<u>Нормални подгрупи</u>

<u>Определение:</u>
Нека G е група и t, h $\in G$. Казваме, че елементът t е спрегнат с h, ако съществува елемент $g \in G$ такъв, че $t = g^{-1}hg$.

<u>Твърдение 1:</u>
Ако t е спрегнат с h, тогава h също е спрегнат с t, т.е. спрегнатостта е симетрична.

<u>Д-во:</u>
Имаме, че $t = g^{-1}hg$. Следователно $h = gtg^{-1} = (g^{-1})^{-1}tg^{-1}$. Следователно h е спрегнат с t.

<u>Определение:</u>
Нека G е група и H е подгрупа. Казваме, че H е нормална подгрупа на G, ако от това, че $h \in H$ следва, че всеки спрегнат с h елемент също принадлежи на H, т.е. за всеки елемент $h \in H$ и всеки елемент $g \in G$ елементът $g^{-1}hg \in H$. Ако H е нормална подгрупа пишем: $H \lhd G$.

<u>Примери:</u>

1) несобствените подгрупи
2) в Абелевите групи всяка подгрупа е нормална, защото $g^{-1}hg = g^{-1}gh = h$. Има и неабелеви групи, в които всяка подгрупа е нормална.
3) $GL_n(F) \rhd SL_n(F)$, защото ако $A \in SL_n(F)$, т.е. $\det(A) = 1$ имаме

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(B^{-1})\det(B) = 1,$$

т.е. $B^{-1}AB \in SL_n(F)$ за всяко $B \in GL_n(F)$

4) В $GL_n(F)$ обратимите диагонални матрици образуват подгрупа, която не е нормална.
5) В S_3 $H = \{e,(1\,2)(3)\}$ е подгрупа, която не е нормална.

<u>Твърдение 2:</u>
Нека G е група и N е подгрупа на G. Тогава

$$N \lhd G \Leftrightarrow g^{-1}Ng = N \text{ за всяко } g \in G.$$

<u>Д-во:</u>
1) Нека $g^{-1}Ng = N$ за всяко $g \in G$
Ако $h \in N$ и $g \in G$, тогава $g^{-1}hg \in g^{-1}Ng$. Следователно $g^{-1}hg \in N$ за всяко $h \in N$ и $g \in G$. Следователно $N \lhd G$.
2) Нека $N \lhd G$.
Трябва да проверим, че тази нормална група има свойството: $g^{-1}Ng = N$ за всяко g.
Произведението $g^{-1}Ng$ се състои от елементи, които са спрегнати на елементи от N. И поради това имаме $g^{-1}Ng \subseteq N$. За да докажем обратното включване разглеждаме $h \in N$. Нека g е произволен елемент на G и $h_1 = ghg^{-1}$. Понеже $h_1 = (g^{-1})^{-1}hg^{-1}$, елементът h_1 е спрегнат на h. Поради това $h_1 \in N$. Тогава $h = g^{-1}h_1g$. Следователно $h \in g^{-1}Ng$. По този начин доказахме, че $N \subseteq g^{-1}Ng$. Следователно $N \equiv g^{-1}Ng$ за всяко $g \in G$. □

Твърдение 3:
Нека G е група и N е подгрупа на G. Тогава

$$N \lhd G \Leftrightarrow gN = Ng \text{ за всяко } g \in G,$$

т.е. когато левия съседен клас на всеки елемент относно N *съвпада с десния съседен клас на този елемент.*

Д-во:
От Твърдение2 следва, че $g^{-1}Ng = N$ за всяко g. Тъй като $g^{-1}Ng = N \Leftrightarrow gN = Ng$, получаваме $gN = Ng$ за всяко $g \in G$.

Твърдение 4:

Нека G и G' са групи и изображението $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм. Тогава $Ker(\varphi) \lhd G$.

Д-во:
Това, че $Ker(\varphi)$ е подгрупа го доказахме на миналата лекция.

Нека $h \in Ker(\varphi)$. Тогава $h \xrightarrow{\varphi} e'$. Ако $g \xrightarrow{\varphi} g'$, съгласно Свойство 2 на хомоморфизмите имаме $g' \xrightarrow{\varphi} (g')^{-1}$. Поради това

$$g^{-1}hg \xrightarrow{\varphi} (g')^{-1}e'g' = e'.$$

Следователно $g^{-1}hg \in Ker(\varphi)$, за всяко $h \in Ker(\varphi)$ *и всяко* $g \in G$. Следователно $Ker(\varphi) \lhd G$.

Теорема 1:
Нека G е група и $N \lhd G$. *С* G/N *означаваме множеството на всички съседни класове на* N *в* G. *Тогава* G/N *наследява операцията "умножение на подмножества в* G*" и относно наследената операция* G/N *е група. Тази група се нарича факторгрупа на G по нормалната подгрупа на* N.

Д-во:
Нека $a, b \in G$. Тогава като използваме, че левите и десните съседни класове съвпадат получаваме

$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)(NN) = abN$$

Доказахме, че

$$(aN)(bN) = abN. \qquad (*)$$

Равенството (*) означава, че G/N наследява операцията умножение на подмножества в G. От равенствата

$$(aN)N = a(NN) = aN$$
$$N(aN) = (Na)N = (aN)N = a(NN) = aN$$

Следова, че $N \in G/N$ е неутрален елемент. От равенството (*) получаваме равенствата

$$(a^{-1}N)(aN) == (a^{-1}a)N = eN = N$$
$$(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = N$$

От последните равенства става ясно, че всеки съседен клас aN има обратен и той е $(aN)^{-1} = a^{-1}N$. Теорема1 е доказана.□

Теорема 2:

Нека G е група и $N \lhd G$. Тогава изображението $a \xrightarrow{\pi} aN$, което на всеки елемент съпоставя неговия съседен клас е епиморфизъм на G върху факторгрупата G/N. Този епиморфизъм се нарича естествен епиморфизъм на G върху G/N. Освен това $Ker(\pi) = N$.

Д-во:
Нека $a, b \in G$. Тогава имаме

$$a \xrightarrow{\pi} aN, \quad b \xrightarrow{\pi} bN \quad и \quad ab \xrightarrow{\pi} abN .$$

Тъй като $abN = (aN)(bN)$, следва $ab \xrightarrow{\pi} (aN)(bN)$.
С това доказахме, че π е хомоморфизъм. Ако aN е произволен съседен клас, тогава $a \xrightarrow{\pi} aN$.
Следователно π е "върху" и поради това π е епиморфизъм.
Остава да докажем равенството $Ker(\pi) = N$.

Нека $h \in Ker(\pi)$. Тогава $h \xrightarrow{\pi} N$. От друга страна $h \xrightarrow{\pi} hN$. Следователно $N = hN$. Поради това $h \in N$.
С това доказахме, че $Ker(\pi) \subseteq N$.

За да докажем обратното включване разглеждаме $h \in N$. Имаме $h \xrightarrow{\pi} hN = N$. Следователно $h \in Ker(\pi)$. Доказахме, че $N \subseteq Ker(\pi)$ и $N = Ker(\pi)$.□