§ 2. Най-голям общ делител и най-малко общо кратно

Когато говорим за най-голям общ делител (НОД) на няколко числа, ще считаме, че поне едно от числата е различно от нула, а когато говорим за най-малко общо кратно (НОК), ще считаме, че всичките числа са различни от нула.

**Определение.** Естественото число *d* ще наричаме *най-голям общ делител на числата a и b* (бележим ), ако:

1) ;

2) от  следва .

Съществуването на НОД на две числа се обезпечава от алгоритъма на Евклид, изложен по-долу. От пункт 2) на определението следва, че най-големият общ делител на две числа *a* и *b* е единствен и действително е най-големият измежду общите делители на *a* и *b*.

**Определение.** Числата *a* и *b* се наричат *взаимно прости*, ако 

Ще изложим алгоритъма на Евклид, който е едновременно и доказателство за съществуването на НОД на две числа, и практическо правило за намирането му.

Ясно е, че , ето защо ще считаме, че  (ако едното от числата е равно на нула, то търсеният НОД съвпада с другото число и случаят е неинтересен).

Нека

. (1)

Ако , нека

. (2)

Ако и , нека

. (3)

(Правилото е: "всеки получен остатък делим на следващия".) Тъй като , този процес не може да бъде безкраен и след краен брой стъпки ще получим нулев остатък. Нека например , т.е.

 (4)

(в общия случай разсъжденията са същите). Ще покажем, че последният ненулев остатък, в случая , е най-големият общ делител на *a* и *b* (ако още , т.е. , то ). Действително, равенството (4) означава, че . Сега от (3) следва . По-нататък, от (2) получаваме  и накрая от (1) следва . Така разчитането на равенствата от (1) до (4) отзад напред показва, че . Нека сега . Тогава  (от (1)),  (от (2)) и накрая  (от (3)). Така разчитането на равенствата от (1) до (3) отпред назад показва, че е изпълнено и второто условие от определението за НОД. Следователно .

**Твърдение 2.1 (тъждество на Безу).** *Ако , съществуват числа u, v, такива че . При това .*

*Доказателство.* От равенството (3) от алгоритъма на Евклид изразяваме първо  чрез  и , после (от (2)) изразяваме  чрез  и *b* и накрая (от (1)) изразяваме  чрез *a* и *b*. Окончателно получаваме  за подходящи цели числа *u* и *v*.

По-нататък, ако , то  и след съкращаване на *d* получаваме , откъдето вече е ясно, че .

**Следствие 2.2.** *Две числа a и b са взаимно прости тогава и само тогава, когато съществуват числа u, v, такива че .*

*Доказателство.* Ако *a* и *b* са взаимно прости, прилагаме твърдение 2.1. Обратното е очевидно.

**Твърдение 2.3.** *Ако  и , то .*

*Доказателство.* Тъй като **, съществуват числа *u* и *v*, такива че . Умножаваме това равенство с  и получаваме . Очевидно , а от условието имаме , следователно .

**Твърдение 2.4.** *Ако ,  и , то .*

*Доказателство.* Нека . Сега от  и  следва  . Тогава , т.е. .

**Упражнение 2.5.** *Да се докаже, че ако , то множеството от общите делители на a и b съвпада с множеството от общите делители на b и r, в частност .*

**Твърдение 2.6.** *Всяко общо кратно на числата a и b има вида*

*.*

*Доказателство.* Нека  и ; тогава . Ако *k* е общо кратно на *a* и *b*, то . Също така , т.е.  или . Тъй като , то . Нека . Тогава

.

Твърдението е доказано.

**Определение.** Естественото число *m* ще наричаме *най-малко общо кратно на числата a и b* (бележим ), ако:

1) ;

2) от  следва .

**Твърдение 2.7.** *Всеки две числа a и b притежават единствено най-малко общо кратно. При това . В частност, ако , то .*

*Доказателство.* Да положим . От твърдение 2.6 следва, че *m* е общо кратно на числата *a* и *b*, делящо всяко друго тяхно общо кратно, т.е. . При това *m* е единствено с тези свойства и действително е най-малкото измежду общите кратни на *a* и *b*.

Накрая ще отбележим, че определенията за НОД и НОК на две числа се пренасят без изменение за повече от две числа. НОД и НОК на числата  ще означаваме съответно с  и .

**Упражнение 2.8.** *Да се докажат равенствата*

**

 *и*

*.*