi_{n+1}.$$

откъдето по индукция следва равенството за n т.е. $\{\psi_n\}$ е редицата от производните на редицата $\{\varphi_n\}$. Двете редици са равномерно сходящи (като редици от Пикаровски приближения при $|t - t_0|$ достатъчно малки $\varphi_n \rightrightarrows g, \quad \psi_n \rightrightarrows Y = g_*$ и тъй като $g_* \in C^0_x \Rightarrow g \in C^1_x$ т.е. $g(t,x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t,x)$ е непрекъснато диференцируема по x. □

Нека $r \geq 2$ е цяло число.

Теорема 3.4.1. *(Теорема T_r) Нека дясната част на система* (3.12) $v \in C^r$ *в някаква околност на* (t_0, x_0). *Тогава решението на задачата на Коши* (3.12) $g(t,x) \in C_x^{r-1}$, *като* (t,x) *принадлежат на някаква евентуално по - малка околност* $v \in C^r \Rightarrow g \in C_x^{r-1}$ *на* (t_0, x_0).

Доказателство. $v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1}$. Следователно, системата уравнения във вариации ((3.14)) удовлетворява условията на Теорема T_{r-1}. Теорема T_r, $\quad r > 2$ се получава от Теорема T_{r-1}

$$v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1} \Rightarrow g_* \in C_x^{r-2} \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Теорема T_2 (Теорема **??**) бе доказана по - рано. □

Нека $r \geq 2$. Интересуват ни производните по x и t.

Лема 3.1. *Нека е зададена функция* $f : I \times G \to \mathbb{R}^n, \qquad G \subset \mathbb{R}^n, I$ *е интервал в* $\mathbb{R}^1$ *и нека*

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x) d\tau, \quad x \in G, \quad [t_0, t] \subset I.$$

Ако $f \in C_x^r$ *и* $f \in C^{r-1}$, *то* $F \in C^r$.

Доказателство. Диференцираме F последователно - $\frac{\partial F}{\partial t} = f(t,x)$ е непрекъсната, $\frac{\partial^r F}{\partial t^r} = f_t^{(r-1)}(t,x)$ е непрекъсната по условие и следователно $F \in C_t^r$. След това $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ е непрекъсната. Подобно произволна частна производна от ред r се изразява чрез производните на f от ред по - малък от r. Следователно $F \in C^r$. □

Теорема 3.2. *В условията на Теорема 3.4.1 (Теорема T_r) решението $g(t,x)$ е диференцируемо изображение от клас C^{r-1} по x, t:* $v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}$.

Доказателство. Имаме

$$g(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} v(\tau, g(\tau, x)) d\tau$$

$v \in C^r$ и $g \in C^0$ - това имаме от Теоремата за съществуване и единственост (Теорема 3.1.3). Освен това Теорема 3.4.1 показа, че $g \in C_x^{r-1}$. Прилагаме Лема **??** последователно

$v(t, g(t,x)) \in C^0 \cap C_x^1 \Rightarrow g \in C^1$
$v(t, g(t,x)) \in C^1 \cap C_x^2 \Rightarrow g \in C^2$
. . . .
$v(t, g(t,x)) \in C^{r-2} \cap C_x^{r-1} \Rightarrow g \in C^{r-1}$. □

?????????????????????????????????????
Може да се докаже

Теорема 3.3. $v \in C^r \to g \in C^r, \qquad r > 1.$

Доказателството на тази теорема може да се види в учебника на Арнолд [**?**]. Може също така да се докаже, че ако дясната страна на ((3.12)) аналитична (представя се като сходящ ред на Тейлор в околност на всяка точка), то решението е аналитично спрямо x и t (виж Кодингтон и Левинсон [9] за този факт).
??
Диференцируемостта по параметри се разглежда по подобен начин както непрекъснатостта по параметри.
Нека системата диференциални уравнения зависи от параметри $\alpha \in \mathbb{R}^k$

$$\dot{z} = v(t, z, \alpha), \quad z \in U, \quad t \in I \subset \mathbb{R}^1 \tag{3.17}$$

Следствие 3.4.2. $v \in C^r \to g(t, x, \alpha) \in C_{t,x,\alpha}^r$.
Доказателство. *Разглеждаме спомагателната система*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{z} = v(t,z,\alpha), \\ \dot{\alpha} = 0, \end{array} \right. \quad \textit{с начални условия} \quad \left| \begin{array}{l} z(t_0, x, \alpha) = x \\ \alpha(t_0, x, \alpha) = \alpha \end{array} \right.$$

Решението $g = (g_1, g_2) \in C^r$ *по Теорема 3.3.*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{g_1} = v(t, g_1(t,x,\alpha), g_2(t,x,\alpha)), \\ \dot{g_2} = 0, \quad \Rightarrow g_2 = \alpha. \end{array} \right.$$

Следователно $g_1(t,x,\alpha) \in C^r$, *което трябваше да се докаже.*

□

Последното следствие има важно значение за приложенията. Едно от тях се нарича метод на малкия параметър на Поанкаре.

3.5 Теорема за непродължимост

Да разгледаме задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = v(t,x) & v \in C^1(W) \\ x(t_0) = x_0 & W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Вече дефинирахме понятията максимален интервал на продължимост и непродължимо решение. Нека Γ е подмножество на W.

Дефиниция 3.1. *Решението на системата (3.18) φ се продължава напред (назад) до Γ, ако съществува решение със същото начално условие, графиката на което се пресича с Γ в точка, където $t \geq t_0 (t \leq t_0)$. Решението се продължава напред (назад) неограничено, ако съществува решение със същотото начално условие, дефинирано за всяко $t \geq t_0 (t \leq t_0)$.*

Пример 3.5.1. 1. Решенията на линейна системата с постоянни коефициенти $\dot{x} = Ax$, където $x \in \mathbb{R}^n$, а именно $x = x_0 e^{At}$ се продължават неограничено.

2. Решенията на уравнението $\dot{x} = 1 + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ не се продължават неограничено нито напред, нито назад. Наистина, общото решение е $x = \mathrm{tg}(t - c)$, което е дефинирано в $c - \pi/2 \leq t \leq c + \pi/2$.

Теорема 3.5.2. *Решенията на задачата на Коши (3.18) с начални условия в компакт F в разширеното фазово пространство се продължават напред и назад до границата на компакта.*

Доказателство. За определеност ще разглеждаме продължимост напред $t \geq t_0$. Разсъжденията при продължаване назад са аналогични.

По Теоремата за съществуване и единственост за всяка точка $(t', x') \in F$ има околност, такава че решението с начални условия в тази околност съществува и е единствено в общия за всички точки от тази околност интервал от време. Но F е компакт и има крайно покритие с такива околности. От крайния брой интервали време избираме най - малкия и го означаваме с ϵ.

Точката $(t_0, x_0) \in F$ (фиг. 1) и следователно решението на задачата на Коши ((3.18)) $\varphi(t)$ с начално условие $\varphi(t_0) = x_0$ е определено за $|t - t_0| < \epsilon$. Да означим $\tilde{t} = t_0 + \frac{\epsilon}{2}$, $\tilde{x} = \varphi(\tilde{t})$. Точката $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in F$ и следователно е покрита от някоя от горните околности. Тогава съществува решение $\tilde{\varphi}(t)$, дефинирано в $|t - \tilde{t}| < \epsilon$, с начално условие $\tilde{\varphi}(\tilde{t}) = \varphi(\tilde{t}) = \tilde{x}$. От Теоремата за единственост имаме, че в общия си интервал $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$.

Продължавайки по същия начин получаваме решение на задачата на Коши (3.18), дефинирано в $t_0 \leq t < \tau$ и $(t, \varphi(t)) \in F$.

Да означим $T := \sup \tau \quad (\tau : (t, \varphi(t)) \in F \quad \text{и} \quad t \in [t_0, \tau])$. Ако $T = \infty$ няма какво да доказваме.

Нека $T < \infty$. Ще покажем, че съществува решение $\psi, \psi(t_0) = x_0$ и $(T, \psi(T)) \in \partial F$. Тъй като T е горна граница, съществува $\tau : T - \epsilon < \tau < T$, такова че решението $\varphi(t)$

на задачата на Коши (3.18) е определено в $t_0 \leq t < \tau$. Точката $(\tau, \varphi(\tau)) \in F$ е покрита с някоя от горните околности т.е. съществува решение $\bar{\varphi}(t)$ с начално условие $\bar{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau)$, определено в $|t-\tau| < \epsilon$. Отново по теоремата за единственост $\varphi \equiv \bar{\varphi}$ в общия им интервал.

Конструираме едно решение върху обединението на двата интервала

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \leq t \leq \tau \\ \bar{\varphi}(t), & \tau \leq t \leq \tau + \epsilon \end{cases}$$

Имаме, че $(t, \psi(t)) \in F$ за $t_0 \leq t < T$.

Трябва да покажем, че $(T, \psi(T)) \in F$. От дефиницията на T съществува редица $\{\theta_i\} \xrightarrow[i\to\infty]{} T$. Но ψ е непрекъснато, следователно $\psi(\theta_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \psi(T)$. Тъй като F е компакт следва, че $(T, \psi(T)) \in F$.

От друга страна за $t > T$ $(t, \psi(t))$ не принадлежи на F иначе T няма да е горна граница. Следователно произволна околност на точка $(T, \psi(T))$ съдържа точки както от F, така и не принадлежащи на F, откъдето $(T, \psi(T)) \in \partial F$.

$\square$

Горната теорема обикновенно се прилага така. Разглеждаме задачата

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = v(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R} \times K \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.19}$$

където $K \in \mathbb{R}^n$ е компакт. Нека $[a,b]$ е произволен затворен интервал, съдържащ t_0. Образуваме компакта $F := [a,b] \times K$. Според Теорема Теорема 3.5.2 решението на ((3.19)) се продължава до границите на компакта F. Имаме две възможности (фиг. 2): интегралната крива пресича страничната граница на F или интегралната крива излиза на границата $b \times K$ и тъй като b е произволно, то решението се продължава неограничено напред.

Пример 3.5.3. Продължимост на решението на $\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$.

Разглеждаме консервативната система

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Ще започнем с наблюдението, че ако $U = -\frac{x^4}{2}$, то $\ddot{x} = 2x^3$ има решение, а именно $x = \frac{1}{t-1}$, което не се продължава до $t = 1$. Затова ще предполагаме, че $U > 0$ (всъщност достатъчно е U да е ограничена отдолу).

Нека $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)$ е пълната енергия.

Лема 3.5.4. *За всяко решение $x(t)$, $E = \frac{x\dot{(t)}^2}{2} + U(x(t)) = E_0$ е константа.*

Доказателство.

$$\frac{d}{dt}E(x,\dot{x}) = \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}\dot{x}(t) = \dot{x}(t)(\ddot{x} + \frac{dU}{dx}) = 0.$$

Следователно $E(x,\dot{x}) = E_0 = \frac{x\dot{(0)}^2}{2} + U(x(0))$. $\square$

Лема 3.5.5. *Нека решението на* $\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$ *съществува за* $|t| < T$ *и* $x_0 = x(0)$. *Тогава в сила е оценката*

$$|\dot{x}(t)| < \sqrt{2E_0}, \quad |x(t) - x_0| < \sqrt{2E_0}T.$$

Доказателство. От интеграла на енергията (Лема 3.5.4) $\frac{\dot{x(t)}^2}{2} + U(x(t)) = E_0$ и предположението $U(x) > 0$ имаме

$$|\dot{x}(t)| < \sqrt{2E_0}.$$

От равенството $x(t) - x_0 = \int_0^t \dot{x}(s)ds$ получаваме

$$|x(t) - x_0| \le \int_0^t |\dot{x}(s)ds < \sqrt{2E_0}|t| < \sqrt{2E_0}T.$$

Теорема 3.4. *Нека* $U(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $U > 0, \forall x$. *Тогава съществува глобално решение на* $\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$.

Доказателство. Нека $T > 0$ е произволно. Уравнението от втори ред $\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$ записваме като система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU}{dx}. \end{array} \right.$$

Разглеждаме компакта $F := \{|x - x_0| \le 2\sqrt{2E_0}T,\ |y| \le 2\sqrt{2E_0},\ |t| \le T\}$. Според Теорема 3.5.2 решението с начални условия в този компакт се продължава до границите на компакта. От априорните оценки в Лема 3.5.5 следва, че решението може да излезе само на границите $|t| = T$. Тъй като T е произволно, решението се продължава неограничено. □

Пример 3.5.6. Продължимост на решенията на $\dot{x} = A(t)x$.

Разглеждаме задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = A(t)x & \quad x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 & \end{array} \right. \tag{3.20}$$

където $A(t)$ е непрекъсната матрица в някакъв интервал $[a, b]$. Тъй като $A(t)$ е непрекъсната, то $||A(t)||$ е също непрекъсната функция в $[a, b]$ и следователно е ограничена в $[a, b] \quad ||A(t)|| \le C$.

Лема 3.5.7. *Нека* $\varphi(t)$ *е решение на* $\dot{x} = A(t)x$ *с начално условие* $\varphi(0) = x_0, \qquad t_0 \le t \le b$. *Тогава в сила е оценката*

$$||\varphi(t)|| \le e^{C(t-t_0)}||\varphi(t_0)||.$$

Доказателство. Ако $\varphi(t_0) = 0$, то $\varphi \equiv 0$. Нека $\varphi(t_0) \neq 0$. От Теоремата за единственост следва, че $\varphi(t)$ не е нула $\forall t \in [a, b]$.

Да означим $r(t) = ||\varphi(t)|| = \sqrt{<\varphi, \varphi>}$ и $L = \ln r^2$.

$$\dot{L} = 2\frac{\dot{r}}{r}$$

Ще покажем, че $\frac{\dot{r}}{r} \leq C$.

$$\dot{\varphi} = A(t)\varphi \quad \rightarrow \quad ||\dot{\varphi}|| = ||A(t)\varphi|| \leq C||\varphi||$$

$$\dot{r} = \frac{<\varphi, \dot{\varphi}>}{r} \leq \frac{||\varphi||||\dot{\varphi}||}{r} \leq ||\dot{\varphi}||$$

Комбинирайки горните неравенства, получаваме $\frac{\dot{r}}{r} \leq C$ и следователно $\dot{L} \leq 2C$.

Накрая

$$L(t) - L(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{L}(s)ds \leq 2C(t - t_0)$$

и

$$e^{L(t)-L(t_0)} \leq e^{2C(t-t_0)} \quad \text{или} \quad ||\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}||^2 \leq e^{2C(t-t_0)}$$

откъдето коренувайки получаваме нужното неравенство. □

Теорема 3.5.8. *Решението $\varphi(t, x_0)$ на задачата на Коши ((3.20)) се продължава в $[a, b]$.*

Доказателство. Избираме компакт $F := \{t \in [a, b], \quad ||x|| \leq 2e^{C(b-a)}||x_0||\}$. По Теорема Теорема 3.5.2 решението с начални условия в този компакт се продължава до неговите граници. От априорната оценка в Лема 3.5.7 следва, че решението може да излезе само на границите $t = a$, $t = b$.

□

Тъй като a, b са произволни, то решението се продължава неограничено.

3.6 Упражнения

1. За всяка от следните функции, намерете константата на Липшиц в съответната област или докажете, че тя не съществува.

   а) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

   б) $f(x) = x^{1/3}$, $x \in [-1, 1]$

   в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

   г) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

   д) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$, $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$

   е) $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Напишете пърите няколко приближения на Пикар за следните задачи на Коши

$$а)\, \dot{x} = \sqrt{x}; \quad x(0) = 0,$$

$$б)\, \dot{x} = \sin x; \quad x(0) = 0.$$

   Където е възможно, намерете решението и неговата област на съществуване.

3. Напишете две приближения на Пикар на решението на задачата на Коши

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 - 2x = 0, \qquad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.$$

4. За $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и всяко $x_0 \in \mathbb{R}^n$ покажете, че задачата на Коши

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}, \qquad x(0) = x_0,$$

   има единствено решение, дефинирано за всяко t.

5. Нека за $\dot{x} = v(x), v \in C^1$ изпълнено $||v(x)|| \leq a + b||x||$. Докажете, че всяко решение се продължава в $(-\infty, \infty)$.

6. Да се докаже, че задачите на Коши

$$а)\, \dot{x} = 2 + 3\sin x; \quad x(0) = 4,$$

$$б)\, \dot{x} = 2x + 5\cos x; \quad x(0) = 2.$$

   имат решение за всяко $t \in \mathbb{R}$.

7. а)Дадено е уравнението $\dot{x} = -\frac{dU}{dx}$, $U \in C^2(\mathbb{R})$, $U \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Докажете, че всяко решение се продължава надясно.

   б) Докажете същото за градиентни системи

   $\dot{x} = -gradU$, $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $U \to \infty$ при $||x|| \to \infty$.

8. Да се покаже, че всяко решение $x(t)(x(t_0) = x_0)$ на системата на Нютон

$$m_j \ddot{x}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j},\ j = 1, 2 \ldots, n$$

   е определено при $t \in (-\infty, \infty)$, ако потенциалната енергия U е положителна.

9. Намерете първите три члена от развитието на решението в ред по малкия параметър ϵ

$$а)\, \dot{x} = \epsilon t + \frac{1}{2x}, \quad x(1) = 1 - 2\epsilon, \quad t \geq 0,$$

$$б)\, \ddot{x} = x + \epsilon(\dot{x}^2), \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = \epsilon.$$

Глава 4

Линейни уравнения и системи

4.1 Уводни бележки

Линейна хомогенна система наричаме наричаме система, чиято дясна част зависи линейно от неизвестните функции:

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{4.1}$$

където t принадлежи на някакъв интервал (α, β), $x \in \mathbb{R}^n$ и $A(t)$ е матрична функция, зависеща непрекъснато от t. Линейните системи и уравнения възникват естествено в следната ситуация. Нека имаме решение на нелинейна система, например положение на равновесие или периодично решение. Много често се интересуваме от поведението на близките до него решения. Типичното разсъждение, което би направил физик, инженер и въобще специалист, свързан повече с практиката, е следното. Нека е дадена система

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{4.2}$$

и нека известното решение е означено с $\varphi(t)$. Да въведем нова неизвестна функция y по формулата

$$y = x - \varphi(t). \tag{4.3}$$

Очевидно променливата y е отклонението от решението $\varphi(t)$ на близките до него. Получаваме

$$\dot{y} = f(y + \varphi(t), t) - f(\varphi(t), t)$$

Ако функцията $f(x, t)$ е достатъчно диференцируема можем да развием дясната страна на горната система по формулата на Тейлър. Ще получим

$$\dot{y} = D_y f(\varphi(t), t)y + \mathcal{O}(||y||^2). \tag{4.4}$$

За близките решения до $\varphi(t)$ стойностите на y са малки. Следователно можем да пренебрегнем членовете, съдържащи се в $\mathcal{O}(||y||^2)$. Получаваме линейната система

$$\dot{y} = D_y f(\varphi(t), t)y \tag{4.5}$$

Тя се нарича уравнение във вариации за решението $\varphi(t)$. Подробно изписана тя изглежда така:

$$\begin{gathered} \dot{y_1} = f_{1y_1}y_1 + \ldots + f_{1y_n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y_n} = f_{ny_1}y_1 + \ldots + f_{ny_n}y_n \end{gathered}$$

Особено важен както за теорията, така и за приложенията е случаят, когато вектор-функцията f, дефинираща (4.2), и решението $\varphi(t)$ не зависят от t. Тогава и линейната система (4.5) е автономна или, както е прието да се казва, е *линейна система с постоянни коефициенти*. Линейните системи с постоянни коефициенти са модел, по който се изучават останалите системи поради факта, че се решават практически алгоритмично и геометричните им свойства се изучават лесно. Заедно с това те са и средство за изучаване на другите уравнения и системи. Това определя изключителната им важност.

Нека е дадена система

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.6}$$

с постоянни коефициенти.

Както знаем в случая на едномерна система, т.е. на едно скаларно уравнение

$$\dot{x} = ax$$

решенията се дават с експоненциална функция

$$x = x_0 e^{at},$$

където x_0 е началното условие на решението.

Линейните системи с постоянни коефициенти във всяка крайна и дори в някои случаи в безкрайна размерност могат да се изучат като дефинираме експоненциална функция на линейния оператор A. Ще постъпим както в едномерния случай като дефинираме експонента на матрица e^{At} с помощта на редица или ред. Тъй като свойствата на реда се изучават често по-лесно (поне в ситуации като нашата), ще предпочетем дефиницията с ред. И така искаме да дефинираме експонентата като ред

$$e^{At} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \tag{4.7}$$

За да има смисъл горният ред трябва да можем да говорим за сходимост в пространството от линейни оператори (тук ще ги отъждествяваме с техните матрици във фиксиран базис). След това ще трябва да докажем сходимост и дори диференцируемост на реда и накрая да проверим, че той дава решение на (4.6).

4.2 Векторни и матрични функции.

Според горния план най-напред трябва да кажем какво е сходимост в пространството от линейни оператори. Ще припомним, че в пространството $\mathbb{R}^n$ може да се дефинира скаларно произведение между два вектора x и y: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Скаларното произведение дефинира норма на вектор x по формулата: $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Нека сега е даден линеен оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Дефиниция 4.1. *Операторна норма на оператора A ще наричаме числото*

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||. \tag{4.8}$$

Очевидно операторната норма е добре дефинирана, защото се дава от супремум на непрекъсната функция върху компактно множество. По известната теорема на Вайерщрас той съществува и се достига за някой вектор x_0.

Лема 4.1. *Нека A и B са оператори, x е вектор и λ е число. Тогава операторната норма има следните свойства:*

$$\begin{aligned}
&(1) \quad ||A|| = 0 \quad \textit{тогава и само тогава, когато} \quad A = 0 \\
&(2) \quad ||\lambda A|| \leq |\lambda| \cdot ||A|| \\
&(3) \quad ||A + B|| \leq ||A|| + ||B|| \\
&(4) \quad ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \\
&(5) \quad ||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||
\end{aligned}$$

Елементарното доказателството на горните твърдения оставяме като упражнение на читателя. Сега сме готови да дадем основната дефиниция.

Дефиниция 4.2. *Сумата на реда*

$$E + \frac{A}{1!} + \frac{(A)^2}{2!} + \ldots + \frac{(A)^m}{m!} + \cdots \tag{4.9}$$

ще наричаме експонента на линейния оператор A и ще я означаваме с e^A.

Задача 4.1. *Като използвате дефиницията пресметнете e^A , ако*
а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Отговор: а) 2; б) 1; в $\sqrt{10}$

Подобно на скаларния случай, ще считаме, че $A^0 = E$. Освен това по-долу ще работим предимно с експонента на At. С тези уговорки записваме дефиниращия ред като

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!}.$$

Разбира се, преди да използваме този ред трябва да докажем, че той е сходящ. Като се има предвид нашата цел – да покажем, че редът е решение на диференциално уравнение – ние ще докажем повече, а именно

Лема 4.2. *Редът* (4.9) е равномерно сходящ във всеки интервал $[-T, T]$. Матричната функция на t, зададена с (4.9) е диференцируема и нейната производна се дава с формулата

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}. \tag{4.10}$$

*Доказателство.*Ще използваме критерия на Вайерщрас за равномерна сходимост на функционални редове. В нашия случай елементите на реда са матрици, но теоремата се формулира и доказва буквално по същия начин. Оттук с помощта на свойството (5) на операторната норма следва, че $||(At)^k|| \leq ||A||^k T^k$. Следователно нормата на членовете на реда (4.9) се мажорира от членовете на сходящия числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{||A||^k T^k}{k!}.$$

□

Ако диференцираме почленно реда (4.9) ще получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}$$

Но редът вляво е равномерно сходящ. Следователно имаме право да диференцираме почленно. □

Сега сме готови да формулираме *основната теорема на теорията на линейните системи с постоянни коефициенти.*

Теорема 4.1. *Решението на задачата на Коши*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^{(0)},$$

където $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$*, се дава с формулата*

$$x(t) = e^{At}x^{(0)}.$$

Доказателство. Твърдението следва от последната лема и теоремата за единственост. □

4.3 Пресмятане на решенията на линейните системи в основните случаи

Горната формула, макар и елегантна, все още е далече от явна. По-долу ще напишем наистина явни формули за решенията чрез добре изучени функции – експоненти, тригонометрични функции и полиноми. Ще започнем от най-простия случай на матрица A и постепенно ще усложняваме.

(I) Нека матрицата A е *диагонална*:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогава по дефиницията на експонента на линеен оператор имаме:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m t^m}{m!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^m t^m}{m!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^m t^m}{m!} \end{pmatrix},$$

което означава, че

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

(II) Нека матрицата A е *подобна на диагонална матрица.* Това означава, че съществуват диагонална матрица Λ и неизродена матрица S, така че $A = S\Lambda S^{-1}$. Имаме

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(SAS^{-1}t)^m}{m!} = S \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!} S^{-1} = Se^{\Lambda t}S^{-1}.$$

Когато решаваме линейна система ние имаме само матрицата A. Възниква естественият въпрос: как по нея да намерим матриците Λ и S. Тук ще опишем случая, когато собствените числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на A са различни. В този случай е сигурно, че матрицата A е подобна на диагонална. Припомняме, че собствените числа на една матрица са корени на характеристичния ѝ полином:

$$\det{(A - \lambda E)}. \tag{4.11}$$

Така намерените числа са диагоналните елементи на матрицата Λ (защо?). Матрицата S е съставена от собствените вектори на A. По-точно, нека да означим собственият вектор на A, отговарящ на собственото число λ_s, с l_s. Тогава матрицата S се записва по следния начин:

$$S = (l_1, \dots, l_n)\,. \tag{4.12}$$

(Обърнете внимание на реда на векторите!) За удобство ще формулираме стъпките, по които можем да намерим матриците Λ и S:

1) Решаваме характеристичното уравнение (4.11). Ако сред корените му няма съвпадащи ще ги означим с $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Изборът на номерацията е произволен, но веднъж избран, той се фиксира. Съставяме матрицата $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

2) Намираме последователно собствените вектори на матрицата A. Напомняме, че това става като решим векторните уравнения:

$$Al_s = \lambda_s l_s, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Съставяме матрицата S, както е указано в (4.12).

Задача 4.2. *Пресметнете* e^{At} *, ако*
а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; *в)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Забележка. Напомняме, че засега изоставихме случая на кратни корени на характеристичното уравнение на A. Към него ще се върнем в следващите подточки.

Внимателният читател би трябвало да забележи, че корените на характеристичното уравнение биха могли да бъдат комплексни. Тогава и матриците Λ и S също са комплексни. Това не е голяма беда, тъй като цялата теория на експонента на матрица работи и за тоя случай без никакви изменения, ако знаем какво е експонента на комплексно число. Ние обаче искаме да получим *реални решения* на линейните системи с реални коефициенти. На това също ще се върнем по-късно. Засега ще търсим комплексни решения. Все пак за пълнота ще скицираме теорията на експонента от линеен оператор в комплексно векторно пространство.

В комплексното пространство $\mathbb{C}^n$ можем да дефинираме ермитово скаларно произведение $\{x, y\} = \sum x_j \bar{y}_j$. С негова помощ дефинираме норма в $\mathbb{C}^n$. Оттук нататък всички дефиниции и твърдания са същите, както в реалния случай.

И така, за решението на задачата на Коши получихме формулите

$$x(t) = Se^{\Lambda t} S^{-1} x^{(0)}.$$

На практика най-често се търси *общото решение* на системата, т.е. формула, зависеща от векторна константа, която дава всички решения при варирането на векторната константа. В нашия случая като положим $S^{-1}x^{(0)} = c$ получаваме:

$$x(t) = Se^{\Lambda t} c.$$

(III) Нека сега разгледаме случая, когато матрицата A представлява една жорданова клетка. Припомняме, че това означава, че

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

Отначало ще предположим, че $\lambda = 0$. В този специален случай матрицата се нарича нилпотентна жорданова клетка. По традиция тя се означава с Δ,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

$$\tag{4.16}$$

Можем лесно да пресметнем нейните степени. Имаме

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При всяка следваща степен диагоналът, съставен от единици, се премества с единица надясно. По-специално $\Delta^n = 0$. Следователно редът, дефиниращ e^{At} е крайна сума:

$$e^{\Delta t} = E + \frac{\Delta t}{1!} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dots \frac{(\Delta t)^{n-1}}{n!}$$

В явен вид това е следната матрица

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 1 & t/1! & t^2/2! & \dots & t^{n-1}/n-1! \\ 0 & 1 & t/1! & \dots & t^{n-2}/n-2! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Да разгледаме случая на произволно λ. Ще представим матрицата A по следния начин:

$$A = \lambda E + \Delta. \tag{4.17}$$

Ще пресметнем като използваме едно основно свойство на експонентата, а именно:

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

При експонента на матрица, обаче, това свойство не е вярно в общия случай. Но в нашата ситуация то е в сила. Ще формулираме следния общ резултат:

Лема 4.3. *Ако матриците комутират, т.е. A.B=B.A, то*

$$e^{A+B} = e^A . e^B.$$

Ще докажем тази лема по-долу, а сега ще изведем от нея формулата за експонентата в случая на жорданова клетка. Да отбележим, че единичната матрица комутира с всяка матрица. Следователно

$$e^{(\lambda E+\Delta)t} = e^{\lambda Et}e^{\Delta t}.$$

Това ни дава

$$e^{(\lambda E+\Delta)t} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t/1! & t^2/2! & \dots & t^{n-1}/n-1! \\ 0 & 1 & t/1! & \dots & t^{n-2}/n-2! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(IV) Ще разгледаме случая, когато матрицата A е подобна на една жорданова клетка. Това означава, A се представя във вида

$$A = SJS^{-1},$$

където J е жорданова клетка (4.17), а S е неизродена матрица. Степените на A лесно се пресмятат. Имаме $A^n = SJ^nS^{-1}$. следователно

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}.$$

Разбира се възниква въпросът как да познаем, че матрицата A е подобна на жорданова клетка. Едно очевидно необходимо условие е, характеристичният полином да има n-кратен корен λ. Другото условие, може би не толкова очевидно, е рангът на матрицата $A - \Lambda E$ да е равен на $n-1$. Двете условия са и достатъчни. Оставяме на читателите да съобразят това.

Сега можем да напишем и явна формула за решенията на системата. Лесно се вижда, че първият стълб на матрицата S е собствен вектор, а останалите стълбове са присъединени вектори.

Това може да се види така. Да напишем матрицата S по стълбове $S = (l_1, \dots, l_n)$, а горното равенство да препишем във вида $AS = SJ$. Като извършим умножението получаваме

$$Al_1 = \lambda_1 l_1, \quad Al_2 = \lambda_1 l_2 + l_1, \quad \dots \quad Al_n = \lambda_1 l_n + l_{n-1}.$$

Оттук получаваме, че решенията на системата (4.6) се изразяват с формулата

$$e^{At}x^{(0)} = (l_1, \dots, l_n)e^{Jt}c$$

Тук отново сме положили $S^{-1}x^{(0)} = c$. Като извършим умножението получаваме следния израз, който най-често се използва за записване на решенията:

$$x(t) = e^{\lambda t}\left[l_1c_1 + (l_2 + tl_1)c_2 + \ldots + (l_n + l_{n-1}t + \ldots + l_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!})c_n\right] \tag{4.18}$$

Общият случай се получава автоматично от досега изучените. Да напомним, че всяка матрица е подобна на матрица в жорданова нормална форма. Последната е матрица, записана в блочно-диагонален вид:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & J_p \end{pmatrix},$$

където J_s са жорданови клетки

$$J_s = \begin{pmatrix} \lambda_s & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_s & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_s \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

$$\tag{4.20}$$

Тогава горните формули ни дават

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{J_p t} \end{pmatrix}.$$

Разбира се, би трябвало да имаме алгоритъм за намиране на жордановата нормална форма. Такъв алгоритъм съществува (с точност до намирането на корените на характеристичния полином). Той може да се използва за нашите цели. Ние ще предложим друг алгоритъм, който е теоретически еквивалентен на споменатия. Предимството му е, че дава решенията на системата, като прескача някои стъпки.

4.4 Алгоритъм за пресмятане на решенията на системи от линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Нашият алгоритъм е основан на една фундаментална теорема, практически еквивалентна на теоремата за съществуване на жорданова нормална форма. За да я формулираме се нуждаем от серия естествени понятия.

Нека $A : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ е линеен оператор от комплексното линейно пространство $\mathbb{C}^n$ в себе си. Да означим с $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ различните собствени числа на оператора A . Нека d_s е кратността на собственото число λ_s. Ще дефинираме следното линейно пространство:

$$V_s = \{x \in V | (A - \lambda_s E)^r x = 0, \quad \text{за някое r } \in \mathbb{N}\} \tag{4.21}$$

Разбира се, това, че пространството е линейно се нуждае от аргументи. За да ги набавим ще дефинираме следните пространства:

$$V_{s,r} = \{x \in V | (A - \lambda_s E)^r x = 0\}.$$

Лесно се вижда, че $V_{s,r-1} \subsetneqq V_{s,r}$. Действително, ако $(A - \lambda_s E)^{r-1} x = 0$, то $(A - \lambda_s E)^r x = 0$. Тогава ако $x \in V_{s,r}$, то $x \in V_{s,r+j}$, за всяко $j \in \mathbb{N}$. Следователно всеки два вектора могат да бъдат събирани в някое пространство $V_{s,r+j}$ с достатъчно голямо j. Тези аргументи показват, че V_s е линейно пространство.

Основната теорема, от която се нуждаем, е следната.

Теорема 4.2. *(Теорема за спектрално разлагане.) Пространството $\mathbb{C}^n$ се разлага в директна сума*

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{s=1}^{p} V_s.$$

С други думи теоремата твърди, че ако v е вектор в $\mathbb{C}^n$, то той се представя еднозначно със следната сума

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_p, \tag{4.22}$$

където векторите $v_j \in V_j$. Тук няма да даваме доказателство на тази теорема.

Преминаваме към описанието на алгоритъма за пресмятането на всички решения на линейните системи.

Ще търсим решение с произволно фиксирано начално условие v. Да го разложим по формулата (4.22). Да допуснем, че сме намерили решения $\varphi_s(t)$ с начални условия v_s. Ще дефинираме функция $\varphi(t) = \sum_{s=1}^{p} \varphi_s(t)$. Лесно се вижда, че $\varphi(0) = v$. Също така се проверява, че $\varphi(t)$ удовлетворява системата (уверете се). Това просто разсъждение (важно в цялата теория на линейните диференциални уравнения, включително и с променливи коефициенти) свежда нашата задача до намирането на решение с начално условие – един фиксиран вектор $v_s \in V_s$.

По-долу, за да избегнем много индекси, ще означим v_s с w .

И така нека $w \in V_s$. Ще изчерпваме пространството V_s като започнем с $V_{s,1}$ и увеличаваме втория индекс последователно. Ако $w \in V_{s,1}$, то това означава, че векторът w е собствен. Ще дефинираме векторната функция $\psi_1(t) = e^{\lambda_s t} w$. Очевидно, че при

$t = 0$ тя е равна на w. Ще проверим също, че $\psi_1(t)$ удовлетворява и системата. Като диференцираме получаваме

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = \lambda_s e^{\lambda_s t} w.$$

От условието, че векторът $w \in V_{s,1}$ следва, че $\lambda_s w = Aw$. Следователно производната по-горе е равна на

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = e^{\lambda_s t} Aw = A\psi_1(t).$$

Последното означава, че векторната функция $\psi_1(t)$ е решение на системата. За да обясним по-ясно каква е схемата ще направим още една стъпка. Ще предположим, че векторът w принадлежи на $V_{s,2}$, но не принадлежи на $V_{s,1}$. Имаме

$$\begin{gathered} Aw - \lambda_s w = u \neq 0 \quad (\text{иначе } w \text{ би принадлежал на } V_{s,1}) \\ Au - \lambda_s u = 0 \quad (\text{защото } 0 = (A-\lambda_s)^2 w = (A-\lambda_s)u). \end{gathered}$$

Получихме, че u е собствен вектор, а w е присъединен. Формулите (4.18) ни подсказват, че нашето решение има вида $\psi_2(t) = e^{\lambda_s t}(u + wt)$. Това лесно може да се провери и с непосредствено диференциране. Общата формула оттук е ясна. Нека $w \in V_{s,r}$ и не принадлежи на $V_{s,r-1}$. Ще въведем означения

$$w = l_r, \quad (A - \lambda E)l_r = l_{r-1}, \quad \ldots, (A - \lambda E)l_2 = l_1$$

Тогава решението $\psi(t)$ с начално условие w се дава с формула от вида (4.18), която в последните означения изглежда така:

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(l_1 + l_2 t + \ldots + \ldots + l_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right) \tag{4.23}$$

Нека специално отбележим, че тук не извеждаме тази формула от (4.18) (макар че това може да стане). Доказателството, че тя дава решение с начално условие w се получава с директна проверка, която е аналогична на предишните случаи.

4.5 Реални решения

Досега решавахме диференциалните уравнения с явни формули, но с комплексни коефициенти. От друга страна е ясно, че ако коефициентите на системата (4.1) са реални, всяко решение с реално начално условие е реално. Сега ще опишем схема, по която от комплексните решения се намират и реалните. Тук важна роля играе формулата на Ойлер:

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b) \tag{4.24}$$

Нека разгледаме един прост (и много важен) пример.

Пример 4.1. *Системата*

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -x_1$$

Лесно се вижда,че собствените числа на матрицата са $i, -i$. Да напишем уравнението за собствения вектор $(u, v)^T$, отговарящ на собственото число i:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Едно решение е $(1, i)^T$. Векторът, отговарящ на другото собствено число може да се пресметне по същия начин. Но ако съобразим, че уравнението за него е комплексно-спрегнато на горното, намираме, че той може да се избере комплексно-спрегнат на намерения, т.е. $(1, -i)^T$. По посочената схема от (II) общото комплексно решение на системата е:

$$x(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} c_1 + e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} c_2$$

За да бъде решението реално е необходимо и достатъчно двете събираеми по-горе да са комплексно-спрегнати, т.е.

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} c_1 = \overline{e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} c_2} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \bar{c_2}$$

Следователно необходимото и достатъчно условие е $\bar{c_2} = c_1$. Тогава всички реални решения се дават с формулата

$$x(t) = \Re\left(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} c_1\right)$$

с произволно комплексно число $c = a + ib$. Като извършим умножението с използване на формулата на Ойлер (4.24) получаваме

$$x_1(t) = a \cos t - b \sin t, \quad x_2 = a \sin t + b \cos t.$$

Реалните решения в общия случай се намират буквално по същия начин като се използва, че комплексните собствени числа се появяват по двойки, (тъй като характетистичният полином е реален). Ще скицираме правилата.

Нека имаме $2p$ комплексни корена и $n-2p$ реални корена на характеристичното уравнение на матрицата A. Нека комплексните корени са $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\bar\lambda_1,\dots,\bar\lambda_p$, а реалните – $\lambda_{2p+1},\dots,\lambda_n$. Достатъчно е да намерим всички решения (например чрез общия алгоритъм), отговащи на собствените числа $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ и $\lambda_{2p+1},\dots,\lambda_n$. Да означим с $\phi_{s,j}(t), \quad j=1,\dots,d_s$ решения, чиито начални условия образуват базис в пространството V_s . Тогава общото решение на системата се дава с формулата

$$x(t)=\Re\left(\sum_{s=1}^{p}\sum_{j=1}^{d_s}c_{s,j}\phi_{s,j}(t)\right)+\sum_{s=2p+1}^{n}\sum_{j=1}^{d_s}c_{s,j}\phi_{s,j}(t).$$

4.6 Линейни системи с променливи коефициенти

В този параграф ще разглеждаме системи, чийто коефициенти могат да зависят от независимата променлива t. Ще използваме следните означения:

$$\dot x = A(t)x \tag{4.25}$$

Тук предполагаме, че матрицата $A(t)$ е дефинирана в някакъв интервал $\Delta=(\alpha,\beta)$ и зависи в него непрекъснато от променливата t.

За линейни системи има по-силна версия на теоремата за съществуване и единственост – съществуване в целия интервал Δ В глава 3 е доказана следната теорема.

Теорема 4.3. *(Теорема за съществуване и единственост на решенията на линейни системи.) За всяко начално условие $x^{(0)},t_0$ системата* (4.25) има единствено решение на задачата на Коши, дефинирано в целия интервал Δ.

В общия случай тези системи не се решават в явен вид. Въпреки това бихме могли да кажем някои общи свойства, които са полезни, както в теорията, така и при пресмятания.

Основният резултат в теорията на линейните ОДУ е следната

Теорема 4.4. *(Теорема за структурата на решенията.) Множеството M от решенията на системата е изоморфно на линейното пространство $\mathbb{R}^n$.*

*Доказателство.*Най-напред ще покажем, че M е линейно пространство. Наистина, ако x и y са решения на ((4.25)), а $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, то $\lambda x+\mu y$ също е решение на ((4.25)):

$$\frac{d}{dt}(\lambda x+\mu y) \;=\; \lambda\,\dot x+\mu\,\dot y \;=\; A(t)(\lambda x+\mu\,y)\;.$$

Построяваме изображението ϕ от пространството на решенията M в $\mathbb{R}^n$, което съпоставя на всяко решение $x(t)$ началните данни на решението в точката $t_0 \in \Delta$. С формули това изразяваме така:

$$\begin{aligned} \phi \ : \ M \quad &\to \quad \mathbb{R}^n \\ x(t) \quad &\mapsto \quad x(t_0). \end{aligned}$$

Ще докажем, че ϕ е търсеният изоморфизъм. Това ще стане в три стъпки.

Първо, ϕ е линеен хомоморфизъм:

$$\phi(\lambda\, x + \mu\, y) \quad = \quad \lambda\, \phi(x) + \mu\, \phi(y),$$

Второ, тъй като за всяко начално условие $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ задачата на Коши (2) има решение, то ϕ е сюрективно.

И трето, при $x^{(0)} = 0$ задачата (2) има единствено решение – нулевото. Следователно ядрото $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, т. е. ϕ е инективно.

Теоремата е доказана. $\square$

Дефиниция 4.3. *Фундаментална система от решения (ФСР) на системата* (4.25) наричаме който и да е базис в пространството M от нейни решения.

Да означим с $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ една фундаментална система от решения. По дефиниция всяко решение на (4.6) се записва във вида

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(t)$$

където c_m са константи.

Ще въведем някои понятия свързани със системи.

Дефиниция 4.4. *(1) Фундаментална матрица ще наричаме матрицата, чиито стълбове са съставени от фундаменталната система* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$
(2) Детерминанта на Вронски (или вронскиан) ще наричаме детерминантата на фундеманталната матрица. Ще я означаваме с W.

Едно често срещано недоразумение е смесването на фундаменталната система, т.е. базис в M, с базис в $\mathbb{R}^n$, зададен с векторите $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$. В действителност двете понятия са свързани, но все пак е нужно точно твърдение. Ето това твърдение.

Теорема 4.5. *Ако векторите* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ *образуват фундаментална система, то детерминантата на Вронски е различна от нула в целия интервал . Това означава, че векторите* $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ *в* $\mathbb{R}^n$ *са линейно независими, каквото и да е* t_0.

*Доказателство.*Линейната независимост на решенията $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ означава, че никоя тяхна линейна комбинация с ненулеви коефициенти не е тъждествено равна на нула. Да допуснем, че детерминантата на Вронски е равна на нула в някоя точка t_0. Това означава, че векторите $\varphi_1(t_0),\ldots,\varphi_n(t_0)$ са линейно зависими, т.е. съществуват константи $c_1,\ldots,c_n$, не всичките равни на нула, така че

$$c_1\varphi_1(t_0)+\ldots+c_n\varphi_n(t_0)=\overrightarrow{0}$$

Да дефинираме решение на системата (4.25) по следния начин:

$$\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)$$

По построение $\psi(t_0)=\overrightarrow{0}$. По теоремата за единственост това решение е равно на 0 при t_0. Следователно по теоремата за единственост то е тъждествено равно на нула. Казано чрез формули това означава, че

$$c_1\varphi_1(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)\equiv\overrightarrow{0}.$$

Това противоречи на нашето допускане, че решенията $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ образуват фундаментална система. □

Детерминантата на Вронски удовлетворява диференциално уравнение, което може да се реши явно. А именно е в сила следната

Теорема 4.6. *(теорема на Лиувил) Детерминантата на Вронски е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\dot{W}(t)=tr\left(A(t).W(t)\right), \tag{4.26}$$

кѫдето $trA(t)=\sum a_{k,k}(t)$ е следата на матрицата (сумата от деагоналните елементи).

*Доказателство.*Нека координатите на вектора $\varphi_s(t)$ са $\varphi_{s,1}(t),\ldots,\varphi_{s,n}(t)$. От анализа (или от формулата на Лайбниц за производна на произведение) е известно, че производната на детерминанта, чиито елементи са функции, е сума от детерминанти, всяка от които е получена като k-ия ред на първоначалната детерминанта е заместена с производните на съответните елементи.

$$\dot{W}=\sum_{k=1}^{n}W_k, \tag{4.27}$$

където W_k е детерминантата

$$W_k = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & \cdots & \varphi_{n,1} \\ \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{n,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dot{\varphi}_{1,k} & \dot{\varphi}_{2,k} & \cdots & \dot{\varphi}_{n,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1,n} & \varphi_{2,n} & \cdots & \varphi_{n,n} \end{pmatrix},$$

Нека сега да използваме, че векторите $\varphi_k = (\varphi_{k,1}, \ldots, \varphi_{k,n})$ удовлетворяват диференциалните уравнения. Ще напишем съответните формули за да можем след това да заместим производните.

$$\dot{\varphi}_{s,k} = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m}\varphi_{s,m} \quad s = 1, \ldots, n$$

Нашата детерминанта става:

$$W_k = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{n,1} \\ \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{n,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{m=1}^{n} a_{1,m}\varphi_{k,m} & \sum_{m=1}^{n} a_{2,m}\varphi_{k,m} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{n,m}\varphi_{k,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1,n} & \varphi_{2,n} & \cdots & \varphi_{n,n} \end{pmatrix}$$

Чрез очевидни манипулации с редовете можем унищожим повечето членове в в сумата. Да умножим първия ред с $-a_{1,k}$, втория с $-a_{2,k}$ ... n-ия ред – с $-a_{n,k}$, като пропуснем k-ия ред и да ги прибавим към него. Получаваме

$$W_k = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{n,1} \\ \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{n,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,k}\varphi_{k,1} & a_{k,k}\varphi_{k,2} & \cdots & a_{k,k}\varphi_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1,n} & \varphi_{2,n} & \cdots & \varphi_{n,n} \end{pmatrix},$$

Това означава, че $W_k = a_{k,k}W$. Като заместим W_k с неговото равно в (4.27) получаваме търсеното уравнение. $\square$

Ще завършим този параграф с аналог на метода на Лагранж за вариране на константите при решаване на нехомогенни системи. Нека е дадена система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t). \tag{4.28}$$

Да допуснем, че знаем една фундаментална система на (4.25). Ще означим фундаменталната матрица с $\Phi(t)$. Тогава всяко решение на (4.28) може да се запише като

$$x(t) = \Phi(t)c$$

с някой постоянен вектор c.

Ще търсим частно решение на (4.28) във вида

$$x^{(0)}(t) = \Phi(t)c(t). \tag{4.29}$$

Тук c(t) е неизвестен засега вектор, който зависи от времето. (Спомнете си метода на Лагранж за скаларния случай). Да заместим $x^{(0)}(t)$ в (4.28). Получаваме

$$\dot{x}^{(0)}(t) = \dot{\Phi}(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + f(t).$$

Вече знаем, че стълбовете на фундаменталната матрица са решения на системата (4.25). Тогава $\Phi(t)$ удовлетворява следното матрично уравнение:

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi.$$

Като заместим израза за производната на $\Phi(t)$ в по-горното равенство и извършим приведение получаваме:

$$\Phi(t)\dot{c}(t) = f(t).$$

От това уравнение следва, че неизвестният вектор $c(t)$ може да бъде намерен само с алгебрични операции и интегриране. Действително матрицата $\Phi(t)$, която считаме за известна, е неизродена (защо?) и следователно е обратима. Следователно

$$\dot{c}(t) = \Phi(t)^{-1}f(t).$$

4.7 Линейни уравнения от по-висок ред

Линейно диференциално уравнение ще наричаме уравнение за неизвестната функция $x(t)$ от вида

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t), \tag{4.30}$$

където функциите $a_j(t)$ и $f(t)$ са непрекъснати в някакъв интервал Δ. В случая, когато функцията $f(t) \equiv 0$ ще казваме, че уравнението е хомогенно.

Теорията на линейните уравнения може да се получи аналогично на теорията на линейните системи. Тя би могла да се счита и за специален случай на теорията на линейните системи, както ще направим тук. Нека отбележим, че макар да е специален случай, има смисъл тази теория да се изложи отделно, тъй като някои нейни положения са по-прости за прилагане – например решаването на уравнения с постоянни коефициенти.

Най-напред ще припомним как уравненията се свеждат до системи. Да положим

$$x(t) = y_1(t), \quad \dot{x}(t) = y_2(t), \dots, x^{(n-1)}(t) = y_n(t)$$

Тогава лесно се вижда, че всяко решение на уравнението (4.30) дефинира по горните формули решение на системата

$$\dot{y} = A(t)y + F(t), \tag{4.31}$$

където матрицата $A(t)$ и векторът $F(t)$ са съответно

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Обратното също е очевидно вярно; всяко решение $y(t)$ на системата (4.31) задава решение на уравнението (4.30) чрез първата си компонента $y_1(t)$.

Взаимно-еднозначното съответствие ни дава автоматично аналози на резултатите на предишния параграф. За удобство при формулировките ще въведем и хомогенното уравнение

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \tag{4.32}$$

Лема 4.4. *Решенията на уравнението* (4.32) образуват линейно пространство с размерност n.

Ще означим това пространство с M.

Дефиниция 4.5. *Всеки базис $\phi_1(t), \dots, \phi_n(n)$ в пространството M се нарича фундаментална система на уравнението. Следователно всяко решение на* (4.30) се записва като

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t)$$

с някакви константи $c_1, \dots, c_n$.

Дефиниция 4.6. *Детерминанта на Вронски за уравнението* (4.32) наричаме детерминантата на Вронски за хомогенната система (4.31) . Чрез фундаменталната система $\phi_1(t), \dots, \phi_n(n)$ тя се записва като

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 & \dots & \dot{\phi}_n \\ \ddot{\phi}_1 & \ddot{\phi}_2 & \dots & \ddot{\phi}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

Лема 4.5. *Детерминантата на Вронски на* (4.32) е различна от нула във всяка точка $t \in \Delta$.

Накрая метода на Лагранж за вариране на константите за линейни уравнения приема следната проста форма:

$$\left| \begin{array}{l} \phi_1 \dot{c}_1 + \ldots + \phi_n \dot{c}_n = 0 \\ \dot{\phi}_1 \dot{c}_1 + \ldots + \dot{\phi}_n \dot{c}_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_1^{(n-1)} \dot{c}_1 + \ldots + \phi_n^{(n-1)} \dot{c}_n = f \end{array} \right.$$

4.8 Линейни уравнения с постоянни коефициенти

В този параграф ще работим с линейни хомогенни уравнения с постоянни коефициенти:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0. \tag{4.33}$$

Основната цел тук ще бъде да опишем алгоритъма за решаване им. Отново свеждаме задачата до съответната за системи. Най-напред ще пресметнем характеристичния полином на (4.33), който по дефиниция ще е характеристичния полином на съответната система.

Лема 4.6. *(1) Характеристичния полином за еквивалентната система* (4.31) е

$$\chi = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)$$

(2) На всяко собствено число на (4.31) отговаря единствена жорданова клетка.

*Доказателство.*Нека $l_p = (l_{p,1}, \ldots, l_{p,n})$ е един собствен вектор, отговарящ на собственото число λ_p. Да напишем системата, която го определя

$$\begin{pmatrix} -\lambda_p & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda_p & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 - \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{p,1} \\ l_{p,2} \\ \ldots \\ l_{p,n} \end{pmatrix} = 0$$

Това ни дава следните уравнения

$$\begin{aligned} -\lambda_p l_{p,1} + l_{p,2} = 0, \\ -\lambda_p l_{p,2} + l_{p,3} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ -\lambda_p l_{p,n-1} + l_{p,n} = 0 \\ -a_n l_{p,1} - a_{n-1} l_{p,2} - \ldots - (a_1 + \lambda_p) l_{p,n} = 0 \end{aligned}$$

Като ги последователно намираме

$$\begin{aligned} l_{p,2} &= \lambda_p l_{p,1} \\ l_{p,3} &= \lambda_p^2 l_{p,1} \\ &\ldots, \\ l_{p,n} &= \lambda_p^{n-1} l_{p,1} \end{aligned}$$

Очевидно $l_{p,1} \neq 0$ и следователно можем да го изберем равен на 1. Последното уравнение е уравнението, което се удовлетворява от произволен характеристичен корен. Това означава, че това е характеристичният полином (с точност до знак). □

Тази лема ни дава възможност да напишем общото решение на (4.32). Нека отначало работим с комплексни коефициенти. Според горната лема на всяко собствено число λ_p на системата (4.31) отговаря единствен собствен вектор $(1, *, \ldots, *)$. Тук $*$ означават числа, чиято стойност за нас нямат значение. На него съответствува решението $e^{\lambda_p t}(1, *, \ldots, *)$ на системата (4.31). Вземайки само първата компонента, т.е. $e^{\lambda_p t}$ получаваме едно решение на (4.32). Останалите решения се получават последователно с помощта на формулите (4.23). В тях векторът l_r е собствен, т.е има вида $(1, *, \ldots, *)$. Нека разгледаме случая $r = 2$. Съответното решение има вида $e^{\lambda_p t}(*, *, \ldots, *) + t(1, * \ldots, *)$. Отново вземаме първата компонента на вектора и получаваме решението $e^{\lambda_p t}[(*, *, \ldots, *) + t(1, * \ldots, *)]$ на линейното уравнение. $e^{\lambda_p t}(t + *)$. Подходяща линейна комбинация на това решение с предходното дава следното решение – $e^{\lambda_p t} t$. Продължавайки по същия начин, от решенията на системата (4.31) получаваме последователно решенията на уравнението (4.32) – $e^{\lambda_p t}, e^{\lambda_p t} t, \ldots, e^{\lambda_p t} t^{k_p - 1}$, където k_p е кратността на собственото число λ_p.

4.9 Квазиполиноми

В този параграф ще опишем метод за намиране на частно решение на линейно уравнение с постоянни коефициенти и специална дясна част – квазиполином. Да дадем дефиниция на това понятие.

Дефиниция 4.7. *Квазиполином с показател μ ще наричаме израза*

$$e^{\mu t}P(t),$$

където $P(t)$ е полином.

Очевидно квазиполиномите с фиксиран показател и степен по-малка от m образуват линейно пространство с размерност m. Ще означаваме това пространство с $Q_m(\mu)$.

Да разгледаме по-общо пространството C^∞ от безкрайно-диференцируемите функции върху реалната права. Да дефинираме оператор D в това пространство, който на функция $f \in C^\infty$ съпоставя нейната производна:

$$D(f) = \dot{f}.$$

Лесно се вижда, че операторът D изпраща пространството $Q_m(\mu)$ в себе си, (т.е. производната на квазиполином с фиксиран показател е пак квазиполином със същия показател и същата степен). Във всеки базис на пространството $QP_m(\mu)$ можем да напишем матрицата на този оператор. Тук ще изберем следния базис:

$$e_1 = e^{\mu t}, \quad e_2 = \frac{e^{\mu t}t}{1!}, \quad \ldots, \quad e_m = \frac{e^{\mu t}t^{m-1}}{(m-1)!}$$

Той има предимството, че в този базис матрицата на оператора D е жорданова клетка т.е.

$$De_1 = e_1, \quad De_2 = \mu e_2 + e_1, \quad \ldots, \quad De_m = \mu e_m + e_{m-1},$$

Да разгледаме следния диференциален оператор

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n E,$$

където $a_1, \ldots, a_n$ са коефициентите на уравнението (4.32). Нека отбележим, че той действа на всяка функция $f \in C^\infty$ по следния начин

$$Lf = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \ldots + a_n f$$

Ще изучим как действа операторът L в подпространството $Q_m(\mu)$ от квазиполиноми от степен $< m$.

Лема 4.7. *(1) Операторът L е ендоморфизъм на пространството $Q_m(\mu)$.*

(2) Ако μ не е корен на характеристичния полином на уравнението (4.32), то операторът L е автоморфизъм.

Доказателство.(1) е очеведно. (2) Ще пресметнем детерминантата на оператора L в базиса

$$De_1 = e_1, \quad De_2 = \mu e_2 + e_1, \quad \dots, \quad De_m = \mu e_m + e_{m-1}, \tag{4.34}$$

Тъй като матрицата на оператора D е жорданова клетка, то нейните степени D^k са горно-триъгълни матрици от следния вид:

$$D^k = \begin{pmatrix} \mu^k & * & * & \dots & * \\ 0 & \mu^k & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu^k \end{pmatrix}$$

Матрицата на оператора L в този базис има вида

$$\begin{pmatrix} \chi(\mu) & * & * & \dots & * \\ 0 & \chi(\mu) & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \chi(\mu) \end{pmatrix},$$

където $\chi(\mu)$ е характеристичния полином на уравнението, пресметнат за стойността μ. По условие това число е различно от нула. Следователно детерминантата на оператора L има стойност $\chi^m(\mu)$, т.е. и тя е различна от нула. □

Нека сега разгледаме случая, когато μ е корен на характеристичния полином χ с кратност k. Ще използваме очевидния факт, че пространствата Q_m са вложени едно в друго: $Q_m \subset Q_{m+1}$.

Лема 4.8. *Операторът L, (разглеждан като оператор от Q_{m+k} в себе си) изпраща Q_{m+k} в Q_m.*

*Доказателство.*Ще разложим полинома χ на два множителя:

$$(\lambda - \mu)^k \chi_1(\lambda)$$

Това ни дава и разлагане на оператора L:

$$L = (D - \mu E)^k \cdot \chi_1(D)$$

Да отбележим, че $\chi_1(\mu) \neq 0$. От предишната лема знаем, че операторът $\chi(D)$ е изоморфизъм на пространството Q_{m+k} в себе си. Остава да пресметнем действието на оператора $(D - \mu E)^k$. От (4.34) знаем, че

$$
\begin{aligned}
&(D-\mu E)e_1 = 0\\
&(D-\mu E)e_2 = e_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&(D-\mu E)e_k = e_{k-1}
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
\begin{aligned}
&(D-\mu E)^k e_j = 0, \quad j = 1,\dots,k \quad \text{и}\\
&(D-\mu E)^k e_{k+j} = e_j, \quad j = 1,\dots,m
\end{aligned}
$$

Като отбележим, че векторите $e_j, j = 1,\dots,m$ образуват базис в пространството Q_m получаваме твърдението на лемата. □

Следствие 4.1. *Да разгледаме уравнението*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = e^{\mu t} P(t),$$

където $P(t)$ е полином от степен m и μ е характеристичен корен от кратност k . Тогава съществува частно решение $x(t) = t^k Q(t) e^{\mu t}$, където $Q(t)$ е полином от степен m.

*Доказателство.*Линейният оператор L изобразява пространството $Q_{m+1+k}(\mu)$ в пространството $Q_{m+1}(\mu)$. Следователно съществува решение $x(t)$ от вида $x(t) = R(t)$, където е полином от степен $m+1+k$. От друга страна операторът L изпраща пространствата $Q_j, \quad j = 1,\dots,k-1$ в нулевото пространство. Следователно можем да пропуснем степените на t, които не превъзхождат $k-1$ (те отиват в нула при действието на L). Означавайки с $t^k Q(t)$ останалата част от полинома $R(t)$ получаваме твърдението на лемата. □

Ползата от това следствие е очевидна; можем да търсим частно решение с помощта на метода на неопределените коефициенти.

Пример 4.2. *Да разгледаме уравнението*

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t$$

Характеристечният полином е $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, т.е. има двоен корен 1. Дясната страна е квазиполином от степен нула и показател също 1. Следователно трябва да търсим решение от вида $x(t) = At^2 e^t$. Като заместим това решение в уравнението и използваме, че

$$\dot{x} = 2Ate^t + At^2 e^t \quad и \quad \ddot{x} = 2Ae^t + 4Ate^t + At^2 e^t$$

получаваме

$$2Ae^t + 4Ate^t + At^2e^t - 2(2Ate^t + At^2e^t) + At^2e^t = e^t$$

Като направим приведение получаваме $2Ae^t = e^t$, т.е. $A = 1/2$. Следователно търсеното частно решение е $\frac{(t^2e^t)}{2}$.

4.10 Упражнения

1. Намерете общото решение на следните системи:

а) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -31 & 24 \\ -48 & 37 \end{pmatrix} x$ (Отговор: $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$)

б) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ -25 & -6 \end{pmatrix} x$ Отговор: $x = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

в) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x$ Отговор: $x = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

г) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 22 & -31 & -7 \\ 11 & -16 & -3 \\ 13 & -17 & -6 \end{pmatrix} x$ Отговор: $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} C$

д) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 6 & -5 \end{pmatrix} x$ (Отговор: $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} C$)

е) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ -9 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$ Отговор: $x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} C$

ж) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x$ Отговор: $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$

з) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$ Отговор: $x = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$

2. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + \operatorname{cotg} t \\ \dot{x}_3 & = & x_3 + e^t \ln t \end{array} \right. .$$

Решение. Матрицата A и фундаменталната матрица от решения на хомогенната система $\dot{x} = A(t)x$ имат съответно вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} .$$

Решаваме съответната нехомогенна система $\Phi\, C'(t) = F(t)$ от алгебрични уравнения за вектора $C'(t)$, интегрираме $C'(t)$ по t и получаваме вектор–стълба $C(t)$:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \operatorname{cotg} t \\ e^t \ln t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} C_1' = 0 \\ C_2' = (\sin t)^{-1} \\ C_3' = \ln t \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = B_1 \\ C_2 = B_2 + 2\, \ln \tan \frac{t}{2} \\ C_3 = B_3 + t\,(\ln t - 1) \ . \end{array}$$

Решението на задачата е

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 + 2\, \ln \tan \frac{t}{2} \\ B_3 + t\,(\ln t - 1) \end{pmatrix} ,$$

B_j са произволни константи.

3. Решете следните диференциални уравнения

а) $x'' - 4x' + 13x = 0$

Решение. Характеристичното уравнение е: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$. Корените на характеристичното уравнение са $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Една фундаментална система от решения се дава от $e^{2t} \cos 3t$, $e^{2t} \sin 3t$.

Общото решение е $x = C_1 e^{2t} \cos 3t + C_2 e^{2t} \sin 3t$.

б) $x''' + 6x'' + 12x' + 8 = 0$; Отговор: $x = e^{-2t}\,(C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$

в) $x'' + x' = 0$; Отговор: $x = C_1 + C_2 e^{-t}$

г) $x^{(IV)} - x = 0$; Отговор: $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + A \cos t + B \sin t$

д) $x'' - 4x' + 4x = 0$; Отговор: $x = e^{2t}\big(C_1 + tC_2\big)$.

4. Да се реши уравнението

$$x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t} \ . \tag{4.35}$$

Решение. Хомогенното уравнение $x'' - 2x' + x = 0$ има фундаментална система от решения $\phi_1 = e^t$ и $\phi_2 = te^t$. По метода на Лагранж за вариране на константите, от линейна алгебрична ıметод!на Лагранж за вариране на константите система получаваме производните C_1' и C_2' на варираните константи. Интегрираме по t и получаваме $C_j(t)$, а оттам и решението x на уравнението (4.35):

$$\left|\begin{array}{l} e^tC_1' + te^tC_2' = 0 \\ e^tC_1' + (t+1)e^tC_2' = t^{-1}e^t \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1' = -1 \\ C_2' = t^{-1} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = -t + B_1 \\ C_2 = \ln t + B_2 \ , \end{array}$$

$$x \ = \ (B_1 - t)\, e^t + (B_2 + \ln t)\, te^t \ .$$

5. Да се решат уравненията:

   а) $x'' - 4x' + 13x \ = \ 12\, te^{2t} \cos 3t + 8e^{2t} \sin 3t$.
   Отговор: $x = (C_1 cos3t + C_2 sin3t - tcos3t + t^2 sin3t)\, e^{2t}$.

   б) $x'' - 9x = e^{3t}\ cost$. Отговор: $x = (C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}) + e^{3t}\,(6\ sint/17 - cost/37)$.

   в) $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$. Отговор: $x = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + e^{4t}/5)$.

   г) $x''' + x' = sint + tcost$.

   д) $x^{(IV)} + 2x'' + x = cost$.

   Уравнения на Ойлер.

   Това са уравнения от вида

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdot + a_n x = f(t),$$

където a_j са константи. Те се свеждат до уравнения с постоянни коефициенти с простата смяна на променливите: $t = e^s$. Лесно се пресмята, че

$$t\frac{d}{dt}x = \frac{d}{ds}x, \quad t^2\frac{d^2}{dt^2}x = \left(-\frac{d}{ds} + \frac{d^2}{ds^2}\right)x, \ldots$$

По-общо

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}x = \prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{d}{ds} - j\right)x$$

6. Да се решат уравненията

   а) $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$. Отговор $x = C_1t^2 + C_2t^3$

   б) $t^2x'' + 3tx' - 3x = \ln t$. Отговор $x = C_1t + C_2t^{-3} - lnt - \frac{2}{3}$

   в) $t^2x''' - 2x' = 2$. Отговор $x = C_1 + C_2 lnt + C_3t^3 - t$

7. Покажете, че ако A е антисиметрична матрица, то матрицата e^{At} е ортогонална.

8. (Матрици на Паули) Нека

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

са матриците на Паули.

а) Пресметнете $e^{it\sigma_j/2}, \quad j = 1, 2, 3.$

б) Докажете тъждествата

$$\begin{aligned} e^{it\sigma_1/2}\sigma_1 e^{-it\sigma_1/2} &= \sigma_1 \\ e^{it\sigma_1/2}\sigma_2 e^{-it\sigma_1/2} &= \cos t\sigma_2 - \sin t\sigma_3; \\ e^{it\sigma_1/2}\sigma_3 e^{-it\sigma_1/2} &= \sin t\sigma_2 \cos t\sigma_3; \end{aligned}$$

Глава 5

Геометрична теория

В предходните глави имахме случаи да видим някои методи за изследване на диференциални уравнения, при които решаването стои на заден план, а геометричните идеи са основни. В тази глава ще предприемем по-систематично изучаване на средства за геометричен анализ на диференциалните уравнения. До края на главата ще разглеждаме предимно автономни системи като по-естествени, но някои въпроси има смисъл да се изучат и в случай на неавтономни.

Тук най-често няма да уточняваме гладкостта на дясната страна на системите. Теорията е достатъчно съдържателна и при най-силни ограничения, например при безкрайно гладки функции.

5.1 Фазови и интегрални портрети

В този параграф ще въведем първоначалните понятия, които формират езика на геометричната теория.

Ще разглеждаме *автономни системи* от диференциални уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

което значи, че дясната част $f(x)$ не зависи явно от независимата променлива t. Обърнете внимание, че говорим само за системи е от първи ред. Едно особено важно свойство на автономните системи е, че транслацията във времето не променя системата, т.е. в сила е следната лема.

Лема 5.1.1. *Ако $x(t)$ е решение на системата (5.1), то и $x(t+a)$ е нейно решение за всяко $a \in \mathbb{R}$, в съответните дефиниционни области на двете функции.*

Доказателство. Имаме

$$\frac{d}{dt}x(t+a) = f(x(t+a)).$$

□

Забележка 5.1.2. За да не остане в заблуда читателят ще посочим защо това свойство не е в сила за неавтономни системи. Нека имаме система $\dot{x} = f(t, x)$. Същите пресмятания дават

$$\frac{d}{dt}x(t+a) = f(t+a, x(t+a)),$$

което значи, че функцията $x(t+a)$ е решение на евентуално друго диференциално уравнение, а именно на $\dot{x} = f(t+a, x)$.

Дефиниционната област U на системата (5.1) се нарича *фазово пространство* . Нека означим с $\varphi(y,t)$ максимално продължимото решение на системата (5.1) с начално условие $\varphi(y, 0) = y$. Ясно е, че това решение дефинира крива l_y, минаваща през точката y, във фазовото пространство U. Тази крива ще наричаме *фазова крива* или *траектория*. Нека специално подчертаем, че фазовата крива не е графика на решението $\varphi(y,t)$, а крива зададена параметрично с параметър времето t. Фазовата крива се намира във фазовото пространство U, докато графиката е разположена в множеството $U \times \mathbb{R}$. Това множество наричаме *разширено фазово пространство* . Съответно графиките се наричат *интегрални криви*.

Пример 5.1.3. В уравнението

$$\dot{x} = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

фазовото пространство е $\mathbb{R}$, разширеното фазово пространство е $\mathbb{R}^2$

Смисълът на понятието фазово пространство е, че неговите точки представляват различните състояния на описваните процеси. Това не винаги означава местоположение, когато процесът е движение. Например, движението на планета около Слънцето се задава с уравнението (1.4) глава 1. Тази система е от втори ред и в съответствие с нашите ограничения не говорим за нейно фазово пространство. От друга страна би било жалко ако геометричната теория не се отнася за една от най-важните задачи на математиката. И действително за нея (и всички уравнения от втори ред) има прост и естествен способ да поправим положението - въвеждаме променлива $y = \dot{x}$, която в случая има ясен механичен смисъл на скорост.

Пример 5.1.4. В случая на Слънчевата система уравненията стават

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{GmMx}{||x||^3}. \end{aligned}$$

Фазовото пространство е 6-мерно - $\{\mathbb{R}^3/0\} \times \mathbb{R}^3$. С други думи състоянието на системата се определя от положението на планетата и нейната скорост.

Дясната страна $f(x)$ на системата (5.1) се нарича *векторно поле на фазовата скорост.* (Внимание! *Откъсната от системата векторната функция $f(x)$ не е векторно поле.* По-подробно този въпрос ще бъде разгледан в параграф 5.3). Връщайки се към Пример 5.1.4 ще обърнем внимание на факта, че фазовата скорост не е скоростта на планетата. Фазовата скорост е $(y, -\frac{GmMx}{||x||^3})$. В механични термини това е вектора, съставен от скоростта и ускорението.

Една основна задача на геометричната теория е определянето на взаимното разположение на фазовите криви. Фазовото пространство, заедно с фазовите криви в него се нарича *фазов портрет* . Съответно, наборът от графиките на решенията съставят *интегрален портрет.*

Особено важни са най-простите решения, отговарящи на решения, които не се менят с времето - $x(t) = a = const$. Точката a се наричат *положение на равновесие* . Със заместване в системата (5.1) се вижда, че $f(a) = 0$. Това оправдава даденото название, както и еквивалентното му *неподвижна точка на векторното поле* . Трето наименование, под което е познато въведеното понятие е *особена точка* на векторното поле . Терминът произлиза от факта, че в такава точка векторното поле няма посока, за разлика от точките, които не са особени.

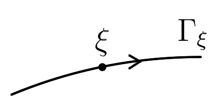
За да се научим да рисуваме фазовите портрети на системите ще ни трябват някои техни общи свойства. Сред тях едно просто и непрекъснато използвано е следното.

Лема 5.1.5. *Две фазови криви или нямат нито една обща точка или всичките им точки са общи, т.е. те съвпадат.*

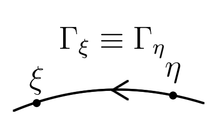
Доказателство. Най-напред да въведем означения за фазовите криви. Нека първата се дава с l_y , а втората – с l_z. Фактът, че имат обща точка w означава, че $w = \varphi(y, t_1) = \varphi(z, t_2)$, за някакви стойности t_1 и t_2, на t. Ще дефинираме ново решение $\psi(t)$ като в $\varphi(z, t)$ се придвижим напред с t_2,т.е. отидем в w и се върнем назад с t_1, т.е. дефинираме $\psi(t) = \varphi(z, t+t_2-t_1)$. За стойността на $\psi(t)$ в точката t_1 намираме $\psi(t_1) = \varphi(z, t_1-t_1+t_2) = w = \varphi(y, t_1)$. Получихме, че двете решения $\psi(t)$ и $\varphi(y, t)$ имат общо начално условие. Следователно от теоремата за единственост намираме, че $\psi(t) \equiv \varphi(y, t)$, с други думи $\varphi(z, t - t_1 + t_2) \equiv \varphi(y, t)$. □

Точно по същия начин доказваме

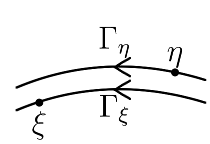
Лема 5.1.6. *Ако една фазова крива се самопресича, то тя се задава с периодично решение и е затворена.*



Фазова крива Γ_ξ, минаваща през т. ξ и дифеоморфна на $\mathbb{R}$

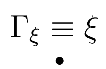


Съвпадащи фазови криви $\Gamma_\xi \equiv \Gamma_\eta$

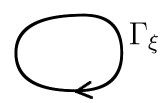


Различни фазови криви $\Gamma_\xi \neq \Gamma_\eta$

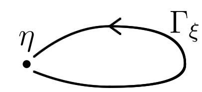
Почти всички фазови криви са дифеоморфни на правата $\mathbb{R}$ и са с безкрайна дължина при $t \in [0, \infty)$ и $t \in (-\infty, 0]$. Останалите възможни фазови криви са следните:



Особена точка (положение на равновесие): фазова крива $\Gamma_\xi \equiv \xi$



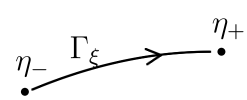
Периодично решение Γ_ξ - фазова крива, дифеоморфна на окръжност



Фазова крива Γ_ξ, клоняща към особена точка $\eta \equiv \Gamma_\eta$ при $t \to \pm\infty$

Фазова крива Γ_ξ, клоняща към особена точка $\eta \equiv \Gamma_\eta$ при $t \to +\infty$

Фазова крива Γ_ξ, клоняща към особена точка $\eta \equiv \Gamma_\eta$ при $t \to -\infty$



Фазова крива Γ_ξ, клоняща към особени точки $\eta_\pm \equiv \Gamma_{\eta_\pm}$ при $t \to \pm\infty$

В едномерния случай ($n = 1$), т.е. при уравнение $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, рисуването на фазов портрет се свежда до решаване на уравнението $f(x) = 0$ и след това на определяне на интервалите в които $f(x) > 0$ (там фазовите криви имат посока надясно) и на интервалите в които $f(x) < 0$ (там фазовите криви имат посока наляво). Точките x_0, за които $f(x_0) = 0$, са особените точки[1].

В двумерния случай ($n = 2$), рисуването на фазови портрети е изобщо казано трудна работа. Дори в случая на *полиномиално* векторно поле $V = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, където $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са полиноми от втора степен, това е все още нерешена задача.

Рисуването на фазов портрет на дадена система от диференциални уравнения става на няколко етапа. За начало се нуждаем от идея, как изглежда в общи линии фазовият портрет.

От първостепенна важност в двумерния случай са особените точки т.е. решенията на системата $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Кривите $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ разделят равнината $\mathbb{R}^2$ на 4 типа области:

- $\dot{x} > 0$ и $\dot{y} > 0$ – фазовите криви имат посока надясно и нагоре
- $\dot{x} > 0$ и $\dot{y} < 0$ – фазовите криви имат посока надясно и надолу
- $\dot{x} < 0$ и $\dot{y} > 0$ – фазовите криви имат посока наляво и нагоре
- $\dot{x} < 0$ и $\dot{y} < 0$ – фазовите криви имат посока наляво и надолу.

Пример 1. Да нарисуваме фазовия портрет на системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -x.\mathrm{sgn}(y) \\ \dot{y} = \ 1 - |\,y\,| \end{array} \right. . \tag{5.2}$$

[1] По очевидни причини, тези фазови криви нямат ориентация.

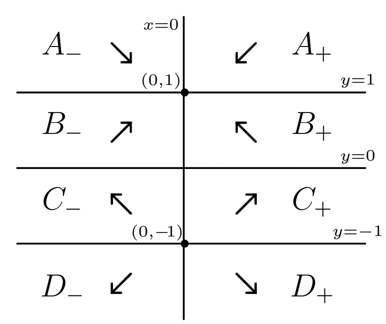
Равенството $\dot{x} = 0$ е изпълнено при $x = 0$ или $y = 0$. Равенство $\dot{y} = 0$ имаме при $y = 1$ или при $y = -1$. Правите $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ и $y = -1$ разделят равнината $\mathbb{R}^2$ на 8 области, които ще означим със $A_\pm$, $B_\pm$, $C_\pm$ и $D_\pm$. Посоките на векторното поле

$$V \;\;=\;\; -x.\mathrm{sgn}(y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \big(1 - |\,y\,|\big)\,\frac{\partial}{\partial y}$$

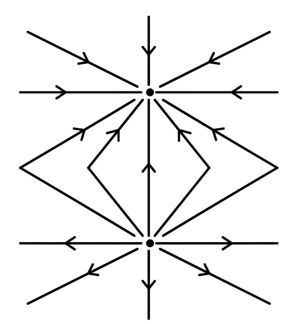
във всяка от осемте области, са означени на рисунката по–долу и вляво. Това са и посоките на съответните фазови. Особените точки на V са $(x, y) = (0, 1)$ и $(x, y) = (0, -1)$.

При $y(0) > -1$ и $t \to \infty$, всяка от фазовите криви клони към точката $(0, 1)$. При $y(0) < 1$ и $t \to -\infty$, фазовите криви клонят към точката $(0, -1)$.

Направените разсъждения ни дават възможност да нарисуваме фазовия портрет на (5.2). Фазовите криви, лежащи в областите $B_\pm$ и $C_\pm$, имат чупки при $y = 0$.



Посоки на фазовите криви


Фазов портрет на (5.2)

По сложни в сравнение с разгледания пример 1 са ситуациите, когато за определяне на фазовия портрет се налага да докажем съществуването на някоя ключова сепаратриса. Без да даваме точна дефиниция, *сепартриса* ще наричаме фазова крива, отляво и отдясно на която лежат фазови криви с принципно различно поведение.

Пример 2. Да се нарисува фазовия портрет на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = 1 + x^2 - y^2 \;. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Решение. Равенството $\dot{x} = 0$ е равносилно на $x = 0$ или $y = 0$. Производната $\dot{y}$ се анулира върху хиперболата $y^2 = x^2 + 1$. Положенията на равновесие са $(x, y) = (0, 1)$ и $(x, y) = (0, -1)$. Векторното поле

$$V \;\;=\;\; -xy\frac{\partial}{\partial x} + \big(1 + x^2 - y^2\big)\frac{\partial}{\partial y}$$

има вида от най–лявата рисунка по–долу. Равнината $\mathbb{R}^2$ е разделена на 8 области от правите $x = 0$, $y = 0$ и от двата клона на хиперболата $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$. Тъй като системата (5.3) се запазва при смените

$$(x, y, t) \mapsto (-x, y, t) \qquad \text{и} \qquad (x, y, t) \mapsto (x, -y, -t)\,,$$

то фазовият портрет е симетричен относно правите $x = 0$ и $y = 0$. Достатъчно е да го нарисуваме в първи квадрант и да го размножим на четири.

Първият квадрант на $\mathbb{R}^2$ съдържа областите A_+ и B_+. Нека точката $z_0 := z(0) \in A_+$ е от фазовата крива $z(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Когато $t \geq 0$ расте, то посоката на фазовата крива е надолу ($\dot{y} < 0$) и наляво ($\dot{x} < 0$). Пресичане с правата $x = 0$ е невъзможно, защото правата $x = 0$ се запълва от фазовите криви $(x{=}0, y > 1)$, $(x{=}0, y{=}1)$, $(x{=}0, -1 < y < 1)$, $(x = 0, y = -1)$ и $(x = 0, y < -1)$. Пресичане с хиперболата $y^2 = x^2 + 1$ е невъзможно, защото върху нея векторното поле V сочи точно наляво и фазовата крива $z(t)$ не би могла да я доближи откъм $y > \sqrt{x^2 + 1}$. Остава единствената възможност $z(t) \to (0, 1)$ при $t \to \infty$.

Ако $z_0 \in B_+$, то $x(t)$ намалява при $t \geq 0$ и t растящо. Функцията $y(t)$ расте до евентуалното си достигане до хиперболата $y^2 = x^2 + 1$. След това $z(t)$ преминава в областа A_+ и $z(t) \to (0, 1)$ при $t \to \infty$. Възможно е $y(t)$ да расте, но да не достигне до хиперболата. Но тогава отново $z(t) \to (0, 1)$ при $t \to \infty$.

Ако $z_0 \in B_+$, $t < 0$ и t намалява, то фазовата крива $z(t)$ се движи надолу и надясно. Тъй като $\dot{y} < 1 + x^2(0)$, то тази фазова крива достига за крайно време оста Ox и я пресича под прав ъгъл.

И така, всяка фазова крива имаща обща точка с областта B_+, започва от точка $x = \xi > 0$, $y = 0$, клони към $(0, 1)$ при $t \to \infty$ и към $(0, -1)$ при $t \to -\infty$. Ако ξ е достатъчно малко, то фазовата крива не пресича хиперболата $y^2 = x^2 + 1$.

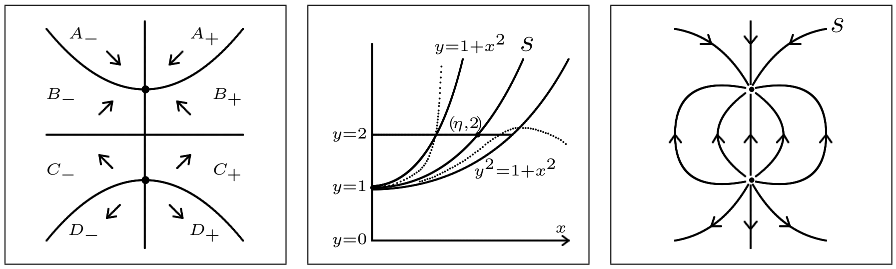
Съществуват фазови криви, лежащи изцяло в областа A_+, например кривата с начално условие $z_0 = (1, 2)$. Наистина, върху параболата $y = 1 + x^2$ векторното поле V е насочено към областа $y < 1 + x^2$:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \;=\; \frac{1 + x^2 - (1 + x^2)^2}{-x(1 + x^2)} \;=\; x \;<\; 2x \;=\; \frac{d}{dx}(1 + x^2)\ .$$

Следователно, при $t < 0$ фазовата крива $z(t)$ е над параболата, а при $t > 0$ е под параболата и над хиперболата.

За да бъде строго изследването на фазовия портрет, ще направим следното разсъждение. Прекарваме отсечката $I = \big\{0 \leq x \leq \sqrt{3},\ y = 2\big\}$. Всяка фазова крива, непресичаща оста Ox, пресича I. Ако фазовата крива, съдържаща точка $(x_0, 2) \in I$ не пресича оста Ox, то и всяка фазова крива, съдържаща точка $(x_1, 2)$ със $x_1 < x_0$ също не пресича Ox. Изводът е, че съществува η със свойството: фазовите криви съдържащи точка $(\xi, 2) \in I$, $\xi < \eta$, не пресичат оста Ox. Обратно, фазовите криви с точка $(\xi, 2) \in I$, $\xi > \eta$, пресичат оста Ox.

Какво е поведението на фазовата крива s, върху която лежи точката $(\eta, 2)$? Ако тази крива пресичаше оста Ox в точка $(x_\eta, 0)$, то фазовата крива минаваща през точката $(2x_\eta, 0)$ щеше да пресича отсечката I в точка, отляво на точката $(\eta, 2)$. Това е в противоречие с дефиницията на η. Следователно, въпросната сепаратриса s не пресича нито оста Ox, нито хиперболата $y^2 = 1 + x^2$. Сепаратрисата s отделя фазовите криви, пресичащи Ox, от фазовите криви, непресичащи Ox.



Това е ключовата сепаратриса, спомената преди пример 2.

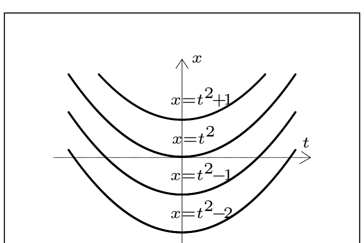
Векторните полета или, еквивалентно, фазовите портрети от примери 1 и 2 са топологически еквивалентни. Съответният хомеоморфизъм може да бъде построен като деформираме фазовия портрет от пример 1 до фазовия портрет от пример 2. Фазовата крива $y = 1, x > 0$ от пример 1 се изобразява във фазовата крива s от пример 2.

За неавтономните системи от диференциални уравнения

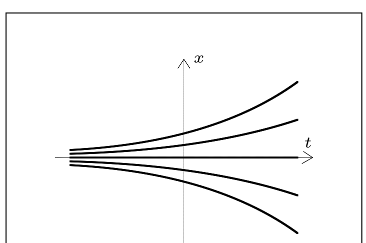
$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \tag{5.4}$$

рисуваме *интегрални портрети*. Всеки интегрален портрет се състоят от *интегрални криви*. Всяка интегрална крива представлява графика $x = x(t, C_1, \dots, C_n)$ на решение на (5.4) в *разширеното фазово пространство* с координати $(t, x_1, \dots, x_n)$.

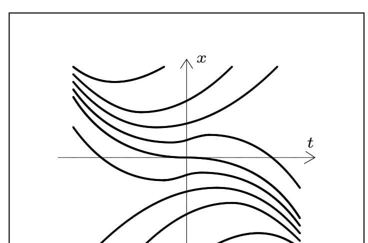
Да разгледаме три примера:



Интегрален портрет на уравнението $\dot{x} = 2t$



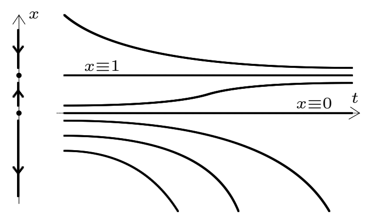
Интегрален портрет на уравнението $\dot{x} = x$



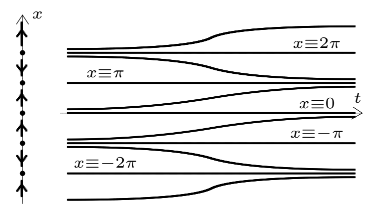
Интегрален портрет на уравнението $\dot{x} = x^2 - t^2$

Системата (5.4) е по–обща от системата 5.1 с това, че дясната ѝ част зависи от t. Ако все пак дясната част на (5.4) не зависи от t, то фазовите криви са проекциите на интегралните криви от разширеното фазово пространство $(t, x_1, \dots, x_n)$ върху $(x_1, \dots, x_n)$–равнината.

Пример:



Фазов и интегрален портрет на уравнението $\dot{x} = x - x^2$



Фазов и интегрален портрет на уравнението $\dot{x} = x \sin x$

5.2 Фазови портрети на линейни хомогенни системи в равнината

Причината да отделим в отделен параграф примерите на линейни системи в равнината е, че те са еталон в геометричната теория на диференциалните уравнения. От една страна те са изключително прости за изследване. От друга страна тяхното разбиране помага в изучаването на много по-общите фазови портрети, включително и на тези, които съдържат фазови криви, несрещащи се в линейните системи.

Общата линейна хомогенна система с постоянни коефициенти

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{array} \right. \qquad (a_{ij} \in \mathbb{R}) \ . \tag{5.5}$$

Целта ни е, в зависимост от a_{ij} да нарисуваме и да класифицираме съответните фазови портрети.

От теорията на линейните системи е ясно, че основната информация за фазовия портрет на (5.5) носят двете собствени числа λ_1 и λ_2, и по–общо – жордановата нормална форма

$$A \ = \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Нашата стратегия за изучаване на фазовите портрети е да опростим системата колкото може чрез линейна смяна на променливите. Последователно ще разгледаме няколко случая, но винаги в зависимост от собствените числа, които ще означим с λ_1 и λ_2. При всички случаи точката 0 е особена и представлява една фазова крива.

I. *Реални и различни собствени числа* λ_1 *и* λ_2 . В този случай матрицата A има два собствени вектора s_1 и s_2. Както знаем всички решения се задават по формулите $x(t) = c_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 s_2 e^{\lambda_2 t}$.

1) Двете собствени числа λ_1 и λ_2 са реални и отрицателни. За определеност ще предположим, че $\lambda_1 < \lambda_2$.

На собствения вектор s_j съответстват двете фазови криви $l'_j = \big\{ e^{\lambda_j t} s_j, \ t \in \mathbb{R} \big\}$ и $l''_j = \big\{ -e^{\lambda_j t} s_j, \ t \in \mathbb{R} \big\}$, разположени върху правата $l_j = \big\{ m s_j, \ m \in \mathbb{R} \big\}$. При $t \to \infty$

фазовите криви се стремят към точката 0 (всички, не само горните.) Ако продължим фазовите криви с 0, ще видим, че всички те, с изключение на двете, лежащи върху l_1, се допират до правата l_2. Това може да се установи например, като параметризираме всяка от тях при $c_2 \neq 0$ чрез $e^{-\lambda_2 t}x(t) = c_1 s_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2 s_2$, вместо с $x(t)$ и забележим, че $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \to 0$ при $t \to \infty$. От този анализ е ясно как да нарисуваме фазовите криви. Да не забравим да сложим стрелки върху тях, сочещи към началото.

2) Двете собствени числа λ_1 и λ_2 са реални и положителни. За определеност ще предположим, че $\lambda_1 < \lambda_2$. Анализът и крайният резултат са идентични с изключение на стрелките. Те са в обратната посока.

3) Двете собствени числа λ_1 и λ_2 са с различни знаци, например $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$. Отново върху всяка от правите $l_j = \big\{ m s_j,\ m \in \mathbb{R} \big\}$ има по две фазови криви – $l'_j = \big\{ e^{\lambda_j t} s_j,\ t \in \mathbb{R} \big\}$ и $l''_j = \big\{ -e^{\lambda_j t} s_j,\ t \in \mathbb{R} \big\}$. Сега, обаче стрелките върху l_1 сочат към нулата, а стрелките върху l_2 сочат безкрайността.

Останалите траектории се изучават по схемата в 1). Ако ги параметризираме с $e^{-\lambda_2 t}x(t) = c_1 s_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2 s_2$, виждаме, че те имат за асимптота правата l_2, когато $t \to \infty$. Можем да ги параметризираме и с $e^{-\lambda_1 t}x(t) = c_1 s_1 + c_2 s_2 e^{(-\lambda_1+\lambda_2)t}$. Тогава виждаме, че при $t \to -\infty$, асимптотата е l_1.

II. Двете собствени числа λ_j са комплексни.

то вместо да пресмятаме и без това комплексните вектори на матрицата A, трябва да определим *посоката на въртене на фазовите криви спрямо положението на равновесие* $(0,0)$. Това еднозначно се определя например от вектора

$$(\dot{x}, \dot{y})\Big|_{x=1, y=0} \; = \; (a_{11}, a_{21}) \; .$$

При $a_{21} > 0$, посоката на въртене на фазовите криви е обратна на часовниковата. При $a_{21} < 0$, посоката на въртене на фазовите криви е по часовника.

Ако $\lambda_1 = \lambda_2$ и имаме жорданова клетка, то съществува единствен собствен вектор. Освен този вектор, трябва да определим и посоката на въртене спрямо положението на равновесие $(0,0)$. Това става както в случая на комплексни собствени числа.

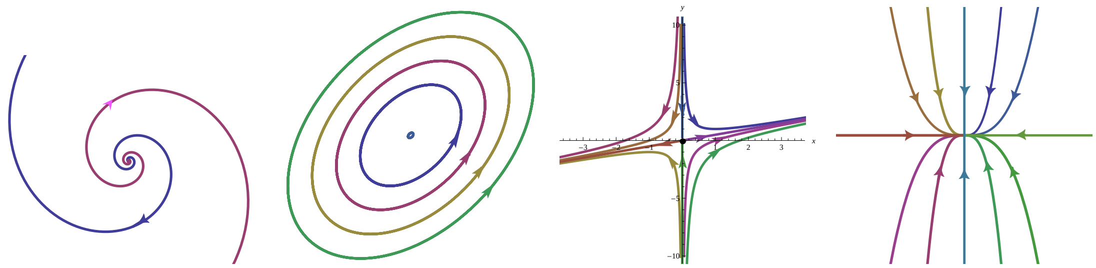
Ако $\lambda_1 = \lambda_2$, но нямаме жорданова клетка, то всеки вектор от $\mathbb{R}^2$ е собствен за матрицата A.

Възможни са следните типове фазови портрети, за всеки от които сме разгледали по един пример. Със S бележим матрицата на прехода към жордановия базис.

5.3 Производна по направление на векторно поле.

Преди всичко ще дадем точна дефиниция на понятието векторно поле. Нека е дадена системата

$$\dot{x} = v(x), \ \text{където}\, x \in U \subset \mathbb{R}^n. \tag{5.6}$$



Фигура 5.1: а) Фокус; б) Център; в) Седло; г) Възел

Да дефинираме диференциалния оператор L_v, съпоставящ на функцията $f(x)$ израза

$$\sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \tag{5.7}$$

в дясната страна на горната формула. Този оператор се нарича производна по направление на векторното поле $v(x)$ или производна на Ли . Ще използваме и следния израз, който носи повече информация:

$$L_v = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Една дефиниция на понятието векторно поле се дава с оператора L_v. За нашите цели тя е достатъчна. Все пак нека дадем и по-геометрична идея за понятието.

Да означим с $\psi(x,t)$ решението на системата (5.1) с начално условие $\psi(x,0) = x$. От геометричната интерпретация на диференциалните уравнения или от курса по анализ знаем, че тангенциалният вектор в точката x се дава с производната $\dot{\psi}(x,t)_{t=0} = v(x)$. Нека $f(x)$ е горната функция. Да диференцираме суперпозицията $f(\psi(x,t))$. Ще получим

$$\frac{d}{dt}f(\psi(x,t))_{|t=0} = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x),$$

като използваме, че функцията $\psi(x,t)$ е решение на дифенциалното уравнение. Това, което получихме се интерпретира така: производната на функцията $f(x)$, рестригирана върху кривата $\psi(x,t)$ е точно производната на функцията $f(x)$ по направление на векторното поле $v(x)$.

Най-важното свойство, което често е дефиниция на векторно поле, е формулата за поведение на векторното поле при смяна на променливите. Нека прецизираме последното понятие.

Дефиниция 5.3.1. *Нека $x = h(y)$ е изображение на областта V в областта U. Ще казваме, че h е дифеоморфизъм, ако*

1) h е взаимноеднозначно изображение на V върху U;

2) h е диференцируемо;

3) обратното изображение h^{-1} е също диференцируемо.

За нас смяна на променливите и дифеоморфизъм ще е едно и също нещо. Ще означаваме с $h_* v$ преобразуваното чрез $h(y)$ векторно поле.

Следната лема характеризира (Забележка 5.3.3) понятието векторно поле.

Лема 5.3.2. *При смяна на променливите векторното поле се трансформира по закона*

$$h_* v = (Dh)^{-1} v(h(y)).$$

Доказателство. Трябва да направим смяна на променливите $x = h(y)$ в израза за производна по направление $L_v f(x)$. Да означим с $F(y)$ функцията $f(h(y))$. Производните на $F(y)$ се дават с

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial h_k}{\partial y_j}$$

В израза $L_v f(x)$ правим смяна на променливите

$$L_v f(x)_{x=h(y)} = \sum_{j=1}^{n} v_j(h(y)) \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} v_j(h(y)) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial (h)_k^{-1}}{\partial x_j}.$$

Сменяме реда на сумиране в последния израз и получаваме

$$L_v f(x)_{x=h(y)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (h)_k^{-1}}{\partial x_j} v_j(h(y)).$$

Следователно

$$L_v f(x)_{|x=h(y)} = \sum_{k=1}^{n} \left[h_*^{-1} v\right]_k \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

□

Забележка 5.3.3. В по-старите книги можете да срещнете следната дефиниция за векторно поле. Ако векторната функция се преобразува по закона тя се нарича векторно поле. Тази, макар и неточна дефиниция има предимството, че директно посочва най-важното свойство. За да стане ясно, че не всеки "вектор"се преобразува по този закон можем да разгледаме следния пример. Нека l е крива в n-мерното пространство. Да разгледаме криволинейния интеграл

$$\int_l \sum_k^n v_k(x) dx_k.$$

Да направим смяна на променливите $x = h(y)$. Лесно се вижда, че в новите променливи интегралът се дава с формулата

$$\int_l \sum_k (h^* v)_k(y) dy_k,$$

където $(h^* v)_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial y_k} v_j(h(y))$

Това число се означава с $L_v f$ (L в чест на Софус Ли). По правилото за диференциране на сложна функция

$$L_v f = \frac{d}{dt} f(\varphi(t))_{|t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i.$$

Тук производните на f са пресметнати в точка x координатите x_i са в околност на тази точка, а v_i са компонентите на вектора в същите координати. Вижда се, че това число зависи от вектора v, но не и от кривата φ.

5.3.1 Първи интеграли.

Нека v е векторно поле в област $U \in \mathbb{R}^n$, а f е диференцируема функция.

Дефиниция 5.1. *Функцията f се нарича пръв интеграл на системата диференциални уравнения $\dot{x} = v(x)$ ако производната по направление на векторното поле $v(x)$ е тъждествено равна на нула - $L_v f \equiv 0$.*

Следващите свойства са еквивалентни и могат също да служат за дефиниция на понятието пръв интеграл.

1) функцията f е постоянна върху всяко решение $\varphi : I \to U$ на системата диференциални уравнения т.е. $f \circ \varphi$ е константа.

2) Всяка фазова крива лежи само върху едно множество на ниво на f (фиг. 2).

Пример 5.1. *Да разгледаме системата*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{array} \right.$$

Фазовото пространство е $\mathbb{R}^2$ *и решенията са* $x_1(t) = c_1 e^t, x_2(t) = c_2 e^t$. *Фазовият портрет е известен (фиг. 3). Нека* f *е пръв интеграл за горната система, в частност* f *е непрекъсната функция в цялата равнина. Тъй като* f *е постоянна върху всяка от правите от фазовия портрет, следва че* f *е константа в цялата равнина.*

Непостоянни първи интеграли се срещат рядко. В случаите, когато ги има, те дават съществена информация за решенията, а също така позволяват да се намали редът на системата.

Пример 5.3.4. Уравнения на Хамилтон.

Нека е зададена диференцируема функция $H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ на $2n$ променливи $p, q \in \mathbb{R}^n$, която не зависи явно от времето.

Дефиниция 5.2. *Системата диференциални уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

се нарича уравнения на Хамилтон.

В следващия параграф има повече детайли за този вид системи. Тук само ще кажем, че това са основните уравнения на механиката. Ще покажем, че H е пръв интеграл за уравненията на Хамилтон.

Лема 5.3.5. *Пълната енергия е пръв интеграл на хамилтоновата система.*

Доказателство.

$$L_v H = \frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0$$

т.е. уравненията на Хамилтон винаги имат пръв интеграл. □

5.4 Консервативни системи

В този параграф ще направим приложение на въведените досега геометрични понятия към един изключително важен клас от диференциални уравнения - уравненията на механиката. Тук ще разгледаме най-простия случай, когато само една частица се движи по фиксирана линия - окръжност, права. Значението на този специален случай се състои в това, че по него се моделира и изучаването на по-сложни движения - движения на много частици в пространства с повече измерения, например движение на планетите в тримерното пространство.

5.4.1 Понятия от механиката

Ще започнем с уравнението на Нютон. То изразява в математическа форма втория закон на Нютон (силата е равна на масата по ускорението) и следователно има вида

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\ , \qquad x = x(t)\,, \quad m = \text{константа}\,. \tag{5.8}$$

Тук функцията $F(x)$ има смисъл на сила, под въздействието на която се движи частицата, константата m е масата на частицата , $x(t)$ е координатата на движещата се частица, $\dot{x}$ – *скорост* на материалната точка, а $\ddot{x}$ е нейното ускорение. Независимата променлива t е *време*[2]. Функцията U(x) се нарича потенциална енергия (определена с точност до константа) или само потенциал.

За по-добро разбиране ще дефинираме още механични понятия. Функцията $T = \frac{\dot{x}^2}{2}$ се нарича кинетична енергия. Сумата на кинетичната и потенциалната енергия $E = T + U$ се нарича пълна енергия или дори само енергия.

Често заедно с уравнението (5.8) се разглежда еквивалентната му хамилтонова система:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{5.9}$$

Това е системата, чиито фазов портрет ще рисуваме. Основна роля в нашия анализ, както и в цялата механика и физика играе законът за запазване на енергията , който казва, че

Теорема 5.4.1. *Енергията е константа върху всяка траектория, т.е. тя е пръв интеграл.*

Proof. Да означим с V векторното поле $(x, -\dfrac{dU(x)}{dx})$. Ще пресметнем производната на енергията E по направление на векторното поле V. Имаме

$$L_V E = \frac{dE}{dx}\dot{x} + \frac{dE}{dy}\dot{y} = \frac{dU(x)}{dx}y - y\frac{dU(x)}{dx} = 0$$

□

Простото доказателство на Закона за запазване на енергията може да остави впечатление у читателя, че той е нещо маловажно. В действителност, най-напред твърдението е било емпиричен факт, след това е развит формализма на механиката и чак тогава доказателството е станало просто. Но законът е основа на механиката и по-общо на физиката.

[2] В класическата физика, времето t е специална променлива: тя не може да участва в други смени на променливите, освен в транслациите $t \mapsto t + t_0$

Нека изведем някои следствия от този закон. Най-напред ще отбележим, че той позволява да се понижи редът на (5.8) , а с това да се разделят променливите. Действително, формулата $T + U(x) = E_0$, където E_0 е фиксирана стойност на енергията ни дава

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E_0.$$

Следователно,

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - U(x))}.$$

Ще изразим решението $x(t)$ с начални условия x_0, t_0 като неявна функция на определен интеграл.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(x))}} = t - t_0.$$

5.4.2 Геометрична картина

Фазовият портрет на (5.9), който се състои от фазовите криви на (5.9), лесно се рисува като се има предвид, че последните лежат върху линиите на ниво на енергията

$$E \;=\; y^2/2 + U(x). \tag{5.10}$$

Но трябва да се внимава; върху някои линии на ниво могат да лежат по няколко фазови криви и това е стандартно явление.

За рисуване на фазовия портрет на (5.9) са изработени правила, най-важното: разполагат се една под друга две рисунки. Горната рисунка е графиката на потенциалната енергия $U = U(x)$ в равнината OxU. Под нея, в равнината Oxy, се разполага фазовият портрет на (5.9). Причината за това е, че графиката на потенциалната енергия, както ще видим, подсказва много нагледно детайлите на фазовия портрет. От нея лесно ще определяме лесно вида на фазовите криви, които ще представим като обединение на графики на функции.

Нека започнем с анализ на уравнението $E = y^2/2 + U(x)$ при фиксирана стойност на E. Ще предполагаме, че кривата $\Gamma_{E_0} = \{E_0 = y^2/2 + U(x)\}$ няма особени точки (да припомним, че особени точки x_0, y_0 са тези, за които производните на енергията са едновременно равни на нула, $E_x(x_0, y_0) = E_y(x_0, y_0) = 0$). Нека решим уравнението спрямо y там, където може, т.е. за тези стойности на x, за които $E_0 - U(x) \geq 0$. Описаното множество е обединение (евентуално безкрайно) на затворени интервали. Да разгледаме един такъв затворен интервал, чиито краища ще означим с α и β. Ще започнем със случая, когато този интервал е краен. Съответният клон на кривата Γ_E може да се зададе като обединение на графиките на две функции: $y^2 = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$, $\alpha \leq x \leq \beta$. Единствените общи точки на двете графики са техните краища. Следователно кривата Γ_E е затворена, а вече знаем, че е и гладка, т.е. *тя е съставена от една фазова крива.*

Задача. *Дайте строго доказателство на последното твърдение.*

Да разгледаме по-общия случай, когато кривата $\Gamma_E = \{E = y^2/2 + U(x)\}$ има особени точки. В този случай е по-добре да разгледаме множеството $E - U(x) > 0$. Да вземем отново интервал (α, β), като сега предположим, че някоя от точките $\alpha, 0$ или $\beta, 0$ е особена. Нека за определеност точката $\alpha, 0$ е особена, а точката $\beta, 0$ не е. В този случай точката $\alpha, 0$ е особена и за векторното поле $y, -U'(x)$. Но в точката $\beta, 0$ кривата не е особена и следователно можем да представим съответния клон на $Gamma_E$ като обединение на графиките на две функции: $y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$, $\alpha < x \leq \beta$.

Нека сега да видим какво става около особените точки на векторното поле, т.е. тези точки $x = \xi$, за които $U'(\xi) = 0$. На тях съответства положения на равновесие $(x, y) = (\xi, 0)$ във фазовата равнина Oxy.

Ако $(x, y) = (\xi, 0)$ е положение на равновесие и втората производна $U''(\xi) \leq 0$, то лесно се вижда, че всяка несвързана част от кривата

$$E \;=\; U(\xi) \;=\; y^2/2 + U(x)\,, \qquad x \neq \xi$$

е също фазова крива. Такава крива наричаме *сепаратриса* . При строго неравенство $U''(\xi) < 0$, от $(\xi, 0)$ излизат 4 клона на сепаратриси (можем да коренуваме израза $2(E - U(x))$ за стойности на x от двете страни на ξ). По-долу има доказателство на този факт.

Изразът $\sqrt{2(U(\xi) - U(x))}$ е добре дефиниран в околност на точката ξ. Действително, като използваме реда на Тейлор в ξ получаваме $U(x) = U(\xi) + (x - \xi)^2 U''(\xi)/2 + \ldots$. Следователно Γ_E се задава с $y = \pm\sqrt{-(x-\xi)^2 U''(\xi)/2 + \mathcal{O}(x^3)} = \pm(x - \xi)\sqrt{-U''(\xi)/2 + \mathcal{O}(x)}$.

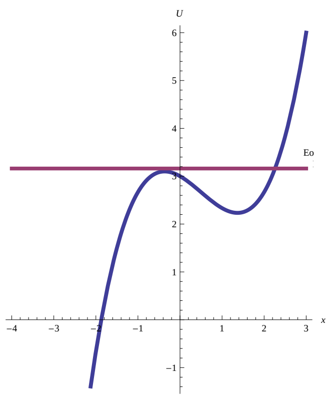
Възможно е на разстояние от $(\xi, 0)$ някои от тези клонове да се съединят.

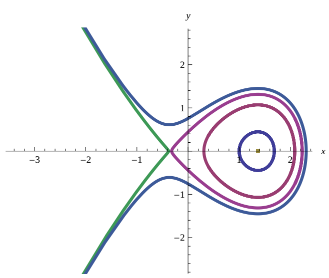
В специалния случай $U'(\xi) = U''(\xi) = 0, U'''(\xi) \neq 0$ функцията U има инфлексна точка. Тогава от $(\xi, 0)$ излизат два клона.

Следващата стъпка при рисуване на фазов портрет е глобализацията му.

Ясно е, че от графиката на потенциала $U(x)$ определяме графиките на кривите $y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$. Все пак е важно за глобалната картина да обърнем внимание на още един детайл. Да прекараме поизволна права $U = E_0$ в равнината на графиката на $U(x)$. Отсечките на правата, чиито краища лежат върху графиката $U(x)$, и под които са разположени части от графиката на $U(x)$, дефинират споменатите по-горе интервали. Това обяснение ни помага да определим кои от сепаратрисите се съединяват помежду си или със себе си.

На практика е най-добре да започнем от сепаратрисите, след което да нанесем останалите фазови криви. Фазовият портрет е симетричен спрямо правата $y = 0$, с изключение на факта, че фазовите криви в полуравнината $\dot{x} > 0$ имат посока надясно, а в полуравнината $\dot{x} < 0$ – посока наляво.





Забележка. Несепаратрисните фазови криви пресичат правата $y = 0$ под прав ъгъл. Сепаратрисите клонят към точките $(\xi, 0)$ с $U'(\xi) = 0$ под ъгъл

$$\phi \;=\; \pm \arctan \sqrt{-U''(\xi)}\,.$$

5.5 *Алгебра на Ли на векторните полета.

Ще започнем с установяването на факта, че операторът $L_a L_b - L_b L_a$ е диференциален оператор от първи ред, като a, b са гладки векторни полета - $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ и $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ в някакъв базис.

$$L_a L_b = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial b_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i})$$

Аналогично

$$L_b L_a = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i})$$

Тогава

$$L_a L_b - L_b L_a = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Да означим

$$c_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

Следователно съществува векторно поле $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$, зависещо от a и b, такова че

$$L_c = L_a L_b - L_b L_a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Дефиниция 5.3. *Векторното поле c се нарича комутатор на полетата a, b и се означава с $c = [a, b]$.*

Използвайки свойствата на производната на Ли L_v, лесно се проверяват следните свойства
1) $[a, b + \lambda c] = [a, b] + \lambda[a, c] \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ - линейност
2) $[a, b] = -[b, a]$ - антисиметричност
3) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ - тъждество на Якоби

По - общо

Дефиниция 5.4. *Линейно пространство, снабдено с операция, удовлетворяваща ствойства 1), 2), 3) се нарича алгебра на Ли.*

Следователно, линейното пространство на векторните полета с операцията комутиране е алгебра на Ли.

5.6 Теорема за изправяне на векторно поле

Тук ще разгледаме само автономния случай.

Нека $v \in C^r(U), U$ е област в $\mathbb{R}^n, r \geq 1$ и съответстващата система ДУ е

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U, \tag{5.11}$$

и a е неособена точка за полето ($v(a) \neq 0$).

Теорема 5.6.1. *Съществува околност U' на a и смяна на променливите $y = h(x), x \in U'$, такава че системата (5.11) приема вида $\dot{y} = e_n, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^t$.*

Доказателство. Нека $v^0 = v(a) = (v_1^0, v_2^0, \ldots, v_n^0), a = (a_1, \ldots, a_n)$. След евентуално преномериране считаме, че $v_n^0 \neq 0$. Да фиксираме хиперравнината (фиг. 1)

$$S := \{y_n = a_n\}, \qquad y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (y', y_n)$$

Да разгледаме задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dz}{dy_n} = v(z(y)) \\ z_{|y_n = a_n} = (y', a_n) \end{array} \right.$$

и да означим нейното решение с $g(y', y_n)$. Ще покажем, че в достатъчно малка околност на $a \quad h = g^{-1}$.

(1) $\underline{g \text{ е диференцируемо}}$ - това следва от Теоремата за диференцируема зависимост от начални данни и параметри.

(2) $\underline{g_* e_n = v}$

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

$$g_* e_n = \begin{pmatrix} g_{1y_1} & g_{1y_2} & \cdots & \cdots & g_{1y_n} \\ g_{2y_1} & g_{2y_2} & \cdots & \cdots & g_{2y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{ny_1} & g_{ny_2} & \cdots & \cdots & g_{ny_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1y_n} \\ g_{2y_n} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{ny_n} \end{pmatrix}$$

(3) g е дифеоморфизъм, откъдето $g_*^{-1} v = e_n$.

Достатъчно е да покажем, че g_* е изоморфизъм - откъдето по теоремата за обратната функция ще следва , че g^{-1} съществува и е диференцируемо.

По условие $g(y', a_n) = (y', a_n)$. Диференцирайки получаваме

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j}_{|_{(y', a_n)}} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n-1.$$

От друга страна $\frac{\partial g_i}{\partial y_n}_{|_{(y', a_n)}} = v_i(g(y', a_n)) = v_i(y', a_n)$.

Следователно $det g_{*|_a} = v_n(a) = v_n^0 \neq 0$. Откъдето следва, че g е дифеоморфизъм в някаква околност на a. Сега полагаме $h = g^{-1}$ в съответната околност и това завършва доказателството. □

Забележка 5.6.2. Както се вижда от доказателството ние използвахме решението за да изправим векторното поле. На практика знаем явното решение рядко и затова използваме например достатъчен брой първи интеграли както ще видим в примера по - долу.

Да разгледаме по - подробно въпроса за съществуването на локални първи интеграли. Както установихме по - рано непостоянни първи интеграли са рядкост. Обаче, локално, в околност на неособена точка, фазовите криви са устроени просто и непостоянни интеграли съществуват.

Теорема 5.6.3. *Съществува околност V на неособената точка x_0, че системата (5.11) във V има $n-1$ функционално независими първи интеграли $f_1, \ldots, f_{n-1}$ и всеки друг пръв интеграл на системата във V се изразява чрез тях.*

Доказателство. От Теорема Теорема 5.6.1 имаме, че в евентуално по - малка околност U' на x_0, съществува дифеоморфизъм $y = h(x), x \in U'$, изправящ векторното поле $h_* v(x) = e_n = (0, \ldots, 0, 1)^t$. Системата (5.11) приема вида $\dot{y} = e_n$, чието решение е $y_i(t) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad y_n(t) = t + C_n$, където $C_j, j = 1, \ldots, n$ са константи и следователно $y_1, \ldots, y_{n-1}$ са първи интеграли. Нека $G(y)$ пръв интеграл.

$$0 = \frac{d}{dt} G(y_1(t), \ldots, y_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_i} \dot{y}_i = \frac{\partial G}{\partial y_n}$$

Оттук следва, че G не зависи от y_n във V. Остава да отбележим, че свойството една функция да е пръв интеграл, а също така функционалната независимост не зависят от локалните координати.

Формално, нека $h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$. Да проверим, че $h_i, i = 1, \dots, n-1$ са първи интеграли за (5.11).

$$L_v h_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} v_k = (h_* v)_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Тъй като h е дифеоморфизъм те са функционално независими

$$rank(\frac{\partial h_i}{\partial x_k}) = n - 1.$$

Нека сега $F = F(x)$ е пръв интеграл за (5.11) в U'. Да означим $\tilde{F} = \tilde{F}(y) = F(h^{-1}(y))$. Но $\tilde{F} = \tilde{F}(y_1, \dots, y_{n-1})$. Следователно $F = F(h_1, \dots, h_{n-1})$, което и трябваше да покажем.

■

Пример 5.2. *Да се изправи векторното поле $v(x) = (x_1, 2x_2)^t$ в областта $x_1 > 0$.*

Векторното поле или еквивалентно $L_v = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ задава диференциалното уравнение

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \end{array} \right.$$

чието решение е $x_1 = C_1e^t, x_2 = C_2e^{2t}$. Изключвайки t оттук получаваме пръв интеграл $\frac{x_2}{x_1^2} = const$. Правим смяна $(x_1, x_2) \to (u, v)$ където $u = \frac{x_2}{x_1^2}, w = \ln x_1$. В областта $x_1 > 0$ тази смяна е добре дефинирана и изправя векторното поле

$$\left| \begin{array}{l} \dot{u} = 0 \\ \dot{w} = 1. \end{array} \right.$$

5.7 Устойчивост в смисъл на Ляпунов

При използването на диференциалните уравнения, описващи механични, химически или други процеси, началните условия са дефинирани само в някакви граници в рамките на точността на измерване. Въпреки това ние се надяваме, че намерените решения описват достатъчно добре интересуващите ни процеси. Например люлка, която е отклонена малко от равновесното си положение, но е оставена да се движи без външни въздействия, вечно остава близо до равновесното си положение. Такова поведение е модел за устойчивост.

В този параграф ще въведем математическите понятия, които формализират физическата представа за устойчивост. Ще започнем с постановка на задачата. Да разгледаме уравнението

$$\dot{x} = F(x, t), \;\; x \in U \subset \mathbb{R}^n, \;\; t \in \mathbb{R}$$

и $\phi(t)$ е негово фиксирано решение. Искаме да разберем поведението на близките до $\phi(t)$ решения. За това е удобно да направим смяна на променливите $y = x - \phi(t)$. В новите координати уравнението се записва като

$$\dot{y} = G(y,t), \ \ y \in W \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Сега вместо $\phi(t)$ ще изучаваме нулевото решение. Конкретно задачата на теорията на устойчивостта е да се установи дали решенията, започващи близо до нулата, вечно остават близко до нея.

В този кратък обзор по теория на устойчивостта ще предполагаме, че системата е автономна и че решението $\phi(t) \equiv a$, където a е положение на равновесие. Това е сериозно ограничение, но даже то има достатъчно приложения за да бъде оправдано. Но още по-сериозно оправдание е, че този прост случай е модел за много по-общи задачи, включително и за системи с безкрайно много променливи, които най-често се описват с частни диференциални уравнения, за устойчивост на нестационарни решения както и в случая на неавтономни системи.

И така нашата задача става следната:

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in V \subset \mathbb{R}^n. \tag{5.12}$$

Ще разглеждаме устойчивост само на стационарни решения $x = a$. Ще въведем понятието *устойчиво положение на равновесие* . Геометрично, това е положение на равновесие, за което всички решения, започващи произволно близко до него, остават вечно близко до него в някакъв смисъл. Разбира се тук трябва да прецизираме понятията за близост. Основната задача на теорията на устойчивостта е да можем да познаваме за дадена система и нейно положение на равновесие дали то е устойчиво.

Има различни понятия за устойчивост дори в рамките на горното интуитивно описание. Ето две от най-важните формални дефиниции.

Дефиниция 5.7.1. *Казваме, че положението на равновесие $x = a$ на системата ((5.12)) е устойчиво (или устойчиво по Ляпунов), ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, такова че ако $||x_0|| < \delta$, решението $\varphi(t)$ с начално условие $\varphi(0) = x_0$ се продължава за $t \geq 0$ и удовлетворява $||\varphi(t) - a|| < \epsilon$ за всяко $t > 0$. (фиг. 1)*

Дефиниция 5.5. *Казваме, че положението на равновесие $x = a$ на системата ((5.12)) е асимптотически устойчиво, ако то е устойчиво и $\lim_{t\to\infty} ||\varphi(t)|| = a$. (фиг. 2)*

От казаното се вижда, че положението на равновесие е неустойчиво ако за всяка околност на $x = a$ съществува решение с начално условие в тази околност, което я напуска за някое $t > 0$. (фиг. 3)

Оттук нататък ще предполагаме, че положението на равновесие на векторното поле е 0- $v(0) = 0$. На пръв поглед по-общия случай, когато положението на равновесие е точка $a \neq 0$ се свежда до горния чрез транслацията $y = x - a$.

Примери:

1. Положението на равновесие $z = 0$ на системата $\dot{z} = Az$, където $z \in \mathbb{R}^n$ и собствените числа на матрицата A имат отрицателни реални части, е асимптотически устойчиво. Това се установява лесно от вида на общото решение $z = e^{At} z_0$.

2. Положението на равновесие $x = 0$ на системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{array} \right.$$

е устойчиво, но не асимптотически устойчиво (фиг. 4) - това е център в нашата терминология.

3. Положението на равновесие $x = 0$ на системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{array} \right.$$

е неустойчиво (фиг. 5) - това е седло в нашата терминология.

Изследването на устойчивостта с помощта на дефинициите изисква познаването на общото решение. В горните примери системите са линейни и общото решение се намира лесно. За произволна система експлицитно решение се намира рядко, затова ни е нужно лесно проверимо достатъчно условие, в термините на векторното поле v(x), т.е. дясната страна на системата диференциални уравнения. Идеалният случай, към който се стремим с оглед директни приложения в практиката, е да напишем критерии (= достатъчни условия) в термините на краен брой коефициенти в развитието на v(x) около положението на равновесие. Тогава критериите ще са лесно достъпни за специалисти в други области, например инженери, а също лесно ще се поддават на компютърно обработка.

След тези бележки читателят преминаваме към основните резултати на теорията на устойчивостта.

До края на параграфа ще предполагаме, че векторното поле v диференцируемо колкото трябва. Нека развием компонентите му в околност на точката 0 по формулата на Тейлър:

$$\left| \begin{array}{l} v_1(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(0)x_1 + \ldots + \frac{\partial v_1}{\partial x_n}(0)x_n + \mathcal{O}(||x||^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n(x) = \frac{\partial v_n}{\partial x_1}(0)x_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}(0)x_n + \mathcal{O}(||x||^2) \end{array} \right.$$

Горните скаларни равенства можем да представим в следния по-компактен векторен запис

$$v(x) = Ax + g(x),$$

където $A = v_*(x) = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(0))_{i,j=1,n}$ и $g(x) = \mathcal{O}(||x||^2)$.

Това представяне ни подсказва, че близо до точката 0 големината на векторното поле се определя от Ax , а на $g(x)$ може да се гледа като на малка добавка. Планът ни по-долу е да формулираме критерий за устойчивост в термините на матрицата A и да покажем, че малката добавка не влияе на устойчивостта.

Нека разгледаме система, в която участват само линейните членове:

$$\dot{x} = Ax \tag{5.13}$$

Тя се нарича линеаризация (или първо приближение) на (5.12) в околност на $z = 0$.

Теорема 5.7.2. *(Ляпунов) Нека собствените числа на матрицата A са с отрицателни реални части. Тогава нулевото решение на системата* (5.12) *е асимптотически устойчиво.*

Доказателство. Доказателството е основано на намиране на естествена функция, която служи за мерене на разстоянието до положението на равновесие и която произлиза от линейната система (това е смисъла на термина "естественост"). Такава функция е конструирал Ляпунов и тя носи неговото име

Дефиниция 5.7.3. *(1) Казваме, че функцията $r(x)$, дефинирана в някаква околност W на точката 0, е функция на Ляпунов функция на Ляпунов за ((5.12)) ако*

а) $r(x) > 0, \quad x \in W/\{0\}, \quad r(0)) = 0$

б) $L_{v(x)}r(x) \leq -\gamma.r(x), \quad$ за някоя положителна константа γ

(2) Казваме, че функцията на Ляпунов $r(x)$ е строга строга функция на Ляпунов, ако Ляпунов, ако неравенството в б) е строго при $x \neq 0$.

Съществуването на функция на Ляпунов дава доказателството на теоремата. Основната идея е следната. Нека фиксираме една трактория, зададена с решение $\phi(t)$. Когато времето t расте, разстоянието на $\phi(t)$ до нулата намалява. Това следва от факта, че

$$\frac{d}{dt}r(\phi(t)) = L_v r(x) \leq 0.$$

Най-напред ще построим функция на Ляпунов за линейната система. За това има много начини. Ето един от тях. Дефинираме

$$r(x) = \int_0^\infty ||e^{As}x||^2 ds. \tag{5.14}$$

Лема 5.7.4. *Функцията* (5.14) *е строга функция на Ляпунов за линейната система* (5.13).

Доказателство. Ясно е, че $r(x)$ е положително дефинитна квадратична форма и $r(0) = 0$. Интегралът е сходящ поради това, че A има собствени числа с отрицателни реални части.

Наистина, произволен елемент на матрицата e^{As} има вида $f_{pq} = e^{\lambda_j s}P_k(s)$, където $P_k(s)$ е полином от степен k по - малка или равна на кратността на λ_j минус 1. Нека $\max_j Re\lambda_j < \alpha < 0$. Тогава

$$|\frac{f_{pq}}{e^{\alpha s}}| \leq |P_k(s)e^{(Re\lambda_j - \alpha)s}| \leq M_{pq}$$

т.е. $|f_{pq}| \leq e^{\alpha s} M_{pq}$, като тук сме означили с $M = (M_{pq})$ константна матрица. Следователно

$$r(x) = \int_0^\infty ||e^{As}x||^2 ds \leq \int_0^\infty ||Mx||^2 e^{2\alpha s} ds \leq ||Mx||^2 \leq \beta_2 ||z||^2 < \infty.$$

Тук използвахме, че за всяка положително дефинитна квадратична форма

$$\beta_1 ||x||^2 \leq r(z) \leq \beta_2 ||x||^2, \qquad \beta_1, \beta_2 > 0.$$

Остава да проверим 2). По дефиниция

$$L_{Ax} r(x) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty ||e^{As} e^{At} x||^2 ds = \frac{d}{dt} \int_0^\infty ||e^{A(s+t)} x||^2 ds$$

$$\overset{\sigma = t+s}{=} \frac{d}{dt} \int_t^\infty ||e^{A\sigma} x||^2 d\sigma = -||e^{At}x||^2 = -||x||^2 \leq -\frac{1}{\beta_2} r(x).$$

Ако означим с $\gamma := \frac{1}{\beta_2}$ ще получим нужния резултат.

След като сме построили функцията на Ляпунов за линейната система ще покажем, че същата функция може да се употреби и за пертурбираната (5.12). Това е често срещана идея, която използва факта, че допълнителните членове (в случая $g(x)$) са малки в сравнение с линейната част.

Лема 5.7.5. *Нека $||x|| < \tau$, и τ е достатъчно малко положително число. Тогава $L_{v(x)} r(x) \leq -\frac{\gamma}{2} r(x)$.*

Доказателство. От свойствата на производната на Ли знаем, че

$$L_{v(x)} r(x) = L_{Ax} r(x) + L_{v_2(x)} r(x)$$

Вече имаме $L_{Ax} r(x) \leq -\gamma r(x)$.

$$g(x) \leq k ||x||^2 \leq \frac{k}{\beta_1} r(x)$$

$$L_{g(x)} r(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} g_i(x) \leq c r^{3/2}(x)$$

за някакво положително c. Нека сега изберем $||x|| \leq \tau := \sqrt{\frac{b}{\beta_1}}$, така че $r(x) \leq b$, като b е такова, че $cb^{1/2} \leq \frac{\gamma}{2}$.

$$L_{v(x)} r(x) = L_{Ax} r(x) + L_{g(x)} r(x) \leq -\gamma r(x) + \frac{\gamma}{2} r(x) = -\frac{\gamma}{2} r(x).$$

□

Нека сега $\varphi(t)$ е решение на ((5.12)) с начални условия близки до началото и различни от нула. Полагаме $\varrho(t) := \ln r(\varphi(t))$.

$$\dot{\varrho}(t) = \frac{\frac{d}{dt} r(\varphi(t))}{r(\varphi(t))} = \frac{L_v r(\varphi(t))}{r(\varphi(t))} \leq -\frac{\gamma}{2} \frac{r(\varphi(t))}{r(\varphi(t))} = -\frac{\gamma}{2}.$$

След интегриране получаваме

$$\varrho(t) \le \varrho(0) - \frac{\gamma}{2}t \qquad \text{или} \qquad r(\varphi(t)) \le e^{\frac{\gamma}{2}t} r(\varphi(0)),$$

откъдето получаваме оценката

$$||\varphi(t)|| \le \frac{1}{\beta_2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} r(\varphi(0)). \tag{5.15}$$

От тази оценка се вижда, че $\varphi(t)$ намалява експоненциално и клони към нула при t клонящо към безкрайност.

Остава да се докаже, че решението се продължава за всяко $t \ge 0$. Избираме компакт

$$K := \{(x,t) \,|\, 0 \le t \le T, \quad r(z) \le b\}.$$

При $||\varphi(0)|| < \tau, r(\varphi(0)) \le b$ от оценката (5.15) следва, че когато t расте, нормата на решението намалява и следователно решението не може да излезе на страничните граници на компакта (фиг. 6). Тъй като T е произволно, решението се продължава неограничено. □

Теорема 5.7.6. *Нека матрицата A на линеаризираната система ((3.19)) има собствено число с положителна реална част. Тогава нулевото решение на системата ((5.12)) е неустойчиво.*

Доказателство. Нека имаме поне едно собствено число на матрицата A с положителна реална част. Пространството $\mathbb{R}^n$ може да се представи като директна сума на две инвариантни подпространства $\mathbb{R}^n = E_1 \bigoplus E_2$ като

$A_1 = A_{|E_1}$ има само собствени числа с положителни реални части

$A_2 = A_{|E_2}$ има само собствени числа с отрицателни или нулеви реални части.

Нека означим $z = (x, y)$, $x \in E_1$, $y \in E_2$ и нека $a > 0$ е такова число, че $Re\lambda_j > a > 0$ (λ_j са собствените числа на A_1). Върху E_1 има евклидова норма, такава че

$$(A_1 x, x) \ge a||x||^2, \quad x \in E_1. \tag{5.16}$$

Аналогично, върху E_2 има евклидова норма, такава че за всяко $b > 0$ е изпълнено

$$(A_2 y, y) < b||y||^2, \quad y \in E_2. \tag{5.17}$$

Нека считаме, че $0 < b < a$.

$$v(z) = (v_1(z), v_2(z)) = (A_1 x + F_1(x,y), A_2 y + F_2(x,y)),$$

като $F(z) = (F_1(z), f_2(z))$ са нелинейните членове. За произволно $\epsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такова, че ако $||z|| < \delta$ тук $(||z|| = (||x|| + ||y||)^{1/2})$

$$||F(z)|| \le \epsilon ||z||^2. \tag{5.18}$$

Дефинираме конуса $C =: \{(x,y) \in E_1 \bigoplus E_2 \,|\, ||x|| > ||y||\}$.

Лема 5.7.7. *Съществува $\delta > 0$ такова, че ако $\overline{U} = \{||z|| < \delta\}$, то за всяко $z = (x, y) \in C \bigcap \overline{U}$*

(а) $(x, v_1(x, y)) - (y, v_2(x, y)) > 0$ при $x \neq 0$,

(б) съществува $\mu > 0$, такова че $(v(z), z) \geq \mu ||z||^2$.

Доказателство. Да започнем с (б).

$$(v(z), z) = (A_1 x, x) + (A_2 y, y) + (F(z), z)$$

От (5.16), (5.17) и (5.18) следва

$$(v(z), z) \geq a||x||^2 - b||y||^2 - \epsilon||z||^2$$

В C имаме $||x|| > ||y||$ и $||x||^2 \geq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2) \geq \frac{1}{2}||z||^2$ откъдето

$$(v(z), z) \geq (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon)||z||^2$$

Избираме $\epsilon > 0$ и с това δ, така че $\mu = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon > 0$.

Коментар. Геометрично условието б) означава, че векторът $v(z), z \in C$ сочи навън от сферата с начало в O и минаваща през z (фиг. 8).

Да докажем сега (а).

$$(x, v_1(x, y)) - (y, v_2(x, y)) = (A_1 x, x) + (x, F_1(x, y)) - (A_2 y, y) - (y, F_2(x, y)) >$$

$$a||x||^2 - b||y||^2 + (x, F_1(x, y)) - (y, F_2(x, y)).$$

Но $|(x, F_1(x, y)) - (y, F_2(x, y))| \leq 2(z, F(z))$. Както по - горе в б)

$$a||x||^2 - b||y||^2 + (x, F_1(x, y)) - (y, F_2(x, y)) \geq (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\epsilon)||z||^2$$

Избираме $\epsilon > 0$ и с това δ, така че $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\epsilon > 0$, откъдето следва твърдението.

Забележка 5.7.8. Нека интерпретираме условие а). Да дефинираме функция

$$g : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}; \quad g(x, y) = \frac{1}{2}(||x||^2 - ||y||^2),$$

$$g \in C^1, \quad g^{-1}([0, \infty)) = C, \quad g^{-1}(0) = \partial C.$$

Нека $z = (x, y) \in \overline{U}$.

$$\frac{d}{dt} g(z(t)) = \frac{\partial g}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial g}{\partial x} v_1 + \frac{\partial g}{\partial y} v_2 = (x, v_1) - (y, v_2) > 0$$

за $z \in \partial C$ т.е. върху границата на C g расте и следователно няма решение с начално условие в C, което да напусне C преди да е напуснало $\overline{U}$.

Продължаваме с доказателството на Теоремата. Нека $z(t)$ е решение в $C\bigcap\overline{U}$.

$$(v(z),z) = (\dot{z},z) = \frac{1}{2}||z||^2 \geq^{\text{Л2(б)}} \mu||z||^2$$

$$\frac{\frac{d}{dt}||z||^2}{||z||^2} \geq 2\mu$$

Интегрирайки получаваме $\ln||z(t)||^2 \geq 2\mu t + \ln||z(0)||^2$ или

$$||z(t)|| \geq e^{\mu t}||z(0)||.$$

И така всяко решение с начално условие в $C\bigcap\overline{U}$ се отдалечава от началото . Ако решението не е дефинирано за всяко t, то се продължава поне до границите на компакта $C\bigcap\overline{U}$ и от споменатото по - горе напуска $\overline{U}$. Следователно $z=0$ е неустойчиво.

■

Забележка. Във връзка с доказаните по - горе Теореми се поставя следната задача (задача на Раут - Хурвиц) - по даден полином да се установи дали неговите корени лежат в лявата полуравнина. Разработени са няколко алгоритъма, които обикновенно се описват в курсовете по алгебра.

Случаят, когато линеаризираната система (3.19) има собствени числа върху имагинерната ос е сложен. Да разгледаме системите

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = y \pm x^3\\ \dot{y} = -x\end{array}\right. ,\quad \text{с линеаризация в околност на } (0,0) \quad \left|\begin{array}{l}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -x\end{array}\right.$$

За линеаризираната система равновесието $(0,0)$ е от тип център (със собствени числа $\pm i$), докато за нелинейната система имаме съответно неустойчив (устойчив) фокус. Това се проверява лесно като се премине например полярни координати. Следователно изследването на устойчивостта в случая когато собствените числа на линеаризираната система лежат върху имагинерната ос изисква разглеждането на нелинейните членове.

Да разгледаме един специален клас нелинейни системи, а именно консервативните $\ddot{x} = -gradU$, където $x \in V \subset \mathbb{R}^n, U \in C^2(V)$. Еквивалентно записваме

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -gradU\end{array}\right.$$

Нека $(x_0, 0)$ е положение на равновесие като $(x_0 : gradU(x_0) = 0)$ е критична точка за U. Това равновесие не може да бъде асимптотически устойчиво поради наличието на съотношение което се запазва с времето, а именно интеграла на енергията $E = \frac{y^2}{2} + U(x) = e = const.$

Теорема 5.1. *(Лагранж - Дирихле) Нека потенциалът $U \in C^2(V)$ има строг минимум в x_0. Тогава положението на равновесие $(x_0, 0)$ е устойчиво.*

Доказателство. Тъй като не е ясно предварително какъв е знака на константата e в интеграла $E = e$, го модифицираме по следния начин

$$\overline{E}(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x) - U(x_0) = \overline{e}$$

Очевидно $\overline{E}(x_0, 0) = 0$ и тъй като x_0 е строг минимум $\overline{E}(x,y) = \overline{e} > 0$ в някаква околност W на $(x_0, 0)$.

Да положим $z = (x,y), \quad z_0 = (x_0, 0)$. Нека $B_\epsilon(z_0) =: \{z \in W \quad | \quad ||z - z_0|| < \epsilon\}$ и $\alpha = \min_{z \in \partial B_\epsilon(z_0)} \overline{E}(z) > 0$.

Да означим с $W_1 =: \{z \in B_\epsilon(z_0) \quad | \quad \overline{E} < \alpha\}$. Тогава за решение $z(t, \overline{z})$ с начално условие $\overline{z} \in W_1$ е изпълнено $\overline{E}(z(t,\overline{z})) = \overline{E}(\overline{z}) < \alpha$. Следователно това решение не напуска $B_\epsilon(z_0)$ за $t \geq 0$ и $z_0 = (x_0, 0)$ е устойчиво. ∎

Пример 5.3. *Нека да изследваме в зависимост от $a \in \mathbb{R}$ устойчивостта на положенията на равновесие на системата*

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x + ay \end{array}\right.$$

Да намерим първо особените точки.

$$\left|\begin{array}{l} y = 0 \\ x^3 - x + ay = 0 \end{array}\right.$$

Лесно се вижда, че решенията на горната система са $(0,0), (\pm 1, 0)$. Линеаризираме в околност на $(\pm 1, 0)$. Да означим $X = x \mp 1, Y = y$. Линеаризираната система приема вида

$$\left|\begin{array}{l} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = 2X + aY \end{array}\right. , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}.$$

Независимо от знака на a едното собствено число има положителна реална част, следователно $(\pm 1, 0)$ е неустойчиво положение на равновесие за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Линеаризираме в околност на $(0,0)$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + ay \end{array}\right. , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

Характеристичният полином на матрицата A е $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ откъдето следва, че при $a > 0$ положението на равновесие $(0,0)$ е неустойчиво, при $a < 0$ положението *на равновесие* $(0,0)$ *е асимптотически устойчиво, а при при* $a = 0$ *собствените числа са с нулеви реални части и нищо не можем да кажем за устойчивостта на базата на теоремите на Ляпунов.*

За щастие при $a = 0$ *системата е консервативна*

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x \end{array}\right.$$

с потенциал $U = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$. *Веднага се вижда, че* $x = 0$ *е строг минимум за* U *и следователно по Теоремата на Лагранж - Дирихле положението на равновесие* $(0,0)$ *е устойчиво.*

5.8 Упражнения

1. Докажете, че множеството от всички първи интеграли за дадено векторно поле образува алгебра: сума и произведение на първи интеграли е пръв интеграл.

2. При какви k системата уравнения $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = kx_2$ има в равнината непостоянен пръв интеграл?

3. Има ли системата $\dot{x} = Ax$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ непостоянни непрекъснати първи интеграли в $\mathbb{R}^3$, ако

   а) 1 и i са собствени числа на A;

   б) 1 и -1 са собствени числа на A.

4. Да се изправят векторните полета

   а) $x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$ при $x > 0$;

   б) $\frac{\partial}{\partial x} + \sin x\frac{\partial}{\partial y}$;

   в) $x\frac{\partial}{\partial x} + (1 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}$ при $x^2 < 1$.

5. Нека $x(t)$ е решението на задачата на Коши

   $$\dot{x} = \frac{x^3 - x}{1 + e^{2x}},\ x(0) = 1/2.$$

   Намерете $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

6. Намерете особените точки на системите и изследвайте тяхната устойчивост.

   $$a)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = -2y \end{array}\right. \qquad b)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = y - x^2 + 2 \\ \dot{y} = 2y^2 - 2x^2 \end{array}\right.$$

   $$c)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = -4x - 2y + 4 \\ \dot{y} = xy \end{array}\right. \qquad d)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = tg(z - y) - 2x \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y \\ \dot{z} = -3y \end{array}\right.$$

7. Изследвайте устойчивостта на особената точка $(0, 0)$ за системите

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} & = -y \pm x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} & = x \pm y(x^2 + y^2) \end{array} \right. .$$

Упътване. Преминете в полярни координати.

8. В зависимост от реалния параметър a намерете особените точки на системите

$$\text{а)} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x + ay) \end{array} \right. , \qquad \text{б)} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - a(x^2 - 1)y - x^3 \end{array} \right. . \quad (a \geq 0)$$

и изследвайте тяхната устойчивост.

9. Покажете, че всички решения на системата

$$\dot{x} = \frac{y^m}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad \dot{y} = -\frac{x^m}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

при $m = 2$ са определени в интервала $(-\infty, \infty)$, но решението $x = 0$ не е устойчиво. Изследвайте устойчивостта на това решение на тази система при други естествени числа m.

10. Съставете фазовите портрети на консервативните системи със следните потенциали:

а) $U = x^3 \pm 3x$; б) $U = x^4 \pm 2x^2$; в) $U = x \sin x$; г) $U = (x - 1) \sin x$; д) $U = \cos x + x$;

Глава 6

ЧДУ от първи ред.

В предишната глава е изложено важното понятие пръв интеграл за система диференциални уравнения:

$$\dot{x} = a(x),\ \ x \in V \subset \mathbb{R}^n\ a(x) = (a_1, \ldots, a_n)$$

Ако означим с $u(x)$ първия интеграл, той удовлетворява следното уравнение в частни производни:

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{6.1}$$

което се нарича *хомогенно линейно частно диференциално уравнение от първи ред* . Тогава и споменахме, че намирането на пръв интеграл е трудна задача. В тази глава ще разгледаме уравнения от този тип и техните обобщения:

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u).$$

Последните се наричат *квазилинейни частни диференциални уравнения от първи ред* . Обърнете внимание, че в квазилинейните уравнения коефициентите a_j могат да зависят и от неизвстната функция.

Решаването на частните диференциални уравнения от първи ред се свежда до решаването на специални системи от обикновенни диференциални уравнения, наречени уравнения на характеристики. В частност, с уравненията, които ще разглеждаме са свързани инвариантно геометрични обекти.

По-долу е изложена подробно теорията на линейните ЧДУ от първи ред, а за квазилинейните и нелинейните уравнения е дадена само изчислителата страна, тъй като геометрията е по - сложна.

6.1 Линейни хомогенни уравнения

Дефиниция 6.1. *Линейното ЧДУ* (6.1) *от първи ред наричаме уравнение от вида*

където u е неизвестната функция, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, $a_i(x) \in C^1(U)$ т.е. векторното поле $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ е зададено и непрекъснато диференцируемо в областта U.

Уравнението (6.2) може да бъде записано във вида

$$L_a u = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{6.2}$$

Дефиниция 6.2. *Векторното поле a се нарича характеристично векторно поле за уравнението (6.2), а неговите фазови криви се наричат характеристики. Уравнението $\dot{x} = a(x)$ се нарича уравнение на характеристиките за ЧДУ* (6.2).

Характеристиките на уравнението $L_a u = 0$ са свързани с него инвариантно по отношение на дифеоморфизмите: ако един дифеоморфизъм привежда едно уравнение в друго, то той привежда характеристиките на първото уравнение в тези на полученото (това видяхме при изучаване на производната по направление на векторно поле). По същество, свързваме с уравнението геометричен обект - характеристика.

Въпросът за съществуване на решение на (6.2) се решава тривиално.

Твърдение 6.1. *Функцията u е решение на уравнението $L_a u = 0$ тогава и само тогава когато тя е пръв интеграл за уравнението на характеристиките.*

Доказателство. Това е дефиницията на пръв интеграл.

Въпреки очевидността си Твърдението е полезно, защото по - лесно е да се решава системат обикновенни диференциални уравнения на характеристиките отколкото първоначалното ЧДУ.

На практика постъпваме така. По дадено ЧДУ ((6.2)) записваме системата от характеристиките $\dot{x} = a(x)$. След това намираме особените точки т.е. решаваме системата уравнения $a(x) = 0$. Нека означим с F множеството особените точки - $F := \{x \,|\, a(x) = 0\}$. Всяка точка от множеството $\mathbb{R}^n \backslash F$ е неособена и следователно в някаква нейна околност съществуват $n-1$ независими първи интеграли $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ на системата от характеристики. Тогава в $\mathbb{R}^n \backslash F$ общото решение на (6.2) е $u = G(f_1, \ldots, f_{n-1})$, където G е произволна гладка функция на $n-1$ променливи.

Пример 6.1.1. $xu_x + yu_y + xyu_z = 0$

Уравненията на характеристиките са: $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = xy \end{array} \right.$

Множеството от особените точки на горната система е $F = \{(0, 0, z)\}$. За да решим уравнението в $\mathbb{R}^3 \backslash F$ са ни нужни два независими първи интеграли на системата от характеристики. За целта по - удобно е да представим тази система в т.н. симетричен вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$$

Първите два члена от пропорцията $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ дават следният пръв интеграл $\frac{y}{x} = C_1$. За да получим втория използваме свойството на пропорцията $\frac{ydx+xdy}{2xy} = \frac{dz}{xy}$ откъдето стигаме до $xy - 2z = C_2$. Двата интеграла са независими тъй като единия съдържа z, а другия - не. Следователно общото решение е

$$u = G(\frac{y}{x}, xy - 2z).$$

6.2 Задача на Коши

За единственост на решението ни трябват подходящи начални условия.

Дефиниция 6.3. *Задача на Коши за уравнението $L_a u = 0$ се нарича задача за определяне на функцията и по нейните значения върху хиперповърхнина γ в $\mathbb{R}^n$ или*

$$\left| \begin{array}{l} L_a u = 0 \\ u_{|\gamma} = \varphi(x) \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Тук γ се нарича начална хиперповърхнина, а $\varphi(x)$ - начална функция, зададена върху тази хиперповърхнина.

Задачата на Коши (6.3) не винаги има решение. По всяка характеристика значението на u е постоянно (u е пръв интеграл). Характеристиката може да пресича γ няколко пъти (фиг. 1). Ако значенията на началната функция φ в тези точки са различни, съответната задача на Коши няма решение в околост на тази характеристика.

Пример 6.1. *Да разгледаме следните задачи на Коши*

$$xu_x - yu_y = 0, \qquad a)\, u_{|_{\Gamma:y=1}} = x, \qquad b)\, u_{|_{\Gamma:y=0}} = \varphi(x).$$

Уравненията на характеристиките са $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$ с единствена особена точка $(0,0)$. Веднага се получават и самите характеристики $xy = C$, откъдето общото решение е $u = u(xy)$. В слечай a) $u_{|_{\Gamma:y=1}} = x$ имаме единствено решение $u = xy$ (фиг. 2). За случай b) имаме $u_{|_{\Gamma:y=0}} = u(0) = \varphi(x)$. Ясно е, че решение имаме тогва и само тогава, когато $\varphi(x) = const = u(0)$, а решенията са безкрайно много.

Пример 6.2. *Имаме следната задача на Коши*

$$yu_x - xu_y = 0, \qquad u_{|_{\Gamma:x^2+y^2=1}} = \varphi.$$

Уравненията на характеристиките са $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ с единствена особена точка $(0,0)$. Първият интеграл на тази система (т.е самата характеристика) е $x^2+y^2 = C$ и следователно общото решение е $u = u(x^2+y^2)$. В случая началната хиперповърхнина е върху характеристика. Тази задача на Коши има и то безкрайно много решения тогава и само тогава когато $\varphi = const - u = u(x^2+y^2)$, $u(1) = \varphi = const$.

Дефиниция 6.4. *Точката $x_0 \in \gamma$ от началната хиперповърхнина наричаме нехарактеристична точка, ако характеристиката през тази точка е трансферзална (недопирателна) към γ в тази точка т.е. $(a(x_0), grad\gamma) \neq 0$.*

Теорема 6.1. *Нека x_0 е нехарактеристична точка за началната хипирповърхнина. Тогава съществува околност на x_0, такава че задачата на Коши (6.3) има единствено решение в тази околност.*

Доказателство. Тъй като x_0 е нехарактеристична точка, то тя не може да е особена точка за векторното поле т.е. $a(x_0) \neq 0$. От Теоремата за изправяне на векторно поле съществува околност $U \ni x_0$ и дифеоморфизъм $y = f(x), f : U \to V$, който изправя векторното поле $f_* a = e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Нека γ се задава с уравнение $\gamma : \psi(x) = 0$. При дифеоморфизмът f образът на γ е $\Gamma : \psi(y) = 0$ и задачата на Коши приема

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \\ u_{|\Gamma:\psi(y)=0} = \tilde{\varphi}(y) \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Сега ще покажем, че в околност на $y_0 = f(x_0)$ е изпълнено $\frac{\partial\psi}{y_n} \neq 0$. Тъй като при дифеоморфизъм нехарактеристична точка отива в нехарактеристична, то y_0 е нехарактеристична точка за Γ. Тогава

$$(f_* a(y_0), grad\psi) = (e_n, grad\psi) = \frac{\partial\psi}{y_n}(y_0) \neq 0$$

а следователно това е изпълнено и в някаква околност. От теоремата за неявната функция в околност V_1 на y_0, където $\frac{\partial\psi}{y_n} \neq 0$ можем да представим $\Gamma : \psi(y) = 0$ във вида $\Gamma : y_n = \phi(y_1 \dots, y_{n-1})$.

Накрая дефинираме нов дифеоморфизъм $z = z(y)$ във V_1 с формулите

$$\left| \begin{array}{ll} z_i = y_i & i = 1, \dots, n-1 \\ z_n = y_n = \phi(y_1, \dots, y_{n-1}) & \end{array} \right.$$

Този дифеоморфизъм изобразява векторното поле в себе си $z_* e_n = e_n$ тъй като

$$z_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}$$

а $\Gamma : y_n = \phi(y_1, \dots, y_{n-1})$ отива в $z_n = 0$. Така достигнахме до следния вид на задачата на Коши (6.3)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z_n} = 0 \\ u_{|z_n=0} = \tilde{\varphi}(z_1, \dots, z_{n-1}) \end{array} \right. \tag{6.5}$$

Тази задача има решение $u(z_1, z_2, \dots, z_n) = \tilde{\varphi}(z_1, \dots, z_{n-1})$ и то е единствено. Наистина, нека u_1 и u_2 са решения на (6.5). Полагаме $\tilde{u} = u_1 - u_2$. Тази функция удовлетворява задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_n} = 0 \\ \tilde{u}_{|z_n=0} = 0, \end{array} \right.$$

чието решение е $\tilde{u} = 0$, което и трябваше да докажем. ■

Пример 6.3. *Да разгледаме следната задача на Коши*

$$\left| \begin{array}{l} xu_x + yu_y + xyu_z = 0 \\ u_{|z=0} = x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

В пример Пример 6.1.1 пресметнахме особените точки на системата от характеристики. Тук $\gamma : z = 0$ и $grad\gamma = (0, 0, 1)$. Условието за нехарактеристичност $(a, grad\gamma) \neq 0$ дава $xy \neq 0$ т.е. всички неособени точки са нехарактеристични и според Теорема 2 съществува единствено решение. Видяхме, че общото решение има вида $u = G(\frac{y}{x}, xy - 2z)$, където $\frac{y}{x} = C_1, 2z - xy = C_2$ са първите интеграли. Постъпваме така. В интегралите полагаме $z = 0$. Получените означаваме с вълни: $\frac{y}{x} = \tilde{C}_1, -xy = \tilde{C}_2$. Отттук изразяваме $x^2 = -\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}$ и $y^2 = -\tilde{C}_1\tilde{C}_2$ откъдето

$$u_{|z=0} = x^2 + y^2 = -\tilde{C}_1\tilde{C}_2 - \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}$$

Сега махаме вълните

$$u = -C_1C_2 - \frac{C_2}{C_1} = (xy - 2z)(\frac{x}{y} + yx)$$

и това е търсеното решение.

6.3 Линейни нехомогенни уравнения

Дефиниция 6.5. *Линейно нехомогенно уравнение от първи ред в някаква област $U \subset \mathbb{R}^n$ се нарича*

$$L_a u = b, \tag{6.6}$$

където u е неизвестната функция, a е зададено векторно поле в областта U и b - известна функция.

В координатен запис уравнението (6.6) приема вида

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x). \tag{6.7}$$

Общото решение на линейното нехомогенно уравнение е равно на сумата на общото решение на хомогенното уравние и кое да е частно решение на нехомагенното уравнение.

Задачата на Коши за нехомогенното уравнение се разглежда при същите предположения както тази за хомогенното уравнение

$$\left| \begin{array}{l} L_a u = b \\ u_{|\gamma} = \varphi(x) \end{array} \right. \tag{6.8}$$

Теорема 6.2. *В околност на нехарактеристична точка на началната хиперповърхнина, задачата на Коши (6.8) има единствено решение.*

Тук вместо да представим формалното доказателство предпочитаме да дадем идеята и съответната формула на решението.

Уравнението (6.6) означава, че производната на решението по направление на характеристиките е известна функция, а именно b. Следователно нарастването на решението за интервала време при движение по характеристиката е равно на интеграл от b по същия интервал (фиг. 3).

Нека $g(x,t)$ е решение на системата уравнения на характеристиките $\dot{x} = a(x)$ с начални условия $g(x,0) = x$, $x \in \gamma$ т.е. върху γ предполагаме $t = 0$. Тогава за решението имаме

$$u(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x,\tau))d\tau$$

Директна проверка показва, че това наистина е решение на (6.8).

Пример 6.4. *Решаваме следната задача на Коши*

$$xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2, \qquad u_{|\Gamma:y=1} = x^2.$$

Уравненията на характеристиките са $\dot{x} = x, \dot{y} = -2y$, чийто решения са $x = C_1e^t$, $y = C_2e^{-2t}$. Характеристиките през точка $(\xi, 1)\,(t = 0)$ са $x = \xi e^t$, $y = e^{-2t}$. Върху Γ няма характеристични точки. Производната на решението по направление на характеристиките е

$$\dot{u} = u_x\dot{x} + u_y\dot{y} = xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2$$

или $\dot{u} = \xi^2 e^{2t} + e^{-4t}$. *Интегрираме по* t *отчитайкеи условието, че* $u_{|t=0} = \xi^2$. *Тогава единственото решение на нехомогенното уравнение е*

$$u = \frac{\xi^2 e^{2t}}{2}(1 + e^{-2t}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$$

или

$$u = \frac{x^2}{2}(1 + y) + \frac{1}{4}(1 - y^2).$$

6.4 Квазилинейни уравненния

Дефиниция 6.6. *Уравнение от вида*

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u), \tag{6.9}$$

където u *е неизвестната функция,* $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ *наричаме квазилинейно.*

За разлика от линейното уравнение тук коефициентите $b(x, u)$ и $a(x, u) = (a_1(x, u), \ldots, a_n(x, u)$ могат да зависят от стойностите на неизвестната функция.

Пример 6.5. *Да разгледаме едномерна среда от невзаимодействащи си частици, движещи се в съпротивителна среда, със сила* $F = -\alpha v$, *където* v *е скоростта на частицата. Нека означим с* $x = \varphi(t)$ *закона на движение на частицата,* $v = v(t, x)$ *- нейната скорост, то* $\dot{\varphi} = v(t, \varphi(t))$, *а закона на Нютон има вида* $\ddot{\varphi} = F = -\alpha v$. *Диференцирайки предното получаваме*

$$v_t + v v_x = -\alpha v,$$

което е уравнение от вида (6.9) за полето от скорости на частиците.

Уравнението (6.9) може да се запише във вида

$$L_{a(x,u)} = b(x, u) \tag{6.10}$$

От разгледаният пример както и от знанията ни за линейните ЧДУ от първи ред е удобно да се премине от ЧДУ към система ОДУ. Аналогично на линейните уравнения с квазилинейните ЧДУ от първи ред свързваме инвариантно геометричен обект - характеристики, който ще дефинираме сега.

Уравнението (6.10) означава, че ако точка x излиза от x_0 и започвая да се движи в U със скорост $a(x_0, u_0)$, то значението на решението $u = u_0$ започва да се мени със скорост $b(x_0, u_0)$, т.е. векторът $A(x_0, u_0) = (a(x_0, u_0), b(x_0, u_0))$ е допирателен до решението (фиг. 1). Векторът $A(x_0, u_0)$ се нарича характеристичен вектор в точка (x_0, u_0) за (6.10). По - общо

Дефиниция 6.7. *Векторното поле* $A = (a_1(x,u), a_2(x,u), \dots, a_n(x,u), b(x,u))$ *или все едно* $A = \sum a_(x,u)\frac{\partial}{\partial x_k} + b(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$ *се нарича характеристично векторно поле за (6.10), а неговите фазови криви се наричат характеристики. Системата*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a(x,u) \\ \dot{u} = b(x,u) \end{array} \right. \tag{6.11}$$

се нарича система на характеристиките на ЧДУ (6.10).

Забележете, че характеристиките са в $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$.

Пример 6.6. *Да намерим характеристиките на ЧДУ от Пример 6* $u_t + uu_x = -\alpha u$.
Системата ОДУ за характеристиките има вида $\dot{t} = 1, \dot{x} = u, \dot{u} = -\alpha u$ *и както лесно се пресмятат* $u = u_0 e^{-\alpha t}$, $x = x_0 - \frac{u_0}{\alpha} e^{-\alpha t}$ *са нейните фазови криви т.е. характеристиките за ЧДУ.*

6.5 Интегриране на квазилинейни уравненния

Нека предположим, че A не се анулира. Уравненията на характеристиките записваме в симетрична форма

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b},$$

означаваща колинеарност на характеристичният вектор и допирателната към характеристиката.

Дефиниция 6.8. *Една повърхнина* Π *се нарича интегрална повърхнина за векторното поле* v*, неанулиращо се върху* Π*, ако във всяка нейна точка* x*, векторът* $v(x)$ *лежи в допирателната равнина към* Π *в* x.

Твърдение 6.2. *Една гладка повърхнина* Π *е интегрална повърхнина за гладко векторно поле (ненулиращо се върху* Π*) тогава и само тогава когато всяка интегрална крива, имаща с повърхнината* Π *една обща точка, изцяло се съдържа в* Π.

Доказателство. Тъй като полето v не се анулира, то можем да го изправим локално. Интегралните линии са прави и за тях твърдението е очевидно. ∎

Да припомним, че графиката на решението u на (6.10) е множеството $\Gamma_u := \{(x, u(x)\}$.

Теорема 6.3. *Функцията* $u : U \to \mathbb{R}$ *равнението е решение на квазилинейното уравнение (6.10) тогава и само тогава когато нейната графика* Γ_u *е интегрална повърхнина на характеристичното векторно поле* A *на (6.10).*

Доказателство. Уравнението (6.10) $L_a u = b$ или $\sum a_k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b$ записваме така

$$(A, N) = 0,$$

където $N = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, -1)$. Но N е нормалния вектор към Γ_u и следователно A лежи в допирателната равнина към Γ_u, т.е. самото уравнение показва, че във всяка точка Γ_u се допира до $A(n, u(x))$. ■

По такъв начин, намирането на решенията на квазилинейно уравнение се свежда до намирането на неговите характеристики. След като намерим характеристиките, от тях съставяме повърхнина, която е графика на функция – тази функция е решението на квазилинейното уравнение и всички решения се получават по този начин.

Пример 6.7. *Да намерим общото решение на*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Системата от характеристики е $\left|\begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y + x^2 \\ \dot{u} = u \end{array}\right.$
с единствена особена точка $F = (0, 0, 0)$. *В* $\mathbb{R}^3 \setminus F$ *записваме системата от характеристики в симитрична форма*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{du}{u}$$

Трябва да намерим два първи интеграла - това са характеристиките.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} \longleftrightarrow y' - \frac{y}{x} = x \longrightarrow y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right]$$

$$y = x(C_1 + x) \longrightarrow \frac{y - x^2}{x} = C_1.$$

Вторият интеграл намираме така

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \longrightarrow \frac{u}{x} = C_2.$$

Тези два интеграла са независими (единия не зависи от u*). Гладката повърхнина през тези характеристики се задава чрез* $F(\frac{u}{x}, \frac{y-x^2}{x}) = 0$, *където* F *е произволна гладка функция. Тъй като* u *участва само във единия интеграл, то предполагаме, че можем да разрешим спрямо* u

$$u = xf(\frac{y - x^2}{x}).$$

Тук f *е отново произволна функция. Тава е общото решение.*

Пример 6.8. *Да намерим общото решение на*

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u)\frac{\partial u}{\partial y} = yu.$$

Системата от характеристики е $\left|\begin{array}{l}\dot{x} = xy\\ \dot{y} = x - 2u\\ \dot{u} = yu\end{array}\right.$

Особените точки са $F = \{(0, y, 0), (y = 0, x = 2u)\}$. *В* $\mathbb{R}^3 \setminus F$ *записваме системата от характеристики в симетрична форма*

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2u} = \frac{du}{uy}$$

От $\frac{dx}{xy} = \frac{du}{uy}$ *намираме единия интеграл –* $\frac{u}{x} = C_1$. *Използвайки правилото на пропорциите*

$$\frac{d(x - 2u)}{y(x - 2u)} = \frac{dy}{x - 2u} \longleftrightarrow d(x - 2u) = ydy$$

откъдето $y^2 + 4u - 2x = C_2$ *е другият пръв интеграл.*

Общото решение е $F(\frac{u}{x}, y^2 + 4u - 2x) = 0$.

Задачата на Коши за квазилинейно уравнение се поставя аналогично на линейната. Подробности могат да се видят в .

6.6 Нелинейни уравнения

Общото (нелинейно) частно диференциално уравнение от първи ред се задава чрез $F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0$, където $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x \in U \subset \mathbb{R}^n, u = u(x)$ е неизвестната функция и $\frac{\partial u}{\partial x} = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$. Често диференциалното уравнение се означава с $F(x, u, p) =)$, където $p = (p_1, \ldots, p_n) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, като се предполага, че $F_p \neq 0$ за да бъде уравнението диференциално.

Както линейното и квазилинейното уравнения и нелинейното уравнение се интегрира с помощта на характеристики.

Дефиниция 6.9. *Характеристики на уравнението* $F(x, u, p) = 0$ *се наричат фазовите криви на системата*

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{u} = pF_p \tag{6.12}$$

Мотивации и обосновки могат да бъдат намерени в цитираните книги на Арнолд.

Веднага се вижда, че функцията F е пръв интеграл за уравненията на характеристиките. Наистина

$$\dot{F} = F_x\dot{x} + F_u\dot{u} + F_p\dot{p} = F_xF_p + F_upF_p - F_p(F_x - pF_p) = 0.$$

Пример 6.9. *Да намерим характеристиките на уравнението*

$$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

Означаваме $p_1 = u_x, p_2 = u_y$ *след което уравнението приема вида* $p_1^2 + p_2^2 = 1$. *Уравненията на характеристиките са*

$$\dot{x} = 2p_1, \quad \dot{y} = 2p_2, \quad \dot{p_1} = 0, \quad \dot{p_2} = 0, \quad \dot{u} = p_1 2p_1 + p_2 2p_2$$

Тази система има решение

$$p_1 = a, \quad , p_2 = \sqrt{1-a^2}, \quad x = 2at + x_0, \quad y = 2\sqrt{1-a^2}t + y_0, \quad u = 2t + u_0.$$

Изключвайки t*получаваме характеристиките*

$$u = ax + \sqrt{1-a^2}y + u_0,$$

където u_0 *и* a *са константи.*

Всъщност това е и общото решение.

Уравнението от примера е частен случай на т.н. уравнения на Хамилтон - Якоби

$$F(x, u_x) := H(x, p) = 0.$$

Веднага се забелязва, че проекциите на характеристиките върху (x, p) са точно фазовите криви на уравненията на Хамилтон $\dot{x} = H_p, \dot{p} = -H_x$, които дефинирахме по - рано.

Уравнението от последния пример, разгледано в $\mathbb{R}^n$

$$(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 + \ldots + (\frac{\partial u}{\partial x_n})^2 = 1$$

се нарича уравнение на ейконала и е важно за геометричната оптика. За повече подробности по взаимно обогатяващата се връзка между хамилтоновите системи на класическата механика и геометричната оптика вижте [?] .

6.7 Упражнения

1. Намерете базис от първи интеграли в посочената област G и в околност на неособена точка на характеристичното векторно поле за следните уравнения (с $\mathbb{F}$ е означено множеството на особените точки):

   а) $y\partial_x u + x\partial_y u - (x+y)\partial_z = 0, \quad G = \mathbb{R}^3/\mathbb{F},$

   б) $(y-2z)\partial_x u + (3z-x)\partial_y u - (2x-3y)\partial_z = 0, \quad G = \mathbb{R}^3/\mathbb{F};$

   в) $yz\partial_x u - 2xz\partial_y u - 2xy\partial_z = 0, \quad G = \mathbb{R}^3/\mathbb{F};$

г) $x\partial_x u + y\partial_y u + (x^2+y^2)\partial_z = 0, \quad G = \{y > 0\}, \quad G = \{x < 0\};$

д) $xz\partial_x u + 2xy\partial_y u - (2x+z)z\partial_z = 0, \quad G = \mathbb{R}^3/\mathbb{F};$

е) $xz\partial_x u - yz\partial_y u + (y^2 - x)z\partial_z = 0, \quad G = (\mathbb{R}^3/\mathbb{F})\bigcap\{x > 0\}.$

Отговори: а) $F_1 = x+y+z$, $F_2 = x^2-y^2$; б) $F_1 = 3x+2y+z$, $F_2 = x^2+y^2+z^2$; в) $F_1 = 2x^2+y^2$, $F_2 = 2x^2+z^2$; г) $F_1 = x^2+y^2-2z$, $F_2 = \frac{x}{y}$; д) $F_1 = x^2+xz$, $F_2 = xyz$; е) $F_1 = xy$, $F_2 = 2x+y^2+z^2$;

2. Намерете общите решения на линейните ЧДУ от първи ред

   а) $xzu_x - yzu_y + (y^2 2 - x)u_z = 0;$

   б) $u_x + xzu_y - xyu_z = 0.$

3. Намерете общите решения на линейните нехомогенни ЧДУ от първи ред

   а) $yu_x + xu_y = x - y;$

   б) $2xu_x + (y-x)u_y = x^2.$

   Решение а) За да намерим общото решение на нехомогенното уравнение ни трябва общото решение на хомогенното уравнение и кое да е частно решение на нехомогенното. Директно се проверява, че $u_1 = y-x$ е едно частно решение. Остава да решим хомогенното уравнение:

$$yu_x + xu_y = 0.$$

   Системата за характеристиките е $\dot{x} = y; \dot{y} = x$. Единствената особена точка е $F = \{(0;0)\}$. В $\mathbb{R}^2/F$ имаме следния пръв интеграл $x^2 - y^2 = C$. Следователно общото решение на хомогенното уравнение е $u_h = f(x^2 - y^2)$ откъдето получаваме общото решение на нехомогенното уравнение във вида $u = u1 + uh$.

   Отговор б) $u = u_0 + f(\frac{yp+x}{x})$; $u_0 = x^2/4$.

4. Намерете общите решения на квазилинейните ЧДУ от първи ред а) $(z-y)z_x + (x-z)z_y = y - x;$

   б) $(x^2 - y2)z_x + xyz_y - zxy = 0:$

5. Намерете общите решения на нелинейните ЧДУ от първи ред

   а) $u = u_x u_y;$

   б) $u_x u_y = \mu xy; \mu = const.$

Глава 7

Исторически бележки

7.1 Глава I

Първите диференциални уравнения се появяват вероятно през 17 век, още преди Нютон. Във всеки случай са известни работи на П. Ферма, където се разглеждат специфични диференциални уравнения. Исак Нютон обаче е ученият , който осъзнава важността им за математиката, физиката, астрономията и по-общо за цялото естествознание. В основополагащия си труд Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687 г.) Нютон въвежда своите знаменити закони, вторият от които гласи "Силата е равна на масата по ускорението". Записан на математически език законът е векторно диференциално уравнение от втори ред:

$$\ddot{x} = F(x)$$

Последното съдържа като специален случай диференциалното уравнение за движението на планета около слънцето. От него Нютон извежда с математически средства законите на Кеплер. Йоханес Кеплер от своя страна ги е формулирал преди това на базата на 20 годишните наблюдения на астронома Тихо Брахе.

Главният способ за решаване на диференциални уравнения за Нютон е бил търсенето на решенията във вид на степенни редове. Именно превръщането на математическия анализ и по-конкретно диференциалните уравнения в главен инструмент на физиката е основната заслуга на Нютон. Счита се, че за първи път терминът "диференциално уравнение" е употребен от холандския математик и физик Християн Хюйгенс през 1693 г.

Самото създаване на анализа само от Нютон или от Лайбниц е силно преувеличено. Анализът е създаван много години и даже Пиер Ферма петдесет години преди тях си е служил добре с някои негови части. Но в доста завършен вид, включително основната теорема на анализа - "теоремата на Лайбниц-Нютон", даваща връзка между определени интеграли и производни, е систематизиран от учителя на Нютон Исак Бароу

Всъщност и Нютон не се счита за създател на теорията. През 1675 година Лайбниц е публикувал труд, в който се разглеждат прости диференциални уравнения, без връзка с физиката. Особено големи заслуги имат братята Бернули и Ойлер, които вече обвързват геометрични и физически задачи (макар и не от мащаба на Нютоновите) с диференциалното смятане и диференциалните уравнения. Особена популярност имат задачите за изохроната и за брахистохроната. Изохроната е крива, по която тежка (= с ненулева маса) точка се спуска без триене под действието на постоянно привличане и времето на спускане не зависи от началото на спускането. Брахистохроната е крива между две фиксирани точки, по която тежка точка се спуска пак без триене под действието на постоянно привличане. Названието на кривите (от гръцки произход) приблизително отговаря на дадените описания. Яков Бернули съставя диференциално уравнение за изохроната във вид на равенство между два диференциала през 1690 г. За първи път в тази статия на Яков Бернули се употребява понятието "интеграл" за решенията. Появява се названието "интегрално смятане" По-късно, през 1696 г., малкият му брат Йохан поставя задачата за брахистохроната. Няколко независими решения дават Лайбниц, Йохан и Яков Бернули и Ойлер. Всъщност двете задачи макар и физически различни, са математически еквивалентни, т.е. решенията на едната се изразяват чрез решенията на другото.

Тези задачи са начало на вариационното смятане, което има изключителна роля, както в класическата механика, така и в квантовата физика. Във всеки случай след работите на Ойлер и Лагранж вариационните задачи се свеждат до най-важните класове от системи диференциални уравнения, описващи физически проблеми - уравненията на Ойлер-Лагранж.

Много от сведенията от този период, особено по отношение на приоритет, трябва да се приемат с резерви. Част от резултатите са публикувани в частни писма между учените. По тази причина са били непълни. Освен това са откривани почти едновременно от няколко учени.

7.2 Глава II

В намирането на важни класове уравнения, които могат да се решат явно, голям принос имат братята Яков и Йохан Бернули. Макар че са писали на Лайбниц през 1687 г. с молба да ги въведе в "мистериите на инфинитезимално малките" (т.е. диференциалното смятане) всъщност те са самоуки. Лайбниц, който е и дипломат, пътува много и получава писмото след няколко години. През 1692 г. Яков Бернули открива как се решават хомогенните уравнения, а през 1695 при решаването на задачата за брахистохроната открива метод за решаването на уравнението, наречено на негово име. Методът на разделяне на променливите е открит в неявна форма от Лайбниц, а в явна е намерен от Йохан Бернули, който дава и названието.

Нютон също има принос в методите за решаване на конкретни уравнения. На него принадлежи решаването на конкретни линейни уравнения. Йохан Бернули е открил идеята за интегриращ множител и я е приложил успешно към решаването на конкретни линейни уравнения от по-висок ред.

Якопо Рикати е граф от Венеция. Неговите постижения се ограничават с уравнението, което носи неговото име. Но приживе е имал голяма известност. Вероятно графската титла е тежала повече от научните постижения, което все още се запазило в някои страни. Например, императорът на Русия Петър I го е поканил за президент на Петербургската Академия. Също е канен във Виена за императорски съветник. Тези и други постове Рикати отказал и предпочитал да работи у дома си. Но Сенатът на Венеция го е ползвал като съветник. Много години по-късно става ясно, че уравнението на Рикати с рационални коефициенти играе централна роля в теорията на функциите на комплексна променлива (Поанкаре).

Алексис Клеро извежда своето уравнение през 1734 г. с помощта на геометрични съображения. Самият той има далече по-големи постижения и навремето си е считан за дете-чудо. На 12 години изнася доклад пред Френската Академия, на 18 години става неин член. Най-важните му работи са свързани с небесна механика и хидродинамика.

Общо взето в началния период на диференциалните уравнения математиците са откривали и преоткривали методи, голяма част от които са изложени във втора глава. Но не са имали общ подход и не са оформили големи проблеми, които да доведат до прогрес.

7.3 Глава III. Основни теореми

Още Ойлер намира методи за числено пресмятане на решенията с голяма точност. Всъщност това е теорема за съществуване, тъй като приближенията са сходящи (виж Глава 2). С подходяща модификация това е първото доказателство на основните теореми.

През 1842 г. Коши доказва първата теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за специалния, (но изключително важен) случай на диференциално уравнение с аналитична дясна част. Общата теорема, както е формулирана в този курс, дължим на Емил Пикар и Ернст Линдельоф (1894 г.). По-обща теорема за съществуване, но без единственост, е доказана от Пеано през 1890г. Нейната стойност обаче не е така голяма, каквато е на теоремата на Пикар-Линдельоф.

7.4 Глава IV. Линейни уравнения

Теорията на линейните диференциални уравненияя е първата обща теория. За нея има особено голям принос отново Ойлер, който е извел формули за решенията линейни диференциални уравнения от по-висок ред, включително и в случая на кратни корени. Понятието характеристично уравнение е въведено от Гаспар Монж и Коши. Макар теорията на системите с постоянни коефициенти да е била практически известна на Коши, модерното изложение става възможно след създаването на линейната алгебра, която от своя страна е инспирирана сред другото и от тази задача. Окончателната схема става възможна след създаването на жордановата нормална форма.

Понятието експонента на матрица се дължи на Софус Ли и е в основата на съвременната теория на групите и алгебрите на Ли.

7.5 Глава V. Геометрична теория

Геометричната теория се свързва преди всичко с имената на Понкаре и Ляпунов. Поанкаре е написал серия мемоари под общото название "Върху криви, дефинирани чрез диференциални уравнения". Там е въвел всички понятия, позволяващи да се построи фазовият портрет на системи. По същество това са първите стъпки в изучаването на нелинейните уравнения.

Работите на Поанкаре в този цикъл, както и в почти всички други области, са били силно мотивирани от изследванията му в небесната механика, макар в него да не се правят приложения. Това става в знаменитото му съчинение "Нови методи в небесната механика"и в няколко предхождащи го статии. Там, по-специално можем да видим теорията на устойчивостта във варианти, далече надхвърлящи нашия курс. По-специално, се изучава устойчивост на планетните орбити в различни ситуации.

Теорията на устойчивостта, така както е изложена в този учебник, произлиза от Ляпунов. Нещо повече, това е и възприетият начин за излагане навсякъде, с изключение на детайли. Ляпунов също е бил мотивиран от механиката. Неговото изложение е в много отношения образцово. За разлика от него изложението на Поанкаре не винаги е с необходимата строгост. Впрочем силата на Поанкаре е на друго място - мащабен проект с много далечни връзки в много други области на знанието. Тъкмо неговите изследвания са повлияли най-много на съвременната математика и физика и по-специално на диференциалните уравнения.

За продължение на темата, виж Други направления.

7.6 Глава VI. ЧДУ от I ред

ЧДУ от първи ред се появяват в работите на Лагранж през 1770 г. и голяма част от теорията е развита от него, макар че и по-рано други автори, напр. Клеро (1739 г.), Даламбер (1744 г.), са разглеждали важни уравнения. Методът на характеристиките произлиза от Коши (1819 г.). Особено голям принос има и Г. Монж за нелинейните уравнения. Самите ЧДУ от първи ред имат огромна приложения. Например в механиката има теория на Хамилтън-Якоби, която е от особена важност при намиране на първи интеграли. Същата теория има приложения и ЧДУ от по-висок ред за характеристики на последните уравнения.

7.7 Други направления

В днешно време диференциалните уравнения са основен инструмент в цялата математика, физиката, химията, в някои дялове на биологията, а също и в математическата икономика. Не е възможно накратко да се направи анализ на всички раздели, толкова повече, че няма рязка граница между една област и друга, между теория и приложения. Затова тук ще спомена само някои от активно разработваните раздели сега.

7.7.1 Аналитична теория

Тази тема, за жалост не е засегната в настоящия учебник. Всъщност в уводни курсове това се прави много рядко. Теорията се занимава с дифернциални уравнения, при които не само функциите приемат комплексни стойности, но, което наисти важно, аргументите се менят в комплексната област. Тази теория също е създадена преимно от Поанкаре. Важни приноси имат Пенлеве, баща и син Л. и Р. Фукс, Шлезингер и др. Най-важната част от теорията се изучават решения на такива уравнения близо до полюси на коефициентите на уравненията. Особено важни са уравнения, които са инвариантни относно някаква група. Те практически съдържат цялата теория на римановите повърхнини (в други термини - на многозначните комплексни функции).

Едно от най-важните разклонения на аналитичната теория е диференциалната теория на Галоа. Аналогично на класическата теория на Галоа, аналитичнаият вариант изучва кога класове от диференциални уравнения има решения в квадратури.

Към този този вид изследвания принадлежи и теорията на автоморфните функции, създадена главно от Поанкаре и пронизваща огромна част от съвременните изследвания в математиката и физиката, например теория на числата, теория на представяния на групи, квантовата физика и др.

Една от най-активно разработваните области в математическата физика в момента е тоерията на солитоните. И в нея аналитичната теория играе решаваща роля - например, при изучаване на семейства от уравнения, които са инвариантни относно една и съща група от трансформации. Такива семейства се наричат изомонодромни деформации.

7.7.2 Качествена теория на диференциалните уравнения

Построена е теория, представляваща далече отиващо обобщение в многомерния нелинеен случай на описаните стандартни особени точки - седла, възли, фокуси. Теорията обхваща изучаване на аналогично поведение на траекториите, даже около периодични орбити и др. многообразия.

7.7.3 16-и проблем на Хилберт

През 1900 г. един от най-влиятелните математици на човечеството - Давид Хилберт, формулира списък от проблеми, които, по негово мнение, чието решаване е от изключителна важност за науката (не само за математиката). Тук не е място да обсъждаме целия списък от 23 проблема. Ще се спрем само на един и то само в една от неговите две части. Става въпрос за оценка на броя на изолираните периодични решения (гранични цикли, по терминологията на Поанкаре) на системи уравнения за две независими функции с полиномиална дясна част:

$$\dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2) \tag{7.1}$$

$$\dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2), \tag{7.2}$$

където $P_1(x_1, x_2), P_(x_1, x_2)$ са полиноми. Естествено, когато говорим за обекти, дефинирани чрез полиноми, трябва да очкваме, че търсените решения са краен брой. Втората част на 16-ия проблем на Хилберт се формулира така:

Да се оцени отгоре броят на изолираните периодични решения на (7.2) *само чрез степента на полиномите P_1, P_2.* С други думи ние не се интересуваме от коефициентите на полиномите, а само от технитестепени.

За да продължим е добре да се каже, че такава оценка липсва дори в първия нетривиален случай, когато полиномите P_1, P_2 са от втора степен. Нещо повече, ние не притежаваме даже доказателство, че съществува такава оценка без конкретния ѝ вид.

В този си вид проблемът на Хилберт от много време изглежда безнадежден. Въпреки това има серия модификации, които не са безнадеждни и са обект на активни изследвания във втората половина на 20-и век. Най-напред нека споменем, че макар и да не можем да оценим броя на периодичните решения за всички системи, оказва се, че може да да бъдат казани някои по-специални твърдения.

В 70-те години на миналия век В.И.Арнолд (мотивиран от някои резултати на Ю.С.Иляшенко) формулира отслабен вариант на този проблем - да се оцени броят на нулите на абелевия интеграл

$$I(h) = \oint_{\gamma(h)} -f(x,y)dy + g(x,y)dx,$$

взет върху овалите $\gamma(h)$ на реалната алгебрична крива Γ_h, зададена от уравнението $H(x, y) = h$, чрез степените на полиномите f, g и H. Проблемът на Хилберт-Арнолд възниква естествено при опити да се реши проблемът на Хилберт за векторни полета, които са малки пертурбации на хамилтонови:

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon f, \quad \dot{y} = H_x + \varepsilon g \tag{7.3}$$

По-точно $I(h)$ представлява първо приближение на функцията $P(h) - h$, където $P(h)$ представлява изображението на Поанкаре.

Съществуването на горна оценка за нулите на абелевия интеграл $I(h)$ е доказано от А.Варченко и А. Ховански. Но явна оценка (дори неточна) за нулите не беше намерена доскоро дори и при най-простия нетривиален случай $deg(f, g) = 2$, $deg(H) = 3$. В серия работи, Л. Гаврилов, И. Илиев и настоящият автор намериха точната оценка за нулите и за циклите - и едната и другата е 2. Засега това е единствената точна оценка в проблема на Хилберт-Арнолд. Днес тези резултати са известни като „теорема на Гаврилов -Хорозов -Илиев”.

7.7.4 Теория на хаоса

Теорията на хаоса изучава диференциални уравнения, които имат области във фазовото пространство, запълнени с траектории, всяка от които е навсякъде гъсто в областта. Това е сравнително млада наука. Ето как е представена от един от нейните създатели, метеорологът Едуард Лоренц:

Хаос: Когато настоящето определя бъдещето, но приближеното настояще не определя приближено бъдещето.

Не е случайно, че метеоролози се занимават с теорията на хоса. Според изследвания на Арнолд дългосрочната прогноза на времето е принципно невъзможна и това се дължи именно на хаотичния характер на атмосферните процеси.

Първият учен, който обръща внимание на хаотични процеси, описвани от ОДУ, е А. Поанкаре. В своя работа по задачата за трите тела, описваща планетните движения, той посочва хаотични движения на планетите.

В днешно време теорията има много приложения. За съжаление още повече са спекулациите, „основани” на теорията. Не е случайно, че истински представители на науката, като Поанкаре, Арнолд често отсъствуват от цитираните автори.

Библиография

[1] В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, "Наука 1984.

[2] В. И. Арнольд, Математически методи на класическата механика, София "Наука 1984.

[3] В. И. Арнольд, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений — М.: Наука, 1978.

[4] В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко, Обыкновенные дифференциальные уравнения. В: Динамические системы - I, сер. Современные проблемы математики (Фундаментальные направления). ВИНИТИ, Москва 1985.

[5] Т. Г. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1999.

[6] А. Живков, Ръководство по диференциални уравнения, Издателство "Демократични традиции - Деметра 2003.

[7] Е. И. Хорозов, Н. Г. Никифоров, Г. Караджов, Ръководство за упражнения по обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство "Св. Климент Охридски 1984.

[8] V. I. Arnold, Sur la g?eom?etrie diff?erentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications ‘a l'hydrodynamique des fluides parfaits. Ann, Inst. Fourier 16:1 (1966), 319–361, based on a series of earlier announcements in C. R. Acad. Sci. Paris.

[9] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, Krieger Pub Co, 1984.

[10] L. Gavrilov, The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case, Inv. Math. Volume 143, Number 3, 449-497, 2001.

[11] E. Horozov, I Iliev, On the number of the limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, Proc. Lond. Math. Soc., 69, 1, 1994 , pp.198-224.