Примерни задачи за полиноми, Висша Алгебра, специалност Статистика

Деление на полиноми с частно и остатък. Най-голям общ делител.

Задача 1. *Да се намери полиномът* $f_i(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{Z}[x]$, $1 \leq i \leq 2$, *ако:*
(i) $f_1(x)$ *се дели на* $x^2 - 3x + 2$*;*
(ii) остатъкът на $f_2(x)$ *при деление с* $x^2 + 3x + 2$ *е* $2x + 3$.

Решение: (i) Ако $f_1(x) = (x-1)(x-2)(x-\alpha)$ за някое $\alpha \in \mathbb{Z}$, то $f_1(1) = 0$ и $f_1(2) = 0$ определят $f_1(x) = x^3 - 7x + 6$.

(ii) Ако $f_2(x) = (x+1)(x+2)(x-\beta) + 2x + 3$ за някое $\beta \in \mathbb{Z}$, то от $f_2(-1) = 1$ и $f_2(-2) = -1$ следва, че $f_2(x) = x^3 - 5x - 3$.

Задача 2. *Да се намери най-големият общ делител* $d_i(x)$, $1 \leq i \leq 2$ *на полиномите* $f_i(x), g_i(x)$ *и полиноми* $u_i(x), v_i(x)$, *за които е изпълнено тъждеството на Безу*

$$d_i(x) = f_i(x)u_i(x) + g_i(x)v_i(x),$$

ако:

$$(i) \quad f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad g_1(x) = x^2 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x];$$
$$(ii) \quad f_2(x) = x^5 + x^4 + \overline{1}, \quad g_2(x) = x^4 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x].$$

Решение: (i) Чрез последователно деление с частно и остатък по алгоритъма на Евклид получаваме

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g_1(x)(x+2) + (x-3), \\ g_1(x) &= (x-3)(x+2) + 8. \end{aligned}$$

Следователно $f_1(x)$ и $g_1(x)$ са взаимно прости и

$$d_1(x) = 8 = (x^2 + 4x + 5)g_1(x) - (x+2)f_1(x).$$

(ii) Деленията с частно и остатък

$$\begin{aligned} &f_2(x) = g_2(x)(x + \overline{1}) + (x^3 + x^2 + x), \\ &g_2(x) = (x^3 + x^2 + x)(x + \overline{1}) + (x^2 + x + \overline{1}), \\ &x^3 + x^2 + x = (x^2 + x + \overline{1})x \end{aligned}$$

показват, че най-големият общ делител

$$d_2(x) = x^2 + x + \overline{1} = (x + \overline{1})f_2(x) + x^2 g_2(x).$$

Задача 3. *Да се определи дали фактор-пръстенът* $F_i[x]/(f_i)$, $1 \leq i \leq 4$ *е поле, ако:*

(i) $F_1 = \mathbb{Z}_5$ *е полето на остатъците при деление с* 5, *а* $f_1(x) = x^3 + \bar{3}x^2 - \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$*;*

(ii) $F_2 = \mathbb{Z}_7$ *е полето на остатъците при деление с* 7, *а* $f_2(x) = x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$*;*

(iii) $F_3 = \mathbb{Z}_3$ *е полето на остатъците при деление с* 3, *а* $f_3(x) = x^4 + x - \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$*;*

(iv) $F_4 = \mathbb{Z}_2$ *е полето на остатъците при деление с* 2, *а* $f_4(x) = x^5 + x^4 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.

Решение: Фактор-пръстенът $F_i[x]/(f_i)$ е поле тогава и само тогава, когато полиномът $f_i(x) \in F_i[x]$ е неразложим над F_i.

(i) Полиномите $f_i(x) \in F_i[x]$, $1 \leq i \leq 2$ от степен 3 са неразложими над F_i точно когато нямат корен в F_i. От $f_1(\overline{0}) = -\overline{1} \neq \overline{0}$, $f_1(\overline{1}) = -\overline{2} \neq \overline{0}$, $f_1(-\overline{1}) = \overline{1} \neq \overline{0}$, $f_1(\overline{2}) = -\overline{1} \neq \overline{0}$ и $f_1(-\overline{2}) = -\overline{2} \neq \overline{0}$ следва неразложимостта на $f_1(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ над $\mathbb{Z}_5$. Следователно $\mathbb{Z}_5[x]/(f_1)$ е поле.

(ii) От $f_2(\overline{3}) = \overline{0}$ следва, че полиномът $f_2(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ се дели на $x - \overline{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$ и $\mathbb{Z}_7[x]/(f_2)$ не е поле.

(iii) Полиномът $f_3(x) \in F_3[x]$ от степен 4 със старши коефициент 1 е неразложим над F_3 точно когато $f_3(x)$ няма корен в F_3 и не се разлага в произведение

$$f_3(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

на неразложими над F_3 квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in F_3[x]$. Непосредствено проверяваме, че $f_3(\overline{0}) = -\overline{1} \neq \overline{0}$, $f_3(\overline{1}) = \overline{1} \neq \overline{0}$ и $f_3(-\overline{1}) = -\overline{1} \neq \overline{0}$. Допускането

$$f_3(x) = x^4 + x - \overline{1} = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

за неразложими над $\mathbb{Z}_3$ квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}_3[x]$ води до

$$x^3 : a + c = \overline{0}, \tag{1}$$

$$x^2 : b + ac + d = \overline{0}, \tag{2}$$

$$x : ad + bc = \overline{1}, \tag{3}$$

$$1 : bd = -\overline{1}, \tag{4}$$

след сравняване ва коефициентите пред съответните степени на x. От (4) следва, че $b = \varepsilon$, $d = -\varepsilon$ за $\varepsilon \in \{\pm\overline{1}\} = \mathbb{Z}_3^*$. Сега (3) приема вида $c - a = \varepsilon$ и заедно с (1) дава $a = \varepsilon$, $c = -\varepsilon$. Замествайки в (2) получаваме $ac = -\varepsilon^2 = -\overline{1} = \overline{0}$, което е противоречие. Следователно полиномът $f_3(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}_3$ и фактор-пръстенът $\mathbb{Z}_3[x]/(f_3)$ е поле.

(iv) Полиномът $f_4(x) \in F_4[x]$ от степен 5 със старши коефициент 1 е неразложим над F_4 точно когато $f_4(x)$ няма корен в F_4 и не се разлага в произведение

$$f_4(x) = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e)$$

на неразложим над F_4 квадратен тричлен $x^2 + ax + b \in F_4[x]$ и неразложим над F_4 кубичен полином $x^3 + cx^3 + dx + e \in F_4[x]$. Да допуснем, че $f_4(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ е разложим над $\mathbb{Z}_2$. От $f_4(\overline{0}) = \overline{1} \neq \overline{0}$ и $f_4(\overline{1}) = \overline{1} \neq \overline{0}$ следва, че

$$f_4(x) = x^5 + x^4 + \overline{1} = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e)$$

за неразложими над $\mathbb{Z}_2$ полиноми $x^2 + ax + b, x^3 + cx^2 + dx + e \in \mathbb{Z}_3[x]$. Сравнявайки коефициентите пред равните степени на x получаваме

$$x^4 : a + c = \overline{1}, \tag{5}$$

$$x^3 : b + ac + d = \overline{0}, \tag{6}$$

$$x^2 : bc + ad + e = \overline{0}, \tag{7}$$

$$x : bd + ae = \overline{0}, \tag{8}$$

$$1 : be = \overline{1}. \tag{9}$$

От (9) получаваме, че $b = e = \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$. После извеждаме $d = a$ от (8) и $c = a + \overline{1}$ от (5). Сега (6) приема вида $\overline{1} + a(a + \overline{1}) + a = a + \overline{1} = \overline{0}$ и определя $a = \overline{1}$. Заместването на $a = b = d = e = \overline{1}$, $c = \overline{0}$ в (7) дава вярно равенство. Следователно полиномът $f_4(x) = x^5 + x^4 + \overline{1} = (x^2 + x + \overline{1})(x^3 + x + \overline{1}) \in \mathbb{Z}_2[x]$ е разложим над $\mathbb{Z}_2$ и фактор-пръстенът $\mathbb{Z}_2[x]/(f_4)$ не е поле.

Задача 4. *Нека $f(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$ е квадратен тричлен с реални коефициенти и отрицателна дискриминанта $D = a^2 - 4b < 0$. Да се докаже, че фактор-пръстенът $\mathbb{R}[x]/(f)$ на $\mathbb{R}[x]$ по главния идеал, породен от $f(x)$ е полето на комплексните числа $\mathbb{C}$.*

Решение: Нека $x_1 = \frac{-a+i\sqrt{-D}}{2}$ или $x_1 = \frac{-a-i\sqrt{-D}}{2}$ е някой от корените на квадратния тричлен $f(x)$, $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$, а

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x_1],$$

$$\varphi(g(x)) = g(x_1) \quad \text{за} \quad \forall g(x) \in \mathbb{R}[x]$$

е остойностяващото изображение в x_1. Съгласно

$$\varphi(g_1(x) + g_2(x)) = (g_1 + g_2)(x_1) = g_1(x_1) + g_2(x_1) = \varphi(g_1(x)) + \varphi(g_2(x)) \quad \text{и}$$

$$\varphi(g_1(x)g_2(x)) = (g_1g_2)(x_1) = g_1(x_1)g_2(x_1) = \varphi(g_1(x))\varphi(g_2(x)) \quad \text{за} \quad \forall g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{R}[x],$$

изображението φ е хомоморфизъм на пръстени. От

$$i = \pm\frac{2}{\sqrt{-D}}x_1 \pm \frac{a}{\sqrt{-D}} \in \mathbb{R}[x_1]$$

следва, че $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \subseteq \mathbb{R}[x_1] \subseteq \mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{R}[x_1] = \mathbb{C}$. Всяко комплексно число $r + is \in \mathbb{C}$, $r, s \in \mathbb{R}$ е от образа на φ съгласно

$$r + is = \varphi\left(\pm\frac{2s}{\sqrt{-D}}x \pm \frac{as}{\sqrt{-D}} + r\right) \quad \text{за} \quad \pm\frac{2s}{\sqrt{-D}}x \pm \frac{as}{\sqrt{-D}} + r \in \mathbb{R}[x].$$

Следователно $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ е епиморфизъм на пръстени. От теоремата за епиморфизмите на пръстени следва, че ядрото $\ker\varphi = \{g(x) \in \mathbb{R}[x] \mid g(x_1) = 0\}$ е идеал в $\mathbb{R}[x]$ с фактор-пръстен $\mathbb{R}[x]/\ker\varphi \simeq \mathbb{C}$. Остава да проверим, че $\ker\varphi$ е главният идеал, породен от $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. От една страна, $f \in \ker\varphi$ и $(f) \subseteq \ker\varphi$. От друга страна, ако $g \in \ker\varphi$, то $g(x_1) = 0$. Чрез комплексно спрягане получаваме, че $0 = \overline{g(x_1)} = g(\overline{x_1})$. Следователно $g(x)$ се дели на $x - x_1$ и $x - \overline{x_1}$. Понеже $x_1 \neq \overline{x_1}$, $g(x)$ се дели на $(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = f(x)$ и $\ker\varphi \subseteq (f)$.

Формули на Виет

Задача 5. *За кои стойности на параметъра p корените $x_1, \ldots, x_4$ на полинома*

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 + px + 16 \in \mathbb{R}[x]$$

изпълняват равенството $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$.

Решение: При наличие на равенството $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$, формулите на Виет за $f(x)$ приемат вида

$$8 = (x_1 + x_2 + x_3) + x_4 = 2x_4,$$

$$22 = (x_1 + x_2 + x_3)x_4 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 16 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

$$16 = (x_1x_2x_3)x_4 = 4x_1x_2x_3,$$

$$-p = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x_4 + x_1x_2x_3 = 6.4 + 4 = 28,$$

откъдето $p = -28$.

Задача 6. *За кои стойности на параметрите p, q полиномът*

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + px^2 + qx + 8$$

има четири корена $x_1, \ldots, x_4$, изпълняващи равенствата

$$5x_1 + 5x_2 = 3x_3 + 3x_4 \quad \textit{и} \quad x_1^2x_2^2 = x_3x_4,$$

ако тези корени са :
(а) реални;
(б) комплексни;

Решение: Замествайки с $x_3 + x_4 = \frac{5}{3}(x_1 + x_2)$ и $x_3x_4 = (x_1x_2)^2$ във формулите на Виет получаваме, че

$$\frac{8}{3}(x_1 + x_2) = 8,$$

$$p = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = 15 + x_1x_2 + (x_1x_2)^2,$$

$$-q = x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 = 5x_1x_2 + 3(x_1x_2)^2,$$

$$8 = (x_1x_2)^3.$$

(а) Ако $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}$, то $y = x_1x_2 \in \mathbb{R}$ и $y = 2$, $p = 21$, $q = -22$.

(б) Ако $x_1, \dots x_4 \in \mathbb{C}$, то $y = x_1x_2$ е комплексен корен на полинома $y^3 - 8 = 0$ или $y \in \{2, 2\omega_3, 2\omega_3^2\}$ за $\omega_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вече видяхме, че ако $y = 2 \in \mathbb{R}$, то $p = 21$, $q = -22$. Оттук нататък ще предполагаме, че комплексното число $y \in \{2\omega_3^i \mid 1 \leq i \leq 2\} = \{-1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$. Третите корени ω_3^i, $1 \leq i \leq 2$ на 1, различни от 1 са корените на полинома $\frac{z^3-1}{z-1} = z^2+z+1 = 0$. Следователно $y^2 = (2\omega_3^i)^2 = -2(2\omega_3^i) - 4 = -2y - 4$ и $p = y^2 + y + 15 = -y + 11$, $q = -3y^2 - 5y = y + 12$. За $y = -1 + i\sqrt{3}$ получаваме $p = 12 - \sqrt{3}i$, $q = 11 + i\sqrt{3}$, а за $y = -1 - i\sqrt{3}$ пресмятаме, че $p = 12 + i\sqrt{3}$, $q = 11 - i\sqrt{3}$. Окончателно, $(p, q) \in \{(21, -22), (12 + \sqrt{3}i, 11 - \sqrt{3}i), (12 - \sqrt{3}i, 11 + \sqrt{3}i)\}$.

Симетрични полиноми

Задача 7. *Да означим с $\sum x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$ сумата на всички различни мономи, получени от $x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$ с $a_1 \geq \dots \geq a_m$ чрез пермутация на променливите $x_1, \dots, x_n$, $n \geq m$. Да се представят симетричните полиноми*

$$(i) \quad F_1(x_1, x_2, x_3) = \sum x_1^3 x_2^2 - 2\sum x_1^2 x_2,$$

$$(ii) \quad F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum x_1^3 x_2 x_3,$$

$$(iii) \quad F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum x_1^3 x_2^2 x_3,$$

$$(iv) \quad F_4(x_1, \dots, x_n) = \sum x_1^2 \dots x_{n-1}^2 - 3\sum x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1} \quad \text{за} \quad n \geq 4,$$

$$(v) \quad F_5(x_1, \dots, x_n) = \sum x_1^3 x_2 x_3 \quad \text{за} \quad n \geq 5$$

като полиноми на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ на $x_1, \dots, x_n$

Решение: (i) Да означим с $F_1^{(5)}(x_1, x_2, x_3) = \sum x_1^3 x_2^2$ и $F_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \sum x_1^2 x_2$ хомогенните симетрични полиноми, за които

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = F_1^{(5)}(x_1, x_2, x_3) - 2F_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3).$$

По алгоритъма от основната теорема за симетричните полиноми, старшият член $LT(F_1^{(5)}) = x_1^3 x_2^2$ на $F_1^{(5)}$ отговаря на монома $\sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0 = \sigma_1\sigma_2^2$ на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на x_1, x_2, x_3. Мономите $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}$, за които

$$(i) \quad x_1^3 x_2^2 >_{\text{lex}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3},$$

$$(ii) \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \quad \text{и}$$

$$(iii) \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 5$$

са $x_1^3x_2x_3$ и $x_1^2x_2^2x_3$. Те отговарят на мономите $\sigma_1^2\sigma_3$ и $\sigma_2\sigma_3$ на $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Следователно $F_1^{(5)} = \sigma_1\sigma_2^2 + A\sigma_1^2\sigma_3 + B\sigma_2\sigma_3$ за някакви неопределени коефициенти A и B. При полагането $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$ имаме $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -1$, откъдето $2 = F_1^{(5)}(1,1,-1) = 1-A+B$. Ако $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, то $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$ и $6 = F_1^{(5)}(1,1,1) = 27+9A+3B$. В резултат, $A = -2$, $B = -1$ или $F_1^{(5)} = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$.

Старшият член $LT(F_1^{(3)}) = x_1^2x_2$ на $F_1^{(3)}$ отговаря на монома $\sigma_1\sigma_2$ на $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Единственият моном $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3} <_{\text{lex}} x_1^2x_2$ с $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 3$ е $x_1x_2x_3$, а съответният му моном на $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ е σ_3. Следователно $F_1^{(3)} = \sigma_1\sigma_2 + C\sigma_3$ за някакъв неопределен коефициент C. Полагаме $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ и пресмятаме, че $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, откъдето $6 = F_1^{(3)}(1,1,1) = 9 + C$, т.е. $C = -3$ и $F_1^{(3)} = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. В резултат, $F_1 = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$.

Хомогенните симетрични полиноми $F_1^{(5)} = \sum x_1^3x_2^2$ и $F_1^{(3)} = \sum x_1^2x_2$ могат да се пресметнат и по метода на симетричните суми:

$$\sum x_1^2x_2 = \left(\sum x_1x_2\right)\left(\sum x_1\right) - 3\left(\sum x_1x_2x_3\right) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \quad \text{за} \quad \forall n \geq 3, \tag{10}$$

$$F_1^{(5)}(x_1,x_2,x_3) = \sum x_1^3x_2^2 = \left(\sum x_1^2x_2\right)\left(\sum x_1x_2\right) - 2\left(\sum x_1^3x_2x_3\right) - 2\left(\sum x_1^2x_2^2x_3\right) =$$

$$= (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3)\,\sigma_2 - 2\sigma_3\left(\sum x_1^2\right) - 2\sigma_3\left(\sum x_1x_2\right),$$

$$\sum x_1^2 = (x_1)^2 - 2\left(\sum x_1x_2\right) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \quad \text{за} \quad \forall n \geq 2. \tag{11}$$

$$(ii) \quad F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum x_1^3x_2x_3 = \left(\sum x_1x_2x_3\right)\left(\sum x_1^2\right) - \sum x_1^2x_2x_3x_4 =$$

$$= \sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_4\sigma_1.$$

По втори начин, съгласно основната теорема за симетричните полиноми, старшият член $LT(F_2) = x_1^3x_2x_3$ отговаря на монома $\mu = \sigma_1^2\sigma_3$ на $\sigma_1,\ldots,\sigma_4$. Търсим мономите $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4} <_{\text{lex}} x_1^3x_2x_3$ с $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4$ и $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 = 5$. Това са $x_1^2x_2^2x_3$ и $x_1^2x_2x_3x_4$, отговарящи съответно на $\sigma_2\sigma_3$ и $\sigma_1\sigma_4$. Следователно хомогенният симетричен полином $F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sigma_1^2\sigma_3 + A\sigma_2\sigma_3 + B\sigma_1\sigma_4$ за някакви неопределени коефициенти A и B. Ако $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, то $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$, $\sigma_3 = 4$, $\sigma_4 = 1$ и $12 = F_2(1,1,1,1) = 64 + 24A + 4B$. За $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получаваме $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 0$ и $3 = F_2(1,1,1,0) = 9 + 3A$. Следователно $A = -2$ и $B = -1$.

(iii) От

$$F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum x_1^3x_2^2x_3 =$$

$$= \left(\sum x_1x_2x_3\right)\left(\sum x_1^2x_2\right) - 3\left(\sum x_1^3x_2x_3x_4\right) - 2\sum x_1^2x_2^2x_3x_4 =$$

$$= \sigma_3\left(\sum x_1^2x_2\right) - 3\sigma_4\left(\sum x_1^2\right) - 2\sigma_4\left(\sum x_1x_2\right) \quad \text{за} \quad n = 4,$$

(10) и (11) получаваме, че

$$F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1^2\sigma_4 + 4\sigma_2\sigma_4.$$

(iv) Съгласно

$$\sum x_1^2 \dots x_{n-1}^2 = \left(\sum x_1 \dots x_{n-1}\right)^2 - 2\left(\sum x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1} x_n\right) = \sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n \quad \text{и}$$

$$\sum x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1} = \left(\sum x_1 \dots x_{n-2} x_{n-1}\right)\left(\sum x_1 \dots x_{n-2}\right) -$$
$$-3\left(\sum x_1^2 \dots x_{n-3}^2 x_{n-2} x_{n-1} x_n\right) = \sigma_{n-2}\sigma_{n-1} - 3\sigma_{n-3}\sigma_n \quad \text{за} \quad \forall n \geq 4$$

пресмятаме, че $F_4(x_1, \dots, x_n) = \sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_{n-2}\sigma_n - 3\sigma_{n-2}\sigma_{n-1} + 9\sigma_{n-3}\sigma_n$.

По алгоритъма от основната теорема за симетричните полиноми, старшият член $x_1^2 \dots x_{n-1}^2$ на $F_4^{(2n-2)}(x_1, \dots, x_n) = \sum x_1^2 \dots x_{n-1}^2$ отговаря на монома σ_{n-1}^2 на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Мономите $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} <_{\text{lex}} x_1^2 \dots x_{n-1}^2$ с $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$, $\beta_1 + \dots + \beta_n = 2n-2$ се изчерпват с $x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1} x_n$, който съответства на $\sigma_{n-2}\sigma_n$. Затова $F_4^{(2n-2)}(x_1, \dots, x_n) = \sigma_{n-1}^2 + A\sigma_{n-2}\sigma_n$ за някакъв неопределен коефициент A и $\forall n \geq 3$. При $x_1 = \dots = x_n = 1$ получаваме $\sigma_i = \binom{n}{i}$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и $n = \binom{n}{n-1} = F_4^{(2n-2)}(1, \dots, 1) = n^2 + A\frac{n(n-1)}{2}$, откъдето $A = -2$.

Старшият член $x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1}$ на $F_4^{(2n-3)}(x_1, \dots, x_n) = \sum x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1}$ отговаря на монома $\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}$ на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Единственият моном $x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} <_{\text{lex}} x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1}$ с $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ и $\beta_1 + \dots + \beta_n = 2n-3$ е $x_1^2 \dots x_{n-3}^2 x_{n-2} x_{n-2} x_n$, съответстващ на $\sigma_{n-3}\sigma_n$. Оттук $F_4^{(2n-3)}(x_1, \dots, x_n) = \sigma_{n-2}\sigma_{n-1} + B\sigma_{n-3}\sigma_n$. За определяне на неизвестния коефициент B избираме $x_1 = \dots = x_n = 1$ и пресмятаме, че $\sigma_i = \binom{n}{i}$ за $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$n(n-1) = (n-1)\binom{n}{n-1} = F_4^{(2n-3)}(1, \dots, 1) = \frac{n^2(n-1)}{2} + B\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

В резултат, $B = -3$.

(v) Възоснова на

$$\sum x_1^3 x_2 x_3 = \left(\sum x_1 x_2 x_3\right)\left(\sum x_1^2\right) - \left(\sum x_1^2 x_2 x_3 x_4\right),$$

$$\sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 = \left(\sum x_1 x_2 x_3 x_4\right)\left(\sum x_1\right) - 5\left(\sum x_1 \dots x_5\right) =$$
$$= \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5 \quad \text{за} \quad \forall n \geq 5$$

намираме

$$F_5(x_1, \dots, x_n) = \sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5.$$

По алгоритъма от основната теорема за симетричните полиноми, $LT(F_5) = x_1^3 x_2 x_3$ отговаря на монома $\sigma_1^2\sigma_3$ на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Мономите $x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} <_{\text{lex}} x_1^3 x_2 x_3$ с $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$, $\beta_1 + \dots + \beta_n = 5$ са $x_1^2 x_2^2 x_3$, $x_1^2 x_2 x_3 x_4$ и $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$. Те отговарят съответно на мономите $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_4$ и σ_5 на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, така че

$$F_5(x_1, \dots, x_n) = \sigma_1^2\sigma_3 + A\sigma_2\sigma_3 + B\sigma_1\sigma_4 + C\sigma_5$$

за подходящи коефициенти A, B, C. При полагането $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = \dots = x_n = 0$ имаме $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$ и $\sigma_i = 0$ за $\forall 4 \leq i \leq n$. В резултат, $3 = F_5(1, 1, 1, 0, \dots, 0) =$

$9+3A$ и $A=-2$. За $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, $x_5=\ldots=x_n=0$ пресмятаме, че $\sigma_1=4$, $\sigma_2=6$, $\sigma_3=4$, $\sigma_4=1$, $\sigma_i=0$ за $\forall 5\leq i\leq n$. От $12=4.3=F_5(1,1,1,1,0,\ldots,0)=64-48+4B$ определяме $B=-1$. Накрая, за $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=1$, $x_6=\ldots=0$ са в сила $\sigma_1=5$, $\sigma_2=\binom{5}{2}=10$, $\sigma_3=\binom{5}{3}=10$, $\sigma_4=5$, $\sigma_5=1$, $\sigma_i=0$ за $\forall 6\leq i\leq n$ и $30=3\binom{5}{3}=F_5(1,1,1,1,1,0,\ldots,0)=250-200-25+C$. Следователно $C=5$.

Задача 8. *Нека* $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\in\mathbb{R}[x]$ *е полином със старши коефициент 1 и корени* $x_1,\ldots,x_n$. *Да се докаже, че:*

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\qquad \textit{и} \qquad \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)^2}.$$

Решение: По правилото на Лайбниц-Нютон за формално диференциране на произведение на полиноми,

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_i)'(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}.$$

Следователно

$$\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f(x)^2}=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)'=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)^2},$$

съгласно

$$0=1'=\left[(x-x_i).\frac{1}{x-x_i}\right]'=\frac{1}{x-x_i}+(x-x_i)\left(\frac{1}{x-x_i}\right)'.$$

Задача 9. *Нека* x_1,x_2 *и* x_3 *са корени на полинома*

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r.$$

Да се изразят чрез p *и* q *(когато има смисъл) симетричните рационални функции*

$$(i)\,\Sigma_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_3x_1)(x_3^2-x_1x_2);$$

$$(ii)\,\Sigma_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1x_2}{(x_2+x_3-x_1)(x_1+x_3-x_2)}+$$

$$+\frac{x_2x_3}{(x_1+x_3-x_2)(x_1+x_2-x_3)}+\frac{x_3x_1}{(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)};$$

$$(iii)\,\Sigma_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^2+2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2+2}{x_1+x_3}+\frac{x_3^2+2}{x_1+x_2}.$$

Решение: Формулите на Виет за $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ гласят, че

$$x_1+x_2+x_3=-p,$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q,$$

$$x_1x_2x_3 = -r.$$

(i) Представяме

$$x_1^2 - x_2x_3 = \frac{x_1^3 - x_1x_2x_3}{x_1} = \frac{(-px_1^2 - qx_1 - r) + r}{x_1} = -\frac{x_1(px_1+q)}{x_1} = p\left(-\frac{q}{p} - x_1\right)$$

и изразяваме

$$\Sigma_1(x_1,x_2,x_3) = p^3 \prod_{i=1}^{3}\left(-\frac{q}{p} - x_i\right) = p^3 f\left(-\frac{q}{p}\right) = p^3r - q^3.$$

(ii) Вземайки предвид

$$\frac{x_1x_2}{(x_2+x_3-x_1)(x_1+x_3-x_2)} = \frac{x_1x_2}{(-p-2x_1)(-p-2x_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2\left(-\frac{p}{2} - x_3\right)}{4\left(-\frac{p}{2}-x_1\right)\left(-\frac{p}{2}-x_2\right)\left(-\frac{p}{2}-x_3\right)} = -\frac{p}{8}\frac{x_1x_2}{f\left(-\frac{p}{2}\right)} + \frac{r}{4f\left(-\frac{p}{2}\right)},$$

и получаваме

$$\Sigma_2 = -\frac{pq}{8f\left(-\frac{p}{2}\right)} + \frac{3r}{4f\left(-\frac{p}{2}\right)} = \frac{6r - pq}{p^3 - 4pq + 8r}.$$

(iii) Събираме рационалната функция

$$\frac{x_1^2+2}{x_2+x_3} = \frac{(-x_1+p)(-p-x_1)+p^2+2}{-p-x_1} = -x_1 + p + (p^2+2)\frac{1}{-p-x_1}$$

на x_1 с аналогичните рационални функции на x_2 и x_3, за да пресметнем, че

$$\Sigma_3(x_1,x_2,x_3) = -(x_1+x_2+x_3) + 3p + (p^2+2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(-p)-x_i} =$$

$$= p + 3p + (p^2+2)\frac{f'(-p)}{f(-p)} = \frac{p^4 - 3p^2q + 4pr + 2p^2 + 2q}{r - pq}.$$

Задача 10. *Нека x_1, x_2, x_3 са корените на полинома*

$$f(x) = x^3 + px + q\,.$$

Да се изразят чрез p и q (когато има смисъл) симетричните рационални функции

$$(i)\ \Sigma_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^2}{(1+x_2)(1+x_3)} + \frac{x_2^2}{(1+x_3)(1+x_1)} + \frac{x_3^2}{(1+x_1)(1+x_2)};$$

$$(ii)\ \Sigma_2(x_1,x_2,x_3) = \ = \frac{x_3}{x_1^2+4x_1x_2+x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2+4x_1x_3+x_3^2} + \frac{x_1}{x_2^2+4x_2x_3+x_3^2}\,.$$

$$(iii)\ \Sigma_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{(1+x_1)^2} + \frac{x_2}{(1+x_2)^2} + \frac{x_3}{(1+x_3)^2}$$

$$(iv)\ \Sigma_4(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^2}{(1+x_1)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_2)^2} + \frac{x_3^2}{(1+x_3)^2}$$

Решение: Формулите на Виет за $f(x) = \prod_{i=1}^{3}(x - x_i)$ имат вида

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = -q.$$

(i) От

$$\frac{x_1^2}{(1+x_2)(1+x_3)} = \frac{x_1^2(1+x_1)}{-\prod_{i=1}^{3}(-1-x_i)} = \frac{x_1^2 - px_1 - q}{-f(-1)}$$

следва, че

$$\Sigma_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sum x_1^2 - p\left(\sum x_1\right) - 3q}{p - q + 1} = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - p\sigma_1 - 3q}{p - q + 1} = \frac{-2p - 3q}{p - q + 1}.$$

(ii) Преобразуваме

$$\frac{x_3}{x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2} = \frac{x_3}{(x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2} = \frac{x_3}{(-x_3)^2 + 2x_1x_2} = \frac{x_3^2}{x_3^3 + 2x_1x_2x_3} =$$

$$= \frac{x_3^2}{-px_3 - q - 2q} = \frac{\left(-\frac{3q}{p} - x_3\right)\left(\frac{3q}{p} - x_3\right) + \frac{9q^2}{p^2}}{p\left(-\frac{3q}{p} - x_3\right)} = \frac{3q}{p^2} - \frac{x_3}{p} + \frac{9q^2}{p^3}.\frac{1}{\left(-\frac{3q}{p} - x_3\right)}$$

и пресмятаме, че

$$\Sigma_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{9q}{p^2} + \frac{9q^2}{p^3}\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\left(-\frac{3q}{p} - x_i\right)}\right] = \frac{9q}{p^2} + \frac{9q^2}{p^3}.\frac{f'\left(-\frac{3q}{p}\right)}{f\left(-\frac{3q}{p}\right)} = \frac{9pq}{2p^3 + 27q^2}.$$

(iii) Съгласно

$$\frac{x_1}{(1+x_1)^2} = \frac{(x_1+1) - 1}{(1+x_1)^2} = -\frac{1}{-1-x_1} - \frac{1}{(-1-x_1)^2}$$

получаваме, че

$$\Sigma_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{f'(-1)}{f(-1)} + \frac{f''(-1)f(-1) - f'(-1)^2}{f(-1)^2} = \frac{4p - 9q - pq}{(q - p - 1)^2}.$$

(iv) От

$$\frac{x_1^2}{(1+x_1)^2} = \frac{(1+x_1)^2 - 2(1+x_1) + 1}{(1+x_1)^2} = 1 + 2\frac{1}{-1-x_1} + \frac{1}{(-1-x_1)^2}$$

имаме

$$\Sigma_4(x_1, x_2, x_3) = 3 + 2\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{-1-x_i}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{(-1-x_i)^2} =$$

$$= 3 + 2\frac{f'(-1)}{f(-1)} + \frac{f'(-1)^2 - f''(-1)f(-1)}{f(-1)^2} = \frac{2p^2 - 4pq + 3q^2 - 2p + 6q}{(q - p - 1)^2}.$$

Формули на Нютон.

Задача 11. *Да се намери полином $f(x)$ от трета степен със старши коефициент 1, за корените x_1, x_2, x_3, на който са в сила равенствата:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9, \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 30.$$

Решение: При $S_1 = 3$, $S_2 = 9$, $S_3 = 30$, формулите на Нютон за полинома $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ дават

$$S_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -3,$$

$$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0,$$

$$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -1,$$

така че $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

Задача 12. *Да се намери степенния сбор*

$$S_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5$$

за корените $x_1, \ldots, x_4$ на полинома $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

Решение: Формулите на Нютон за полинома $f(x)$ определят последователно степенните сборове $S_1, \ldots, S_5$ на корените му:

$$S_1 - 1 = 0 \Rightarrow S_1 = 1,$$

$$S_2 - S_1 + 2 = 0 \Rightarrow S_2 = -1,$$

$$S_3 - S_2 + S_1 - 3 = 0 \Rightarrow S_3 = 1,$$

$$S_4 - S_3 + S_2 - S_1 + 4 = 0 \Rightarrow S_4 = -1,$$

$$S_5 - S_4 + S_3 - S_2 + S_1 = 0 \Rightarrow S_5 = -4.$$

Кратни корени.

Задача 13. *Нека F е поле с произволна характеристика, а $f(x) = x^3 + px + q \in F[x]$. Да се намерят стойностите на $p, q \in F$, за които $f(x)$ се дели на $(x - 1_F)^2$.*

Решение: Ако $f(x) = (x - 1_F)^2(x - \alpha)$ за някое $\alpha \in F$, то $f(1_F) = 0_F$ и $f'(1_F) = 0_F$, откъдето $f(x) = x^3 - 3x + 2 = x^3 - (1_F + 1_F + 1_F)x + (1_F + 1_F)$.

Задача 14. *Да се намери полиномът $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$, ако $f(x)$ има остатък $r(x) = x^2 - x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ при деление с $(x - 1)^3 \in \mathbb{R}[x]$.*

Решение: От $f(x) = (x-1)^3(x-\alpha)+r(x)$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$ получаваме $f(1) = r(1) = 1$, $f'(1) = r'(1) = 1$, $f''(1) = r''(1) = 2$ и определяме $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7x - 2 \in \mathbb{R}[x]$.

Задача 15. *Да се намери остатъкът $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ при деление на полинома $f(x) = x^n - 3^{n-1}x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$, $n \geq 3$ с полинома $g(x) = x^3 - 3x^2 \in \mathbb{Z}[x]$.*

Решение: Ако $f(x) = x^2(x-3)q(x) + r(x)$ за $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $r(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$, то $f(0) = r(0)$, $f'(0) = r'(0)$, $f(3) = r(3)$, така че $r(x) = 3^{n-2}x^2 - 3^{n-1}x + 1$.

Разлагане на полиноми с рационални и цели коефициенти.

Задача 16. *Да се разложат полиномите*

$$f(x) = x^4 + 6x - 7 \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{и} \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \in \mathbb{Z}[x]$$

в произведение от неразложими над $\mathbb{Q}$ множители.

Решение: Полином $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ се разлага над $\mathbb{Q}$ тогава и само тогава, когато $h(x)$ се разлага над $\mathbb{Z}$.

Полиномът $f(x)$ от степен 4 със старши коефициент 1 се разлага над $\mathbb{Z}$ точно когато има корен $\alpha \in \mathbb{Z}$ или $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ за неразложими над $\mathbb{Z}$ квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$. Ако α е цял корен на $f(x)$, то α е делител на свободния член -7 или $\alpha \in \{\pm 1, \pm 7\}$. По схемата на Хорнер се установява, че $\alpha = 1$ е корен на $f(x)$ и $f(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 7)$. Ако $\beta \in \mathbb{R}$ е корен на полинома $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 7$ с неотрицателни реални коефициенти, то $\beta < 0$. Затова е достатъчно да проверим, че $f_1(-1) = 6 \neq 0$, $f_1(-7) = -6.7^2 \neq 0$, за да твърдим, че $f_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. Следователно $f(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 7)$ е разлагането на $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ в произведение от неразложими над $\mathbb{Q}$ множители.

Полиномът $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ от степен 4 със старши коефициент 1 е разложим над $\mathbb{Z}$ тогава и само тогава, когато има цял корен $\alpha \in \{\pm 1, \pm 5\}$, който дели свободния член 5 или $g(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ за неразложими над $\mathbb{Z}$ квадратни тричлени. $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$. Непосредствено се проверява, че $g(1) = g(-1) = 9 \neq 0$, $g(5) = 945 \neq 0$, $g(-5) = 465 \neq 0$. Сравнявайки коефициентите в

$$g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

получаваме

$$x^3 : a + c = 2, \tag{12}$$

$$x^2 : b + ac + d = 3, \tag{13}$$

$$x : bc + ad = -2, \tag{14}$$

$$1 : bd = 5. \tag{15}$$

Съгласно (15), b и d са цели делители на 5 с произведение 5. След евентуална размяна на квадратните тричлени можем да считаме, че $b = \varepsilon$ и $d = 5\varepsilon$ за $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Сега (14) приема вида $5a + c = -2\varepsilon$ и заедно с (12) дава $a = -\frac{\varepsilon+1}{2}$, $c = \frac{\varepsilon+5}{2}$. По-нататък, (13) уточнява, че $\varepsilon = 1$ и $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 5)$ се разлага в произведение на неразложими над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ квадратни тричлени $x^2 - x + 1$, $x^2 + 3x + 5$.

Задача 17. *Да се докаже, че полиномите*

$$(i) \quad f_1(x) = x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

$$(ii) \quad f_2(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \in \mathbb{Z}[x],$$

$$(iii) \quad f_3(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 9 \in \mathbb{Z}[x],$$

са неразложими над $\mathbb{Q}$.

Решение: Полиномът $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ е неразложим над $\mathbb{Q}$ тогава и само тогава, когато е неразложим над $\mathbb{Z}$.

(i) Да допуснем, че $f_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ от степен 4 със старши коефициент 1 е разложим над $\mathbb{Z}$. Тогава $f_1(x)$ има цял корен $\alpha \in \{\pm 1\}$, делящ свободния член -1 или $f_1(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ е произведение на неразложими над $\mathbb{Z}$ квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$. След пресмятане на $f_1(1) = 7 \neq 0$ и $f_1(-1) = -13 \neq 0$, сравняваме коефициентите пред равните степени на x в

$$f_1(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d):$$

$$x^3 : a + c = 6, \tag{16}$$

$$x^2 : b + ac + d = -3, \tag{17}$$

$$x : ad + bc = 4, \tag{18}$$

$$1 : bd = -1. \tag{19}$$

Съгласно (19), b и d са цели делители на -1 с произведение -1. Следователно $b = \varepsilon$, $d = -\varepsilon$ с $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. В резултат, (18) дава $c - a = 4\varepsilon$ и заедно с (16) определя, че $c = 2\varepsilon + 3$, $a = 3 - 2\varepsilon$. Замествайки в (17) получаваме противоречие, с което доказваме неразложимостта на $f_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Q}$.

(ii) Ако α е рационален корен на полинома $f_2(x)$ с неотрицателни цели коефициенти и старши коефициент 1, то α е отрицателен делител на свободния член 5, т.е. $\alpha \in \{-1, -5\}$. Проверяваме, че $f_2(-1) = 3 \neq 0$, $f_2(-5) = 435 \neq 0$. Допускането

$$f_2(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

за неразложими над $\mathbb{Z}$ квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ води до равенствата

$$x^3 : a + c = 2, \tag{20}$$

$$x^2 : b + ac + d = 3, \tag{21}$$

$$x : ad + bc = 4, \tag{22}$$

$$1 : bd = 5. \tag{23}$$

Съгласно (23) можем да считаме, че $b = \varepsilon$, $d = 5\varepsilon$ за $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, след евентуална размяна между квадратните тричлени. Сега от (22) следва, че $5a + c = 4\varepsilon$ и заедно с (20) дава $a = \varepsilon - \frac{1}{2} \not\in \mathbb{Z}$. Противоречието доказва неразложимостта на $f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Q}$.

(iii) Ако α е цял корен на $f_3(x) \in \mathbb{Z}[x]$, то $\alpha \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ е делител на свободния член -9. Проверяваме непосредствено, че $f_3(1) = -6 \neq 0$, $f_3(-1) = -2 \neq 0$, $f_3(3) = 6 \neq 0$, $f_3(-3) = 210 \neq 0$, $f_3(9) = 3978 \neq 0$, $f_3(-9) = 9774 \neq 0$. Допускането

$$f_3(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

за неразложими над $\mathbb{Z}$ квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ води до

$$x^3 : a + c = -4, \tag{24}$$

$$x^2 : b + ac + d = 4, \tag{25}$$

$$x : ad + bc = 2, \tag{26}$$

$$1 : bd = -9 \tag{27}$$

след сравняване на коефициентите на съответните мономи. Съгласно (27) можем да считаме, че $b = \varepsilon$, $d = -9\varepsilon$ или $b = 3\varepsilon$, $d = -3\varepsilon$ за $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, след евентуална размяна на $x^2 + ax + b$ с $x^2 + cx + d$.

Ако $b = \varepsilon$, $d = -9\varepsilon$, то (26) приема вида $c - 9a = 2\varepsilon$ и заедно с (24) определя $a = -\frac{\varepsilon + 2}{5} \in \left\{ -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right\}$. Противоречието с $a \in \mathbb{Z}$ отхвърля възможността $b = \varepsilon$, $d = -9\varepsilon$.

За $b = 3\varepsilon$, $d = -3\varepsilon$ равенството (26) изисква $c - a = \frac{2\varepsilon}{3} \in \left\{ \pm \frac{2}{3} \right\} \cap \mathbb{Z}$. Противоречието изключва възможността $b = 3\varepsilon$, $d = -3\varepsilon$ и доказва неразложимостта на $f_3(x) \in \mathbb{Z}[x]$ над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Q}$.

Задача 18. *С редукция на коефициентите по модул* 3 *да се докаже, че полиномът*

$$g(x) = 2011x^4 + 6004x^3 + 2995x^2 + 6007x + 1549 \in \mathbb{Z}[x]$$

е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Решение: Нека $\pi_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ $\pi_3(a) = \overline{a} = a + 3\mathbb{Z}$ за $\forall a \in \mathbb{Z}$ е естественият епиморфизъм на $\mathbb{Z}$ с ядро $\ker \pi_3 = 3\mathbb{Z}$, а $\Pi_3 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_3[x]$ е индуцираният от π_3 епиморфизъм на полиномите на една променлива с ядро $\ker \Pi_3 = 3\mathbb{Z}[x]$. Понеже $\pi_3(LC(g)) = \pi_3(2011) = \overline{1} \neq \overline{0}$, достатъчно е да докажем, че полиномът $\Pi_3(g) = x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}_3$, за да твърдим, че $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Q}$. Наистина, $\Pi_3(g)(\overline{0}) = \overline{1} \neq \overline{0}$, $\Pi_3(g)(\overline{1}) = -\overline{1} \neq \overline{0}$, $\Pi_3(g)(-\overline{1}) = \overline{1} \neq \overline{0}$ показват, че $\Pi_3(g) \in \mathbb{Z}_3[x]$ няма корен в $\mathbb{Z}_3$. С точност до мултипликативна констранта $\pm\overline{1} \in \mathbb{Z}_3^*$, всяко разлагане на $\Pi_3(g)$ в произведение на неразложими над $\mathbb{Z}_3$ квадратни тричлени има вида

$$\Pi_3(g) = x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1} = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

с $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}_3[x]$. Сравнявайки коефициентите пред равните степени на x получаваме

$$x^3 : a + c = \overline{1}, \tag{28}$$

$$x^2 : b + ac + d = \overline{1}, \tag{29}$$

$$x : ad + bc = \overline{1}, \tag{30}$$

$$1 : bd = \overline{1}. \tag{31}$$

Равенството (31) за $b, d, \in \mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \pm\overline{1}\}$ определя, че $b = d = \varepsilon$ за $\varepsilon \in \{\pm\overline{1}\}$. Сега (30) приема вида $a + c = \varepsilon$ и заедно с (28) уточнява, че $\varepsilon = \overline{1}$. Замествайки в (29) получаваме, че $ac = -\overline{1}$. Следователно $a \in \mathbb{Z}_3$ и $c \in \mathbb{Z}_3$ са корени на квадратното уравнение $h(t) = t^2 - t - \overline{1} = \overline{0}$. Но $h(t) \in \mathbb{Z}_3$ няма корени в $\mathbb{Z}_3$, така че равенствата (28) - (31) са несъвместими за $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ и $\Pi_3(g) \in \mathbb{Z}_3[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}_3$.

Дискриминанта. Резултанта.

Задача 19. *Да се намери резултантата $R(f, g)$ на полиномите*

$$f(x) = x^4 + 3px^2 + x + 3 \quad \textit{и} \quad g(x) = x^3 + px^2 + 1\,.$$

Решение: Ако $g(x) = \prod_{i=1}^{3}(x - \alpha_i)$, то

$$R(f, g) = (-1)^{3.4} R(g, f) = \prod_{i=1}^{3} f(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{3} [(p+3)(p\alpha_i^2 + 1)] = (p+3)^3 \prod_{i=1}^{3} (p\alpha_i^2 + 1),$$

съгласно $\alpha_i^3 = -p\alpha_i^2 - 1$ и $\alpha_i^4 = -p(-p\alpha_i^2 - 1) - \alpha_i = p^2\alpha_i^2 - \alpha_i + p$. Следователно

$$R(f, g) = (p+3)^3 \left[p^3 (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 + p^2 \left(\sum \alpha_1^2 \alpha_2^2 \right) + p \left(\sum \alpha_1^2 \right) + 1 \right].$$

Вземайки предвид

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1,$$

$$\sum \alpha_1^2\alpha_2^2 = \left(\sum \alpha_1\alpha_2 \right)^2 - 2 \left(\sum \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 \right) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = -2p,$$

$$\sum \alpha_1^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = p^2,$$

получаваме $R(f, g) = (p+3)^3$.

Задача 20. *Да се пресметне дискриминантата на полинома $f(x) = x^3 + px + q$.*

Решение: Ако α_i, $1 \leq i \leq 2$ е корен на $f'(x) = 3x^2 + p = 3\prod_{i=1}^{2}(x - \alpha_i) = 0$, то $f(\alpha_i) = \frac{1}{3}(2p\alpha_i + 3q)$ и

$$D(f) = (-1)^{\frac{3.2}{2}} R(f, f') = -R(f', f) = -3^3 \prod_{i=1}^{2} f(\alpha_i) = -3 \prod_{i=1}^{2} (2p\alpha_i + 3q) =$$

$$= -(2p)^2 \left[3 \prod_{i=1}^{2} \left(-\frac{3q}{2p} - \alpha_i \right) \right] = -4p^2 f' \left(-\frac{3q}{2p} \right) = -4p^3 - 27q^2.$$