

Примерни задачи за първо контролно по Висша Алгебра

Задача 1. Да се решат сравненията

- (i) $2x \equiv 3 \pmod{5}$;
- (ii) $2x \equiv 1 \pmod{4}$;
- (iii) $6x \equiv 3 \pmod{9}$.

Решение: (i) По метода на Ойлер, остатъкът $x \pmod{5}$ е решение на $2x \equiv 3 \pmod{5}$ точно когато съществува $y \in \mathbb{Z}$, така че $2x - 3 = 5y$. Коефициентът 2 на неизвестното x е по-малък по модул от коефициента 5 на неизвестното y и затова представяме уравнението във вида

$$x = \frac{5y + 3}{2} = 2y + 1 + \frac{y + 1}{2}. \quad (1)$$

Оттук 2 дели $y + 1$ или $y = 2z - 1$ за $z \in \mathbb{Z}$ е нечетно цяло число. Замествайки в (1) получаваме $x = 5z - 1$ или $2x \equiv 3 \pmod{5}$ има единствено решение $x \equiv -1 \pmod{5}$.

(ii) Сравнението $2x \equiv 1 \pmod{4}$ е еквивалентно на уравнението $2x - 1 = 4y$ с две неизвестни x и y , което се свежда до $1 = 2x - 4y = 2(x - 2y)$ и няма решение в цели числа.

(iii) Сравнението $6x \equiv 3 \pmod{9}$ има три решения, защото коефициентът 6 на неизвестния остатък $x \pmod{9}$ и модулът 9 имат най-голям общ делител $(6, 9) = 3$, който дели свободния член 3. Решаваното сравнение се свежда до уравнението $6x - 3 = 9y$. След съкращаване на 3 получаваме $2x - 1 = 3y$ или

$$x = \frac{3y + 1}{2} = y + \frac{y + 1}{2}. \quad (2)$$

Оттук $y + 1$ е четно или $y = 2z - 1$ е нечетно. Замествайки в (2) получаваме $x = 3z - 1$ или $x \equiv -1 + k\frac{9}{3} = 3k - 1 \pmod{9}$ за $0 \leq k \leq 2$. С други думи, решенията на сравнението $6x \equiv 3 \pmod{9}$ са $x_1 \equiv -1 \pmod{9}$, $x_2 \equiv 2 \pmod{9}$ и $x_3 \equiv 5 \pmod{9}$.

Задача 2. В множеството \mathbb{R}^2 на наредените двойки реални числа е зададена операцията

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}).$$

Да се докаже, че (\mathbb{R}^2, \circ) е група.

Решение: Асоциативният закон за \circ гласи, равенството на наредените двойки реални числа $A = [(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)] \circ (x_3, y_3)$ и $B = (x_1, y_1) \circ [(x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)]$ за $\forall (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$. Наистина,

$$A = (x_1 + x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}) \circ (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}) e^{-x_3} + y_3 e^{x_1 + x_2}) =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 e^{-x_2 - x_3} + y_2 e^{x_1 - x_3} + y_3 e^{x_1 + x_2})$$

съвпада с

$$\begin{aligned} B &= (x_1, y_1) \circ (x_2 + x_3, y_2 e^{-x_3} + y_3 e^{x_2}) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 e^{-(x_2 + x_3)} + (y_2 e^{-x_3} + y_3 e^{x_2}) e^{x_1}) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 e^{-x_2 - x_3} + y_2 e^{x_1 - x_3} + y_3 e^{x_1 + x_2}). \end{aligned}$$

Търсим неутрален елемент $(r, s) \in (\mathbb{R}^2, \circ)$, така че

$$(x, y) \circ (r, s) = (x, y) = (r, s) \circ (x, y) \quad \text{за } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вземайки предвид, че $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ за $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ е изпълнено точно когато поотделно $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ са равни, получаваме

$$x + r = x = r + x \quad \text{и} \quad ye^{-r} + se^x = y = se^{-x} + ye^r \quad \text{за } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Оттук следва, че $r = 0 \in \mathbb{R}$, $s = 0$ и $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ е неутралният елемент на (\mathbb{R}^2, \circ) .

За произволен елемент $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ търсим $(x, y)^{-1} = (z, t) \in \mathbb{R}^2$, така че

$$(x, y) \circ (z, t) = (0, 0) = (z, t) \circ (x, y).$$

С други думи,

$$x + z = 0 = z + x \quad \text{и} \quad ye^{-z} + te^x = 0 = te^{-x} + ye^z,$$

откъдето $z = -x$, $t = -y$ и $(x, y)^{-1} = (-x, -y)$. Следователно (\mathbb{R}^2, \circ) е група.

Задача 3. Да се докаже, че подмножествата

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^* \right\} \\ G_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

на общата линейна група

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \det A \neq 0 \right\}$$

са подгрупи, а подмножеството

$$G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$$

не е подгрупа.

Решение: Подмножеството $G_i \subset GL_2(\mathbb{R})$ е подгрупа тогава и само тогава, когато за $\forall A_1, A_2 \in G_i$ е в сила $A_1^{-1}, A_1 A_2 \in G_i$.

От

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1, \quad \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$$

за $\forall a_i \in \mathbb{R}$ следва, че G_1 е подгрупа на $GL_2(\mathbb{R})$.

Съгласно

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1}{b_1} \\ 0 & \frac{1}{b_1} \end{pmatrix} \in G_2, \quad \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 + a_1 b_2 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} \in G_2$$

за $\forall a_i \in \mathbb{R}, \forall b_i \in \mathbb{R}^*$, подмножеството $G_2 \subset GL_2(\mathbb{R})$ е подгрупа.

Въз основа на

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1 c_1} \\ 0 & \frac{1}{c_1} \end{pmatrix} \in G_3,$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \in G_3$$

за $\forall a_i, c_i \in \mathbb{R}^*, \forall b_i \in \mathbb{R}$, стигаме до извода, че G_3 е подгрупа на $GL_2(\mathbb{R})$.

От

$$\begin{pmatrix} -1 & a_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 - a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin G_4$$

за произволни $a_i \in \mathbb{R}$ получаваме, че G_4 не е подгрупа на $GL_2(\mathbb{R})$.

Задача 4. Да се определи кои от изображенията $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ са хомоморфизми на групи:

(i) $f(z) = |z|$;

(ii) $f(z) = 2|z|$;

(iii) $f(z) = \frac{1}{|z|}$;

(iv) $f(z) = 1 + |z|$;

(v) $f(z) = |z|^2$;

(vi) $f(z) = 1$;

(vii) $f(z) = 2$.

Решение: (i) От $f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = f(z_1) f(z_2)$ за $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ следва, че $f(z) = |z|$ е хомоморфизъм на \mathbb{C}^* в \mathbb{R}^* .

(ii) Понеже $f(z_1)f(z_2) = (2|z_1|)(2|z_2|) = 2(2|z_1z_2|) = 2f(z_1z_2) \neq f(z_1z_2) \in \mathbb{R}^*$ за някои (всъщност, за всички) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, изображението $f(z) = 2|z|$ не е хомоморфизъм на групи.

(iii) Съгласно $f(z_1z_2) = \frac{1}{|z_1z_2|} = \frac{1}{|z_1|} \cdot \frac{1}{|z_2|} = f(z_1)f(z_2)$ за $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ функцията $f(z) = \frac{1}{|z|}$ е хомоморфизъм на \mathbb{C}^* в \mathbb{R}^* .

(iv) От $f(z_1)f(z_2) = (1+|z_1|)(1+|z_2|) = 1+|z_1z_2|+|z_1|+|z_2| = f(z_1z_2)+|z_1|+|z_2| > f(z_1z_2)$ за някои (всъщност, за всички) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ получаваме, че $f(z) = 1+|z|$ не е хомоморфизъм на \mathbb{C}^* в \mathbb{R}^* .

(v) Въз основа на $f(z_1z_2) = |z_1z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2 = f(z_1)f(z_2)$ за $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ функцията $f(z) = |z|^2$ е хомоморфизъм на \mathbb{C}^* в \mathbb{R}^* .

(vi) Поради $f(z_1z_2) = 1 = 1.1 = f(z_1)f(z_2)$ за $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ постоянното изображение $f(z) = 1$ е хомоморфизъм на \mathbb{C}^* в \mathbb{R}^* .

(vii) Съгласно $f(z_1z_2) = 2 = \frac{1}{2}.2.2 = \frac{1}{2}f(z_1)f(z_2) \neq f(z_1)f(z_2)$ за някои (всъщност, за всички) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, постоянното изображение $f(z) = 2$ не е хомоморфизъм на \mathbb{C}^* в \mathbb{R}^* .

Задача 5. Да се докаже, че:

(i) изображението

$$\varphi_1 : H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow (\mathbb{R}, +),$$

$$\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a$$

на подгрупата H_1 на $GL_2(\mathbb{R})$ в адитивната група на реалните числа е хомоморфизъм на групи;

(ii) изображението

$$\varphi_2 : H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot),$$

$$\varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a$$

на подгрупата H_2 на $GL_2(\mathbb{R})$ в мултипликативната група на ненулевите реални числа е хомоморфизъм на групи;

(iii) изображението

$$\varphi_3 : H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot),$$

$$\varphi_3 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = c$$

на подгрупата H_3 на $GL_2(\mathbb{R})$ в мултипликативната група на ненулевите реални числа е хомоморфизъм на групи;

(iv) изображението

$$\varphi_4 : H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow (\mathbb{R}, +),$$

$$\varphi_4 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = b$$

на подгрупата H_2 на $GL_2(\mathbb{R})$ в адитивната група на реалните числа не е хомоморфизъм на групи.

Решение: (i) Съгласно

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a_1 + a_2 = \\ &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{за } \forall a_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

изображението φ_1 е хомоморфизъм на групи.

(ii) От

$$\begin{aligned} \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a_1 a_2 = \\ &= \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{за } \forall a_i \in \mathbb{R}^*, \forall b_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

следва, че φ_2 е хомоморфизъм на групи.

(iii) Вземайки предвид, че

$$\begin{aligned} \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \right) = c_1 c_2 = \\ &= \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \right) \varphi_3 \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{за } \forall a_i, c_i \in \mathbb{R}^*, \forall b_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

стигаме до извода, че φ_3 е хомоморфизъм на групи.

(iv) От

$$\begin{aligned} \varphi_4 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_4 \left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a_1 b_2 + b_1 \neq b_1 + b_2 = \\ &= \varphi_4 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \varphi_4 \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{за } \forall a_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}, \forall a_2 \in \mathbb{R}^*, \forall b_1 \in \mathbb{R}, \forall b_2 \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

следва, че φ_4 не е хомоморфизъм на групи.

Задача 6. Да се намери реда на елемента g на групата G , ако:

$$(a) g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ и } G = (\mathbb{C}^*, \cdot);$$

$$(б) g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ и } G = (\mathbb{C}, +);$$

$$(в) g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } G = S_5;$$

$$(г) g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } G = S_6;$$

$$(д) g = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } G = GL_2(\mathbb{C}).$$

Решение: Редът на $g \in G$ е минималното естествено число r с $g^r = e$ за неутралния елемент e на G .

(а) Елементът $g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \in (\mathbb{C}^*, \cdot)$ е от ред 12, защото $g^m = \cos\left(\frac{5\pi m}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi m}{6}\right) = 1$ тогава и само тогава, когато $\frac{5\pi m}{6} = 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$. Последното е равносилно на това 12 да дели m , а минималното естествено кратно на 12 е 12.

(б) Същото комплексно число $g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ има безкраен ред в $(\mathbb{C}, +)$, защото за $\forall l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ е в сила $lg \neq 0$.

(в) След разлагане $g = (45)(123) \in S_5$ в произведение от независими цикли, пресмятаме реда на g като най-малкото общо кратно 6 на дължините 2 и 3 на участващите в разлагането на g цикли.

(г) Пермутацията $g = (12345) \in S_6$ е от ред 5 като цикъл с дължина 5.

(д) От $g^2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$ следва, че матрицата $E_2 \neq g = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ е елемент от ред 2.

Задача 7. Нека G е група, а H е нормална подгрупа на G с индекс $n-1$. Да се докаже, че всеки елемент $g \in G$ от ред n принадлежи на H .

Решение: Ако $g \in G$ е от ред n , то $g^n = e$ за неутралния елемент $e \in G$. От друга страна фактор-групата G/H е от ред $n-1$, така че $(gH)^{n-1} = g^{n-1}H = H$. В резултат, $g^{n-1} = h \in H$ и $g = (g^{n-1})^{-1} = h^{-1} \in H$.

Задача 8. Дадена е подгрупата

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\} < GL_2(\mathbb{Q})$$

на общата линейна група и изображенията

$$\varphi : G \longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad \psi : G \longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot),$$

$$\varphi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab, \quad \psi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab^2$$

Да се докаже, че φ и ψ са хомоморфизми на групи. Да се намерят ядрата $\ker(\varphi)$, $\ker(\psi)$ и образите $\text{im}(\varphi)$, $\text{im}(\psi)$ на тези хомоморфизми.

Решение: Изображението $\varphi = \det$ съвпада с детерминантата, така че φ е хомоморфизъм на групи по теоремата за умножение на детерминанти $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ за произволни $A, B \in G$. Ядрото

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \ker(\det) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G \mid \det \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab = 1 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

Образът $\text{im}(\varphi) = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, защото за всяко $q \in \mathbb{Q}^*$ съществува матрица

$$A(q) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \text{с} \quad \varphi(A(q)) = q.$$

Изображението

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot), \\ \psi : \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} &= ab^2 \end{aligned}$$

е хомоморфизъм на групи съгласно

$$\begin{aligned} \psi \left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \right) &= \psi \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 c_2 + c_1 b_2 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} = (a_1 a_2)(b_1 b_2)^2 = \\ &= (a_1 b_1^2)(a_2 b_2^2) = \psi \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \psi \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ядрото

$$\begin{aligned} \ker \psi &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G \mid \psi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab^2 = 1 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} b^{-2} & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

Образът $\text{im} \psi = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, защото за $\forall q \in \mathbb{Q}^*$ съществува

$$A(q) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \text{с} \quad \psi(A(q)) = q \cdot 1^2 = q.$$

Задача 9. В множеството

$$G = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

на наредените тройки реални числа въвеждаме бинарна операция умножение по правилото

$$(a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, \quad b_1 + a_1c_2 + b_2, \quad c_1 + c_2).$$

Да се докаже, че:

(а) G е група относно \circ ;

(б) изображението

$$\varphi : G \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +),$$

$$\varphi(a, b, c) = (a, c)$$

е хомоморфизъм на групи с ядро $H = \{ (0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R} \}$ и образ $(\mathbb{R}^2, +)$;

(в) подгрупата H на G е изоморфна на адитивната група $(\mathbb{R}, +)$ на реалните числа.

Решение: (а) Асоциативността на \circ гласи, съвпадението на наредените тройки $A = [(a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2)] \circ (a_3, b_3, c_3)$ и $B = (a_1, b_1, c_1) \circ [(a_2, b_2, c_2) \circ (a_3, b_3, c_3)]$. Това е в сила съгласно

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2, \quad b_1 + a_1c_2 + b_2, \quad c_1 + c_2) \circ (a_3, b_3, c_3) = \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, \quad (b_1 + a_1c_2 + b_2) + (a_1 + a_2)c_3 + b_3, \quad (c_1 + c_2) + c_3) = \\ &= (a_1 + a_2 + a_3, \quad b_1 + b_2 + b_3 + a_1c_2 + a_1c_3 + a_2c_3, \quad c_1 + c_2 + c_3) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} B &= (a_1, b_1, c_1) \circ (a_2 + a_3, \quad b_2 + a_2c_3 + b_3, \quad c_2 + c_3) = \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), \quad b_1 + a_1(c_2 + c_3) + (b_2 + a_2c_3 + b_3), \quad c_1 + (c_2 + c_3)) = \\ &= (a_1 + a_2 + a_3, \quad b_1 + b_2 + b_3 + a_1c_2 + a_1c_3 + a_2c_3, \quad c_1 + c_2 + c_3). \end{aligned}$$

Неутралният елемент $e = (e_1, e_2, e_3) \in G$ изпълнява равенствата

$$(a, b, c) \circ (e_1, e_2, e_3) = (a, b, c) = (e_1, e_2, e_3) \circ (a, b, c) \quad \text{за} \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

По-точно,

$$\left| \begin{array}{l} a + e_1 = a = e_1 + a \\ b + ae_3 + e_2 = b = e_2 + e_1c + b \\ c + e_3 = c = e_3 + c \end{array} \right. .$$

От първото и третото равенство получаваме $e_1 = e_3 = 0$. Заместваме във второто равенство и извеждаме, че $e_2 = 0$. Следователно неутралният елемент на (G, \circ) е $e = (0, 0, 0)$.

За $\forall (a, b, c) \in G$ търсим $(a, b, c)^{-1} = (x, y, z) \in G$, така че

$$(a, b, c) \circ (x, y, z) = e = (0, 0, 0) = (x, y, z) \circ (a, b, c).$$

Получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} a + x = 0 = x + a \\ b + az + y = 0 = y + xc + b \\ c + z = 0 = z + c \end{array} \right.$$

за $x, y, z \in \mathbb{R}$. Оттук $x = -a$, $z = -c$ и $b - ac + y = 0$ или $y = ac - b$. По този начин, $\forall (a, b, c) \in G$ има обратен $(a, b, c)^{-1} = (-a, ac - b, -c) \in G$ относно \circ и (G, \circ) е група.

(б) Изображението $\varphi : G \rightarrow (\mathbb{R}^2, +)$ е хомоморфизъм на групи съгласно

$$\begin{aligned} \varphi((a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2)) &= \varphi(a_1 + a_2, b_1 + a_1c_2 + b_2, c_1 + c_2) = (a_1 + a_2, c_1 + c_2) = \\ &= (a_1, c_1) + (a_2, c_2) = \varphi(a_1, b_1, c_1) + \varphi(a_2, b_2, c_2). \end{aligned}$$

Ядрото

$$\ker(\varphi) = \{(a, b, c) \in G \mid \varphi(a, b, c) = (a, c) = (0, 0)\} = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\} = H.$$

Образът $\text{im}(\varphi) = (\mathbb{R}^2, +)$, защото за всяко $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ съществува $(a, 0, c) \in G$ с $\varphi(a, 0, c) = (a, c)$.

(в) Съответствието $\psi : H \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, $\psi(0, b, 0) = b$ за $b \in \mathbb{R}$ е взаимно-однозначен хомоморфизъм на групи, съгласно

$$\psi((0, b_1, 0) \circ (0, b_2, 0)) = \psi(0, b_1 + b_2, 0) = b_1 + b_2 = \psi(0, b_1, 0) + \psi(0, b_2, 0).$$

Задача 10. Кои от следните двойки пермутации от S_6 са спрегнати:

$$(a) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(б) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

Решение: Две пермутации $\sigma, \tau \in S_6$ са спрегнати в S_6 тогава и само тогава, когато имат еднакъв цикличен строеж. Това означава наличие на един и същи брой цикли с една и съща дължина в разлаганията на σ и τ като произведения от независими цикли.

(а) $\sigma = (34)(125)$ и $\tau = (254)(16)$ са спрегнати в S_6 като произведения на два независими цикъла с дължини 2 и 3.

(б) $\sigma = (24)(13)$ и $\tau = (26)(145)$ не са спрегнати в S_6 , защото σ е произведение на две независими транспозиции, а τ е произведение на троен цикъл с независима от него транспозиция.

Задача 11. Да се определи кои от следните пермутации $\sigma \in S_6$ са нечетни:

$$(a) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(б) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

Решение: Ако $\sigma = \zeta_k \dots \zeta_1$ е разлагането на σ в произведение от независими цикли ζ_i , то четността на σ съвпада с четността на броя на циклите ζ_i с четна дължина. Причина за това е, че циклите с нечетна дължина са четни пермутации, докато циклите с четна дължина са нечетни пермутации.

(а) Разлагането $\sigma = (46)(123)$ на σ в произведение от независими цикли съдържа единствен цикъл с четна дължина, така че $\sigma \in S_6 \setminus A_6$ е нечетна пермутация.

(б) Разлагането $\sigma = (56)(24)$ на σ в произведение от независими цикли се състои от два два цикъла с четна дължина, така че $\sigma \in A_6$ е четна пермутация.