§ 1. Делимост

В целия текст под число ще разбираме цяло число. С ***N*** и ***Z*** ще бележим съответно множеството на естествените числа и множеството на целите числа.

Знаем, че сума, разлика и произведение на цели числа също е цяло число. Частното на две цели числа, обаче, не винаги е цяло число.

**Определение.** Нека  и . Ще казваме, че *числото b дели числото a* (или че *a се дели на b*), ако съществува цяло число *q*, такова че . Числото *b* се нарича *делител на a*, а числото *a* – *кратно на b*.

Ако *b* дели *a*, ще използваме означението . В противен случай ще пишем .

**Основни свойства на делимостта.**

**1.** За всяко (ненулево) число *b* е в сила .

**2.** Ако , то .

**3.** Ако  и , то .

**4.** Ако  и , то .

**5.** Ако  и , то .

**6.** Ако  и , то .

**7.** Ако в равенство от вида  е дадено, че всички събираеми, освен (например)  се делят на *b*, то  също се дели на *b*.

Доказателствата на тези свойства следват непосредствено от определението за делимост, затова предоставяме осмислянето им на читателя.

**Теорема 1.1 (теорема за деление с остатък).** *За всеки две цели числа a и b, , съществуват еднозначно определени цели числа q и r, такива че  и . (Числото a се нарича делимо, b – делител, q – (непълно) частно и r – остатък при делението на a с b.)*

*Доказателство.* **1. Единственост.** Нека  и . Изваждаме двете равенства и полученото записваме във вида . Ако , то дясната страна по модул е по-голяма от лявата и равенството е невъзможно. Следователно , т.е. , откъдето и .

**2. Съществуване.** В зависимост от знаците на *a* и *b* съществуват няколко възможности. Най-същественият случай е . В този случай нека *q* е най-голямото неотрицателно число, за което  и да положим . Тогава е изпълнено равенството ** и от  следва .

Ще спестим подробностите, свързани с останалите възможности за *a* и *b* (желателно е читателят да ги обмисли сам), като само ще отбележим, че във всички случаи *bq* е най-голямото целочислено кратно на *b*, ненадминаващо *a,* а .

Ето всички възможности, илюстрирани с конкретни числа:



**Следствие 1.2.** *От всеки n последователни цели числа (точно) едно се дели на n.*

*Доказателство.* Нека  са *n* последователни цели числа. Да разделим *a* на *n* с остатък: . Ако  , то *a* се дели на *n*. Ако пък , то числото  фигурира в горния списък и се дели на *n*.

В действителност, остатъците, които дават *n* последователни цели числа при деление на *n* са всички възможни остатъци , взети в някакъв ред.

**Определение.** Ако *x* е произволно реално число, със символа  ще бележим *най-голямото цяло число, ненадминаващо x*. Числото  се нарича *цяла част на x*, а числото  – *дробна част на x*.

**Упражнение 1.3.** *Нека*  *и . Да се докаже, че  при  и  при .*

*Упътване.* Запишете равенството  във вида  при ** и във вида  при **.

**Теорема 1.4.** *За всеки две естествени числа a и  съществува единствено представяне на a във вида*

*,*

*където  за всяко  и .*

*Доказателство.* **1. Единственост.** Да допуснем, че



и . От това равенство следва, че , но това е възможно само ако . Тогава за числото  получаваме представянията

.

Продължавайки по същия начин, се уверяваме, че  и . за всяко .

**2. Съществуване.** Ако , то  и . Нека . Разделяме *a* на *p* с остатък: , където  и освен това . Ако , полагаме  и получаваме представянето . Ако пък , разделяме  на *p* с остатък и получаваме  и , където  и . Ако  , полагаме  и получаваме търсеното представяне за *a*. Ако , отново делим  на *p* с остатък и т.н. Тъй като  и тези числа са естествени, този процес не може да бъде безкраен и за някое *n* ще получим . Полагайки , получаваме търсеното представяне за *a*. Теоремата е доказана.

**Коментар.** Представянето на едно естествено число *a* във вида, описан в теорема 1.4, се нарича *запис на a в p-ична бройна система* (или *p-ичен запис на a*). Числото *p* се нарича *основа на бройната система*, а числата  – *p-ични цифри на* *a*. Така при фиксирано *p* всяко естествено число може да се запише с краен брой символи. При десетична бройна система това са цифрите . При двоична бройна система са достатъчни само два символа – цифрите 0 и 1.

Доказателството на теоремата (частта за съществуване) дава и алгоритъм за представяне на *a* в *p*-ична бройна система.

**Упражнение 1.5.** *Да се докаже, че едно естествено число а, записано в десетична бройна система, се дели на* 3 *(се дели на* 9*) точно когато сумата от цифрите му се дели на* 3 *(се дели на* 9*).*

*Упътване.* Използвайте, че за всяко естествено число *k* числото  се дели на 9 (а значи и на 3), както и равенството



.