Иван Проданов
Николай Хаджииванов
Иван Чобанов

Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане

Функции на една променлива

Второ стереотипно издание

София, 1992

„Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане“ съдържа упражнения върху множества, индукция, граници, непрекъснатост, производни, безкрайни редове и произведения, неопределени и определени интеграли на функции на една независима променлива.

Сборникът е допълнение към курса по диференциално и интегрално смятане на проф. Я. Тагамлицки, но е построен по начин, който позволява да се използува и самостоятелно. Учебното съдържание в него е съобразено с програмата по анализ за студентите от Факултета по математика и информатика и от Физическия факултет на Софийския университет „Св. Климент Охридски“, но може да се използува и при обучението на студенти от други висши учебни заведения в страната, както и за самообразование.

Съдържание

Пета глава
Граници на функции

Шеста глава
Непрекъснати функции

Седма глава
Производни

Осма глава
Безкрайни редове

Предговор
към първото издание

На светлата памет на К. Попов

Настоящият сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане на функции на една променлива съдържа с известни допълнения материала, който традиционно се изучава на упражненията по тази дисциплина от студентите по математика и физика в Университета. Макар и построен по начин, който позволява да се работи с него без използуване на друга литература, сборникът е илюстрация и допълнение към претърпелия вече пет издания превъзходен курс по анализ на проф. Я. Тагамлицки.

Тази и без това трудна задача се усложняваше от необходимостта студентът по математика, който обикновено започва следването си с недостатъчни по качество и количество елементарни математически навици, да бъде доведен бързо до работа на повисоко ниво. От друга страна, за да е по-малко непривлекателен, един сборник от задачи трябва да представлява свързано цяло, а не механичен сбор от отделни упражнения. Най-после за студентите от Университета настоящето помагало е първото у нас от този род. В противовес на всичко това на разположение бяха богатият опит и традицията на катедрата по диференциално и интегрално смятане.

Основните сведения за множества и изображения, с които изложението започва, бяха включени поради един странен анахронизъм в университетското ни математическо образование, което не предвижда като задължителен предмет теорията на множествата и принуждава отделните преподаватели да се опитват да жънат от тази ничия земя, без тя да е била засята.

Задачите върху математическата индукция целят да запълнят празнини от средното образование по математика — липсата на достатъчен опит за елементарни пресмятания, на достатъчен запас от конкретни математически факти, на достатъчно насочени наблюдения върху прости математически феномени. За съжаление необходимата енергия за преодоляване на потенциалния праг между средното и висшето образование по математика не може да се концентрира само в една глава и това наложи отпечатъка си върху цялата книга, която поради тази причина съдържа значителен брой чисто технически задачи.

Централната роля, която принципът за непрекъснатост играе в математическия анализ, наложи той да бъде разгледан в отделна глава. Една математическа същност може да се представи с помощта на различни понятия. Такава метаморфоза на идеите се съзира например в онези задачи, при които смятането с граници е заменено със смятане с инфимуми и супремуми. Този аспект може би по-добре отразява генезиса на идеята за близост, отколкото формализиращото я понятие за граница.

Посветена на традиционни въпроси, главата за безкрайните редове между другото съдържа и едно системно въвеждане на експоненциалната и логаритмичната функция. Започнатото тук упражняване върху епсилониката продължава и в главите за граници на функции, непрекъснатост и производни.

Асимптотиката на елементарните функции е подробно разгледана в главите за граници на функции и производни; първата от тях съдържа и един своеобразен подход към степенните развития на синуса и косинуса и на експоненциалната функция, при който не се използуват производни.

Достатъчно внимание е отделено и на толкова основното, колкото и зле усвоявано понятие за непрекъснатост на функция. Не са пренебрегнати безкрайните редове, техниката на диференцирането и интегрирането и приложенията им. Несобствените интеграли се разглеждат във втората част, за да се избегне противоестественото им отделяне от интеграли, които зависят от параметър и изискват функции на няколко променливи, както и от интеграла на Льобег.

Налице е и възможност за работа на различни нива, като се включват или изпускат отделни цикли или последните задачи от даден цикъл. Конструирането на тези цикли бе обект на особена грижа от страна на авторите, които се придържаха към известната максима: когато имаш да кажеш две неща, кажи ги едно след друго. Ето защо задачите от всеки цикъл трябва да се решават последователно по реда им в сборника. Разбира се, както самият читател, така и ръководителят на обучението имат възможност за избор в зависимост от необходимостта и личния си вкус.

Релефът на ландшафта е маркиран с помощта на топографските знаци ° и *, първият от които означава плитко, а вторият — дълбоко място. Пътуването се облекчава от екскурзионните указания — дефиниции, теореми и общи упътвания, дадени в петит.

Авторите благодарят на рецензентите проф. Я. Тагамлицки и доц. Д. Скордев за ценните им препоръки. Доц. Скордев се нагърби и с неблагодарната работа да провери всичките задачи. Доц. Лочев бе любезен да предложи някои интересни задачи. Р. Докова извърши значителна работа по окончателното оформяне на книгата. Авторите използуват възможността да им изкажат тук своята благодарност.

Авторите

УСЛОВИЯ

Първа глава

Множества и изображения

§ 1. Включване и равенство между множества

Множествата (*съвкупностите*) тук се означават с главни латински или гръцки букви, като например A, B, C, …, X, Y, Z, …, Σ, Ω, …, а *елементите* им — с малки латински или гръцки букви, като например a, b, c, …, x, y, z, …, σ, ω, … Когато a е елемент на A, се пише $a \in A$; когато a не е елемент на A, се пише $a \notin A$. В първия случай се казва още, че a *принадлежи* на A, а във втория — че a *не принадлежи* на A. Казва се още, че множеството A е *подмножество* на множеството B, и се пише $A \subset B$, когато всеки елемент на A принадлежи на B.

Задача 1°. От $A \subset B$ и $B \subset A$ следва $A = B$.

Множество, което не притежава нито един елемент, се нарича *празно* (*нулево*).

Задача 2°. Ако Ω е празно множество, а A е произволно множество, то $\Omega \subset A$.

Задача 3°. Ако Ω_1 и Ω_2 са празни множества, то $\Omega_1 = \Omega_2$.

Единственото съгласно зад. 3 празно множество се означава със символа $\varnothing$.

§ 2. Обединение на множества

Ако A е множество и на всеки елемент α на A е съпоставено единствено множество M_α, се казва, че е зададена *фамилия от множества* $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$, за която A е *множеството на индексите*.

Нека е дадена фамилия от множества $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. *Обединение* (*сума*) на тази фамилия се нарича съвкупността от елементите на всичките множества от фамилията и се означава с $\cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ или с $\bigcup\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$. Когато множествата от фамилията са краен брой M_1, M_2, …, M_n, обединението се означава понякога и по следните два начина: $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ или $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} M_\nu$. Когато множеството A на индексите съвпада с множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа, обединението се означава и с $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \cup \ldots$ или с $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$. Очевидно $x \in \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ тогава и само тогава, когато съществува елемент α на A, за който $x \in M_\alpha$.

Задача 4°. Да се намери обединението на множеството на всичките четни и на множеството на всичките нечетни числа.

Задача 5°. За произволно цяло число s нека $M(s)$ е множеството на целите числа, които не се делят на s. Ако $s_1, s_2, \ldots, s_n$ са цели числа, а $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ е най-малкото им общо кратно, то $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} M(s_\nu) = M((s_1, s_2, \ldots, s_n))$.

Задача 6°. $A \cup B = A$ тогава и само тогава, когато $B \subset A$.

§ 3. Сечение на множества

Сечение на фамилията от множества $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ се нарича съвкупността от общите елементи на всичките множества от фамилията и се означава с $\cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ или с $\bigcap\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$. Когато множествата от фамилията са краен брой $M_1, M_2, \ldots, M_n$, сечението понякога се означава и по следните два начина: $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ или $\bigcap\limits_{\nu=1}^{n} M_\nu$. Когато множеството A на индексите съвпада с множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа, сечението се означава и с $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n \cap \ldots$ или с $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$. Очевидно $x \in \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ тогава и само тогава, когато за всеки елемент α на A е в сила $x \in M_\alpha$.

Задача 7°. Да се намери сечението на множеството на всичките цели числа, които се делят на 3, и на множеството на всичките цели числа, които се делят на 4.

Задача 8. За произволно цяло число s нека $M[s]$ е множеството на целите числа, които се делят на s. Ако $s_1, s_2, \ldots, s_n$ са цели числа, при означението от зад. 5 е в сила

$$\bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu] = M[(s_1, s_2, \ldots s_n)].$$

Задача 9°. $A \cap B = A$ тогава и само тогава, когато $A \subset B$.

Задача 10. Да се докажат равенствата:

а) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

б) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

г) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

д) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

е) $\cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap Y = \cup\{X_\alpha \cap Y \mid \alpha \in A\}$;

ж) $\cap\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup Y = \cap\{X_\alpha \cup Y \mid \alpha \in A\}$;

з) $(\cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}) \cap (\cup\{Y_\beta \mid \beta \in B\}) = \cup\{X_\alpha \cap Y_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$;

и) $(\cap\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}) \cup (\cap\{Y_\beta \mid \beta \in B\}) = \cap\{X_\alpha \cup Y_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$.

§ 4. Разлика на множества

Разлика на множествата A и B се нарича множеството на всичките елементи на A, които не принадлежат на B, и се означава с $A \setminus B$.

Задача 11°. Нека $s \in \mathbf{I}$, където $\mathbf{I}$ е множеството на целите числа. При означенията от зад. 5 и 8 да се докаже, че $\mathbf{I} \setminus M(s) = M[s]$.

Задача 12°. Да се докаже, че:
а) $A \setminus B = A$ тогава и само тогава, когато $A \cap B = \varnothing$;
б) $A \setminus B = \varnothing$ тогава и само тогава, когато $A \subset B$;
в) $A \subset B \cup C$ тогава и само тогава, когато $A \setminus B \subset C$.

Задача 13. Да се докаже, че:

а) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

б) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

в) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;

г) $M \setminus \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} = \cup\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$;

д) $M \setminus \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} = \cap\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$;

е) $\cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} \setminus \cup\{N_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \cup\{M_\alpha \setminus N_\alpha \mid \alpha \in A\}$;

ж) $\cap\{M_\alpha \setminus N_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} \setminus \cap\{N_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

§ 5. Изображения

Ако по никакъв начин на всеки елемент x на множеството X е съпоставен единствен елемент y на множеството Y, се казва, че е зададено *изображение* (*функция*) $f: X \to Y$ на множеството X в множеството Y. За да изразим, че елементът y е съпоставен на елемента x, пишем $y = f(x)$; y се нарича *образ* на x чрез изображението f. Множеството X се нарича *дефиниционна област* на функцията f, а множеството Y — *област на стойности* на f.

Нека $A \subset X$. С $f(A)$ се означава множеството $\{f(x) | x \in A\}$ на всичките елементи $f(x)$ на Y, където x пробягва A. Множеството $f(A)$ се нарича *образ* на A чрез f. Очевидно $f(\varnothing) = \varnothing$.

Задача 14. Нека $f: X \to Y$ е изображение на X в Y и $M_\alpha \subset X$ за всяко $\alpha \in A$. Да се докаже, че:

а) $f(\cup\{M_\alpha \,|\, \alpha \in A\}) = \cup\{f(M_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$;

б) $f(\cap\{M_\alpha \,|\, \alpha \in A\}) \subset \cap\{f(M_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$.

Да се посочи пример, когато обратното на б) включване не е в сила.

Задача 15. Нека $f: X \to Y$ е изображение и M и N са подмножества на X. Да се докаже, че $f(M) \setminus f(N) \subset f(M \setminus N)$. Да се посочи пример, когато обратното включване не е в сила.

Нека $f: X \to Y$ е изображение и $B \subset Y$. Под $f^{-1}(B)$ се разбира множеството $\{x | x \in X, f(x) \in B\}$ на всички x от X, за които $f(x) \in B$. Множеството $f^{-1}(B)$ се нарича *прообраз* на множеството B чрез f. Очевидно $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Задача 16. Нека $f: X \to Y$ е изображение и $N_\alpha \subset Y$ за всяко α от A. Да се докаже, че:

а) $f^{-1}(\cup\{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\}) = \cup\{f^{-1}(N_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$;

б) $f^{-1}(\cap\{N_\alpha \,|\, \alpha \in A\}) = \cap\{f^{-1}(N_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$.

Задача 17. Нека $f: X \to Y$ е изображение и M и N са подмножества на Y. Да се докаже, че $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$.

Задача 18. Нека $f: X \to Y$ и $M \subset X$, $N \subset Y$. Да се докаже, че:

а) $f(M) \cap N \neq \varnothing$ тогава и само тогава, когато $M \cap f^{-1}(N) \neq \varnothing$;

б) $f^{-1}(f(M)) \supset M$; **в)** $f(f^{-1}(N)) \subset N$.

Да се посочат примери, когато обратните на б) и в) включвания не са в сила.

Задача 19°. Нека $\mathbf{Q}$ е множеството на рационалните числа и $x = \dfrac{p}{q}$, където p и q са цели числа, $q > 0$ и дробта $\dfrac{p}{q}$ е несъкратима. Изображението $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ е дефинирано чрез равенството $f(x) = \dfrac{1}{q}$.

Да се намерят:

а) $f(0)$; **б)** $f(\mathbf{Q})$;

в) $f(\mathbf{I})$, където $\mathbf{I}$ е множеството на целите числа;

г) $f(\mathbf{N})$, където $\mathbf{N}$ е множеството на естествените числа;

д) $f(\mathbf{I} \setminus \mathbf{N})$; **е)** $f^{-1}(1)$;* **ж)** $f^{-1}(\mathbf{Q})$; **з)** $f^{-1}(2)$;

и) $f^{-1}\left(\mathbf{Q} \setminus \left\{\dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{I}\right\}\right)$.

Задача 20*. При $f: X \to X$ подмножеството M на X се нарича *стабилно* (*относно* f), когато $f(M) \subset M$, $f^{-1}(M) \subset M$. Да се докаже, че:

а) X и $\varnothing$ са стабилни;

б) сечението и обединението на произволна фамилия от стабилни множества са стабилни;

в) измежду стабилните множества, които съдържат дадено множество $A \subset X$, има едно най-малко (ще го наричаме *стабилна обвивка* на A и ще го означаваме с $\Phi(A)$);

г) измежду стабилните множества, които се съдържат в дадено множество $A \subset X$, има едно най-голямо (ще го наричаме *стабилно ядро* на A и ще го означаваме с $\varphi(A)$);

д) *допълнението* $X \setminus M$ на едно стабилно множество $M \subset X$ е стабилно;

е) за всяко $A \subset X$ са в сила равенствата $\Phi(A) = X \setminus \varphi(X \setminus A)$ и $\varphi(A) = X \setminus \Phi(X \setminus A)$;

ж) от $\Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \varnothing$, където x и y са произволни елементи на X, следва $\Phi(x) = \Phi(y)$;

з) $\Phi(A) = \cup\{\Phi(x) \,|\, x \in A\}$.

§ 6. Декартово произведение на множества

За произволни множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ се означава множеството на всичките наредени n-орки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, където $a_\nu \in A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. То се нарича *декартово произведение* на множествата A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и понякога се означава и със символа $\prod\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$. При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ вместо $\prod\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$ често се използува по-краткото означение A^n.

---

* Под $f^{-1}(1)$ трябва да се разбира $f^{-1}(\{1\})$, където $\{1\}$ означава множеството, чийто единствен елемент е 1. Множеството $\{a\}$, чийто единствен елемент е a, по-нататък често ще означаваме с a.

Изображението $\pi_\nu : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, дефинирано с равенството $\pi_\nu((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, се нарича *ν-та проекция* на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Задача 21°. Да се намерят:

а) $\pi_\nu(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$;

б) $\pi_\nu^{-1}(M)$, където $M \subset A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Задача 22°. Да се докаже $M \subset \pi_1(M) \times \pi_2(M) \times \ldots \times \pi_n(M)$, където $M \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, и да се посочи пример, когато обратното включване не е в сила.

Задача 23. Да се докаже, че:

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

б) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;

в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

г) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;

д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

е) $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$;

ж) ако $C \neq \varnothing$, то $A \subset B$ тогава и само тогава, когато $A \times C \subset B \times C$;

з) ако $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $A \times B \subset C \times D$, то $A \subset C$ и $B \subset D$;

и) $\left(\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) \cap \left(\prod_{\nu=1}^{n} B_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{n}(A_\nu \cap B_\nu)$;

й) $\left(\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) \cup \left(\prod_{\nu=1}^{n} B_\nu\right) \subset \prod_{\nu=1}^{n}(A_\nu \cup B_\nu)$. Да се посочи пример, когато обратното включване не е в сила.

Задача 24. Да се докаже, че включването $(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2) \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$ е в сила тогава и само тогава, когато е налице някой от следните случаи:

а) $A_1 \subset B_1$ и $A_2 \subset B_2$; **б)** $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$;

в) $A_1 = B_1$; **г)** $A_2 = B_2$.

§ 7. Обратни изображения

Нека $f{:}X \to Y$ и $g{:}Y \to Z$. Изображението $h{:}X \to Z$, дефинирано с равенството $h(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$, се нарича *суперпозиция* (*композиция*) на изображенията f и g и се означава с $h = g \circ f$.

Задача 25. Ако $f{:}X \to Y$, $g{:}Y \to Z$ и $h{:}Z \to U$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Задача 26. Ако за изображението $f{:}X \to X$ е в сила $f(X) = X$ и $f \circ f = f$, то f е *идентитетът* на X, т. е. от $x \in X$ следва $f(x) = x$.

Изображението $f{:}X \to Y$ се нарича *обратимо*, когато от $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Задача 27. Нека $\alpha \in \mathbf{R}$, където $\mathbf{R}$ е множеството на реалните числа, а $f{:}\mathbf{I} \times \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ (където $\mathbf{I}$ е множеството на целите числа) е дефинирано чрез $f(x,y) = \alpha x + y$ $(x, y \in \mathbf{I})$. Да се намерят всички $\alpha \in \mathbf{R}$, за които f е обратимо.

Задача 28. Да се докаже, че за изображението от зад. 27 е в сила $f(\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \neq \mathbf{R}$.

Едно изображение $g{:}f(X) \to X$ се нарича *обратно* на изображението $f{:}X \to Y$, когато $f \circ g$ е идентитетът на множеството $f(X)$, т. е. $f \circ g(y) = y$ за всеки елемент y на $f(X)$.

Задача 29°. Ако изображението $f{:}X \to Y$ е *константно*, т. е. $f(x_1) = f(x_2)$ за всички x_1 и x_2 от X, да се намерят всичките изображения, обратни на f.

Задача 30. Да се докаже, че:

а) Ако изображението g е обратно на f, то $g(y) \in f^{-1}(y)$ за всяко $y \in f(x)$.

б) Всяко обратно изображение е обратимо.

в) Всяко изображение $f{:}X \to Y$ притежава поне едно обратно. Нещо повече: за всяко $\xi \in X$ съществува обратно изображение g на f, за което $g(f(\xi)) = \xi$.

г) Изображението $f{:}X \to Y$ има точно две обратни изображения тогава и само тогава, когато съществува точно едно двуелементно подмножество $\{x_1, x_2\}$ на X, за което $f(x_1) = f(x_2)$.

д) Изображението f е обратимо тогава и само тогава, когато притежава единствено обратно g. В този случай $g(y) = f^{-1}(y)$ за всяко $y \in f(X)$.*

Задача 31. Ако изображението $f{:}X \to Y$ е обратимо, а $g{:}f(x) \to X$ е обратното му, то $g \circ f$ е идентитетът на X.

Задача 32. Изображението $f{:}X \to Y$ е обратимо тогава и само тогава, когато съществува изображение $h{:}f(X) \to X$, за което

* Поради тази причина обратното изображение на f обикновено се означава с f^{-1}.

$h \circ f$ е идентитетът на X. Когато това е така, h е обратното изображение на f.

Задача 33°. Ако изображението $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (където $\mathbf{R}$ е множеството на реалните числа) е дефинирано с $f(x) = ax$, където a е различно от нула реално число, да се докаже, че то е обратимо, и да се намери обратното му.

Задача 34°. Кога изображението $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, дефинирано с равенството $f(x, y) = (ax + by,\ cx + dy)$, където a, b, c и d са реални числа, е обратимо? Когато f е обратимо, да се намери обратното му изображение.

Задача 35°. Да се докаже, че изображението $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирано с $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, е обратимо, и да се намери обратното му изображение.

Задача 36°. Да се докаже, че изображението $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, дефинирано с равенството $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{1 + |x|}, \dfrac{y}{1 + |y|}\right)$ е обратимо, и да се намери обратното му изображение.

Задача 37*. Ако $f: X \to X$ е обратимо изображение и $A \subset X$, да се докаже, че

$$\Phi(A) = \ldots \cup f^{-1}(f^{-1}(A)) \cup f^{-1}(A) \cup A \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup \ldots$$

(за дефиницията на $\Phi(A)$ вж. зад. 20).

§ 8. Равномощни множества

Нека X и Y са две множества. Когато съществува обратимо изображение $f: X \to Y$, за което $f(X) = Y$*, се казва, че множествата X и Y са *равномощни*, и се пише $X \sim Y$.

Задача 38°. Ако $X \sim Y$ и X е крайно множество, то и Y е крайно множество, а X и Y имат равен брой елементи.

Задача 39. Да се докаже, че:

а) $X \sim X$;

б) ако $X \sim Y$, то $Y \sim X$;

в) ако $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$.

С Y^X се означава множеството на всичките изображения от вида $f: X \to Y$.

* Ако $f: X \to Y$ и $f(X) = Y$, често се казва, че f е изображение на X върху Y.

Задача 40°. Ако A е крайно множество с a елемента, множеството B^A е равномощно с B^a.

Задача 41°. Ако A и B са крайни множества съответно с a и b елемента, множеството B^A има b^a елемента.

Задача 42. От $X \sim X_1$ и $Y \sim Y_1$ следва:

а) $X \times Y \sim X_1 \times Y_1$;

б) $Y^X \sim Y_1^{X_1}$.

Задача 43. Да се докаже, че $Z^{X \times Y} \sim (Z^X)^Y$.

Задача 44. Ако a и b са реални числа и $a < b$, отвореният интервал (a, b) е равномощен с множеството $\mathbf{R}$ на реалните числа.

Задача 45. Ако X е безкрайно множество и $x \in X$, то $X \sim X \setminus \{x\}$.

Задача 46°. Да се докаже, че $(0, 1) \sim [0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, \infty) \sim (-\infty, 0] \sim (-\infty, \infty)$.

§ 9. Изброими множества

Едно множество X се нарича *изброимо*, когато е равномощно с множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа.

Задача 47°. Да се докаже, че едно множество X е тогава и само тогава изброимо, когато елементите му могат да се подредят в безкрайна редица.

Задача 48. Всяко безкрайно множество съдържа изброимо подмножество.

Задача 49°. Множеството $\mathbf{I}$ на целите числа е изброимо.

Задача 50°. Множеството $\mathbf{I}^2$ на точките в равнината, чиито координати са цели числа, е изброимо.

Задача 51. Всяко безкрайно подмножество на изброимо множество е изброимо.

Задача 52°. Всяко безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината с радиуси, не по-малки от 1, е изброимо.

Задача 53°. Декартовото произведение на всеки две изброими множества е изброимо.

Задача 54. Декартовото произведение на краен брой изброими множества е изброимо.

Задача 55. Обединението на изброима фамилия от изброими множества е изброимо.

Задача 56°. Нека α е положително число. Всяко безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината с радиуси, не по-малки от α, е изброимо.

Задача 57. Всяко безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината е изброимо.

Задача 58. Всяко множество от непресичащи се два по два неизродени интервали върху правата е крайно или изброимо.

Задача 59°. Всяко безкрайно множество от непресичащи се еднакви букви T в равнината е изброимо.

Задача 60. Всяко безкрайно множество от непресичащи се (не непременно еднакви) букви T в равнината е изброимо.

Задача 61*. Множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа е изброимо.

Задача 62*. Множеството на всичките крайни подмножества на едно изброимо множество е изброимо.

Едно число a се нарича *алгебрично*, когато съществува такъв ненулев полином P с цели коефициенти, че $P(a) = 0$.

Задача 63*. Множеството на всичките алгебрични числа е изброимо (Кантор).

Задача 64*. Ако M е множество от положителни реални числа, за което съществува такава положителна константа l, че сумата от елементите на произволно крайно подмножество на M да не надминава l, то M е крайно или изброимо. Да се посочи пример на изброимо множество M и число l с горното свойство.

Задача 65°. Нека $f: X \to \mathbf{R}$ е функция, за която съществува такова число l, че за всяко крайно подмножество Y на X е в сила $\sum_{y \in Y} |f(y)| \leqq l$. Да се докаже, че множеството $\{x \mid x \in X, f(x) \neq 0\}$ е крайно или изброимо.

§ 10. Равномощни множества (продължение)

Едно множество M от непразни подмножества на множеството X се нарича *разбиване* на X, когато са изпълнени следните условия:

а) множествата на M не се пресичат две по две;

б) обединението на всичките множества на M съвпада с X, т.е. $\bigcup_{A \in M} A = X$.

Задача 66°. Да се докаже, че за всяко изображение $f: X \to Y$ множеството M на всичките подмножества на X от вида $f^{-1}(y)$, където y пробягва $f(X)$, е разбиване на X.

Задача 67°. Да се докаже, че за всяко изображение $f: X \to Y$ множеството на всички $\Phi(x)$ $(x \in X)$ е разбиване на X. (За дефиницията на $\Phi(x)$ вж. зад. 20.)

Задача 68°. Нека M е разбиване на X и $Y \subset X$. Да се докаже, че ако за всяко $A \in M$ е в сила $A \sim Y \cap A$, то $X \sim Y$.

Задача 69*. Ако $Y \subset X$ и изображението $f: X \to Y$ е *обратимо*, за всяко $x \in X$ е в сила $\Phi(x) \sim \Phi(x) \cap Y$.

Задача 70*. Ако изображението $f: X \to X$ е обратимо и $f(X) \subset Y \subset X$, то $X \sim Y$.

Задача 71*. Ако всяко от множествата X и Y е равномощно с подмножество на другото, множествата X и Y са равномощни (Кантор — Бернщайн).

Задача 72°. Ако множеството Y има поне два елемента, а множеството X е произволно, то X е равномощно с подмножество на Y^X.

Задача 73*. Ако множеството Y има поне два елемента, а множеството X е произволно, множествата X и Y^X не са равномощни (Кантор).

Задача 74*. Множеството $P(A)$ на всичките подмножества на дадено множество A не е равномощно с A (Кантор).

§ 11. Релации

Всяко подмножество R на X^2 се нарича *релация* в X. Когато $(x,y) \in R$, често се пише xRy и се казва, че x и y *се намират в релацията* R.

Така например множеството на всички двойки (x,x), където $x \in R$, е релация; понякога тя се нарича *равенство* в X или *диагонал* на X^2. Друг пример на релация е цялото множество X^2. За да посочим трети пример, да разгледаме множеството на всичките наредени двойки (x,y) от реални числа, за които $x < y$. Тази релация се нарича *наредба* в $\mathbf{R}$.

Една релация R се нарича *рефлексивна*, когато за всяко x от X е изпълнено условието xRx. Това означава, че множеството R съдържа диагонала Δ на X^2 (фиг. 1).

Задача 75°. Кои от посочените по-долу релации са рефлексивни и кои не са:

а) релацията равенство в X; б) релацията $<$ в $\mathbf{R}$;

в) релацията $\leqq$ в $\mathbf{R}$;

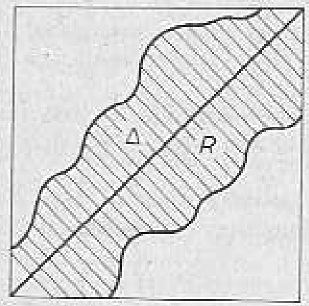
г) релацията *делимост* в $\mathbf{I}$, дефинирана по следния начин: казва се, че *x дели y (y се дели на x)*, където x и y са цели числа, когато съществува цяло число z, за което $xz = y$;

д) релацията *успоредност* в множеството на всичките прави в равнината;

е) релацията *успоредност или съвпадане* на прави в равнината;

ж) релацията *включване* в множеството $X = P(Y)$ на всички подмножества на произволно множество Y, дефинирана по следния начин: ARB, когато $A \subset B$ $(A, B \subset Y)$;

з) релацията *сравнимост по модул* m ($m \in \mathrm{I}$) в множеството I на целите числа, дефинирана по следния начин: xRy точно когато $x - y$ се дели на m?



Фиг. 1

Задача 76°. Нека R е релация в X. Да се докаже, че релацията $R' = R \cup \Delta$, където Δ е диагоналът в X^2, е най-малката рефлексивна релация в X, която съдържа R.

Една релация R се нарича *симетрична*, ако от xRy следва yRx. Когато това е така, понякога се казва, че *множеството* $R \subset X^2$ *е симетрично спрямо диагонала на* X^2.

Задача 77°. Кои от релациите, посочени в зад. 75, са симетрични?

Задача 78°. Всяко сечение на симетрични релации в X е симетрична релация в X.

Задача 79. Нека R е релация в X. Измежду симетричните релации в X, които съдържат R, има една най-малка $S(R)$.

Задача 80°. Нека R е релация в X, а релацията S в X е дефинирана по следния начин: xSy, когато е в сила xRy или yRx. Да се докаже, че $S = S(R)$ (вж. зад. 79).

Една релация R в X се нарича *транзитивна* (*частична наредба в* X), когато от xRy и yRz следва xRz.

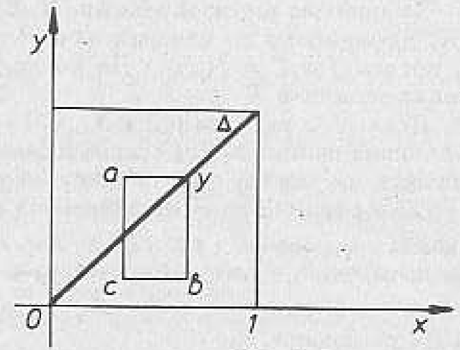
Задача 81°. Кои от релациите, посочени в зад. 75, са транзитивни?

Задача 82°. Сечение на транзитивни релации в X е транзитивна релация в X.

Задача 83. Нека R е релация в X. Измежду транзитивните

релации в X, които съдържат R, има една най-малка $T(R)$.

Задача 84. Нека R е релация в X. Да разгледаме релацията T, дефинирана по следния начин: xTy, когато съществува крайна



Фиг. 2

редица $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ от елементи на X, за която е в сила $x_{\nu-1} R x_\nu$ за всяко $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Да се докаже, че $T = T(R)$ (вж. зад. 83).

Задача 85. Нека R е симетрична релация в X. Да се докаже, че $T(R)$ е също симетрична релация (вж. зад. 83).

Задача 86°. Да се докаже, че ако R е релация в интервала $[0, 1]$, то:

а) релацията R е рефлексивна тогава и само тогава, когато съдържа диагонала Δ на квадрата $[0, 1]^2$;

б) релацията R е симетрична тогава и само тогава, когато множеството R е симетрично спрямо диагонала Δ на $[0, 1]^2$;

в) релацията R е транзитивна тогава и само тогава, когато за всеки правоъгълник $aybc$ (фиг. 2) със страни, успоредни на страните на квадрата $[0, 1]^2$, от условията $y \in \Delta$, $a \in R$ и $b \in R$ винаги следва $c \in R$.

§ 12. Релации за еквивалентност

Една релация R в X се нарича *релация за еквивалентност* в X, когато е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Задача 87°. Кои от релациите, посочени в зад. 75, са релации за еквивалентност?

Задача 88°. Сечение на релации за еквивалентност в X е релация за еквивалентност в X.

Задача 89. Нека R е релация в X. Измежду релациите за еквивалентност в X, които съдържат R, има една най-малка $E(R)$.

Задача 90. За произволна релация R в X е в сила равенството $E(R) = T(S(R \cup \Delta))$ (вж. зад. 89).

Задача 91°. За произволно изображение $f: X \to Y$ нека $E(f)$ е релацията в X, дефинирана по следния начин: $x_1 E(f) x_2$ тогава и само тогава, когато $f(x_1) = f(x_2)$. Да се докаже, че $E(f)$ е релация за еквивалентност в X.

Задача 92°. Нека M е разбиване на X, а R — релация в X, дефинирана по следния начин: $x_1 R x_2$ тогава и само тогава, когато x_1 и x_2 принадлежат на един и същ елемент на разбиването M. Да се докаже, че R е релация за еквивалентност в X.

Нека R е релация за еквивалентност в X и $x \in X$. *Клас на еквивалентност* спрямо релацията R, породен от елемента x, се нарича множеството $\pi(x) = \{y \mid yRx\}$.

Задача 93. Да се докаже, че:

а) множеството на всичките класове на еквивалентност спрямо една релация за еквивалентност R в X е разбиване на X;

б) релацията за еквивалентност, породена от това разбиване (вж. зад. 92), съвпада с R.

Множеството на всичките класове на еквивалентност в X спрямо една релация за еквивалентност R в X се нарича *фактормножество* на X спрямо R и се означава с $X/_R$. Изображението $\pi: X \to X/_R$, което на всяка точка x от X съпоставя класа на еквивалентност $\pi(x)$, на който тя принадлежи, се нарича *факторизображение* (*канонична проекция*).

Задача 94°. Релацията за еквивалентност, породена от факторизображението $\pi: X \to X/_R$ (зад. 91), съвпада с R.

Задача 95°. Нека R е релация в множеството $\mathbf{R}$ на реалните числа, дефинирана както следва: xRy тогава и само тогава, когато разликата $x - y$ е цяло число. Да се докаже, че:

а) R е релация за еквивалентност в $\mathbf{R}$;

б) класовете на еквивалентност са всевъзможните (безкрайни и в двете посоки) аритметични прогресии с разлика 1;

в) интервалът $[0, 1)$ съдържа точно по един елемент от всеки клас на еквивалентност спрямо R.

Задача 96. Нека $M \subset \mathbf{R}$, а R е релацията в $\mathbf{R}$, дефинирана по следния начин: xRy точно когато $x - y \in M$. Да се докаже, че за да бъде R релация за еквивалентност в $\mathbf{R}$, необходимо и достатъчно е M да притежава следните свойства:

а) $M \neq \varnothing$; б) от $x \in M$ да следва $-x \in M$;

в) от $x \in M$ и $y \in M$ да следва $x + y \in M$.

Втора глава

Математическа индукция

§ 1. Елементарни тъждества

Често верността на едно твърдение за всичките естествени числа се доказва с помощта на следния принцип.

Принцип на математическата индукция. *Нека редицата от твърдения*

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \tag{1}$$

притежава следните две свойства:

а) твърдението P_1 е вярно;

б) за всяко естествено n от верността на P_n следва верността на P_{n+1}.

Тогава всичките твърдения от редицата (1) *са верни.*

Задача 1. Да се докажат равенствата:

а) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$;

в) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$;

г) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$;

д) $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \dfrac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$;

е) $1^6 + 2^6 + \cdots + n^6 = \dfrac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$;

ж) $1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 = \dfrac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$.

Понякога сумата $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ се означава съкратено със символа $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$, а произведението $a_1 a_2 \ldots a_n$ — със символа $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$.

Задача 2°. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu-1) = n^2$; б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

г) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu(\nu+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$;

д) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu(m^2-\nu^2) = \frac{1}{4}n(n+1)(2m^2-n^2-n)$;

е) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu!\,\nu = (n+1)!-1$.

Задача 3. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}\cos\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} \quad (x \neq 2^n k\pi,\ k \in \mathbf{I})$;

б) $\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n-1}\left(1+x^{2^\nu}\right) = \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu$.

Задача 4°. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu^2-1} = \frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$; б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^2+\nu-1}{(\nu+2)!} = \frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m) = \frac{1}{m+2}-n(n+1)\ldots(m+n+1)$;

г) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right)$.

§ 2. Геометрична прогресия

Задача 5°. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (n \in \mathbf{N}, x \neq 1)$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu x^{\nu-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2} \quad (n \in \mathbf{N},\ x \neq 1)$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}(a+(\nu-1)b)x^{\nu-1} = \frac{a-(a+(n-1)b)x^n}{1-x} + \frac{bx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$ $(n \in \mathbf{N},\ x \neq 1)$;

г) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{2n} x^\mu \sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{2n} x^{2\nu} \quad (n \in \mathbf{N})$.

Задача 6°. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle a^n - b^n = (a-b)\sum_{\nu=1}^{n} a^{n-\nu}b^{\nu-1} \quad (n \in \mathbf{N})$;

б) $\displaystyle a^n + b^n = (a+b)\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}a^{n-\nu}b^{\nu-1} \quad (n=2m-1,\ m \in \mathbf{N})$.

§ 3. Принцип за сравняване на коефициентите

Задача 7. Ако P е полином от степен n $(n \in \mathbf{N})$, а a — реално число, да се докаже, че тогава и само тогава $P(a) = 0$, когато съществува полином Q от степен $n-1$, за който е в сила $P(x) = (x-a)Q(x)$ за всяко реално x.

Задача 8. Да се докаже, че никой полином от степен n $(n \in \mathbf{N})$ не може да се анулира за повече от n различни стойности на аргумента си.

Задача 9. Ако два полинома най-много от степен n $(n \in \mathbf{N})$ приемат равни стойности за поне $n+1$ различни стойности на аргумента, коефициентите им са съответно равни (п р и н ц и п з а с р а в н я в а н е н а к о е ф и ц и е н т и т е).

Задача 10°. Да се намерят всички двойки a, b от реални числа, за които равенството $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$ е в сила за всяко различно от 0 и -1 реално x.

Задача 11°. Да се намерят всички тройки a, b, c от реални числа, за които равенството $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ е в сила за всяко различно от 1 реално x.

§ 4. Биномни коефициенти

Полиномите на x:

$$\binom{x}{0} = 1,\ \binom{x}{1} = x,\ \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!},\ \dots,\ \binom{x}{\nu} = \frac{x(x-1)\dots(x-\nu+1)}{\nu!},\ \dots$$

се наричат *биномни коефициенти.*

Задача 12°. Ако P е полином от степен n, за който $P(\nu) = 0$ за всяко $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $P(-1) = (-1)^n$, да се докаже, че $P(x) = \binom{x}{n}$ за всяко реално x.

Задача 13. Да се докаже, че за всяко x и всяко $n = 0, 1, 2, \dots$ е в сила равенството

$$\binom{x}{n} + \binom{x}{n+1} = \binom{x+1}{n+1}.$$

Задача 14°. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu}{r} = \binom{n+1}{r+1}$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{x+\nu}{\nu} = \binom{x+1+n}{n}$ за всяко реално x.

Задача 15. Нека m и n са неотрицателни цели числа, а M е множество с m елемента. Да се докаже, че броят на n-елементните подмножества на M е $\binom{m}{n}$.

Задача 16*. Да се докаже равенството $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}$ (биномна формула).

Задача 17. Да се докаже равенството $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{p} \binom{x}{\nu}\binom{y}{p-\nu} = \binom{x+y}{p}$, където x и y са произволни реални числа, а p е неотрицателно цяло число.

Задача 18°. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^2 = \binom{2n}{n}$.

Задача 19. Ако x е произволно реално число, а n — неотрицателно цяло число, да се докаже равенството

$$\sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^{\nu} \binom{x}{\nu}\binom{x}{2n-\nu} = (-1)^n \binom{x}{n}.$$

Задача 20°. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = 2^n$; б) Броят на всички подмножества на едно n-елементно множество е 2^n; в) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} = 0$.

Задача 21°. Да се докажат равенствата:

а) $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$; б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$.

§ 5. Тригонометрични тъждества

Задача 22*. Да се докаже равенството $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, където i е имагинерната единица, n — произволно цяло, а x — произволно реално число (формула на Моавър).

Задача 23. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

б) $\displaystyle\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

в) $\displaystyle\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

Задача 24. Да се докажат равенствата:

а) $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

б) $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

в) $\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

г) $\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

Задача 25*. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x=\dfrac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\quad (n\in\mathrm{N},\ x\neq 2k\pi)$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}\quad (n\in\mathrm{N},\ x\neq 2k\pi)$;

в) $\sum_{\nu=0}^{n}\sin(x+\nu y)=\sin\left(x+\frac{n}{2}y\right)\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$;

г) $\sum_{\nu=0}^{n}\cos(x+\nu y)=\cos\left(x+\frac{n}{2}y\right)\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$;

д) $\sum_{\nu=1}^{n-1}p^{\nu}\sin\nu x=\dfrac{p\sin x-p^{n}\sin nx+p^{n+1}\sin(n-1)x}{1-2p\cos x+p^{2}}$;

е) $\sum_{\nu=1}^{n-1}p^{\nu}\cos\nu x=\dfrac{1-p\cos x-p^{n}\cos nx+p^{n+1}\cos(n-1)x}{1-2p\cos x+p^{2}}$.

Задача 26°. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\sin(x+\nu y)=\sin\left(x+\frac{n}{2}(y+\pi)\right)\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}(y+\pi)}{\cos\frac{y}{2}}$;

б) $\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\cos(x+\nu y)=\sin\left(x+\frac{2n+1}{2}y\right)\dfrac{\sin(n+1)y}{\cos\frac{y}{2}}$.

Задача 27. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n}\sin^{2}\nu x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)x\cdot\sin nx}{2\sin x}$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n}\cos^{2}\nu x=\dfrac{n}{2}+\dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$.

Задача 28*. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin\nu x=\dfrac{\sin(n+1)x}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}-\dfrac{(n+1)\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n}\nu\cos\nu x=\dfrac{(n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}$.

Задача 29*. Да се докажат равенствата:

а) $\sin nx=n\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^{3}x$

$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^{5}x-\cdots;$$

б) $\cos nx=\cos^{n}x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^{2}x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^{4}x-\cdots$

Задача 30*. Да се докажат равенствата:

а) $\sin^{2n}x=\dfrac{1}{4^{n}}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu}2\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x+\dfrac{1}{4^{n}}\binom{2n}{n}$;

б) $\cos^{2n} x = \frac{1}{4^n}\sum_{\nu=0}^{n-1} 2\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x + \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$;

в) $\sin^{2n-1} x = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu-1}\binom{2n-1}{\nu}\sin(2n-2\nu-1)x$;

г) $\cos^{2n-1} x = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{2n-1}{\nu}\cos(2n-2\nu-1)x$.

Задача 31. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n} 4^\nu \sin^4 \frac{x}{2^\nu} = 4^n \sin^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 x$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{4^\nu \cos^2 \frac{x}{2^\nu}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}$;

в) $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^\nu}\operatorname{tg}\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2x$;

г) $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4^\nu}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^\nu} = \frac{4^{n+1}-1}{3.2^{2n-1}} + 4\operatorname{ctg}^2 2x - \frac{1}{4^n}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2^n}$.

§ 6. Неравенства

Задача 32*. Да се докаже неравенството $1 + nx \leqq (1+x)^n$ $(n \in \mathrm{N}, -1 \leqq x)$ (Я. Бернули).

Задача 33. Да се докаже неравенството $(1+x)^n \leqq 2^{n-1}(1+x^n)$ $(n \in \mathrm{N}, -1 \leqq x)$.

Задача 34. Да се докаже неравенството $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} < 3 \quad (n \in \mathrm{N})$.

Задача 35°. Да се докаже неравенството $|\sin nx| \leqq n|\sin x|$ $(n \in \mathrm{N})$.

Задача 36°. Да се докажат неравенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \geqq \sqrt{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu} \geqq \frac{7}{12} \quad (n = 2, 3, \ldots)$.

Задача 37*. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са естествени числа с $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, то:

а) $\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3$; б) $2\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu^5 + x_\nu^7)$

с равенство само при $x_\nu = \nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Задача 38*. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са реални числа, за които $a_1 = 0$, $a_{n+1}^2 = (1+a_n)^2$ за всяко естествено n, да се докаже, че $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq -\frac{n}{2}$.

§ 7. Сумиращи функции

Функцията F се нарича *сумираща* за функцията f, ако за всяко x е в сила равенството $f(x) = F(x+1) - F(x)$. Ако F е сумираща функция за f, очевидно $\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = F(n+1) - F(0)$.

Задача 39*. Да се докаже, че за всяко неотрицателно цяло n функцията x^n притежава сумираща функция, която е полином от степен $n+1$.

Задача 40°. Всеки полином от степен n притежава сумираща функция, която е полином от степен $n+1$.

Задача 41. Ако полиномите P_1 и P_2 са сумиращи функции за функцията f, те се различават с адитивна константа (т. е. $P_1 - P_2 = c$, където c не зависи от x).

Една функция се нарича *рационална*, когато е частно на два полинома.

Съгласно зад. 8 една рационална функция не е дефинирана само в краен брой точки (нулите на знаменателя).

Задача 42. Ако две рационални функции приемат равни стойности за безбройно много стойности на аргумента, те съвпадат в сечението на дефиниционните си области.

Задача 43. Да се намерят рационалните функции R, за които $R(x+1) = R(x)$ за всички x, които принадлежат на дефиниционната област на R заедно с $x+1$.

Задача 44. Ако рационалните функции R_1 и R_2 са сумиращи за функцията f, те се различават с адитивна константа.

3

Задача 45*. За функцията x^{-k} $(k \in \mathbf{N})$ не съществува рационална сумираща функция.

Задача 46. Ако P е полином, функцията $\dfrac{P(x)}{x(x+1)\dots(x+n)}$ $(n \in \mathbf{N})$ притежава рационална сумираща функция точно когато остатъкът от делението на $P(x)$ с $x(x+1)\dots(x+n)$ е от степен, не по-голяма от $n-1$.

Трета глава

Принцип за непрекъснатост

§ 1. Супремуми и инфимуми

Нека M е множество от реални числа, a е такова реално число, че за всяко x от M да е в сила $x \leqq a$. Тогава a се нарича *мажоранта* (*горна граница*) на M. Едно множество от реални числа се нарича *мажорирано* (*ограничено отгоре*), когато притежава поне една мажоранта.

Нека M е множество от реални числа, а b — такова реално число, че за всяко x от M е в сила $b \leqq x$. Тогава b се нарича *миноранта* (*долна граница*) на M. Едно множество от реални числа се нарича *минорирано* (*ограничено отдолу*), когато притежава поне една миноранта.

Задача 1°. Вярно ли е, че никоя миноранта на едно множество от реални числа не надминава никоя негова мажоранта?

Задача 2°. Ако множеството M от реални числа не е празно, всяка миноранта на M е по-малка или равна на всяка мажоранта на M.

П р и н ц и п з а н е п р е к ъ с н а т о с т. *Всяко ограничено отгоре непразно множество от реални числа притежава най-малка мажоранта.*

Най-малката мажоранта на ограничено отгоре непразно множество M от реални числа се нарича *супремум* (*точна мажоранта, точна горна граница*) на M и се означава със $\sup M$.

Задача 3 (п р и н ц и п з а о т д е л и м о с т). Нека M и N са такива непразни множества от реални числа, че за всяко x от M и за всяко y от N да е изпълнено неравенството $x \leqq y$. Да се докаже, че съществува такова реално число r, че да са в сила неравенствата $x \leqq r \leqq y$ за всяко x от M и за всяко y от N.

Задача 4. Всяко ограничено отдолу непразно множество от реални числа притежава най-голяма миноранта.

Най-голямата миноранта на ограниченото отдолу непразно множество M от реални числа се нарича *инфимум* (*точна миноранта, точна долна граница*) на M и се означава с $\inf M$.

Задача 5. Нека непразното множество M от реални числа е мажорирано и $a < \sup M$. Да се докаже, че съществува елемент x на M, за който $a < x$. Да се посочи пример на множество M и на число a с горните свойства, за които $a \notin M$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за минорирано множество.

Задача 6°. Нека M и N са непразни мажорирани множества от реални числа и $\sup M \leqq \sup N$. Да се докаже, че за всяко x от M с $x \neq \sup M$ съществува такова y от N, че $x < y$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 7°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, нека N е мажорирано и за всяко x от M съществува такова y от N, че $x \leqq y$. Да се докаже, че M е също мажорирано и че $\sup M \leqq \sup N$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 8°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, нека N е мажорирано и $M \subset N$. Да се докаже, че M е също мажорирано и $\sup M \leqq \sup N$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 9* (теорема на Кантор — Хели). Нека всеки два интервала от непразната фамилия $\{[a_\alpha, b_\alpha] \mid \alpha \in A\}$ имат поне по една обща точка. Да се докаже, че $\cap\{[a_\alpha, b_\alpha] \mid \alpha \in A\} \neq \varnothing$.

Задача 10*. Множеството на реалните числа не е изброимо (Кантор).

Задача 11*. Множеството на трансцендентните числа не е изброимо (Кантор).

Задача 12* (континуална индукция). Нека a е реално число, а множеството M от реални числа удовлетворява условието: за всяко реално t, за което $t \geqq a$ и $[a, t) \subset M$, съществува такова положително число ε, че $[a, t+\varepsilon) \subset M$. Да се докаже, че $[a, \infty) \subset M$.

Една фамилия от множества $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ се нарича *покритие* на множеството X, когато $X \subset \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Задача 13* (принцип на Борел — Лебег за компактност). Нека фамилията $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ от отворени интервали е покритие на интервала $[a, b]$. Да се докаже, че от нея може да се избере крайно покритие на $[a, b]$.

§ 2. Пресмятане на супремуми и инфимуми

Ако M е множество от реални числа, по дефиниция $-M = \{x \mid -x \in M\}$. Така например, ако M е интервалът $(1, 2]$, то $-M = [-2, -1)$.

Задача 14°. Ако M е мажорирано непразно множество от реални числа, множеството $-M$ е минорирано и $\inf(-M) = -\sup M$.

Задача 15°. Ако M е минорирано непразно множество от реални числа, множеството $-M$ е мажорирано и $\sup(-M) = -\inf M$.

Ако M е множество от реални числа, което не съдържа числото 0, по дефиниция $M^{-1} = \{x \mid x^{-1} \in M\}$.

Така например, ако M е интервалът $(0, 3]$, то $M^{-1} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Задача 16°. Ако M е мажорирано непразно множество от положителни реални числа, множеството M^{-1} е минорирано и $\inf M^{-1} = (\sup M)^{-1}$.

Задача 17°. Ако M е минорирано непразно множество от положителни реални числа и $\inf M \neq 0$, множеството M^{-1} е мажорирано и $\sup M^{-1} = (\inf M)^{-1}$.

Задача 18°. Нека M и N са непразни мажорирани множества от реални числа. Да се докаже, че множеството $M \cup N$ е мажорирано и $\sup(M \cup N) = \max(\sup M, \sup N)$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 19. Нека $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от непразни множества от реални числа, чието обединение $M = \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е мажорирано. Да се докаже, че множеството $\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е мажорирано и $\sup M = \sup\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Нека M и N са множества от реални числа. Множеството $\{x+y \mid x \in M, y \in N\}$ на всичките суми $x+y$, където $x \in M$ и $y \in N$, се нарича (*аритметична*) *сума* на M и N и се означава с $M+N$. Множеството $\{xy \mid x \in M, y \in N\}$ се нарича (*аритметично*) *произведение* на M и N и се означава с MN.

Задача 20. Нека M и N са непразни мажорирани множества от реални числа. Да се докаже, че множеството $M+N$ е също мажорирано и $\sup(M+N) = \sup M + \sup N$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 21. Нека M и N са непразни мажорирани множества от неотрицателни реални числа. Да се докаже, че множеството MN е също мажорирано и $\sup(MN) = (\sup M)(\sup N)$. Да се обобщи това равенство за n множителя.

Задача 22°. Нека N е непразно мажорирано множество от реални числа и a е реално число. Да се докаже, че множеството $a - N$ (т. е. $a + (-N)$) е минорирано и $\inf(a - N) = a - \sup N$.

Задача 23°. Нека N е непразно минорирано множество от реални числа и a е реално число. Да се докаже, че множеството $a - N$ е мажорирано и $\sup(a - N) = a - \inf N$.

Задача 24°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, първото от които е минорирано, а второто — мажорирано. Да се докаже, че множеството $M - N$ е минорирано и $\inf(M - N) = \inf M - \sup N$.

Задача 25°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, първото от които е мажорирано, а второто — минорирано. Да се докаже, че множеството $M - N$ е мажорирано и $\sup(M - N) = \sup M - \inf N$.

Задача 26°. Да се формулират и докажат аналогични твърдения на онези от зад. 24 и 25 за MN^{-1}.

Задача 27°. Нека M и N са непразни минорирани множества от неположителни числа. Да се докаже, че множеството MN е мажорирано и $\sup(MN) = (\inf M)(\inf N)$.

Едно множество от реални числа се нарича *ограничено*, когато е едновременно и мажорирано, и минорирано.

С други думи, множеството M се нарича ограничено, когато съществуват такива реални числа a и b, че за всяко x от M да е в сила $a \leqq x \leqq b$.

Задача 28. Нека M и N са непразни ограничени множества от реални числа. Да се докаже, че множеството MN е също ограничено и $(\sup M)(\sup N) \leqq \sup(MN)$. Да се обобщи това неравенство за n множителя. Да се посочи пример, когато то е строго.

Задача 29°. За всяко ограничено непразно множество M от реални числа е в сила равенството $\sup(MM) = \sup\{x^2 \mid x \in M\}$. Да се обобщи това твърдение за n множителя.

Задача 30°. Нека M е непразно множество от неотрицателни числа. Да се докаже, че $\inf(MM) = \inf\{x^2 \mid x \in M\}$. Да се посочи непразно ограничено множество от реални числа, за които това равенство не е вярно. Да се обобщи твърдението за n множителя.

Задача 31. Нека x_ν и y_ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ са реални числа с $0 < x_1 < x_2 < \dots$ и $0 < y_1 < y_2 < \dots$ и нека $L = \{x_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$, $M = \{y_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ и $N = \{x_\nu y_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$. Да се докаже, че от ограничеността на L и M следва ограничеността и на N и че $\sup(LM) = \sup N$.

Задача 32. Да се намери $\inf M$ за $M = \{q^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$, където $0 < q < 1$.

Задача 33. Да се докаже, че множеството $M = \{q^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$, където $1 < q$, не е ограничено отгоре.

Задача 34. Да се намери $\inf M$ за $M = \left\{\frac{1}{\nu} \;\middle|\; \nu \in \mathbb{N}\right\}$.

Задача 35. Да се намери $\sup M$ за $M = \left\{a - \frac{1}{\nu} \;\middle|\; \nu \in \mathbb{N}\right\}$.

Задача 36. Ако k е естествено число и $M = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, да се докаже, че M е мажорирано, и да се намери $\sup M$.

Задача 37. Да се намери $\inf M$ за $M = \{nq^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ при $0 < q < 1$.

Задача 38. Да се намери $\inf M$ за $M = \{n^k q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ при естествено k и $0 < q < 1$.

Задача 39. Ако $0 < a$, да се докаже, че множеството $M = \{x \mid 0 \leqq x,\ x^2 \leqq a\}$ е мажорирано и че $\sup M = \sqrt{a}$.

Задача 40. Ако $0 < a$, а n е естествено число, да се докаже, че множеството $M = \{x \mid 0 \leqq x,\ x^n \leqq a\}$ е мажорирано и че $\sup M = \sqrt[n]{a}$.

Задача 41. Да се намери $\sup M$ за $M = \left\{\sqrt[n]{a} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ при $0 < a < 1$.

Задача 42. Да се намери $\inf M$ за $M = \left\{\sqrt[n]{a} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ при $1 < a$.

Задача 43. Да се намери $\inf M$ за $M = \left\{\sqrt[n]{n} \;\middle|\; n - 1 \in \mathbb{N}\right\}$.

Задача 44°. Нека M е непразно мажорирано множество от неотрицателни реални числа и $\sqrt[n]{M} = \left\{\sqrt[n]{x} \;\middle|\; x \in M\right\}$. Да се докажат равенствата $\sup \sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{\sup M}$ и $\inf \sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{\inf M}$.

Задача 45. Да се намерят всички множества M от реални числа със следното свойство: за всяко x от M съществува такова y от M, че $x^2 + 1 \leqq 2y$.

Задача 46. Да се намерят всички множества M от реални числа със следното свойство: за всяко x от M съществува такова y от M, че $x^2 + 6 \leqq 5y$.

Задача 47. Ако α и β са реални числа, да се намерят всички множества M от реални числа със следното свойство: за всяко x от M съществува y от M с $x^2 + \alpha\beta \leqq (\alpha + \beta)y$.

Задача 48°. Съществуват ли безкрайни мажорирани множества от реални числа, всички безкрайни подмножества на които да притежават една и съща точна мажоранта?

Задача 49*. Да се докаже, че едно ограничено безкрайно множество M без най-голям елемент тогава и само тогава има свойството $\sup N = \sup M$ за всяко безкрайно подмножество N на M, когато елементите на M могат да се подредят в безкрайна редица $x_1, x_2, \dots$, всеки член на която е по-малък от следващия.

Задача 50. Да се докаже, че едно мажорирано безкрайно множество M тогава и само тогава притежава свойството $\sup(M \setminus N) = \sup M$ за всяко крайно подмножество N на M, когато съществува такава стриктно растяща редица $x_1, x_2, \dots$ от елементи на M, че да е в сила равенството $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup M$.

§ 3. Отворени множества върху числовата права

Едно множество M от реални числа се нарича *отворено*, когато може да се представи като обединение на отворени интервали.

Задача 51. Да се докаже, че:

а) множествата $\varnothing$ и $\mathbf{R}$ са отворени;

б) ако $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от отворени множества, обединението $\cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е също отворено;

в) сечение на краен брой отворени множества е отворено множество.

Задача 52°. Обединението на произволна фамилия от интервали с обща точка е интервал.

Задача 53°. Обединението на произволна фамилия от отворени интервали с обща точка е отворен интервал.

Нека U е отворено множество. Един отворен интервал Δ се нарича *компонента* на U, когато притежава свойствата:

а) $\Delta \subset U$; б) ако Δ' е отворен интервал с $\Delta \subset \Delta' \subset U$, то $\Delta' = \Delta$.

С други думи, Δ е компонента на U, когато е максимален отворен интервал, който се съдържа в U.

Задача 54*. Нека U е отворено множество. Да се докаже, че:

а) Ако Δ' и Δ'' са две различни компоненти на U, то $\Delta' \cap \Delta'' = \varnothing$.

б) Всеки отворен интервал Δ, който се съдържа в U, се съдържа в точно една от компонентите на U.

в) Всеки интервал Δ, който се съдържа в U, се съдържа в точно една от компонентите на U.

г) Ако a е крайна компонента на U, то $a \notin U$.

д) U е обединение на компонентите си.

е) Нека $U = \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$, където Δ_α са отворени интервали и $\Delta_\mu \cap \Delta_\nu = \varnothing$, когато $\mu \neq \nu$. Да се докаже, че интервалите Δ_α са всичките компоненти на U.

ж) Множеството на компонентите на U е крайно или изброимо.

Задача 55°. Нека $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от непресичащи се две по две отворени множества. Да се докаже, че всяка компонента на обединението $\cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е компонента и на някое U_α и обратно.

§ 4. Свързани множества върху числовата права

Едно непразно множество M от реални числа се нарича *свързано*, ако от $M \subset U \cup V$, където U и V са отворени множества и $U \cap V = \varnothing$, следва $M \subset U$

или $M \subset V$.

Задача 56. Да се докаже, че:

а) всяко едноточково множество е свързано;

б) обединението на свързани множества с обща точка е свързано множество;

в) ако M е свързано множество, а a и b са елементи на M, за които $a < b$, то $[a, b] \subset M$;

г) всяко свързано множество е интервал.

Задача 57*. Всеки интервал е свързано множество.

Задача 58. Нека U и V са отворени множества, които не съдържат интервала $[a, b]$, и нека $[a, b] \subset U \cup V$. Да се докаже, че съществува подинтервал $[a_1, b_1]$ на $[a, b]$ със свойствата: $[a_1, b_1] \subset U$, $[a_1, b_1] \not\subset V$ и $[a_1, b_1] \cap V \neq \varnothing$.

Задача 59*. Нека a и b са реални числа с $a < b$, а $U_1, U_2, \dots$ е редица от отворени множества със следните свойства:

а) $[a, b] \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \right) = \varnothing$; б) $[a, b] \subset U_m \cup U_n$ при $m \neq n$.

Да се докаже, че интервалът $[a, b]$ се съдържа във всичките U_ν с евентуално изключение на едно от тях (Серпински).

Четвърта глава

Безкрайни редици

§ 1. Кофинитни множества

Задача 1. Нека $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ е полином с $a_0 > 0$. Да се докаже, че съществува такова число ξ, че за всяко $x > \xi$ е в сила неравенството $P(x) > 0$.

Задача 2°. Да се посочат безбройно много безкрайни множества от естествени числа, които две по две нямат общи елементи.

Едно множество C от естествени числа се нарича *кофинитно*, когато множеството $\mathbb{N} \setminus C$ е крайно, т. е. когато вън от C има само краен брой естествени числа.

Задача 3°. Сечение на краен брой кофинитни множества е кофинитно множество.

Задача 4°. Едно множество C от естествени числа е кофинитно тогава и само тогава, когато съществува такова естествено число ν, че за всяко $n > \nu$ да е в сила $n \in C$.

Задача 5. Кои от следните множества са кофинитни:

а) множеството на четните числа;

б) множеството на естествените числа n, за които $an^2 + bn + c > 0$ при реални a, b, c и $a > 0$;

в) множеството на естествените числа n, за които $an^2 + bn + c > 0$ при реални a, b, c и $a < 0$;

г) подмножествата на $\mathbb{N}$ от зад. 2;

д) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{1000}$;

е) множеството на естествените числа n, за които

$\left|\frac{n^2+n+2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$, където ε е положително реално число;

ж) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} - \frac{a_0}{b_0}\right| < \varepsilon$, където ε е положително реално число, а $a_0, a_1, \ldots, a_k$ и $b_0, b_1, \ldots, b_k$ са реални числа с $b_0 \neq 0$;

з) множеството на естествените числа n, за които $\frac{200n+11}{n^2+1} > 1$;

и) множеството на естествените числа n, за които $\frac{200n+11}{n^2+1} < \varepsilon$, където ε е положително реално число;

й) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_l}\right| < \varepsilon$, където ε е положително реално число, числата k и l са естествени с $k < l$, а останалите означения са, както в ж);

к) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_l}\right| > N$, където N е реално число, числата k и l са естествени с $k > l$, а останалите означения са, както в ж);

Задача 6. Да се докаже, че съществува такова число ν, че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството:

а) $(1{,}00001)^n > n$; б) $(1{,}00001)^n > n^{10}$.

Задача 7. Ако P е полином и $q > 1$, да се докаже, че съществува такова число ν, че за всяко естествено число $n > \nu$ да е изпълнено неравенството $q^n > P(n)$.

Задача 8. При условията на зад. 7 да се докаже, че съществува такова число ν, че за всяко реално число $x > \nu$ да е в сила неравенството $q^x > P(x)$.

Задача 9°. Да се докаже, че следните множества са кофинитни:

а) множеството на естествените числа n, за които $q^n < \varepsilon$ при $0 \leqq q < 1$ и $\varepsilon > 0$;

б) множеството на естествените числа n, за които $q^n > l$ при $q > 1$ и произволно l;

в) множеството на естествените числа n, за които $\frac{n}{q^n} < \varepsilon$ при $q > 1$ и $\varepsilon > 0$;

г) множеството на естествените числа n, за които $1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$ при $a > 0$ и $\varepsilon > 0$;

д) множеството на естествените числа n, за които $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$ при $\varepsilon > 0$;

е) множеството на естествените числа n, за които $\frac{1}{n}\log_a n < \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ и $0 < a \neq 1$.

§ 2. Граница на редица

Едно реално число a се нарича *граница* на безкрайната редица

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

от реални числа, когато за всяко реално число $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν (което изобщо зависи от ε), че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$.

От зад. 4 следва, че a е граница на редицата (1) точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ множеството на естествените числа n, за които е в сила неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$, е кофинитно.

Доказва се, че никоя редица от реални числа няма повече от една граница.

Безкрайната редица (1) се нарича *сходяща*, когато притежава граница. Когато редицата (1) е сходяща и a е границата ѝ, се пише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Редица, която не е сходяща, се нарича *разходяща*.

Нека (1) и

(2) $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

са две редици, за които $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогава:

(3) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

(5) $$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab,$$

(6) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0,\ n \in \mathbf{N},\ b \neq 0).$$

Задача 10°. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Задача 11. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2}{n^2+1} = 2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0n^k + b_1n^{k-1} + \cdots + b_k} = \frac{a_0}{b_0}$ при означенията на зад. 5 ж);

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1000}{n^2+2} = 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0n^l + b_1n^{l-1} + \cdots + b_l} = 0$ при означенията на зад. 5 ж) и $k < l$.

Задача 12*. Ако $a_1, a_2, \ldots$ е редица с $a_n \geqq 0$ и $a_{m+n} \leqq a_m + a_n$ за всички m и n, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

§ 3. Редици, които дивергират към ∞

Задача 13. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = \frac{n^3+2n+1}{10n^2+8n+1}$ е разходяща.

Казва се, че редицата

(7) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

клони (*дивергира*) *към плюс безкрайност*, и се пише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, когато за всяко число N съществува такова число ν (което изобщо зависи от N), че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството $a_n > N$.

Аналогично се казва, че редицата (7) *клони* (*дивергира*) *към минус безкрайност*, и се пише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, когато за всяко число N съществува такова число ν (което изобщо зависи от N), че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството $a_n < N$.

Когато една редица дивергира към плюс или минус безкрайност, тя е разходяща.

Задача 14. Да се докаже, че редицата от зад. 13 дивергира към плюс безкрайност.

Задача 15. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ и $a_n \neq 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Задача 16. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $a_n \neq 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$. Да се посочи пример, когато $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$, но $\frac{1}{a_n}$ не дивергира нито към плюс безкрайност, нито към минус безкрайност.

Задача 17. Нека k и l са естествени числа, за които $k > l$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0n^l + b_1n^{l-1} + \cdots + b_l} = \begin{cases} \infty & \text{при } a_0b_0 > 0, \\ -\infty & \text{при } a_0b_0 < 0. \end{cases}$$

Задача 18*. Съществува ли рационална функция R, за която $R(\mathbf{I}) = \mathbf{Q}$?

§ 4. Граници на рационални функции на n

Задача 19. Да се пресметнат границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)}$ $(m \in \mathbf{N})$.

Задача 20. Да се пресметнат границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)}$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)\dots(2\nu+2m+1)}$ $(m \in \mathbf{N})$.

Задача 21. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) = \frac{1}{2}$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\nu^3-1}{\nu^3+1} = \frac{2}{3}$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+\nu}\right) = \frac{1}{3}$.

Задача 22. Да се намерят границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^3$; г) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k$ $(k \in \mathbf{N})$.

Задача 23. Да се намерят границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(a + \frac{\nu}{n}\right)^2$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(a + \frac{\nu}{n}\right)^k$ $(k \in \mathbf{N})$.

§ 5. Граници с q^n

Задача 24. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (0{,}99)^n = 0$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$ $(|q| < 1)$, където k е произволно естествено число.

Задача 25. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ $(q > 1)$;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^k} = \infty$ $(q > 1,\ k \in \mathbf{N})$.

Задача 26. Да се пресметнат границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu$ $(|q| < 1)$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \nu q^{\nu-1}$ $(|q| < 1)$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{3\nu-1}{5^\nu}$; г) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=0}^{n} \left(1 + q^{2^\nu}\right)$ $(|q| < 1)$.

Задача 27. Да се пресметнат границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^n} \sum_{\nu=1}^{k} \nu^n$ $(k \in \mathbf{N})$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$; г) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}$ $(a \in \mathbf{R})$;

д) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$ $(a \in \mathbf{R})$; е) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$ $(a \in \mathbf{R})$;

ж) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ $(a \in \mathbf{R})$.

§ 6. Ограничени редици

Редицата от реални числа

(8) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

се нарича *ограничена отгоре*, когато съществува такова число A, че $a_n \leqq A$ за всяко n.

Редицата (8) от реални числа се нарича *ограничена отдолу*, когато съществува такова число B, че $B \leqq a_n$ за всяко n.

Редицата (8) от реални числа се нарича *ограничена*, когато е ограничена отгоре и отдолу. Това означава да съществуват такива числа A и B, че $A \leqq a_n \leqq B$ за всяко n.

Задача 28. Ако редицата (8) е ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Задача 29. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos n!}{n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

§ 7. Граници на ирационални функции на n

Задача 30. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следват равенствата:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

винаги когато корените съществуват.

Задача 31. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}(2\nu-1)-2n\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$.

Задача 32. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_k)}-n\right)$;

й) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{4/3}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$.

Задача 33. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)^p-n^p]=0 \quad (p<1)$.

§ 8. Граници на рационални функции на a_n

Задача 34. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2-5a_n+6}{a_n^2-7a_n+10}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, $a_n \neq 2; 5$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2-6a_n+8}{a_n^2-5a_n+4}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$, $a_n \neq 1; 4$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^4+2a_n^2-3}{a_n^2-3a_n+2}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1; 2$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n^4-4a_n^3+1}{(a_n-1)^2}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^k-1}{a_n-1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^k-1}{a_n^l-1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, където k и l са естествени числа и $a_n \neq 1$ за нечетно l, $|a_n| \neq 1$ за четно l;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1-a_n}-\dfrac{3}{1-a_n^3}\right)$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{k}{1-a_n^k}-\dfrac{l}{1-a_n^l}\right)$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, където k и l са естествени числа и $a_n \neq 1$ за нечетни k и l, $|a_n| \neq 1$, когато някое от числата k и l е четно.

Задача 35. Ако R е рационална функция, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а числата a и a_n принадлежат на дефиниционната област на R за всяко естествено n, то $\lim\limits_{n\to\infty} R(a_n) = R(a)$.

§ 9. Граници на ирационални функции на a_n

Задача 36. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+a_n}-1}{a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[k]{1+a_n}-1}{a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$, $k \in \mathbf{N}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{a_n}+1}{\sqrt[5]{a_n}+1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $a_n \neq -1$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+a_n+a_n^2}-1}{a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_n^2}}{\sqrt{1+a_n}-1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+2a_n}+1}{\sqrt[3]{2+a_n}+a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $a_n \neq -1$.

§ 10. Сходимост и неравенства

От $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a_n \leqq b_n$ за безбройно много стойности на n следва $a \leqq b$. Обратно, от $a < b$ следва $a_n < b_n$ за всички достатъчно големи n.

Задача 37°. Да се дадат примери за редици $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които:

а) $a_n < b_n$ за всяко n, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, но $a_n < b_n$ за безбройно много n и $a_n > b_n$ за безбройно много n.

Задача 38°. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Да се посочи пример, при който обратното не е вярно.

Задача 39°. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 40. От $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ следва:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min(a, b)$.

Задача 41. Ако всички членове на редицата $a_1, a_2, \ldots$ са различни от 0, то:

а) ако съществува число q, за което $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq q < 1$ за всяко n, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

б) от $\left|\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

в) ако съществува число q, за което $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqq q > 1$ за всяко n, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_1} = \infty$;

г) от $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_1} = \infty$.

Понякога редицата $a_1, a_2, \ldots$ се означава накратко с $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{n}$.

Задача 42. Ако $a_n \neq 0$ за всяко n и редицата $\left\{\dfrac{na_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 43. Да се докаже, че:

а) ако a е реално число, а $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dbinom{a}{n} x^n = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ за всяко a; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Нека са дадени безкрайните редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, и за всяко n е в сила едното от двете неравенства $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ или $b_n \leqq c_n \leqq a_n$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (*лема за двамата милиционери*).

Тази лема е валидна и в следния вариант: от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $a_n \leqq c_n$ за всяко n следва $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, а от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и $c_n \leqq a_n$ за всяко n следва $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$ (*лема за единия милиционер*).

Задача 44. Да се намерят границите на редиците с общ член:

а) $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+\nu}$; б) $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+\nu}}$; в) $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \sqrt[3]{\dfrac{n}{n^4+\nu}}$;

г) $a_n = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{\nu}{n^2}}-1\right)$; д) $a_n = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{\nu^2}{n^3}}-1\right)$.

Задача 45. Ако числата $a_1, a_2, \ldots, a_m$ са положителни и a е най-голямото от тях, да се докаже, че $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^n} = a$.

Задача 46. Да се докаже, че $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n = 1 \quad (a \in \mathbf{R})$.

Задача 47. Да се докаже, че:

а) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0)$; б) от $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ следва $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$;

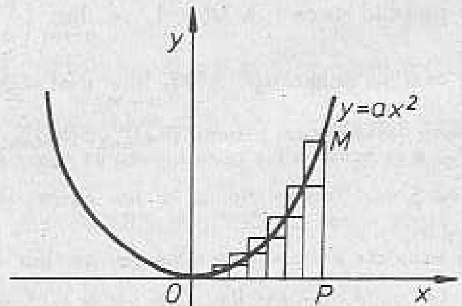
в) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;

г) ако P е полином с положителен старши коефициент, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)} = 1;$$

д) ако $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3+n^2+1} > 0$, то $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$.

Задача 48. Да се намери лицето на криволинейния триъгълник OPM, образуван от частта OM на параболата $y = ax^2$ $(a>0)$, отсечката OP от оста Ox и отсечката PM (фиг. 3).



Фиг. 3

Задача 49. Да се докаже, че от $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ следва:

а) $\lim_{n\to\infty}\sin a_n = \sin a$; б) $\lim_{n\to\infty}\cos a_n = \cos a$;

в) $\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg} a_n = \operatorname{tg} a$ при $a_n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ за всяко естествено n и всяко цяло k;

г) $\lim_{n\to\infty}\operatorname{ctg} a_n = \operatorname{ctg} a$ при $a_n \neq k\pi$ и $a \neq k\pi$ за всяко естествено n и всяко цяло k.

§ 11. Монотонни редици

Редицата

(9) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

се нарича *растяща* (*монотонно растяща*), когато за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $a_n \leqq a_{n+1}$. Редицата (9) се нарича *намаляваща* (*монотонно намаляваща*), когато за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $a_n \geqq a_{n+1}$. Растящите и намаляващите редици се наричат общо *монотонни редици*.

Всяка ограничена отгоре растяща редица е сходяща. Сходяща е и всяка ограничена отдолу намаляваща редица.

Ако редицата (9) е растяща и сходяща, то $a_m \leqq \lim_{n\to\infty} a_n$ за всяко естествено число m, а ако редицата (9) е намаляваща и сходяща, то $a_m \geqq \lim_{n\to\infty} a_n$ за всяко естествено число m.

Понякога е удобно да се използват следните малко по-силни твърдения. Ако една редица е ограничена отгоре и е растяща от някой номер (на членовете) нататък, тя е сходяща; ако една редица е ограничена отдолу и е намаляваща от някой номер нататък, тя е също сходяща.

Задача 50. Като се използуват свойствата на монотонните редици, да се докаже, че:

а) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0<q<1)$; б) $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad (q>1)$;

в) $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0 \quad (0<q<1,\ k\in\mathbf{N})$; г) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a>0)$;

д) ако членовете на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ са положителни и $0 \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

§ 12. Числото e

Редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща. Границата ѝ се означава с e, т. е. по дефиниция $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, и се нарича *неперово число*.

Задача 51. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$ $(k+1\in\mathbf{N})$.

Задача 52. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$ $(k\in\mathbf{N})$.

Задача 53. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-n-6}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+5n+6}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{n^2+3n+2}\right)^n$.

§ 13. Функцията e^x

Задача 54. Да се докаже, че редицата с общ член $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ е сходяща за всяко x.

Границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ще означаваме временно (до зад. 66) с $E(x)$. Така получаваме една функция $E:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Целта на зад. 55 — 65 е да се изучат основните свойства на тази функция.

Задача 55. Да се докаже, че $E(x)\geqq 1+x$ за всяко x.

Задача 56. Да се докаже, че от $x<y$ следва

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqq(y-x)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1}$$

за всички достатъчно големи n.

Задача 57. Да се докаже, че от $x<y$ следва

$$E(y)-E(x)\leqq(y-x)E(y).$$

Задача 58. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=E(x).$$

Задача 59. Да се докаже, че $E(x)E(y)=E(x+y)$ за всяко x и всяко y.

Задача 60. Да се докаже, че:

а) $E(0)=1$;

б) $E(x)>0$ за всяко x;

в) $\frac{E(x)}{E(y)}=E(x-y)$ за всяко x и всяко y;

г) $E(-x)=\frac{1}{E(x)}$ за всяко x.

Задача 61. Да се докаже, че $E\left(\frac{p}{q}\right)=e^{\frac{p}{q}}$ за всяко цяло число p и всяко естествено число q.

Една функция $f:M\to\mathbf{R}$ $(M\subset\mathbf{R})$ се нарича *растяща* (*монотонно растяща*), когато от $x,\ y\in M$ и $x<y$ следва $f(x)\leqq f(y)$, а *намаляваща* (*монотонно намаляваща*), когато от $x,\ y\in M$ и $x<y$ следва $f(x)\geqq f(y)$. Намаляващите и растящите функции се наричат общо *монотонни функции*.

При строги неравенства в горните дефиниции вместо термините растяща и намаляваща функция се използуват съответно термините *строго растяща* и *строго намаляваща* функция.

Задача 62. Функцията $E(x)$ е строго растяща.

Задача 63. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва

$$\lim_{n\to\infty}E(x_n)=E(x).$$

Задача 64. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}E(x_n)=\infty$;

б) от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}E(x_n)=0$.

Доказва се, че от $a>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}=a^x$.

Задача 65°. Да се намери границата на редицата

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \ldots$$

Задача 66. Да се докаже, че $E(x)=e^x$ за всяко x.

§ 14. Функцията $\ln x$

Задача 67. Да се докаже, че за всяко $x>0$ редицата с общ член $n(\sqrt[n]{x}-1)$ е сходяща.

Границата $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ ще означаваме временно (до зад. 72) с $L(x)$. Така получаваме една функция $L\colon (0,\infty)\to \mathbb{R}$. Целта на зад. 68 — 76 е да се изучат основните свойства на тази функция.

Задача 68. Да се докаже, че от $x>0$ и $y>0$ следва

$$L(xy)=L(x)+L(y).$$

Задача 69. Да се докаже, че от $0<x<y$ следва

$$n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)-n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\leqq \frac{y-x}{x}\sqrt[n]{x}.$$

Задача 70. Да се докаже, че от $0<x<y$ следва

$$L(y)-L(x)\leqq \frac{y-x}{x}.$$

Задача 71. Да се докаже, че:

а) от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)=L(x)$;

б) от $x_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)=-\infty$.

Задача 72. Да се докаже, че $e^{L(x)}=x$ за всяко $x>0$.

Задача 73°. Множеството на стойностите на функцията e^x съвпада с множеството на всичките положителни числа.

От зад. 62 и 66 следва, че функцията e^x е обратима. Както е известно,
обратната ѝ функция е $\log_e$. Тя се нарича *натурален логаритъм* и за да се
отличава от логаритмите при други основи, се означава с ln, т. е. по дефи-
ниция $\ln x=\log_e x$ за всяко $x>0$. Съгласно зад. 73 дефиниционната област
на функцията ln е интервалът $(0,\infty)$, а съгласно зад. 72 $\ln x=L(x)$ за всяко
$x>0$. (Вж. бележките преди зад. 29, гл. I.)

Задача 74. Да се докаже, че от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln x$.

Задача 75. Да се докаже, че при $0<a\neq 1$ от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=\log_a x$.

Задача 76. Да се докаже, че:

а) от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{x_n}=0$;

б) от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$.

§ 15. Някои приложения на свойствата на e^x и $\ln x$

Задачи 58 и 66 показват, че от $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=e^x.$$

Също така зад. 71 а) и бележките преди зад. 74 показват, че от $x_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)=\ln x$.

Задача 77. Да се докаже, че:

а) от $a>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{a}}{2}\right)^n=\sqrt{a}$;

б) ако a, b и c са положителни, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}$;

в) ако k е естествено число, а числата $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са положителни, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{k}\sum\limits_{\nu=1}^{k}\sqrt[n]{a_\nu}\right)^n=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$;

г) от $a>0$ и $b>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n^2]{a}+\sqrt[n^3]{b}\right)^n\dfrac{1}{2^n}=1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\sqrt[n]{\dfrac{n}{2n+1}}+\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{2n^2+1}}\right)^n=\dfrac{1}{2}$;

е) ако $a_n>0$, $b_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sqrt[n]{a_n}+\sqrt[n]{b_n}\right)^n=\sqrt{ab}.$$

Задача 78. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3n+1}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n^2+3n+1}{n^3+n^2+2n+1}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\cdots+a_k}{n^k+b_1n^{k-1}+b_2n^{k-2}+\cdots+b_k}\right)^n$ $(k\in \mathrm{N})$.

§ 16. Константа на Ойлер

Задача 79°. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$.

Задача 80*. Да се докаже, че редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ е намаляваща.

Задача 81°. Да се докажат неравенствата $\frac{1}{n+1}\leqq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqq\frac{1}{n}$ за всяко естествено n.

Задача 82. Да се докаже, че редицата с общ член $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln n$ е намаляваща, а редицата с общ член $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln(n+1)$ — растяща.

Задача 83. Да се докаже, че редиците от зад. 82 имат обща граница.

Общата граница на редиците от зад. 82 се нарича *константа на Ойлер* и се означава с C. И така по дефиниция $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln n\right)$.

Задача 84°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{n+\nu}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{2n}\frac{1}{n+\nu}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=kn+1}^{ln}\frac{1}{\nu}$ за произволни естествени k и l, за които $k<l$.

Задача 85. Ако R е рационална функция, редицата с общ член $R(n)-\ln n$ дивергира към ∞ или към $-\infty$.

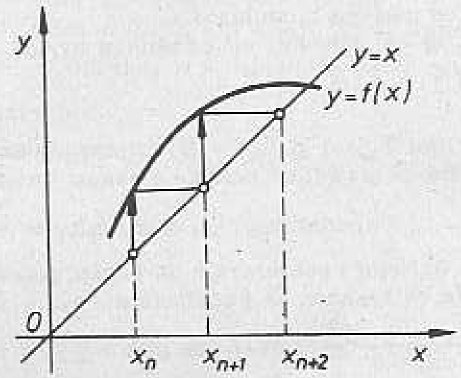
Задача 86. Да се докаже, че не съществува рационална функция R, за която равенството $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}=R(n)$ да е изпълнено за безбройно много n.

§ 17. Сходимост на итерационни редици

Нека е дадена функция $f\colon M\to\mathbf{R}$ $(M\subset\mathbf{R})$ и нека $x_1\in M$. Тогава може да се образува числото $x_2=f(x_1)$. Ако се случи x_2 да принадлежи на

M, може да се образува числото $x_3=f(x_2)$ и т. н. Ако този процес не се прекъсва, получава се безкрайна редица $x_1, x_2, \ldots$, за която се казва, че се получава чрез *итерация* на функцията f (при начален член x_1). Ясно е, че тогава $x_{n+1}=f(x_n)$ за всяко естествено n.

Геометричният смисъл на процеса на итерирането е илюстриран на фиг. 4. При изобразения случай от чертежа става ясно, че итерационната редица е сходяща.



Фиг. 4

Задача 87. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1}=\frac{1}{2}(1+a_n^2)$ $(n=1, 2, \ldots)$:

а) е сходяща при $a_1=\frac{1}{2}$, и да се намери границата ѝ;

б) дивергира към ∞ при $a_1=2$.

Задача 88. Да се намерят всички реални числа λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1=\lambda$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n^2+2a_n+4)$, е сходяща.

Задача 89. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{aa_n+b}$ $(a>0,\ b>1)$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 90. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2+1}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ. Зависи ли тази граница от a_1?

Задача 91. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_1 \neq 0$ и $a_{n+1} = e^{-\frac{1}{a_n^2}}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 92. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = a_n^2 + c$ $\left(0 < c < \frac{1}{4}\right.$, а положителното число λ не надминава по-големия от корените на уравнението $\left.x^2 - x + c = 0\right)$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 93. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 6}$:

а) е сходяща при $0 \leqq a_1 \leqq 3$; б) е разходяща при $a_1 > 3$.

Задача 94. Да се намерят всички реални числа λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + a_n + 2}{a_n + 4}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ за всяко такова λ.

Задача 95. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + 3a_n + 2}{a_n + 6}$, е сходяща при $0 \leqq \lambda \leqq 2$ и дивергира към ∞ при $\lambda > 2$. В първия случай да се намери границата ѝ.

Задача 96*. Ако $0 < z_1 < z_2$, $0 < \alpha < a$ и $0 < b$, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$ и

$$a_{n+1} = \frac{a a_n^2 + b a_n + \alpha z_1 z_2}{(a - \alpha) a_n + b + \alpha(z_1 + z_2)},$$

е сходяща при $0 \leqq \lambda \leqq z_2$ и дивергира към ∞ при $\lambda > z_2$. В първия случай да се намери границата ѝ.

Задача 97. Да се намерят всички λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9}$, е сходяща, и за всяко такова λ да се намери границата ѝ.

Задача 98. Ако $0 < \beta < \alpha$ и $a_1 = \alpha + \beta$, $a_{n+1} = \alpha + \beta - \dfrac{\alpha\beta}{a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, да се докаже, че $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Да се изследва и случаят $\alpha = \beta > 0$.

Задача 99. Ако λ и μ са положителни числа, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{\mu}{a_n}\right)$, е сходяща и да се намери границата ѝ.

Задача 100. а) Да се намерят всички λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ за всяко такова λ.

б) Ако $c > 0$, да се намерят всички λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, е сходяща, и за всяко такова λ да се намери границата ѝ.

Задача 101*. Ако $0 < c \leqq 2$ и $\lambda > 0$, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{1 + a_n}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 102*. Ако $-\dfrac{3}{2} < \lambda < 0$, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \lambda + \dfrac{a_n^2}{2}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

§ 18. Линейни рекурентни зависимости

Задача 103. Да се докаже, че ако корените α и β на квадратното уравнение $x^2 = px + q$ са различни, а редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3 \ldots)$, съществуват такива константи C_1 и C_2, че за всяко n е в сила $a_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}$.

Задача 104. Да се докаже, че ако квадратното уравнение $x^2 = px + q$ има двоен корен $\alpha \neq 0$, а редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$, съществуват такива константи C_1 и C_2, че за всяко n е в сила $a_n = (C_1 + nC_2)\alpha^{n-1}$.

Задача 105°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = \dfrac{5}{6}a_n - \dfrac{1}{6}a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, да се докаже сходимостта ѝ и да се намери границата ѝ.

Задача 106°. Да се докаже, че ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{1}{2}a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, тя е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 107°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ $(n = 2, 3, \ldots)$, да се докаже, че тя е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 108°. Ако λ и μ са положителни и $\lambda + \mu = 1$, да се докаже, че всяка редица $a_1, a_2, \ldots$, за която е в сила a_{n+1}

$= \lambda a_n + \mu a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 109°. Да се докаже, че ако за сходящата редица $a_1, a_2, \ldots$ е в сила $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, то $a_n = 0$ за всяко n.

Задача 110°. Да се докаже, че ако за редицата $a_1, a_2, \ldots$ е в сила $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, тя е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 111°. Да се докаже, че ако за сходящата редица $a_1, a_2, \ldots$ е в сила $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, то $a_n = 0$ за всяко n.

Задача 112°. Ако корените α и β на квадратното уравнение $x^2 = px + q$ удовлетворяват неравенствата $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$, да се докаже, че всяка редица $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, е сходяща и границата ѝ е 0.

Задача 113°. Да се докаже, че ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условията $|a_1| + |a_2| \neq 0$ и $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ и е ограничена, поне един от корените на уравнението $x^2 = px + q$ не надминава по модул 1.

Задача 114. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, да се изследва сходимостта ѝ в зависимост от параметрите p и q и от първите ѝ два члена.

§ 19. Двойни итерации

Задача 115. Ако редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които $a_1 \geqq b_1 \geqq 0$, удовлетворяват условията $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ и $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ за всяко n, да се докаже, че те са сходящи и границите им са равни.

Задача 116. Ако редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които $a_1 > b_1 > 0$, удовлетворяват условията $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ и $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ за всяко n, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

Задача 117. Да се докаже, че ако редиците $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ удовлетворяват условията $x_{n+1} = ax_n + by_n + p$ и $y_{n+1} = cx_n + dy_n + q$ за всяко естествено n, където модулите на a, b, c и d са по-малки от $\frac{1}{2}$, а p и q са произволни числа, то

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$, където ξ, η е единственото решение на системата уравнения $x = ax + by + p$, $y = cx + dy + q$.

§ 20. Критерий на Коши за сходимост на редица

Редицата $a_1, a_2, \ldots$ е сходяща тогава и само тогава, когато за нея е изпълнено у с л о в и е т о н а К о ш и: За всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν (което изобщо зависи от ε), че от $m > \nu$ и $n > \nu$ следва $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Задача 118*. Ако a е положително реално число, а k — естествено число и за всяко естествено число n с s_n е означено най-малкото от естествените числа q, за които $a \leqq \left(\frac{q}{n}\right)^k$, да се докаже, че редицата $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Използувайте това, за да дадете ново доказателство на съществуването на $\sqrt[k]{a}$.

Задача 119. Ако $a > 1$ и $b > 0$ са реални числа и за всяко естествено n с s_n е означено най-малкото от целите числа q, за които $b^n \leqq a^q$, да се докаже, че редицата $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 120. Ако M е непразно ограничено отгоре множество от реални числа и за всяко естествено число n с s_n е означено най-малкото от целите числа q, за които $\frac{q}{n}$ е мажоранта на M, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \sup M$.

Задача 121. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = \frac{q}{1 + a_n^2} + b$ за всяко естествено n, където $|q| < 1$, а b е произволно реално число, да се докаже сходимостта ѝ.

Задача 122*. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = q \sin a_n + b$ за всяко естествено n, където $|q| < 1$ и b е произволно реално число, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, където ξ е единственият корен на у р а в н е н и е т о н а К е п л е р $x = q \sin x + b$.

§ 21. Подредици и точки на сгъстяване

Нека е дадена редицата

(10) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и нека $n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$ е стриктно растяща редица от естествени числа. При $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \ldots$ редицата $b_1, b_2, \ldots$ се нарича *подредица* на редицата (10). Обикновено тази подредица се означава с $\{a_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$.

От $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = a$.

Задача 123*. Без да се използува принципът за непрекъснатост, да се докаже, че всяка безкрайна редица от реални числа притежава монотонна подредица.

Задача 124. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$ е тогава и само тогава сходяща и клони към a, когато от всяка нейна подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ може да се избере подредица с граница a.

Задача 125°. Да се формулира и докаже твърдение, аналогично на зад. 124, при $a = \infty$ и $a = -\infty$.

Околност на точка a от числовата права се нарича всеки отворен интервал Δ, който съдържа a.

Числото a се нарича *точка на сгъстяване* на редицата $a_1, a_2, \ldots$, когато всяка околност на a съдържа безбройно много членове на редицата.

Задача 126. Да се докаже, че числото a тогава и само тогава е точка на сгъстяване на една редица $a_1, a_2, \ldots$, когато съществува нейна подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, за която $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = a$.

Задача 127. Да се построи пример на редица, множеството на чиито точки на сгъстяване съвпада с множеството на реалните числа.

Теорема на Болцано — Вайерщрас: Всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване.

Задача 128. Да се докаже теоремата на Болцано — Вайерщрас, като се използуват зад. 123 и 126 и свойствата на монотонните редици.

Числото λ се нарича *съществена миноранта* на една редица $a_1, a_2, \ldots$, когато неравенството $\lambda \leqq a_n$ е изпълнено за всички достатъчно големи n. Числото μ се нарича *съществена мажоранта* на редицата $a_1, a_2, \ldots$, когато неравенството $a_n \leqq \mu$ е изпълнено за всички достатъчно големи n.

Очевидно една редица тогава и само тогава притежава съществена миноранта (мажоранта), когато е ограничена отдолу (отгоре).

Задача 129°. Да се докаже, че ако една редица е ограничена, множеството на съществените ѝ миноранти (мажоранти) е ограничено отгоре (отдолу) и точната му горна (долна) граница е най-лявата (най-дясната) точка на сгъстяване на дадената редица.

Най-лявата (най-дясната) точка на сгъстяване на една ограничена отдолу (отгоре) редица $a_1, a_2, \ldots$ се нарича *лимес инфериор* (*лимес супериор*) на редицата и се означава с $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n\right)$.

Когато редицата $a_1, a_2, \ldots$ не е ограничена отгоре, понякога се пише $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$, а когато не е ограничена отдолу, се пише $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = -\infty$.

Символите $-\infty$ и ∞ обикновено се свързват с реалните числа x с неравенствата $-\infty < x$ и $x < \infty$.

Задача 130. Нека редицата $a_1, a_2, \ldots$ е ограничена и $b_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, $c_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Да се докаже, че редицата $b_1, b_2, \ldots$ е намаляваща и ограничена, а редицата $c_1, c_2, \ldots$ е растяща и ограничена, както и че $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \liminf a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \limsup a_n$.

Задача 131°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ е ограничена и $x < \liminf a_n < x'$, $y' < \limsup a_n < y$, да се докаже, че:

а) всеки от интервалите $(-\infty, x)$ и (y, ∞) съдържа само краен брой членове на редицата;

б) всеки от интервалите $(-\infty, x')$ и (y', ∞) съдържа безбройно много членове на редицата.

Задача 132. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ и редицата $b_1, b_2, \ldots$ е ограничена, да се докаже, че:

а) $\liminf a_n b_n = a \liminf b_n$; б) $\limsup a_n b_n = a \limsup b_n$.

Задача 133. Ако редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са ограничени, да се докаже, че:

а) $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$;

б) $\liminf(a_n + b_n) \geqq \liminf a_n + \liminf b_n$;

в) $\limsup(a_n + b_n) \leqq \limsup a_n + \limsup b_n$;

§ 22. Лимитиране със средно аритметични

Задача 134*. За произволна редица $a_1, a_2, \ldots$ да се докажат неравенствата:

а) $\liminf a_n \leqq \liminf \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$;

б) $\limsup a_n \geqq \limsup \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

Задача 135* (Коши). Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Задача 136°. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sqrt[\nu]{2}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sqrt[\nu]{\nu}=1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sqrt[\nu]{P(\nu)}=1$, където P е полином, който приема само положителни стойности.

Задача 137°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=l$.

Задача 138°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условията $a_n>0$ за всяко n и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Задача 139. Ако $a_1, a_2, \ldots$ е редица с положителни членове, да се докаже, че (при $\ln 0=-\infty$, $\ln\infty=\infty$):

а) $\liminf \ln a_n=\ln\liminf a_n$; б) $\limsup \ln a_n=\ln\limsup a_n$.

Задача 140. Ако членовете на редицата $a_1, a_2, \ldots$ са положителни, да се докаже, че:

а) $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\liminf\sqrt[n]{a_n}$; б) $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqq\limsup\sqrt[n]{a_n}$.

Задача 141. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=n+1}^{2n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=2n+1}^{3n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{4e}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=kn+1}^{(k+1)n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k e}\quad(k\in\mathbf{N})$;

д) $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{kn}\left(\prod\limits_{\nu=kn+1}^{(k+1)n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=1$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=n+1}^{3n}\nu\right)^{\frac{1}{2n}}=\frac{27}{e^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=n+1}^{(k+1)n}\nu\right)^{\frac{1}{kn}}=\frac{(k+1)^{k+1}}{e^k}\quad(k\in\mathbf{N})$.

§ 23. Теорема на Щолц

Задача 142*(Щолц). Ако за редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са изпълнени условията $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, $b_{n+1}>b_n$ за всяко n и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Задача 143°. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^k\ (k\in\mathbf{N})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^k-\frac{n}{k+1}\right)\quad(k\in\mathbf{N})$.

Задача 144*. Ако за редиците $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu b_{n-\nu}=ab$.

Задача 145. Ако за редиците $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ са изпълнени условията $b_n=a_n+\alpha a_{n-1}$ за всяко n при $|\alpha|<1$ и ако $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{l}{1+\alpha}$.

Задача 146. Ако за редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са валидни равенствата $b_n=a_n+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu a_{n-\nu}$ за всяко $n>k$ и ако всички корени на уравнението $x^k+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu x^{k-\nu}=0$ имат по-малки от 1 модули, да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{l}{1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu}$.

Задача 147*. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ са такива числа, че винаги когато две редици $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са свързани със зависимостите $b_n = a_n + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu a_{n-\nu}$ за всяко $n > k$, от сходимостта на втората редица следва сходимостта и на първата. Тогава всички корени на уравнението $x^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x^{k-\nu} = 0$ имат по-малки от 1 модули.

§ 24. Гъсти множества в $\mathbb{R}$

Ако A и B са множества от реални числа, множеството A се нарича *гъсто* в B, когато всяка околност на всяка точка от B съдържа точки от A. Всяко гъсто в $\mathbb{R}$ множество A се нарича *гъсто*.

Множеството на рационалните числа и множеството на ирационалните числа са гъсти.

Задача 148. Ако A е изброимо множество от реални числа, множеството $\mathbb{R} \setminus A$ е гъсто.

Задача 149°. Множеството на трансцендентните числа е гъсто.

Задача 150°. Ако A и B са множества от реални числа, множеството A е гъсто в B тогава и само тогава, когато за всяка точка b от B съществува редица $a_1, a_2, \ldots$ от елементи на A с $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

Задача 151*. Да се намерят всички реални числа θ, за които множеството на всички суми от вида $m\theta + n$ при цели m и n е гъсто (К р о н е к е р).

Задача 152. За произволно реално число θ да се намерят всички точки на сгъстяване на редицата с общ член $\sin 2\pi n\theta$.

Задача 153*. Всяко безкрайно множество B от реални числа притежава изброимо и гъсто в B подмножество.

§ 25. Затворени множества в $\mathbb{R}$

Едно множество F от реални числа се нарича *затворено*, когато допълнението му $\mathbb{R} \setminus F$ е отворено (за дефиницията на понятието отворено множество вж. текста преди зад. 51, гл. III).

Задача 154*. Да се докаже, че:

а) множествата $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ са затворени;

б) ако $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от затворени множества, сечението $\cap\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е също затворено;

в) обединението на краен брой затворени множества е затворено множество.

Задача 155°. Множеството на точките на сгъстяване на всяка редица от реални числа е затворено множество.

Задача 156. Всяко затворено множество е множеството на точките на сгъстяване на някоя редица.

Задача 157. Едно множество F от реални числа е тогава и само тогава затворено, когато за всяка сходяща редица $a_1, a_2, \ldots$ от елементи на F е в сила $\lim_{n\to\infty} a_n \in F$.

Нека A е множество от реални числа. *Затворена обвивка* на A се нарича сечението на всички затворени множества от реални числа, които съдържат A. Затворената обвивка на A се означава с $[A]$.

От зад. 154 б) следва, че затворената обвивка на A е затворено множество, което съдържа A. Тя е най-малкото затворено множество с това свойство. Множеството A е затворено точно когато $A = [A]$.

Задача 158. Ако A е множество от реални числа и a е реално число, релацията $a \in [A]$ е в сила тогава и само тогава, когато във всяка околност на a има точки от A.

Задача 159. Ако A е множество от реални числа и a е реално число, релацията $a \in [A]$ е в сила тогава и само тогава, когато съществува редица $a_1, a_2, \ldots$ от елементи на A с $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Задача 160. Ако A и B са множества от реални числа, A е гъсто в B тогава и само тогава, когато $B \subset [A]$.

Задача 161. Ако M е ограничено отгоре (отдолу) непразно множество от реални числа, то $\sup M \in [M]$ $(\inf M \in [M])$.

§ 26. Компактни множества в $\mathbb{R}$

Едно множество C от реални числа се нарича *компактно*, когато от всяка фамилия от отворени множества $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, за които $C \subset \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, могат да се изберат краен брой елементи $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$ с $C \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} U_{\alpha_\nu}$.

Задача 162*. Едно множество C от реални числа е компактно тогава и само тогава, когато е ограничено и затворено.

Задача 163. Едно множество C от реални числа е компактно тогава и само тогава, когато всяка редица от елементи на C притежава сходяща подредица с граница от C.

Задача 164. Ако множествата $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$ са непразни и компактни, сечението им не е празно.

Пета глава

Граници на функции

§ 1. Граница на функция, когато аргументът клони към крайна граница

Задача 1°. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x-1| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|x^2 - 1| < 0{,}01$.

Задача 2°. Да се намери най-голямата околност U на числото 1 със свойството: от $x \in U$ да следва $|x^2 - 1| < 0{,}01$.

Задача 3°. Да се намери най-голямата симетрична околност U на точката 1 със свойството: от $x \in U$ да следва $|x^2 - 1| < 0{,}01$.

Задача 4°. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x-1| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|x^3 - 1| < 0{,}001$.

Задача 5. Нека ε е произволно положително число. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x - 1| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|x^3 - 1| < \varepsilon$.

Задача 6°. За произволно реално a да се намери такова положително число δ, че от неравенството $|x - a| < \delta$ да следва неравенството $|x^3 - a^3| < 0{,}01$.

Задача 7. За произволно реално a и за произволно положително число ε да се намери такова положително число δ, че от неравенството $|x - a| < \delta$ да следва $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

Задача 8. Нека $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ и $\varepsilon > 0$. Да се намери такова положително число δ, че ако $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 9. Нека ε е произволно положително число. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x - 3| < \delta$, да е изпълнено и неравенството

$$\left|\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{10}\right| < \varepsilon.$$

Ако x е реално число, със $[x]$ (чете се *скобка* x) се означава най-голямото цяло число n, за което $n \leqq x$.

Така например $[1] = 1$, $[e] = 2$, $\left[-\frac{5}{2}\right] = -3$.

Задача 10°. Не съществува положително число δ, за което от неравенството $|x-1|<\delta$ да следва винаги неравенството $|[x]-1|<1$.

Задача 11. Нека ε е произволно положително число. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила $|x - 1| < \delta$ и $x \neq 1$, да е изпълнено и неравенството

$$\left|\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Ако A е множество от реални числа, едно реално число a се нарича *точка на сгъстяване* на A, когато всяка околност на a съдържа безбройно много елементи на A.

Всяка точка на сгъстяване на едно числово множество A принадлежи на затворената обвивка $[A]$ на A. Обратното изобщо не е вярно.

Задача 12°. Да се построи пример на множество A и на точка a от затворената му обвивка $[A]$, която не е точка на сгъстяване на A.

Задача 13°. Да се намерят множествата на всичките точки на сгъстяване на:

а) множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа; б) множеството $\mathbf{I}$ на целите числа; в) интервала $(0, 1)$.

Ако са дадени функция $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$, точка на сгъстяване a на дефиниционната област X на f и реално число l, последното се нарича *граница на функцията* f *при* x, *клонящо към* a (чрез стойности, различни от a), и се пише $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, когато за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяко реално x, за което $|x-a| < \delta$, $x \neq a$ и $x \in X$, да е в сила неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Когато $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, се казва още, че $f(x)$ *клони към* l *при* x, *клонящо към* a.

Така например, ако зад. 9 и 11 са вече решени, по същество това означава, че са доказани равенствата $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{3}{10}$ и $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

От зад. 10 пък следва, че $[x]$ не клони към 1 при x, клонящо към 1.

Така въведеното понятие граница на функция е свързано с понятието граница на редица с помощта на следната

Теорема на Хайне. *Ако са дадени функция* $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$, *точка на сгъстяване* a *на дефиниционната област* X *на* f *и реално число* l, *условието*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *е в сила тогава и само тогава, когато за всяка редица* $x_1, x_2, \ldots,$ *за която* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ *и* $x_n \in X$, *е в сила* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

От теоремата на Хайне и от зад. 30 б), 35, 38, 49, 73 и 74 на предишната глава следва, че за всяко a от дефиниционната област на съответната функция са в сила равенствата:

(а) $$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

(б) $$\lim_{x\to a} R(x) = R(a) \quad (R \text{ — рационална функция}),$$

(в) $$\lim_{x\to a} |x| = |a|,$$

(г) $$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a,$$

(д) $$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$$

(е) $$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a,$$

(ж) $$\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a,$$

(з) $$\lim_{x\to a} e^x = e^a,$$

(и) $$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a.$$

Тъй като $b^x = e^{x \ln b}$ за всяко $b > 0$ и $x^b = e^{b \ln x}$ за всяко $x > 0$, от теоремата на Хайне, от (з) и (и) следва:

(к) $$\lim_{x\to a} b^x = b^a,$$

(л) $$\lim_{x\to a} x^b = a^b.$$

Също от теоремата на Хайне и от правилата за действия със сходящи редици следват равенствата:

(А) $$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

(Б) $$\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x);$$

(В) $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x);$$

(Г) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

винаги когато десните страни имат смисъл.

§ 2. Граници на някои алгебрични функции, когато аргументът клони към крайна граница

Задача 14. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x+1}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; д) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$;

й) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in \mathbb{I}, n \neq 0)$; к) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; м) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)$; о) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)$;

п) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(0 \leqq b < a)$; р) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$;

с) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$; т) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^2}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

Задача 15. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}\right)\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)$ $(n \in \mathbb{N})$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1+x}-1-\dfrac{x}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(\sqrt[n]{1+x}-1-\dfrac{x}{n}+\dfrac{n-1}{2n^2}x^2\right)$ $(n \in \mathbb{N})$.

§ 3. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Задача 16. Нека функциите $f : A \to \mathbb{R}$ и $\varphi : B \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R})$ удовлетворяват условията $\varphi(B) \subset A$, $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = a$ и $\varphi(B \setminus \{b\}) \subset A \setminus \{a\}$, където a и b са точки на сгъстяване съответно на A и B. Да се докаже равенството $\lim\limits_{x\to b} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u\to a} f(u)$ винаги когато дясната страна съществува.

Горната задача в същност изразява едно правило за намиране на граница на функция от функция.

В следващите задачи често се използува равенството $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, което следва от неравенствата $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{x^2}{2}$ (ъгълът $x \neq 0$ се измерва в радиани).

Задача 17. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^2}$.

Задача 18°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(b \neq 0)$.

Задача 19. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2\pi x}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 4\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin m\pi x}{\sin n\pi x}$ $(m,\ n \in \mathrm{I},\ n \neq 0)$.

Задача 20. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{3\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2}x}{x-1}$ $(n \in \mathrm{I})$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(2m+1)\dfrac{\pi}{2}x}{\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2}x}$ $(m,\ n \in \mathrm{I})$.

Задача 21. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}$ $(\cos a \neq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$ $(\sin a \neq 0)$.

Задача 22. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax - \sin bx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax - \cos bx}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax - \operatorname{tg} bx}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} x(\operatorname{ctg} ax - \operatorname{ctg} bx)$ $(ab \neq 0)$.

Задача 23. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sin\dfrac{\nu}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\cos\dfrac{\nu}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sin\left(a+\dfrac{b-a}{n}\nu\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\cos\left(a+\dfrac{b-a}{n}\nu\right)$.

Задача 24. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{2}}\,\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\dfrac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}4^\nu\sin^4\dfrac{x}{2^\nu}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{4^\nu\cos^2\dfrac{x}{2^\nu}}$ $(\sin x \neq 0)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{1}{2^\nu}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^\nu}$ $(\sin 2x \neq 0)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{1}{4^\nu}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2^\nu}$ $(\sin 2x \neq 0)$.

Задача 25*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \dfrac{x}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \dfrac{x}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{x}{n} + \lambda \sin\dfrac{x}{n}\right)^n$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

Задача 26. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax \cos bx}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}(1-\cos a_1x \cos a_2x \ldots \cos a_kx)$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^n x}{x^2}$.

Задача 27. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+\sin x^2} - \cos x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt[3]{1+x\sin x} - \cos 2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1+x^{2-\alpha}\sin^\alpha x} - \cos ax\right)$.

Задача 28. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(2\sin\dfrac{x}{2} - \sin x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(n\sin\dfrac{x}{n} - \sin x\right)$.

§ 4. Апроксимация на $\sin x$ и $\cos x$ с полиноми

Задача 29*. Да се докажат неравенствата:

а) $$\left|\sin x - \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \binom{n}{2\nu+1}\cos^{n-2\nu-1}\frac{x}{n}\sin^{2\nu+1}\frac{x}{n}\right| \le \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2};$$

б) $$\left|\cos x - \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \binom{n}{2\nu}\cos^{n-2\nu}\frac{x}{n}\sin^{2\nu}\frac{x}{n}\right| \le \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2}$$

при $|x| < k$.

Задача 30. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{\nu}\cos^{n-\nu}\frac{x}{n}\sin^\nu\frac{x}{n} \quad (\nu - 1 \in \mathbf{N}).$$

Задача 31. Да се докажат неравенствата:

а) $$\left|\sin x - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}\right| \le \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2};$$

б) $$\left|\cos x - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}\right| \le \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2}$$

при $|x| < k$.

Задача 32. Да се докажат равенствата:

а) $$\sin x = \lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1};$$

б) $$\cos x = \lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}.$$

Задача 33. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}(\sin x - x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^5}\left(\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2k+1}}\left(\sin x - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}\right) \quad (k\in\mathbf{N})$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\left(\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2k}}\left(\cos x - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}\right) \quad (k\in\mathbf{N})$.

§ 5. Апроксимация на показателната функция с полиноми

Задача 34*. Да се докаже неравенството

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\frac{x^\nu}{n^\nu}\right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k}{k-|x|}$$

при $|x| < k < n$.

Задача 35. Да се докаже неравенството

$$\left|e^x - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{x^\nu}{\nu!}\right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k}{k-|x|}$$

при $|x| < k$.

Задача 36. Да се докаже равенството $e^x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{k}\frac{x^\nu}{\nu!}$.

Задача 37. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x - 1)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}\left(e^x - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{x^\nu}{\nu!}\right)$.

Задача 38. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(a^x - 1)\ (a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(a^x - 1 - x\ln a)\ (a>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}\left[a^x - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{(\ln a)^\nu}{\nu!}x^\nu\right] \quad (a>0)$.

Задача 39. Да се пресметне:

а) $\sin 10^\circ$ с точност 10^{-4}; б) e с точност 10^{-6}.

§ 6. Граници на функции при неограничено нарастване на аргумента

Ако са дадени функция $f: X \to \mathbb{R}$ ($X \subset \mathbb{R}$), чиято дефиниционна област X не е ограничена отгоре, и реално число l, последното се нарича *граница*

на функцията f при x, клонящо към ∞ (по-добре: *при x, дивергиращо към* ∞), и се пише $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, когато за всяко положително число ε съществува такова число Δ, че за всяко реално x, за което $x > \Delta$ и $x \in X$, да е в сила неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

При $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ се казва още, че $f(x)$ клони към l при x, клонящо към ∞.

Лесно се съобразява как трябва да се модифицира тази дефиниция, за да се даде смисъл на символа $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, а също така и как да се редактират съответните теореми на Хайне. От едната от тях и от зад. 64 б), гл. IV следва равенството $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Също така непосредствено се съобразява кога и как може да се даде смисъл на символите $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и т. н.

От зад. 64 а) и 76 а) и б), гл. IV следват равенствата $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$.

Задача 40. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{30}{7}}\left(\sqrt[7]{x^5+2} - \sqrt[7]{x^5-3}\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\gamma(n-1)}{n}}\left(\sqrt[n]{x^\gamma+\alpha} - \sqrt[n]{x^\gamma+\beta}\right) \quad (\gamma > 0)$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha\left(\sqrt[n]{x^\gamma+1} - \sqrt[n]{x^\gamma-1}\right)$; й) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos(1+x)^p - \cos x^p\right) \quad (p < 1)$.

Задача 41°. Да се докаже, че границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg} x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{ctg} x$,

не съществуват.

Задача 42°. За кои стойности на α съществуват границите:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x}{x^\alpha}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cos x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^\alpha}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha^x}{1+\alpha^x}$ $(0<\alpha)$.

Задача 43. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$ $(a_0b_0 \neq 0)$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$ $(a_0b_0 \neq 0)$.

§ 7. Сравняване растенето на функциите a^x, x^α и $\ln x$

Задача 44. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a^x} = 0$ $(a>1)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{a^x} = 0$ $(a>1)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$ $(a>1,\ n\in\mathbb{N})$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{R(x)}{a^x} = 0$ ($a>1$, R — рационална функция);

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$ $(a>1,\ \alpha\in\mathbb{R})$.

Задача 45. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $(\alpha>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \infty$ $(\alpha \leqq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

Задача 46°. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n a^x = 0$ $(a>1)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha a^x = 0$ $(0<a<1)$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$ $(0<a<1)$.

Задача 47. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$; б) $\lim\limits_{x\to0} x(\ln x)^2 = 0$;

в) $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha \ln x = 0$ $(\alpha>0)$; г) $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha \ln x = -\infty$ $(\alpha \leqq 0)$;

д) $\lim\limits_{x\to0} x^x = 1$; е) $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{x}} = 0$; ж) $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{x}} \ln x = 0$.

Задача 48. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+(\ln x)^2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2^x+\ln(3x^2-1)}{3^x - 71x^{101} - \left(\frac{5}{2}\right)^x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\ln(e^x-1)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\ln(e^x-x^2)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln[x+(\ln x)^2]}{\ln x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^\alpha - \ln x)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^3+x^2+1)}{\ln(x^2-2x-2)}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+2^x)}{\ln(x-3)}$; й) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^{\sqrt{3x}}}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(x+2^{\sqrt{3x-1}}\right)$.

§ 8. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Задача 49°. Ако a е точка на сгъстяване на общата дефиниционна област на функциите f и g, $f(x)>0$, $g(x)\geqq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, неравенството $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^{g(x)} > 1$ не е възможно.

Задача 50°. Нека функцията f е дефинирана в околност на нулата. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to0} f(x) = l$ следва $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$;

б) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ следва $\lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$.

Задача 51. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Задача 52. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ следва $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = \infty$;

в) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ и $1+\frac{f(x)}{x} \geqq 0$ следва $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = 0$.

Задача 53. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = 0$;

в) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ и $1+\frac{f(x)}{x} > 0$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = \infty$.

Задача 54. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ и $1+xf(x) > 0$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = \infty$;

в) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ и $1+xf(x) > 0$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = 0$.

Задача 55°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+ax}{1+bx}\right)^{\frac{1}{(a+b)x}}$ $(a+b\neq 0)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+1}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x+3x^2+x^3}{1+x+2x^2+x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 56°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\operatorname{ctg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{1+\sin x\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Задача 57°. Ако $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = a$, където функцията f удовлетворява неравенството $1+xf(x)>0$, то

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \ln a & \text{при } a>0, \\ -\infty & \text{при } a=0. \end{cases}$$

§ 9. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

Задача 58. Да се докаже равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $(a>0)$, като се използува зад. 57.

Задача 59. Да се докаже, че от $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = a > 0$ следва

$$\lim_{x\to 0}\frac{(g(x))^x-1}{x} = \ln a.$$

Задача 60. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{e^x-e^\xi}{x-\xi}$; в) $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{e^{\lambda x}-e^{\lambda\xi}}{x-\xi}$.

Задача 61°. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \ln a$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \ln a$.

Задача 62°. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a > 0$ следва $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{f(x)}-1\right) = \ln a$;

б) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a > 0$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[x]{f(x)}-1\right) = \ln a$.

Задача 63. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2\right) \quad (a > 0)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right) \quad (a > 0)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x+1}} - a^{\frac{1}{x^2-x+1}}\right) \quad (a > 0)$.

Задача 64*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2.3^x + 3.2^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(p\left(\dfrac{1+\lambda x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{x}} + q\left(\dfrac{1+\mu x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^x$, където числата p, q, λ и μ са положителни и $p+q=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^2}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 65. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\operatorname{tg} x}}{x - \operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x} - 2}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(a^{\sqrt{1+x}} - a\right) \quad (a > 0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sqrt{1+x}} - a^{1+\frac{x}{2}}}{\sin^2 x} \quad (a > 0)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left(a^{\sqrt{1+x}} - a^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}\right) \quad (a > 0)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(a^{\sqrt[3]{1+x}} - a^{1+\frac{x}{3}}\right) \quad (a > 0)$.

Задача 66. Да се докаже, че от $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - g(x)}{x^\alpha} = \lambda \quad (\alpha > 0)$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = l$ следва $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{x^\alpha} = \lambda a^l \ln a \quad (a > 0)$.

Задача 67. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x - 3^x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x - 3^{x^2}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^\alpha} - 1}{x} \quad (a > 1,\ \alpha > 0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x - 3^{x^\alpha}}{x} \quad (\alpha > 0)$.

§ 10. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Задача 68. Да се докаже равенството $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Задача 69. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0)$.

Задача 70. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a) - \ln a}{\sqrt[4]{a^4 + x} - a} \quad (a > 0)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x - \ln 2}{x^2 - 5x + 6}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x - e^3}{\ln x - \ln 3}$.

Задача 71*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

§ 11. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Задача 72. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

Задача 73. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^b - a^b}{x - a} = ba^{b-1} \quad (a > 0)$.

Задача 74. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^\pi - 2^\pi}{x^e - 2^e}$ $(e \neq 0)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^a - 3^a}{x^b - 3^b}$ $(b \neq 0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+x}-1}{(1+x)^\alpha - 1}$ $(\alpha \neq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin 2x}\left(\sqrt[6]{1+\ln(1+x)}-1\right)$.

Задача 75. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^\alpha x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}((\cos ax)^\alpha - (\cos bx)^\alpha)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(1-\cos^\alpha ax\cos^\beta bx)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(1-\cos^{\alpha_1} a_1x\cos^{\alpha_2} a_2x\ldots\cos^{\alpha_k} a_kx)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x\sin x)^\alpha - \cos ax}{\sin^2 x}$.

Задача 76*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a - 1 - ax}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a - 1 - \binom{a}{1}x - \binom{a}{2}x^2}{x^3}$.

Задача 77*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ $(\alpha + 1 > 0)$.

Задача 78*. Да се пресметнат границите $(\alpha > 1)$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}((x+1)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1} - (\alpha+1)x^\alpha)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}((x+1)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1} - (\alpha+1)(x+1)^\alpha)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\alpha+1)x^\alpha - (x^{\alpha+1} - (x-1)^{\alpha+1})}{x^\alpha - (x-1)^\alpha}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} - \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$.

Задача 79*. Да се пресметнат границите $(\alpha > 2)$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-2}}[(\alpha+1)(x+1)^\alpha - 2(x+1)^{\alpha+1} + 2x^{\alpha+1} + (\alpha+1)x^\alpha]$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} - \dfrac{1}{\alpha+1}\right) - \dfrac{1}{2}\right]n$.

§ 12. Пресмятане на някои граници от вида

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$$

Задача 80*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\left(1+\dfrac{\nu}{n^2}\right)^\gamma - 1\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\left(1+\dfrac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)^\gamma - 1\right)$ $(0 < \alpha < \beta)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(a^{\frac{\nu^\alpha}{n^\beta}b} - 1\right)$ $(0 < \alpha < \beta,\ 0 < a)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin\dfrac{\nu^\alpha}{n^\beta}a$ $(0 < \alpha < \beta)$.

Задача 81*. Да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n} f\left(\dfrac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$ $(0 < a,$ $0 < \alpha < \beta)$ при $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^\gamma} = l \neq 0$ $(\gamma > 0)$.

Задача 82*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\dfrac{\nu}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\dfrac{\nu a}{n^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\dfrac{\nu^\alpha a}{n^{\alpha+1}}\right)$ $(0 < \alpha)$;

г) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1+\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right) \quad (0<\alpha<\beta)$;

Задача 83*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \cos\frac{\nu}{n\sqrt{n}}$; б) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \cos\frac{\nu a}{n^\alpha} \quad (1<\alpha)$;

в) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \cos\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta} \quad (1<\alpha<\beta)$; г) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \cos^n\frac{a}{n^\alpha} \quad (\alpha>0)$.

§ 13. Лява и дясна граница

Ако A е множество от реални числа, едно реално число a се нарича *лява* (*дясна*) *точка на сгъстяване* на A, когато всеки интервал от вида (a, b) с $b>a$ (от вида (b, a) с $b<a$) съдържа безбройно много елементи на A.

Ако a е лява или дясна точка на сгъстяване на A, ясно е, че a е точка на сгъстяване на A.

Задача 84°. Да се докаже, че ако a е точка на сгъстяване на множеството A, е вярно поне едно от двете твърдения: a е лява точка на сгъстяване на A или a е дясна точка на сгъстяване на A.

Задача 85°. Да се намерят множествата на левите точки на сгъстяване на:

а) множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа;

б) множеството $\mathbf{I}$ на целите числа;

в) интервала $(0, 1)$;

г) интервала $[0, 1]$.

Ако са дадени функция $f: X\to\mathbf{R}$ $(X\subset\mathbf{R})$, лява (дясна) точка на сгъстяване a на дефиниционната област X на f и реално число l, последното се нарича *дясна* (*лява*) *граница на функцията* f *при* x, *клонящо към* a (чрез стойности, различни от a), и се пише $\lim_{x\to a+0} f(x)=l$ $\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=l\right)$, когато за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяко x, за което $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ и $x\in X$, да е в сила неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Задача 86°. Да се посочи пример на функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, за която границите $\lim_{x\to 1+0} f(x)$ и $\lim_{x\to 1-0} f(x)$ съществуват, без да съществува границата $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Задача 87°. Нека a е както лява, така и дясна точка на сгъстяване на дефиниционната област X на функцията $f: X\to\mathbf{R}$ $(X\subset\mathbf{R})$. Да се докаже, че границата $\lim_{x\to a} f(x)$ съществува точно когато и двете граници $\lim_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim_{x\to a-0} f(x)$ съществуват и са равни помежду си.

Задача 88. Нека функцията $f: X\to\mathbf{R}$ $(X\subset\mathbf{R})$ е монотонна и ограничена, а a е лява (дясна) точка на сгъстяване на X. Да се докаже, че границата $\lim_{x\to a+0} f(x)$ $\left(\lim_{x\to a-0} f(x)\right)$ съществува.

Когато границата $\lim_{x\to a+0} f(x)$, респективно $\lim_{x\to a-0} f(x)$, съществува, понякога тя се означава с $f(a+0)$, респективно с $f(a-0)$.

Шеста глава

Непрекъснати функции

§ 1. Дефиниция на непрекъсната функция

Функцията $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ се нарича *непрекъсната* в една точка $\xi \in X$, когато за всяка околност U на $f(\xi)$ съществува такава околност V на ξ, че е в сила включването $f(V \cap X) \subset U$.

С други думи, функцията f е непрекъсната в точката ξ, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко $x \in X$, за което е в сила неравенството $|x - \xi| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Ако тази дефиниция се сравни с дефиницията на граница на функция, може да се забележи, че функцията f е непрекъсната в една принадлежаща на X точка на сгъстяване ξ на X точно когато $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$. Но дефиницията на непрекъснатост на функция в точка има смисъл и когато $\xi \in X$ не е точка на сгъстяване на X. Не е трудно да се съобрази, че тогава функцията f е непрекъсната в точката ξ.

Когато функцията f не е непрекъсната в точката ξ на X, тя се нарича *прекъсната* в ξ.

Когато една функция е непрекъсната във всяка точка на дефиниционната си област, тя се нарича *непрекъсната*. Една функция се нарича *прекъсната*, когато е прекъсната в поне една точка от дефиниционната си област.

Задача 1°. Да се докаже, че функцията:

а) $f(x) = x^3$ е непрекъсната; б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ е непрекъсната;

в) $f(x) = |x|$ е непрекъсната.

Задача 2°. Да се докаже, че:

а) функцията $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, дефинирана с равенството $f(x) = \dfrac{1}{x}$, е непрекъсната;

б) всяка функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за която $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, е прекъсната в точката 0.

Задача 3°. Къде е прекъсната функцията $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -1 \leqq x < 0, \\ x+1 & \text{при } \ \ 0 \leqq x \leqq 1? \end{cases}$$

Задача 4. Непрекъсната ли е функцията $f: [-1, 0] \cup \{1\} \cup [2, 5] \to \mathbb{R}$, дефинирана с помощта на следните равенства:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -1 \leqq x \leqq 0, \\ 2 & \text{при } \ \ x = 1, \\ 5 - x & \text{при } \ \ 2 \leqq x \leqq 5? \end{cases}$$

Задача 5. За коя стойност на λ функцията $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с:

а) $f(x) = \begin{cases} x \ln(1+x^2) & \text{при } x \neq 0, \\ \lambda & \text{при } x = 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x \ln |x|^3 & \text{при } x \neq 0, \\ \lambda & \text{при } x = 0, \end{cases}$

е непрекъсната?

Задача 6. а) Нека ξ е такава точка на $X \subset \mathbb{R}$, че всяка функция $f: X \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в ξ. Какво можете да кажете за точката ξ?

б) Всяка функция $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната.

в) Всяка функция $f: \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната.

г) Нека $X = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$. Кога една функция $f: X \to \mathbb{R}$ е непрекъсната?

Задача 7. Какво трябва да бъде множеството $X \subset \mathbb{R}$, за да бъде непрекъсната всяка функция $f: X \to \mathbb{R}$?

Непрекъснатостта може да се установява директно, както в посочените дотук примери. По-удобно е обаче за тази цел да се използуват някои общи теореми за непрекъснатите функции.

Теорема на Хайне: *Ако са дадени функция $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ и точка ξ от X, функцията f е непрекъсната в точката ξ точно когато за всяка редица $x_1, x_2, \ldots$ с $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$ и $x_n \in X$ е в сила $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$.*

От теоремата на Хайне и от правилата за действия със сходящи редици следва, че сума, разлика, произведение и частно на непрекъснати функции са непрекъснати функции. Непрекъсната функция от непрекъсната функция също е непрекъсната функция.

От равенствата (а) — (л) в началото на пета глава следва, че функциите $\sqrt[k]{x}$ $(k \in \mathbb{N})$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(a > 0)$, $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, x^2, както и рационалните функции са непрекъснати.

Задача 8. а) Ако функцията $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е непрекъсната в една точка $\xi \in X$, функцията $|f|$ също е непрекъсната в ξ.

б) Ако функциите $f{:}\,X \to \mathbb{R}$ и $g{:}\,X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ са непрекъснати в една точка $\xi \in X$, функциите $\min(f,g)$ и $\max(f,g)$ са също непрекъснати в ξ.

Задача 9°. Да се намерят всичките точки, в които функциите $[x]$ и $x - [x]$ са непрекъснати.

Една функция $f{:}\,X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ се нарича *ограничена отгоре* (*отдолу*), когато съществува такава константа A, че за всяко x от X да е в сила неравенството $f(x) \leqq A$ $(A \leqq f(x))$. Функцията f се нарича *ограничена*, когато е ограничена отдолу и отгоре. Очевидно това означава, че съществува константа A, за която $|f(x)| \leqq A$ за всяко x от X.

Задача 10. Функциите f и g имат обща дефиниционна област $X \subset \mathbb{R}$ и g е непрекъсната в една точка ξ на X. Да се докаже, че:

а) ако f е ограничена в X и $g(\xi) = 0$, произведението fg е непрекъснато в ξ.

б) ако $g(\xi) \neq 0$, произведението fg е непрекъснато в ξ точно когато функцията f е непрекъсната в ξ.

Задача 11°. Да се докаже, че функцията $[x]\sin \pi x$ е непрекъсната.

Дефинираната с $D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ ирационално,} \\ 1 & \text{при } x \text{ рационално} \end{cases}$ функция $D{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се нарича функция на Дирихле.

Задача 12°. Функцията на Дирихле е прекъсната за всяко реално x.

Задача 13°. а) Да се построи функция $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, която е прекъсната навсякъде, а функцията f^2 е непрекъсната.

б) Да се докаже, че ако f е функция, за която функцията f^3 е непрекъсната, то и f е непрекъсната.

Задача 14°. а) Да се построи функция f, която е прекъсната навсякъде, а функцията $|f|$ е непрекъсната.

б) Всяка непрекъсната положителна функция $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е модул на някоя навсякъде прекъсната функция.

Задача 15. Да се построи функция $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, която е непрекъсната само в точките:

а) $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{n}, \ldots;$

б) $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{n}, \ldots;$

в) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$ г) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Задача 16. а) Нека $p_1, p_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$ са редици съответно от цели и от естествени числа, а числото ξ е ирационално. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$.

б) Нека функцията $\sigma{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дефинирана с условията: $\sigma(x) = 0$ за всяко ирационално x и $\sigma(x) = \frac{1}{q}$, когато рационалното число x е представено във вида $\frac{p}{q}$, където p е цяло число, а q е взаимно просто с него естествено число. Да се докаже, че σ е прекъсната във всички рационални точки и е непрекъсната за всяко ирационално x.

Задача 17*. Една функция $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната точно когато за всяко отворено подмножество U на $\mathbb{R}$ множеството $f^{-1}(U)$ е отворено.

Задача 18*. Една функция $f{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната точно когато за всяко затворено подмножество F на $\mathbb{R}$ множеството $f^{-1}(F)$ е затворено.

Нека $f{:}\,M \to \mathbb{R}$ $(M \subset \mathbb{R})$ и $g{:}\,N \to \mathbb{R}$ $(N \subset \mathbb{R})$ са произволни функции. Функцията f се нарича *продължение* на функцията g, когато $N \subset M$ и е в сила равенството $f(x) = g(x)$ за всяко x от N. В този случай g се нарича *рестрикция* на f до N и се означава с $f|_N$. Когато функцията f е непрекъсната, понякога тя се нарича *непрекъснато продължение* на g.

Задача 19*. Нека $f{:}\,X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е произволна функция, а L е множеството на всичките реални числа ξ, за които $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ съществува. Да се докаже, че функцията $g{:}\,L \to \mathbb{R}$, дефинирана с $g(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ за всяко ξ от L, е непрекъсната.

Задача 20. Да се докаже, че:

а) за произволна функция $f{:}\,\mathrm{I} \to \mathbb{R}$ съществува непрекъснато продължение $g{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

б) за всяка непрекъсната функция $f{:}\,F \to \mathbb{R}$, където F е непразно затворено множество в $\mathbb{R}$, съществува непрекъснато продължение $g{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за което $\inf\limits_{x\in R} g(x) = \inf\limits_{x\in F} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in R} g(x) = \sup\limits_{x\in F} f(x)$;

в) ако множество $X \subset \mathbb{R}$ не е затворено, съществува непрекъсната функция $f{:}\,X \to \mathbb{R}$, която не притежава непрекъснато продължение $g{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

§ 2. Множество на стойностите на непрекъснатата функция

Следващата теорема констатира едно характерно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема на Болцано. *Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в ограничения затворен интервал $[a, b]$ и приема в краищата му стойности с противоположни знаци, съществува точка ξ от (a, b) с $f(\xi) = 0$.*

От теоремата на Болцано следва непосредствено, че множеството на стойностите на всяка непрекъсната функция, чиято дефиниционна област е интервал, е също интервал. Разбира се, последният може да бъде затворен, полузатворен, отворен, ограничен или пък неограничен.

Така например множествата на стойностите на функциите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$, e^x, $\ln x$ $(x > 0)$ и т. н. са съответно $[-1, 1]$, $[-1, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$ и т. н.

Задача 21. Да се решат неравенствата:

а) $\sin x - \cos x > 0$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3} > 0$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^4 - 2x^2} < 2^{-8x^2 - 9}$;

г) $\log_a x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6)$ $(0 < a \neq 1)$; д) $\ln|2x-3| < 1$.

Задача 22°. Функцията $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, приема само рационални стойности и $f(0) = 2$. Да се намери $f(1)$.

Задача 23. Имат ли корени следващите уравнения в посочените интервали:

а) $x^5 - 3x + 1 = 0$ в $[1, 2]$; б) $\sin x - x + 1 = 0$ в $(-\infty, \infty)$;

в) $x^3 - 3x + 1 = 0$ в $[-1, 2]$; г) $x^3 - 3x + 1 = 0$ в $[-1, 0]$;

д) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 24 = 0$ в $[2, 5]$;

е) $x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 14x + 14 = 0$ в $[3, \infty)$;

ж) $P(x) = 0$ в $(-\infty, \infty)$, където P е полином от нечетна степен;

з) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x - 24} = 0$ в $[5, 7]$;

и) $\operatorname{tg} x = x$ в $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ при $k \in \mathrm{I}$;

й) $\operatorname{ctg} x = P(x)$ в $(k\pi, (k+1)\pi)$ при $k \in \mathrm{I}$, където P е произволен полином?

Задача 24*. Да се намерят:

а) всичките полиноми $ax^2 + bx + c$ най-много от втора степен, за които числата $ax^2 + bx + c$ и x са едновременно цели;

б) всичките полиноми P, за които числата $P(x)$ и x са едновременно цели.

§ 3. Обратни кръгови функции

Задача 25*. Да се докаже, че:

а) ако функцията $f: \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е интервал, е стриктно монотонна, обратната ѝ функция е непрекъсната;

б) ако функцията $f: \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е интервал, е непрекъсната и обратима, тя е стриктно монотонна.

Функцията $\sin x$ е стриктно растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а множеството на стойностите ѝ, когато x пробягва този интервал, е интервалът $[-1, 1]$. Обратната функция на функцията $\sin x$, разглеждана само в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, се нарича *аркуссинус* и се означава с $\arcsin x$. Съгласно казаното по-горе дефиниционната ѝ област е интервалът $[-1, 1]$, а множеството на стойностите ѝ е интервалът $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Условията $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \arcsin y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\arcsin(\sin x) = x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin(\arcsin y) = y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$.

Аналогично се дефинира *аркускосинус* като обратна функция на стеснената до интервала $[0, \pi]$ функция $\cos x$. В този интервал функцията $\cos x$ е стриктно намаляваща и множеството на стойностите ѝ, когато x пробягва интервала $[0, \pi]$, е интервалът $[-1, 1]$. Дефинираната в интервала $[-1, 1]$ функция аркускосинус се означава с $\arccos x$. Стойностите ѝ изпълват интервала $[0, \pi]$. Условията $y = \cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ и $x = \arccos y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\arccos(\cos x) = x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ и $\cos(\arccos y) = y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$.

Обратната на стеснената до интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ се нарича *аркустангенс* и се означава с $\operatorname{arctg} x$. Дефиниционната област на функцията $\operatorname{arctg} x$ е $\mathbb{R}$, а множеството на стойностите ѝ е интервалът $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Условията $y = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \operatorname{arctg} y$ $(y \in \mathbb{R})$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$.

Най-после обратната на стеснената до интервала $(0, \pi)$ функция $\operatorname{ctg} x$ се нарича *аркускотангенс* и се означава с $\operatorname{arcctg} x$. Дефиниционната област на $\operatorname{arcctg} x$ е $\mathbb{R}$, а множеството на стойностите на тази функция е интервалът $(0, \pi)$. Условията $y = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$ и $x = \operatorname{arcctg} y$ $(y \in \mathbb{R})$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ $(0 < x < \pi)$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$.

От зад. 25 а) следва, че обратните тригонометрични функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ са непрекъснати.

Задача 26. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

в) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbf{R})$;

г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad (x \in \mathbf{R})$.

Задача 27. Да се докажат тъждествата ($n \in \mathbf{I}$):

а) $$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2n\pi & \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \\ -x + (2n+1)\pi & \left(-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right); \end{cases}$$

б) $$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2n\pi & (2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi), \\ -x + 2(n+1)\pi & ((2n+1)\pi \leqq x \leqq 2(n+1)\pi); \end{cases}$$

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi \quad (n\pi < x < (n+1)\pi)$.

Задача 28. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$.

Задача 29. Да се докажат тъждествата:

а) $$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2} & (0 \leqq x \leqq 1), \\ -\arccos\sqrt{1-x^2} & (-1 \leqq x \leqq 0); \end{cases}$$

б) $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$;

в) $$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \leqq 1), \\ \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi & (-1 \leqq x < 0). \end{cases}$$

Задача 30. Да се докажат тъждествата:

а) $$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & (0 \leqq x \leqq 1), \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & (-1 \leqq x \leqq 0); \end{cases}$$

б) $$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \leqq 1), \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (-1 \leqq x < 0); \end{cases}$$

в) $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

Задача 31. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (0 \leqq x), \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \leqq 0); \end{cases}$$

в) $$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} & (0 < x), \\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi & (x < 0). \end{cases}$$

Задача 32. Да се докажат тъждествата:

а) $$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (0 < x), \\ \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x < 0), \end{cases}$$

б) $\operatorname{arcctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & (0 < x), \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & (x < 0). \end{cases}$$

Задача 33. Да се докажат тъждествата:

а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 34. Да се докажат тъждествата:

а) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

7

б) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 35. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$;

б) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (0 \neq |x| \leqq 1)$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$.

Задача 36. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (0 \neq |x| \leqq 1)$;

б) $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$;

в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$.

Задача 37. Да се докажат тъждествата:

а) $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; б) $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Задача 38. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$(xy \leqq 0$ или $x^2+y^2 \leqq 1)$;

б) $\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$(x > 0,\ y > 0$ и $x^2+y^2 > 1)$;

в) $\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$(x < 0,\ y < 0$ и $x^2+y^2 > 1)$.

Задача 39. Да се докажат тъждествата:

а) $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x+y \geqq 0)$;

б) $\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$
$(x+y < 0)$.

Задача 40. Да се докажат тъждествата:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy} & (xy < 1), \\ \pi - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy} & (x > 0,\ xy > 1), \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy} & (x < 0,\ xy > 1). \end{cases}$$

Задача 41. Да се докаже тъждеството

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

§ 4. Полиноми на Чебишов

Задача 42. Да се докажат тъждествата:

а) $$\cos(n\arccos x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \binom{n}{6}x^{n-6}(1-x^2)^3 + \cdots;$$

б) $$\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \binom{n+1}{1}x^n - \binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$$

Полиномът $\cos(n\arccos x)$ от n-та степен на x (зад. 42 а)) се нарича *n-ти полином на Чебишов от първи род* (или кратко *n-ти полином на Чебишов*) и се означава с $T_n(x)$. Полиномът $\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ от n-та степен на x (зад. 42 б)) се нарича *n-ти полином на Чебишов от втори род* и се означава с $U_n(x)$.

Задача 43. Да се докажат тъждествата:

а) $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$;

б) $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$;

в) $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$;

г) $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$.

Задача 44°. Старшият коефициент на полинома $T_n(x)$ е 2^{n-1}, а старшият коефициент на полинома $U_n(x)$ е 2^n.

Задача 45°. Да се намерят нулите на полиномите $T_n(x)$ и $U_n(x)$.

Задача 46*. Да се докаже, че измежду всички полиноми $P(x)$ от степен n със старши коефициент 1 само полиномът $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ удовлетворява неравенството $|P(x)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ при $-1 \leqq x \leqq 1$ (Чебишов).

Твърдението в зад. 46 се изразява кратко, като се казва, че полиномите на Чебишов *най-малко се отклоняват от нулата* в интервала $[-1, 1]$.

Задача 47. Да се докажат тъждествата:

а) $\arccos(T_n(x)) = n \arccos x - 2\nu\pi$ при

$$\cos(2\nu+1)\frac{\pi}{n} \leqq x \leqq \cos 2\nu\frac{\pi}{n} \quad \left(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right);$$

б) $\arccos(T_n(x)) = -n \arccos x + 2(\nu+1)\pi$ при

$$\cos 2(\nu+1)\frac{\pi}{n} \leqq x \leqq \cos(2\nu+1)\frac{\pi}{n} \quad \left(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

Задача 48. Да се формулира и докаже аналогично на горното твърдение за $\arcsin(T_n(x))$.

§ 5. Хиперболични функции и обратните им

Дефинираните с равенствата

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \ (x \neq 0)$$

функции се наричат съответно *хиперболичен синус, хиперболичен косинус, хиперболичен тангенс* и *хиперболичен котангенс*, а общо — *хиперболични функции*. Съществува тясна аналогия между хиперболичните и тригонометричните функции, както се вижда от следващите няколко задачи. Причината за тази аналогия се разкрива след преминаване в комплексна област. Формално тя се състои в следния феномен: ако в едно тригонометрично тъждество символите sin и cos се заместят формално със символите $-$sh и ch, се получава тъждество между хиперболични функции.

Задача 49°. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x,$ $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x \quad (x \neq 0);$

б) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

Задача 50°. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$

б) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$

в) $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$

г) $\operatorname{cth}(x+y) = \dfrac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y} \quad (xy \neq 0).$

Задача 51°. Да се докаже, че:

а) $\operatorname{ch} \mathbb{R} = \operatorname{ch}[0, \infty) = [1, \infty);$ б) $\operatorname{sh} \mathbb{R} = \mathbb{R};$

в) $\operatorname{th} \mathbb{R} = (-1, 1);$ г) $\operatorname{cth}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$

Задача 52°. Да се докаже, че:

а) функцията $\operatorname{ch} x$ е стриктно растяща в $[0, \infty);$

б) функцията $\operatorname{sh} x$ е стриктно растяща в $\mathbb{R};$

в) функцията $\operatorname{th} x$ е стриктно растяща в $\mathbb{R};$

г) функцията $\operatorname{cth} x$ е стриктно намаляваща както в $(-\infty, 0)$, така и в $(0, \infty)$.

От зад. 51 а) и 52 а) следва, че стеснената до интервала $[0, \infty)$ функция $\operatorname{ch} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в интервала $[1, \infty)$. Последната се нарича *ареакосинус* и се означава с $\operatorname{Arch} x$. Стойностите ѝ очевидно изпълват интервала $[0, \infty)$.

От зад. 51 б) и 52 б) следва, че функцията $\operatorname{sh} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в $\mathbb{R}$. Последната се нарича *ареасинус* и се означава с $\operatorname{Arsh} x$. Множеството на стойностите ѝ е $\mathbb{R}$.

От зад. 51 в) и 52 в) следва, че функцията $\operatorname{th} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в $(-1, 1)$. Последната се нарича *ареатангенс* и се означава с $\operatorname{Arth} x$. Множеството на стойностите ѝ е $\mathbb{R}$.

От зад. 51 г) и 52 г), както и от неравенствата $\operatorname{cth} x < -1$ за $x < 0$ и $\operatorname{cth} x > 1$ за $x > 0$ следва, че функцията $\operatorname{cth} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в множеството $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Последната се нарича *ареакотангенс* и се означава с $\operatorname{Arcth} x$. Множеството на стойностите ѝ е $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 53. Да се докаже, че:

а) $\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geqq 1);$

б) $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$

в) $\operatorname{Arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1);$

г) $\operatorname{Arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} \quad (1 < |x|).$

Задача 54. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arth} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \operatorname{Arcth} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ при $x > 1;$

б) $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1} = \operatorname{Arth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcth}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

при $x > 0$.

§ 6. Най-голяма и най-малка стойност на непрекъсната функция

Следващата теорема констатира друго характерно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема на Вайерщрас. *Ако функцията $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в ограничения и затворен интервал $[a,b]$, измежду стойностите ѝ има една най-малка и една най-голяма.*

Задача 55°. Да се установи дали изброените функции притежават в посочените интервали най-малки и най-големи стойности:

а) $|x|$ в $[-1, 1]$; б) $x + \sqrt{x}$ в $(0, 4]$;

в) $\dfrac{1}{x}$ в $(0, 4]$; г) $[x]$ в $[-3, 5]$;

д) $2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ в $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; е) $\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ в $(-1, 1]$.

Задача 56. Да се посочи пример на непрекъсната функция $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и на точка ξ от $\mathbb{R}$, такива че $f(\xi)$ е най-голямата стойност на f в $\mathbb{R}$, но f не е растяща в никой интервал от вида $[\xi-\varepsilon, \xi]$ и не е намаляваща в никой интервал от вида $[\xi, \xi+\varepsilon]$, където $\varepsilon > 0$.

Задача 57. а) Нека функцията $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ съществуват, като могат да бъдат и $-\infty$. Ако съществува точка ξ от (a,b), за която $f(\xi) \geqq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $f(\xi) \geqq \lim\limits_{x\to b} f(x)$, измежду стойностите на функцията f има една най-голяма.

б) Да се докаже, че заключението на а) остава вярно и когато $a = -\infty$ или $b = \infty$.

в) Да се формулират и докажат твърдения, аналогични на онези от а) и б), но отнасящи се до съществуване на най-малка стойност.

Задача 58. Да се докаже, че за всяко реално число α функцията $(1+x)\operatorname{arctg} x - x\operatorname{arctg}\alpha$ на x има най-малка стойност в интервала $(-\infty, 1]$.

Задача 59°. Да се докаже, че за всяко реално число α с $0 < \alpha < 4$ функцията $\ln(x^2 + \alpha x + \alpha)$ на x има най-малка стойност в интервала $(-\infty, \infty)$.

Задача 60. Да се докаже, че за всяко положително число α функцията $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\alpha}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{x}{2}\ln\alpha$ на x притежава:

а) най-голяма стойност в интервала $[1, \infty)$ при $0 < \alpha < 1$;

б) най-голяма и най-малка стойност в интервала $\left[\dfrac{1}{10}, \infty\right)$ при $\alpha = 1$;

в) най-малка стойност в интервала $[1, \infty)$ при $\alpha > 1$.

Задача 61. Да се изследва за най-голяма и най-малка стойност функцията $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ във всеки от интервалите $(-\infty, -1)$ и $(0, \infty)$.

§ 7. Равномерна непрекъснатост

Една функция $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ се нарича *равномерно непрекъсната*, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всеки две точки x_1 и x_2 от X, за които $|x_1 - x_2| < \delta$, да е в сила неравенството $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Следващата теорема констатира трето характерно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема на Кантор. *Ако функцията $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в ограничения и затворен интервал $[a,b]$, тя е равномерно непрекъсната.*

Задача 62°. Да се установи дали изброените функции са равномерно непрекъснати в посочените интервали:

а) $|x|$ в $[-1, 1]$; б) $x + \sqrt{x}$ в $(0, 4]$; в) $\dfrac{1}{x}$ в $(0, 4]$;

г) $[x]$ в $[-3, 5]$; д) x^2 в $(-\infty, \infty)$; е) $\sqrt{x}$ в $[0, \infty)$.

Задача 63. а) Нека функцията $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ съществуват. Да се докаже, че f е равномерно непрекъсната.

б) Да се докаже, че заключението на а) остава вярно и когато $a = -\infty$ или $b = \infty$.

Задача 64. Да се установи дали изброените функции са равномерно непрекъснати в посочените интервали:

а) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ в $[1, \infty)$; б) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ в $(0, \infty)$;

в) e^{-x^2} в $(-\infty, \infty)$; г) $e^{-\frac{1}{x^2}}$ в $(0, \infty)$;

д) $\operatorname{arctg} x$ в $(-\infty, \infty)$; е) $\dfrac{\sin x}{x}$ в $(-\infty, 0)$;

ж) $\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ в $(0, \infty)$; з) $\operatorname{tg} x$ в $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

и) $\dfrac{x^2}{2^x}$ в $[0, \infty)$; й) $\dfrac{x^2}{2^x}$ в $(-\infty, 0]$;

к) $\ln x$ в $[1, \infty)$; л) $\ln x$ в $(0, \infty)$; м) $\dfrac{x \ln x}{1+x}$ в $(0, \infty)$.

Задача 65*. а) Ако X е компактно множество от реални числа, всяка непрекъсната функция $f : X \to \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната.

б) Да се посочи пример на некомпактно множество X от реални числа, за което всяка функция $f : X \to \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната.

в) Ако X е такова множество от реални числа, че всяка непрекъсната функция $f : X \to \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната и всяка точка на X е точка на сгъстяване на X, множеството X е компактно.

Задача 66*. Нека A е компактна част на дефиниционната област X на функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ и нека f е непрекъсната във всяка точка на A. Да се докаже, че за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че от $x_1 \in A$, $x_2 \in X$ и $|x_1 - x_2| < \delta$ да следва $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Задача 67*. Една функция $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ притежава тогава и само тогава непрекъснато продължение $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, когато за всеки ограничен и затворен интервал $[a, b]$ функцията f е равномерно непрекъсната в $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

§ 8. Функционални уравнения

В следващите няколко задачи се решават някои класически *функционални уравнения*, т.е. търсят се функции с предписани свойства.

Задача 68*. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които е в сила равенството $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за всеки две реални числа x и y.

Задача 69*. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които е в сила равенството $f(x+y) = f(x)f(y)$ за всеки две реални числа x и y.

Задача 70*. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, за които е в сила равенството $f(xy) = f(x) + f(y)$

за всеки две положителни числа x и y.

Задача 71*. Да се намерят всички двойки от непрекъснати функции $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които са в сила равенствата

$$\begin{cases} s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x), \\ c(x+y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) \end{cases}$$

за всеки две реални числа x и y и за които $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Задача 72*. Да се намерят всички двойки от непрекъснати функции $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които са в сила равенствата

$$\begin{cases} s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x), \\ c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y), \\ s^2(x) + c^2(x) = 1 \end{cases}$$

за всеки две реални числа x и y и за които $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Задача 73*. Да се намерят всички двойки от непрекъснати функции $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за които са в сила равенствата

$$\begin{cases} S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \\ C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \end{cases}$$

за всеки две реални числа x и y и за които $S(0) = 0$, $C(0) = 1$.

§ 9. Осцилация на функция

Нека функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е ограничена в непразното подмножество M на X. Числото $\sup\left\{|f(x) - f(y)| \;\middle|\; x, y \in M\right\}$ се нарича *осцилация на функцията f върху множеството M* и се бележи с $\omega(M, f)$. Понякога $\omega(X, f)$ се нарича *осцилация на f*.

Задача 74°. Да се намерят следните осцилации:

а) на функцията D на Дирихле;

б) на функцията D на Дирихле върху $\mathbb{Q}$;

в) на произволна функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за която $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

г) на функцията f от в) върху произволна околност на 0.

Задача 75°. Ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е ограничена в някое подмножество M на X и N е непразно подмножество на M, то $\omega(N, f) \leqq \omega(M, f)$.

Задача 76. Ако функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е ограничена в някое непразно подмножество M на X, то $\omega(M, f) = \sup\limits_{x \in M} f(x) - \inf\limits_{x \in M} f(x)$.

Задача 77°. Ако функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е монотонна, то $\omega([a, b], f) = |f(b) - f(a)|$.

Нека функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е ограничена в сечението $U \cap X$ на X с някоя околност U на точка a от затворената обвивка $[X]$ на X. Числото $\inf \omega(U \cap X, f)$, където U пробягва всевъзможните околности на a, се нарича *осцилация на f в точката a* и се означава с $\omega_a(f)$.

Задача 78°. Да се намери осцилацията:
а) $\omega_a(D)$ на функцията D на Дирихле в произволна точка a;
б) $\omega_a(\sigma)$ на функцията σ от зад. 16 б) в произволна точка a.

Задача 79. Да се докаже, че една функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е непрекъсната в точка ξ на X точно когато $\omega_\xi(f) = 0$.

Задача 80*. Да се докаже, че:
а) за произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за произволно положително число ε множеството $\{ x \,|\, \omega_x(f) < \varepsilon \}$ е отворено;

б) за произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за произволно реално число λ множеството $\{ x \,|\, \omega_x(f) \geqq \lambda \}$ е затворено;

в) съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която множеството $\{ x \,|\, \omega_x(f) > 1 \}$ не е нито отворено, нито затворено; да се построи пример за такава функция.

§ 10. Множество на точките на непрекъснатост на една функция

Казва се, че едно множество $A \subset \mathbf{R}$ е *G_δ-множество*, когато съществува такава редица $U_1, U_2, \ldots$ от отворени в $\mathbf{R}$ множества, че $A = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$.

Казва се, че едно множество $B \subset \mathbf{R}$ е *F_σ-множество*, когато съществува такава редица $F_1, F_2, \ldots$ от затворени в $\mathbf{R}$ множества, че $B = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$.

Задача 81. а) Всяко затворено подмножество на $\mathbf{R}$ е G_δ-множество, а всяко отворено подмножество на $\mathbf{R}$ е F_σ-множество.

б) Да се построи пример на множество от реални числа, което не е нито отворено, нито затворено, но е както F_σ-множество, така и G_δ-множество.

Задача 82. Едно подмножество A на $\mathbf{R}$ е точно тогава G_δ-множество, когато $\mathbf{R} \setminus A$ е F_σ-множество.

Задача 83*. а) За всяка редица $U_1, U_2, \ldots$ от отворени и гъсти множества сечението $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ е гъсто (Р. Б е р).

б) Да се построи пример на редица $A_1, A_2, \ldots$ от гъсти множества, за които $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

в) Никое изброимо и гъсто множество не е G_δ-множество.

Задача 84. а) Да се докаже, че за произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ множеството на точките, в които f е непрекъсната, е G_δ-множество, а множеството на точките, в които f е прекъсната, е F_σ-множество.

б) За всяко G_δ-множество $A \subset \mathbf{R}$ съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, чието множество на точките на непрекъснатост съвпада с A.

Задача 85°. Не съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, чието множество на точките на непрекъснатост да съвпада с множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа.

Задача 86. Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана и монотонна в интервала Δ. Да се докаже, че множеството на точките на прекъсване на f е крайно или изброимо.

Седма глава

Производни

§ 1. Пресмятане на производни

Нека е дадена функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ и нека ξ от X е точка на сгъстяване на X. Казва се, че функцията f е *диференцируема* в точката ξ, когато съществува границата $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Тогава тази граница се нарича *производна* на f в ξ и се означава с $f'(\xi)$. И така по дефиниция

$$(1) \qquad f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

винаги когато дясната страна съществува.

От тази дефиниция се вижда, че например в зад. 21, 60, 69 и 73, гл. V, по същество са намерени производните на функциите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x, $\ln x$ и x^a в произволни точки от дефиниционните им области.

Ако функцията f е диференцируема в точката ξ, тя е непрекъсната в ξ. Обратното не винаги е вярно.

За произволна функция $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ нека X' е множеството на всичките точки ξ на X, за които $f'(\xi)$ съществува. Ако на произволна точка x от X' се съпостави числото $f'(x)$, получава се функция $f' : X' \to \mathbb{R}$, която се нарича *производна (функция)* на функцията f или първа производна на f.

Намирането на производните на елементарните функции е алгоритмизуем процес. Ето основните правила за диференциране:

$$(2) \qquad (af)' = af',$$

$$(3) \qquad (f+g)' = f' + g',$$

$$(4) \qquad (fg)' = f'g + fg',$$

$$(5) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(6) \qquad \big(f(\varphi)\big)' = f'(\varphi)\varphi',$$

където a е константа, а f, g и φ са диференцируеми функции, като стойностите на φ принадлежат на дефиниционната област на f.

Тези правила наред със следната таблица на производни дават възможност да се намират производните на всички елементарни функции:

$$(7) \qquad a' = 0 \qquad (a \text{ — константа}),$$

$$(8) \qquad \left(x^a\right)' = ax^{a-1} \qquad (a \text{ — константа}),$$

$$(9) \qquad \left(e^x\right)' = e^x,$$

$$(10) \qquad \left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad (0 < a \text{ — константа}),$$

$$(11) \qquad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x},$$

$$(12) \qquad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a \text{ — константа, } 0 < a \neq 1),$$

$$(13) \qquad \left(\sin x\right)' = \cos x,$$

$$(14) \qquad \left(\cos x\right)' = -\sin x,$$

$$(15) \qquad \left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(16) \qquad \left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(17) \qquad \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(18) \qquad \left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(19) \qquad \left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(20) \qquad \left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Тези формули трябва да се помнят. Поради честото им прилагане формулите от следващите две задачи също трябва да се помнят.

Задача 1. Да се докаже, че:

а) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; б) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

в) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; г) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Задача 2. Да се докаже, че:

а) $(\operatorname{Ar sh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $(\operatorname{Ar ch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $(\operatorname{Ar th} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$; г) $(\operatorname{Ar cth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(1 < |x|)$.

Задача 3. Да се намерят производните на функциите:

а) x^4-3x^2+5x-1; б) $\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{f}$, където f е диференцируема функция на x;

г) $\sqrt{x^2+1}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\dfrac{1}{x}$;

ж) $\dfrac{1}{f}$, където f е диференцируема функция на x;

з) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$; и) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; й) $\dfrac{1}{x^2}$;

к) $\dfrac{1}{f^2}$, където f е диференцируема функция на x;

л) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)^2}$; м) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; н) $\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

о) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; п) $\dfrac{x-1}{\sqrt[5]{x}+1}$; р) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$;

с) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}$; т) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{\nu!}$; у) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$;

ф) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$;

х) f^a, където f е диференцируема функция на x.

Задача 4. Да се намерят производните на функциите:

а) e^{x^2}; б) e^x+x^e; в) $e^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; г) $e^{-\frac{1}{x^2}}$; д) $\sqrt{x}e^{-x}$;

е) $\sqrt{x^2+x+1}\,e^{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$;

ж) e^f, където f е диференцируема функция на x.

Задача 5. Да се намерят производните на функциите:

а) $\dfrac{x^3+2^x}{e^x}$; б) $(x^2-10x+3)\,10^x$; в) $\dfrac{1-9^x}{1+9^x}$;

г) 10^{2x-3}; д) 2^{3x};

е) a^f, където f е диференцируема функция на x.

Задача 6. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^2\ln x$; б) $\dfrac{1}{\ln x}$; в) $\dfrac{x-1}{\ln x}$; г) $\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

д) $x^n\ln x$; е) $e^x\ln x$; ж) $\ln(1-2x)$; з) $(\ln x)^2$;

и) $\sqrt{\ln x}$; й) $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$; к) $\sqrt{1+(\ln x)^2}$; л) $\ln(x^2+4)$;

м) $\ln\ln x$; н) $2^{\frac{x}{\ln x}}$; о) $e^{\sqrt{\ln x}}$; п) $e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$;

р) $\ln f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 7. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^n\ln x$; б) $\log_2\log_3\log_5 x$; в) $\ln(x+2^x\log_2 x)$;

г) $\log_x 2$; д) $\log_\pi\dfrac{\pi^x-x^\pi}{\pi^x+x^\pi}$; е) $\dfrac{1+\log_2 x}{1-\log_3 x}$;

ж) $\log_a f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 8. Да се намерят производните на функциите:

а) $\sin x^2+\sin^2 x$; б) $\sin\dfrac{1}{x}$; в) $\sin\sin x$;

г) $\sin^3\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; д) $\ln\sin x+\sin\ln x$; е) $e^{\sin^2\sqrt{x}}+\sin e^{\sqrt{x}}$;

ж) $e^{-ax}\sin(bx+c)$;

з) $\sin f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 9. Да се намерят производните на функциите:

а) $e^x\cos x+\dfrac{1}{e^x\cos x}$; б) $3\cos^2 x-2\cos^3 x$; в) $\ln(x-\cos x+e^x)$;

г) $\cos x^3+\cos^3 x$; д) $\dfrac{\sin 3x}{\sin^2 x\cos x}$; е) $\cos\sin x+\sin\cos x$;

ж) $\cos\sin^n x+\sin\cos^n x$; з) $\sin^n x\cos nx+\cos^n x\sin nx$;

и) $\sin^n x\sin nx+\cos^n x\cos nx$;

й) $\cos f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 10. Да се намерят производните на функциите:

а) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$; б) $\operatorname{tg}\sin x + \sin\operatorname{tg} x$;

в) $\operatorname{tg}\cos^n x + \cos\operatorname{tg}^n x$; г) $\operatorname{tg}\operatorname{tg}\operatorname{tg} x$; д) $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\ln\frac{x}{2}$;

е) $e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} e^x$; ж) $\operatorname{tg}\operatorname{tg}^2\operatorname{tg}^3 x$; з) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$;

и) $\operatorname{tg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 11. Да се намерят производните на функциите:

а) $\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$; б) $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \ln(1+\sin x) - x$;

в) $\frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-1}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(1+\frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}\right)$; д) $\operatorname{ctg}\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}\operatorname{ctg}^n x$;

е) $\operatorname{ctg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 12. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^n \arcsin x$; б) $3x^3\arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}$;

в) $2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$;

г) $x\arcsin^2 x - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

д) $\arcsin f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 13. Да се намерят производните на функциите:

а) $\arccos\left(1-e^{x^2}\right)$; б) $\sqrt[4]{\arccos\sqrt{x^2+2x}}$;

в) $(\arcsin x + \arccos x)^n$;

г) $\arcsin\arccos x + \arccos\arcsin x$;

д) $\arcsin 2\arccos x + \arccos 2\arcsin x$;

е) $\arccos f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 14. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{arctg}\arcsin x + \arcsin\operatorname{arctg} x$;

б) $\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$; в) $\operatorname{arctg} x^n + (\operatorname{arctg} x)^n$;

г) $e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; д) $\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$;

е) $\operatorname{arctg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 15. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{arcctg}\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\operatorname{arcctg} x$;

б) $\operatorname{arctg} 2\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} 2\operatorname{arctg} x$;

в) $\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x} + \frac{\operatorname{arcctg} x}{\operatorname{arctg} x}$;

г) $\operatorname{arcctg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 16. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^3 x$; б) $\operatorname{arctg}\operatorname{th} x - \operatorname{arcctg}\operatorname{cth} x$;

в) $\ln\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}\ln x$; г) $\operatorname{sh}\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}\operatorname{sh} x$;

д) $e^{\operatorname{ch}^2 x} + e^{\operatorname{sh}^2 x}$; е) $\operatorname{th}\ln x + \operatorname{cth}\frac{1}{\ln x}$;

ж) $x^n\operatorname{sh} x - \operatorname{ch}^n x$.

Задача 17. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{Arsh}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\operatorname{Arsh} x$; б) $\operatorname{Arch}\operatorname{Arsh} x + \operatorname{Arsh}\operatorname{Arch} x$;

в) $\operatorname{Arth} x + \operatorname{Arcth} x$; г) $e^{\operatorname{Arth} x} + e^{\operatorname{Arcth}\sqrt{x^2+1}}$;

д) $\operatorname{Arth}\operatorname{Arcth} x$.

Понякога диференцирането се опростява, като предварително се логаритмува функцията, чиято производна се търси. Такива са например случаите на диференциране на сложни произведения и частни, както и на функция на степен функция. Тази проста техника се нарича *логаритмично диференциране*.

Задача 18. Да се намерят производните на функциите:

а) x^{x^x}; б) x^{x^x}; в) $(\sin x)^{\cos x}$; г) $(\ln x)^x$;

д) $\sqrt[x]{(x+1)^2}$; е) $x^{\sin x} + (\sin x)^x$; ж) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x + (x^2+1)^{\operatorname{sh} x}$;

з) $\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

Задача 19. Да се намерят производните на функциите:

а) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$; б) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

в) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{1+x^3}$; г) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arc\,tg} x$;

д) $x^3\sqrt{1+x^2}-\frac{3}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

е) $\frac{x^4}{2}-\left(x^3-\frac{3}{2}x\right)\sin 2x-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}\right)\cos 2x$;

ж) $\frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^4 x}$; з) $\arcsin\frac{3\sin^2 x-1}{\sin^2 x+1}$;

и) $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}-\ln\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$;

й) $x(\arcsin 2x)^2-2x+\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x$;

к) $x^3\arccos x-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$;

л) $x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

м) $\frac{1}{x^3}\operatorname{arc\,ctg} x-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{x^2}$; н) $e^{2x}(2\sin^2 x-\sin 2x+1)$;

о) $e^x(\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+3\sin x-3\cos x)$;

п) $e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$;

р) $e^x(x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\dots+(-1)^n n!)$;

с) $x\sin\ln x-x\cos\ln x$; т) $\frac{(\ln x)^2}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}$;

у) $x^a(\ln x)^2-\frac{2x^a}{a}\ln x+\frac{2x^a}{a^2}$;

ф) $x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}x^3+2x-2\operatorname{arc\,tg} x$;

х) $x^5\ln(x^2-a^2)-\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3a^2-2xa^4+a^5\ln\frac{x+a}{x-a}$;

ц) $\frac{p-1}{\operatorname{ch}^{p+1} x}-\frac{p+1}{\operatorname{ch}^{p-1} x}$; ч) $\operatorname{cth}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3\frac{x}{2}$;

ш) $\operatorname{Ar\,ch}\frac{3\operatorname{ch}^2 x-1}{\operatorname{ch} x^2+1}$ $(x>0)$; щ) $\ln\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x+1}-\ln\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x}$;

ъ) $(2x^2+a^2)\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}-x\sqrt{x^2+a^2}$;

ь) $3x^3\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}-(2a^2+x^2)\sqrt{x^2-a^2}$;

ю) $2x^3\operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a}+ax^2+a^3\ln(a^2-x^2)$;

я) $2\frac{a^3}{x^3}\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{x^2}+\ln\frac{x^2-a^2}{x^2}$.

Задача 20. Да се докаже следното правило за диференциране на детерминанта от n-ти ред:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{\nu 1} & f_{\nu 2} & \dots & f_{\nu n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{\nu 1} & f'_{\nu 2} & \dots & f'_{\nu n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

където $f_{\mu\nu}$ $(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ са диференцируеми функции с обща дефиниционна област.

Задача 21. Да се докажат тъждествата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu x^{\nu-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ $(x\neq 1)$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}2^\nu\sin^3\frac{x}{2^\nu}\cos\frac{x}{2^\nu}=2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}-\frac{\sin 2x}{4}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2^\nu}}{8^\nu\cos^3\frac{x}{2^\nu}}=\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{8^n\sin^3\frac{x}{2^n}}-\frac{\cos x}{\sin^3 x}$.

§ 2. n-ти производни

Производната на първата производна на една функция f се нарича *втора производна* на f и се означава с f''; производната на втората производна на f се нарича *трета производна* на f и се означава с f'''. По-общо производната на n-тата производна на една функция f се нарича $(n+1)$-*ва производна* на f и се означава с $f^{(n+1)}$. По този начин символът $f^{(n)}$ е дефиниран за всяка естествена стойност на n. Понякога е целесъобразно под *нулева производна* $f^{(0)}$ на една функция f да се разбира самата функция f.

n-тата производна $f^{(n)}$ често се означава и с $\frac{d^n f}{dx^n}$ $(n+1 \in \mathbb{N})$. Макар и да е излязло от мода, използуването на това означение е целесъобразно, когато например наред с аргумента, спрямо който се диференцира, в аналитичния израз за функцията фигурират и някои други параметри.

Лесно се вижда индуктивно, че

(21) $$(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(22) $$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(23) $$(e^x)^{(n)} = e^x \quad (n+1 \in \mathbb{N}),$$

(24) $$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n+1 \in \mathbb{N}),$$

(25) $$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n+1 \in \mathbb{N}),$$

(26) $$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ нечетно} \\ \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ четно} \end{cases}$$

(27) $$(\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ нечетно} \\ \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ четно} \end{cases} \quad (n+1 \in \mathbb{N}).$$

Също така е ясно, че ако a и b са константи, от $F(x) = f(ax+b)$ следва

(28) $$F^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b) \quad (n+1 \in \mathbb{N}).$$

Ето защо например

(29) $$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n \quad (n+1 \in \mathbb{N}).$$

Задача 22. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$; в) $\dfrac{1}{x(x+1)}$;

г) $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$; д) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; е) $\operatorname{arctg} x$.

Задача 23. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\sin^2 x$; б) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

в) $\sin^m x$ $(m \in \mathbb{N})$; г) $\cos^m x$ $(m \in \mathbb{N})$.

Задача 24. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $e^x \sin x$; б) $e^x \cos x$;

в) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$; г) $e^{ax}\cos(bx+c)$ $(a^2+b^2 \neq 0)$.

Задача 25. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) e^{-x^2};

б) $f(x^2)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 26. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $e^{\frac{1}{x}}$;

б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 27. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $(1+\sqrt{x})^{2n-1}$;

б) $f(\sqrt{x})$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 28. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) e^{e^x};

б) $f(e^x)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 29. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\sin\ln x$;

б) $f(\ln x)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 30. Нека F и f са n пъти диференцируеми функции и стойностите на f принадлежат на дефиниционната област на F. Да се докажат равенствата:

а) $$\frac{d^n F(f(x))}{dx^n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{F^{(\nu)}(f(x))}{\nu!} \sum_{\tau=0}^{\nu-1} (-1)^\tau \binom{\nu}{\tau} \frac{d^n f^{\nu-\tau}(x)}{dx^n};$$

б) $$\frac{d^n F(f(x))}{dx^n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n! F^{(\nu)}(f(x))}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_p!} \prod_{\tau=1}^{p} \left(\frac{f^{(\tau)}(x)}{\nu!}\right)^{\nu_\tau},$$

където сумирането е разпространено върху всичките наредени p-орки $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p)$ $(p \in \mathbb{N})$ от неотрицателни цели числа, за които

$$\sum_{\varrho=1}^{p} \varrho\nu_\varrho = n, \quad \nu = \sum_{\varrho=1}^{p} \nu_\varrho.$$

Ако f и g са n пъти диференцируеми функции с обща дефиниционна област, в сила е следното тъждество (формула на Лайбниц):

$$(fg)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(n-\nu)} g^{(\nu)}.$$

Задача 31. Ако f е n пъти диференцируема функция, да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $x^2 f(x)$ $(n \geqq 2)$;

б) $x^k f(x)$, където естественото число k не надминава n;

в) $x^a f(x)$, където a е произволна константа.

Задача 32. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $x^a(1-x)^b$; б) $x^a \sin x$; в) $x^a \cos x$;

г) $x^a e^x$; д) $x^a \ln x$,

където a и b са произволни константи.

Задача 33. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n) = n! \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{\nu}^2 (1-x)^{n-\nu} x^\nu$;

б) $\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{(2n)!}{x^{2n+1}}(C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x)$,

където $C_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$, $S_n(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \dfrac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$;

в) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu}\right)$;

г) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu}\right)$.

Задача 34. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\arcsin x$; б) $\operatorname{Ar\,ch} x$.

Задача 35. Да се намерят стойностите за $x = 0$ на n-тите производни на функциите:

а) $\sin(a \arcsin x)$; б) $\cos(a \arccos x)$,

където a е произволна константа.

Задача 36. Да се намерят стойностите за $x = 0$ на n-тите производни на функциите:

а) $(\arcsin x)^2$; б) $(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

Задача 37. Да се намери стойността в точката a на n-тата производна на функцията $(x-a)^n \varphi(x)$, където φ е n пъти диференцируема функция в някоя околност на a.

Задача 38. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} \sin \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{x} + n\dfrac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}$;

б) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$; в) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$;

г) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^{n+1}}$,

където f е n пъти диференцируема функция.

§ 3. Класически полиноми

Задача 39. Да се докаже, че полиномите $T_n(x)$ на Чебишов от първи род и функциите $\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)$, където $U_n(x)$ са полиномите на Чебишов от втори род, удовлетворяват диференциалното уравнение $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + n^2 y = 0$.

Функцията $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ е полином от n-та степен на x. Той се нарича *n-ти полином на Льожандър* и се означава с $P_n(x)$.

Задача 40. Да се докаже, че за $n \in \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{R}$:

а) $P_n(x) = n! \sum\limits_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \dfrac{(-1)^\nu (2n-2\nu)!}{\nu!(n-\nu)!(n-2\nu)!} x^{n-2\nu}$;

б) $P_{n+1}(x) - 2(2n+1)xP_n(x) + 4n^2 P_{n-1}(x) = 0$;

в) $(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$.

Функцията $e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ е полином на x, който се нарича *n-ти полином на Ермит* и се означава с $H_n(x)$.

Задача 41. Да се докаже, че за $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

а) $H_n(x) = (-1)^n n! \sum_{\nu=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n-2\nu)!}(2x)^{n-2\nu}$;

б) $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$;

в) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

Функцията $e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ е полином на x, който се нарича *n-ти полином на Лагер* и се означава с $L_n(x)$.

Задача 42. Да се докаже, че за $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

а) $L_n(x) = n! \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \binom{n}{\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}$;

б) $L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0$;

в) $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$.

§ 4. Понятие за линеен диференциален оператор

Нека $a_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$) са функции с обща дефиниционна област X, а D^ν ($\nu+1 \in \mathbf{N}$) означава операцията ν-кратно диференциране спрямо x. Полиномът на D

$$\varphi(D) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)D^\nu \tag{30}$$

се нарича *линеен диференциален оператор от n-ти ред* с коефициенти $a_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$).

За произволна n пъти диференцируема в X функция f на x с $\varphi(D)f(x)$ се означава функцията $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)f^{(\nu)}(x)$. По този начин $D^0f(x) = f(x)$, $D^1f(x) = f'(x)$, ..., $D^nf(x) = f^{(n)}(x)$ и по общо $\varphi(D)f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)f^{(\nu)}(x)$.

Задача 43°. Нека $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ са линейни диференциални оператори от ред n, чиито коефициенти са дефинирани в X, функциите $f : X \to \mathbf{R}$ и $g : X \to \mathbf{R}$ са n пъти диференцируеми, а λ е константа. Да се докаже, че:

а) $\varphi(D)(f(x) + g(x)) = \varphi(D)f(x) + \varphi(D)g(x)$;

б) $\varphi(D)(\lambda f(x)) = \lambda\varphi(D)f(x)$;

в) $(\varphi(D) + \psi(D))f(x) = \varphi(D)f(x) + \psi(D)f(x)$;

г) $(\lambda\varphi(D))f(x) = \lambda(\varphi(D)f(x))$,

а ако коефициентите на $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ са постоянни, че:

д) $(\varphi(D)\psi(D))f(x) = \varphi(D)(\psi(D)f(x))$;

е) $\varphi(D)(\psi(D)f(x)) = \psi(D)(\varphi(D)f(x))$.

Задача 44. Нека $f : X \to \mathbf{R}$ ($X \subset \mathbf{R}$) е n пъти диференцируема функция, $\varphi(D)$ е линеен диференциален оператор от ред n, чиито коефициенти са дефинирани в X, и λ е константа. Да се докаже тъждеството

$$\varphi(D)(e^{\lambda x}f(x)) = e^{\lambda x}\varphi(\lambda + D)f(x).$$

Задача 45. Нека $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ са линейни диференциални оператори с постоянни коефициенти, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са полиномите, получени след заместване на D с x, а λ и μ са константи. Тогава*:

а) $\varphi(\lambda + D)\psi(x)|_{x=\mu} = \psi(\mu + D)\varphi(x)|_{x=\lambda}$;

б) $\varphi(D)(e^{\lambda x}\psi(x))|_{x=\mu} = e^{\lambda\mu}\psi(\mu + D)\varphi(x)|_{x=\lambda}$.

§ 5. Диференцируемост

Понятието производна е много по-дълбоко, отколкото изглежда от разгледаната дотук формалистика на диференцирането. В този параграф са разгледани задачи, в които се обсъжда дефиницията на това понятие. Построяването на пример на непрекъсната функция без производна е отложено до зад. 108 от гл. VIII.

Задача 46. Да се намерят производните на функциите:

а) $|x|$; б) $x|x|$; в) $\ln|x|$;

г) $|(x-1)^3|$; д) $|\sin x|$; е) $|\sin^3 x|$;

ж) $\arcsin\frac{1}{|x|}$; з) $[x]\sin^2 \pi x$.

Задача 47. Да се намери производната на функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата:

а) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{при } x \geqq 0; \end{cases}$

---

* Понякога с $f(x)|_{x=\lambda}$ се означава стойността $f(\lambda)$ на една функция f за стойността λ на аргумента.

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{при } |x| \leqq 1, \\ \dfrac{1}{e} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

Задача 48. При какви стойности на a функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$

а) е непрекъсната при $x = 0$;
б) е диференцируема при $x = 0$;
в) има непрекъсната производна при $x = 0$?

Задача 49. Да се докаже, че функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при рационално } x, \\ 0 & \text{при ирационално } x; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при рационално } x, \\ x & \text{при ирационално } x, \end{cases}$

е диференцируема само при $x = 0$.

Задача 50. Да се докаже, че следващите функции не са диференцируеми за посочените стойности на аргумента:
а) $\arcsin x$ за $x = -1$ и $x = 1$;
б) $\arcsin(2x^2 - 1)$ за $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$.

Задача 51. Да се посочи пример на непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, диференцируема при $x = 0$, но такава, че във всяка околност на 0 има точки, в които f не е диференцируема.

Задача 52*. Да се докаже, че функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^{2n} \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{array} \right\} (n \in \mathbf{N}),$$

притежава производни до ред n включително при $x = 0$ и не притежава $(n+1)$-ва производна при $x = 0$.

Задача 53*. Да се докаже, че функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата:

а) $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqq 0, \end{cases}$

притежава производни от произволен ред за всяко x и че $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко естествено n.

Задача 54. Нека Δ е неизроден интервал. Да се посочи пример на безбройно много пъти диференцируема функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, която не е тъждествено нула и $f(x) = 0$ за $x \notin \Delta$.

§ 6. Основни теореми за средните стойности

Централна роля в диференциалното смятане играе следната теорема на Рол:

Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в a и b, диференцируема е в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такова число ξ, че $a < \xi < b$ и $f'(\xi) = 0$.

Важно следствие от теоремата на Рол и в същото време нейно обобщение е следната теорема на Лагранж за крайните нараствания:

Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в a и b и е диференцируема в (a, b). Тогава съществува число ξ, такова че $a < \xi < b$ и

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Обобщение на теоремата за крайните нараствания е следната теорема на Коши:

Нека функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ са непрекъснати в a и b, диференцируеми са в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ в (a, b). Тогава $g(a) \neq g(b)$ и съществува число ξ от (a, b), за което

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ако теоремата за крайните нараствания се приложи за функциите f и g, се заключава, че съществуват числа ξ_1 и ξ_2 от (a, b), за които $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1)$ и $\dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\xi_2)$. От тези равенства следва $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$. В този си вид теоремата на Коши би била тривиално следствие от теоремата на Лагранж. В теоремата на Коши обаче се твърди нещо повече, отколкото дава последното равенство, а именно че $\xi_1 = \xi_2$. Точно това обстоятелство обикновено се използува при типичните приложения на теоремата на Коши.

Задача 55°. Да се установи, че условията в теоремата на Рол са съществени за валидността на заключението ѝ, т. е. да се построи функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, която:

а) е непрекъсната в b, диференцируема е в (a, b) и $f(a) = f(b)$, но въпреки това f' не се анулира в (a, b);

б) е непрекъсната в a и b, диференцируема е в (a, b), но въпреки това f' не се анулира в (a, b);

в) е непрекъсната в a и b, диференцируема е в (a, b) с изключение на една точка и $f(a) = f(b)$, но въпреки това f' не се анулира в (a, b).

Задача 56°. Да се установи, че условията в теоремата на Лагранж са съществени за валидността на заключението ѝ.

Задача 57°. Да се установи, че условията в теоремата на Коши са съществени за валидността на заключението ѝ.

Задача 58. За всеки две реални числа a и b ($a < b$ и за всяка от функциите:

а) $f(x) = px + q$; б) $f(x) = px^2 + qx + r$;
в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = e^x$,

да се намери реално число ξ с $a < \xi < b$, за което е в сила равенството

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Задача 59. Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е диференцируема функция и за всеки две реални числа x и h е в сила равенството $f(x+h) - f(x) = hf'(x)$. Да се докаже, че f е линейна функция.

Задача 60. Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е два пъти диференцируема функция и за всеки две реални числа x и h е в сила равенството $f(x + h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right)$. Да се докаже, че f е квадратна функция.

Задача 61*. Нека функцията $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ е дефинирана с равенствата

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \ln x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) за всяко $x > 0$ съществува число $\xi(x)$, за което $0 < \xi(x) < x$ и $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$;

б) ако $\xi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ е произволна функция с формулираното в а) свойство, а ε — произволно положително число, в интервала $(0, \varepsilon)$ има точки на прекъсване на ξ.

Задача 62. С помощта на теоремата за крайните нараствания да се докажат неравенствата:

а) $py^{p-1}(x - y) \leqq x^p - y^p \leqq px^{p-1}(x - y)$ при $0 < y < x$ и $p > 1$;

б) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqq |x - y|$;

в) $\dfrac{x - y}{x} < \ln \dfrac{x}{y} < \dfrac{x - y}{y}$ при $0 < y < x$.

Задача 63. Да се докаже, че ако функцията f е диференцируема в ограничения интервал Δ и f' е ограничена в Δ, функцията f също е ограничена в Δ.

Задача 64. а) Да се докаже, че ако функцията f е диференцируема и има ограничена производна в един интервал Δ, тя е равномерно непрекъсната в Δ.

б) Да се намерят всички реални числа a, за които функцията x^a е равномерно непрекъсната в интервала $(0, \infty)$.

Задача 65. Ако функцията f е дефинирана в една околност на a, диференцируема е в тази околност с евентуалното изключение на a и $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ съществува, функцията f е диференцируема и в a и $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

Задача 66. Нека функцията f е диференцируема в един интервал Δ и $\xi \in \Delta$. Да се докаже, че производната ѝ е непрекъсната в ξ точно когато за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че от $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, $x_1 \neq x_2$ и $|x_1 - \xi| < \delta$, $|x_2 - \xi| < \delta$ да следва

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - f'(\xi) \right| < \varepsilon.$$

Задача 67*. Ако функцията f е диференцируема в някакъв интервал Δ, множеството $f'(\Delta)$ е интервал (Д а р б у).

Задача 68. а) Нека функцията f е два пъти диференцируема в интервала Δ и числата a, $a + h$ и $a + 2h$ ($h \neq 0$) са от Δ. Да се докаже, че съществува такава точка ξ от Δ, че

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = f''(\xi)h^2.$$

б)* Нека функцията f е n пъти диференцируема в интервала Δ и числата a, $a + h$, $a + 2h$, $\ldots$, $a + nh$ ($h \neq 0$) са от Δ. Да се докаже, че съществува такава точка ξ от Δ, че

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(a + (n - \nu)h) = f^{(n)}(\xi)h^n.$$

в) Да се докаже тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (x + n - \nu)^n = n!.$$

§ 7. Теореми на Лопитал

Следващите *теореми на Лопитал* са полезни следствия от теоремата на Коши и в известен смисъл алгоритмизират намирането на граници на функции от вида:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, б) $f(x)g(x)$, в) $\left(f(x)\right)^{g(x)}$, г) $f(x)-g(x)$,

в случаите, когато не може да се реши въпросът с директно използуване на съображения за непрекъснатост.

Типични примери за случай а) се получават, когато числителят и знаменателят едновременно клонят към 0 или ∞. Това обстоятелство записваме накратко със символа $\dfrac{0}{0}$, респективно $\dfrac{\infty}{\infty}$. Примери за случая б) имаме, когато единият от множителите клони към 0, а другият расте неограничено. Тогава се пише кратко $0.\infty$ и т. н. Така се стига до следните 7 неопределени форми:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0.\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0},\quad \infty-\infty.$$

Първа теорема на Лопитал. *Нека функциите f и g са дефинирани в някой интервал Δ, непрекъснати са в някоя точка ξ от Δ и са диференцируеми в $\Delta\setminus\{\xi\}$. Нека още $f(\xi)=g(\xi)=0$ и $g'(x)\neq 0$ за $\xi\neq x\in\Delta$. Тогава е в сила равенството*

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{31}$$

винаги когато дясната страна съществува.

Втора теорема на Лопитал. *Нека функциите f и g са дефинирани в някой интервал Δ и са диференцируеми в $\Delta\setminus\{\xi\}$, където ξ е точка на сгъстяване на Δ. Нека още $\lim\limits_{x\to\xi}g(x)=\infty$ и $g'(x)\neq 0$ за $\xi\neq x\in\Delta$. Тогава е в сила (31) винаги когато дясната страна съществува.*

Горните теореми остават валидни *mutatis mutandis* и когато ξ означава някой от символите $-\infty$ или ∞.

Така формулираните твърдения в повечето случаи решават въпроса за намиране на граници на неопределени форми от вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Неопределената форма $0.\infty$ се свежда към коя да е от горните две чрез символичните равенства $0.\infty=0\cdot\dfrac{1}{0}=\dfrac{0}{0}$ или $0.\infty=\dfrac{1}{\infty}\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\infty}$. Неопределените форми 1^{∞}, ∞^{0} и 0^{0} се свеждат към формата $0.\infty$ чрез предварително логаритмуване. Най-после неопределената форма $\infty-\infty$ се свежда към формата $\dfrac{0}{0}$ чрез символичните равенства $\infty-\infty=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\dfrac{0-0}{0.0}=\dfrac{0}{0}$.

Теоремата на Шолц (зад. 142, гл. IV) може да се схваща като аналог на втората теорема на Лопитал.

Задача 69. Да се намерят границите $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+1}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

Задача 70. Да се посочи пример на функции f и g, за които са изпълнени всичките условия на първата теорема на Лопитал и границата в лявата страна на (31) съществува, но в дясната не съществува.

Задача 71. Да се намерят границите $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} ax}{\operatorname{ctg} bx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{e^{x^{-2}}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

Задача 72. Да се посочи пример на функции f и g, за които са изпълнени всичките условия на втората теорема на Лопитал и границата в лявата страна на (31) съществува, но в дясната не съществува.

Задача 73. Да се намерят границите $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{x+\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{a+bx}$ $(b\neq 0)$.

Задача 74. Да се намерят границите $[0.\infty]$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$ $(a\neq 0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)e^{\operatorname{tg} x}$.

Задача 75. Да се намерят границите $[1^{\infty}]$:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$.

Задача 76. Да се намерят границите $[\infty^0]$:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 77. Да се намерят границите $[0^0]$:

а) $\lim\limits_{x\to0}x^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}x^{\operatorname{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\cos x}$.

Задача 78. Да се намерят границите $[\infty-\infty]$:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right)$.

§ 8. Критерий за константност на функция

Следващото твърдение е директно следствие от теоремата за крайните нараствания:

Ако функцията f е диференцируема в някой интервал Δ и производната ѝ е нула в Δ, то f е константа в Δ.

Оттук следва непосредствено, че ако две функции f и g имат равни производни във всичките точки на един интервал Δ, съществува такава константа C, че за всяко x от Δ е в сила равенството $f(x)=g(x)+C$.

Задача 79. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{\pi}{4}$ при $x>-1$;

б) $2\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=\begin{cases}0 & \text{при } |x|<1,\\ \pi & \text{при } x>1,\\ -\pi & \text{при } x<-1;\end{cases}$

в) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}-\pi-2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\leqq-1,\\ 2\operatorname{arctg}x & \text{при } |x|\leqq1,\\ \pi-2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\geqq1;\end{cases}$

г) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\geqq0,\\ -2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\leqq0.\end{cases}$

Задача 80. Да се докаже, че:

а) ако f и g са два полинома от степен n, полиномът $fg^{(n)}-f'g^{(n-1)}+f''g^{(n-2)}+\dots+(-1)^nf^{(n)}g$ е константа;

б) за всеки полином f, чиято степен не надминава n, е в сила тъждеството $f(a)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{(a-x)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$.

Задача 81. Да се докаже, че:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}(x+1)^\nu=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}\dbinom{n}{\nu}x^\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}\quad(x\in\mathbb{R})$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\dbinom{n}{\nu}$.

Задача 82. Ако една функция f е n пъти диференцируема в някой интервал Δ и n-тата ѝ производна е нула в Δ, f е полином най-много от степен $n-1$ в Δ.

Задача 83*. Ако функцията $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ има производни от произволен ред и за всяко реално x съществува естествено число n_x, за което $f^{(n_x)}(x)=0$, да се докаже, че f е полином.

§ 9. Някои елементарни диференциални уравнения

Задача 84. Диференцируемата функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и константата λ тогава и само тогава удовлетворяват уравнението $f'(x)=\lambda f(x)$ за всяко реално x, когато съществува такава константа C, че $f(x)=Ce^{\lambda x}$ за всяко реално x.

Задача 85. Диференцируемата функция $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ и константата a тогава и само тогава удовлетворяват уравнението $xf'(x) = af(x)$ за всяко положително x, когато съществува такава константа C, че $f(x) = Cx^a$ за всяко положително x.

Задача 86. Ако функцията f е диференцируема в някой интервал Δ, да се докаже, че уравненията:

а) $f'(x) - e^{x-f(x)} = 0$; б) $f'(x)\operatorname{ctg} x + f(x) - 2 = 0$;

в) $f'(x) - f(x) - 2x + 3 = 0$; г) $(x - 2f(x))f'(x) - 1 = 0$,

тогава и само тогава са удовлетворени тъждествено в Δ, когато съществува такава константа C, че в Δ съответно:

а') $f(x) = \ln(e^x + C)$; б') $f(x) = 2 + C\cos x$;

в') $f(x) = 1 - 2x + Ce^x$; г') $2f(x) + Ce^{f(x)} - x - 2 = 0$.

Задача 87. Да се докаже, че два пъти диференцируемата функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и константите a, b и ω тогава и само тогава удовлетворяват:

а) $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$;

б) $f''(x) - (a+b)f'(x) + ab = 0 \quad (a \neq b)$;

в) $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$;

г) $f''(x) - 2\omega f'(x) + \omega^2 f(x) = 0$

за всяко реално x, когато съществуват константи A и B, за които съответно:

а') $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$; б') $f(x) = Ae^{ax} + Be^{bx}$;

в') $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$; г') $f(x) = (Ax + B)e^{\omega x}$

за всяко реално x.

Задача 88. Нека $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са диференцируеми функции, за които:

а) $S'(x) = C(x)$ и $C'(x) = S(x)$;

б) $S'(x) = C(x)$ и $C'(x) = -S(x)$

за всяко реално x. Да се докаже, че съществуват такива константи A и B, че съответно:

а') $S(x) = A\operatorname{ch} x + B\operatorname{sh} x$ и $C(x) = A\operatorname{sh} x + B\operatorname{ch} x$;

б') $S(x) = A\cos x + B\sin x$ и $C(x) = -A\sin x + B\cos x$

за всяко реално x.

Задача 89. Ако при условията на предишната задача са изпълнени и условията $S(0) = 0$ и $C(0) = 1$, то съответно:

а') $S(x) = \operatorname{sh} x$ и $C(x) = \operatorname{ch} x$;

б') $S(x) = \sin x$ и $C(x) = \cos x$

за всяко реално x.

Задача 90. Два пъти диференцируемата функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и константите a, b и ω тогава и само тогава удовлетворяват:

а) $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad (\omega \neq 0)$;

б) $f''(x) - 2af'(x) + (a^2 + b^2)f(x) = 0 \quad (b \neq 0)$

за всяко реално x, когато съществуват константи A и B, за които съответно:

а') $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$;

б') $f(x) = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$

за всяко реално x.

§ 10. Критерий за монотонност

Следващите две твърдения улесняват изследването на монотонността на функциите.

Ако една диференцируема функция е растяща (намаляваща), производната ѝ е неотрицателна (неположителна).

Ако една функция е дефинирана и диференцируема в интервал и производната ѝ е неотрицателна (неположителна), функцията е растяща (намаляваща).

Задача 91. Да се представи $\mathbb{R}$ като обединение на максимални интервали, във всеки от които функцията:

а) $x + \sin x$; б) $x + \cos x$; в) $2 + x - x^2$;

г) $3x - x^3$; д) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; е) $\cos\dfrac{\pi}{x}$ $(x > 0)$;

ж) $\dfrac{x^2}{2^x}$; з) $x^a e^{-x}$ $(a > 0,\ x \geqq 0)$; и) $x^2 - \ln x$;

й) $x\left(\sin\ln x + \dfrac{3}{2}\right)$,

е монотонна.

Задача 92*. Да се изследва в зависимост от параметрите λ и μ в кои интервали функцията $\left(1 + \dfrac{\lambda}{x}\right)^{x+\mu}$ е монотонна.

Задача 93. Да се докаже:

а) че функцията $\dfrac{\sin x}{x}$ е намаляваща в интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) неравенството $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$ за всички x от $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задача 94. Да се докажат неравенствата:

а) $1+x \leqq e^x$; б) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2e^x}{2}$;

в) $1+x+\dfrac{x^2}{2} \leqq e^x$; г) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}e^x$;

д) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^\nu}{\nu!} \leqq e^x \ (n\in \mathrm{N})$; е) $e^x \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^\nu}{\nu!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x \ (n\in \mathrm{N})$

за всички положителни x.

Задача 95. Да се докажат неравенствата:

а) $1+x \leqq e^x$; б) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$;

в) $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6} \leqq e^x$; г) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$;

д) $\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}\dfrac{x^\nu}{\nu!} \leqq e^x \ (n\in \mathrm{N})$; е) $e^x \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{2n}\dfrac{x^\nu}{\nu!} \ (n\in \mathrm{N})$

за всички отрицателни x.

Задача 96. Да се докажат неравенствата:

а) $\ln(1+x) \leqq x$; б) $x-\dfrac{x^2}{2} \leqq \ln(1+x)$;

в) $\ln(1+x) \leqq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$; г) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4} \leqq \ln(1+x)$;

д) $\ln(1+x) \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{2n-1}(-1)^{\nu+1}\dfrac{x^\nu}{\nu} \quad (n\in \mathrm{N})$;

е) $\sum\limits_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}\dfrac{x^\nu}{\nu} \leqq \ln(1+x) \quad (n\in \mathrm{N})$

за всички положителни x.

Задача 97. Да се докажат неравенствата:

а) $\ln(1+x) \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}\dfrac{x^\nu}{\nu} \quad (n\in \mathrm{N})$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}\dfrac{x^\nu}{\nu}+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqq \ln(1+x) \quad (n\in \mathrm{N})$

за всички x, за които $-1<x\leqq 0$.

Задача 98. Да се докаже, че наред с неравенствата $\cos x \leqq 1$ и $\sin x \leqq x$ са валидни още и:

а) $1-\dfrac{x^2}{2} \leqq \cos x$; б) $x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x$;

в) $\cos x \leqq 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$; г) $\sin x \leqq x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;

д) $\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \leqq \cos x \quad (n\in \mathrm{N})$;

е) $\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \leqq \sin x \quad (n\in \mathrm{N})$;

ж) $\cos x \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad (n\in \mathrm{N})$;

з) $\sin x \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \quad (n\in \mathrm{N})$

за всички положителни x.

Задача 99. Да се докажат неравенствата:

а) $\left|\sin x-\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right| \leqq \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$;

б) $\left|\cos x-\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\right| \leqq \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

за всяко естествено n и за всяко реално x.

Задача 100. Да се докажат неравенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \leqq \operatorname{ch} x \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}+\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\operatorname{ch} x$;

б) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \leqq \operatorname{sh} x \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}+\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\operatorname{ch} x$

за всяко неотрицателно цяло n и за всяко положително x.

Задача 101. Да се докажат неравенствата:

а) $\sum_{\nu=0}^{2n-1} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \leqq (1+x)^\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{2n-2} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$

за всяко естествено n, отрицателно α и положително x;

б) $\sum_{\nu=0}^{2n} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \leqq (1+x)^\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{2n-1} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$

за всяко естествено n, α с $0 \leqq \alpha \leqq 1$ и положително x;

в) $\sum_{\nu=0}^{2n+k-1} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \leqq (1+x)^\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{2n+k-2} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$

за всички естествени n и k, α с $k-1 \leqq \alpha \leqq k$ и положителни x;

г) $(1+x)^\alpha \leqq 1+\alpha x \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1, \ -1 < x)$;

д) $(1+x)^\alpha \geqq 1+\alpha x \quad \left(\frac{1}{2} \leqq \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|, \ -1 < x\right)$.

Задача 102. Да се докаже:

а) неравенството $(1+x)^n \geqq 1+nx$ за всяко четно естествено n и всяко x;

б)* че за всяко нечетно естествено число n съществува такова число ξ_n, за което $-3 \leqq \xi_n < -2$, че за всяко $x \geqq \xi_n$ е в сила неравенството $(1+x)^n \geqq 1+nx$, а за всяко $x \leqq \xi_n$ — неравенството $(1+x)^n \leqq 1+nx$.

Задача 103. Да се докажат неравенствата

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu \frac{\operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{2\nu+1} \leqq x \leqq \sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^\nu \frac{\operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{2\nu+1}$$

за всички естествени n и x, за които $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 104. Като се използуват зад. 94-103, да се пресметнат с точност 10^{-3} числата: а) $e^{0,15}$; б) $\ln 1,12$; в) $\sin 0,21$; г) $\cos 0,32$; д) $\operatorname{ch} 0,1$; е) $\operatorname{sh} 0,4$; ж) $\sqrt{2}$; з) $\frac{\pi}{12}$.

Задача 105. Да се докаже неравенството $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ при положителни x и y и $0 < \alpha \leqq \beta$.

Задача 106*. Да се докажат неравенствата:

а) $xy \leqq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ при положителни x, y, p, q и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ при положителни p и q,

за които $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Хьолдер).

Задача 107*. Да се докаже неравенството на Минковски

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

където $p \geqq 1$.

Задача 108*. Да се докажат:

а) неравенството на Коши $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ при неотрицателни $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

б) обобщеното неравенство на Коши $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu$ при неотрицателни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положителни $p_1, p_2, \ldots, p_n$, за които $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1$.

Задача 109. Да се докаже, че:

а) за всеки полином P съществува такова реално число N, че функцията P е монотонна във всеки от интервалите $(-\infty, -N)$ и (N, ∞);

б) за всяка рационална функция R съществува такова реално число N, че функцията R е монотонна във всеки от интервалите $(-\infty, -N)$ и (N, ∞).

Задача 110*. Да се докаже:

а) ако функцията $f : [0, a) \to \mathbf{R}$ притежава производни до $(n+1)$-ви ред, $f^{(\nu)}(0) \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \ n = 2, 3, \ldots)$, като поне едно от числата $f^{(\nu)}(0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ е положително и съществува неотрицателна функция $\lambda : [0, a) \to \mathbf{R}$, такава че $f^{(n)}(x) \geqq \lambda(x) f(x)$ за всяко x от $[0, a)$, функцията f е растяща;

б) неравенството $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \leqq \operatorname{tg} x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$;

в) неравенството $\operatorname{sh}(x\sqrt{2}) \leqq \sqrt{2} \operatorname{tg} x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 11. Локални екстремуми

Нека ξ е вътрешна точка от дефиниционната област X на функцията $f : X \to \mathbb{R}$.

Казва се, че функцията f има *локален максимум* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ да е в сила неравенството $f(\xi) \geqq f(x)$.

Казва се, че функцията f има *локален минимум* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ да е в сила неравенството $f(\xi) \leqq f(x)$.

Локалните максимуми и локалните минимуми носят общото име *локални екстремуми*.

Ако функцията f има локален екстремум в точката ξ и $f'(\xi)$ съществува, то $f'(\xi) = 0$ (Ферма).

Тази *теорема на Ферма* дава необходимо, но не и достатъчно условие за съществуване на локален екстремум. Едно достатъчно условие се дава от следната теорема.

Ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е два пъти диференцируема в околност на вътрешна точка ξ на X и $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) \neq 0$, функцията f има локален екстремум в точката ξ. Този екстремум е максимум при $f''(\xi) < 0$ и минимум при $f''(\xi) > 0$.

По-общо: *нека функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е $n-1$ пъти диференцируема в околност на вътрешна точка ξ на X и $f'(\xi) = f''(\xi) = \cdots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$. Ако $f^{(n)}(\xi)$ съществува и $f^{(n)}(\xi) \neq 0$, то:*

1. *При нечетно n функцията f не притежава екстремум в точката ξ, която се нарича инфлексна точка на f.*
2. *При четно n функцията f има локален екстремум в точката ξ, който е максимум при $f^{(n)}(\xi) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(\xi) > 0$.*

При безбройно много пъти диференцируеми функции f горният критерий не дава резултат само когато всичките производни на f в ξ се анулират (зад. 53 показва, че действително съществуват различни от константа функции с това свойство).

Често на практика намирането на локални екстремуми се извършва само с първи производни, като се използуват съображения за монотонност. Така например нека функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема, $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$ и

(32) $$f'(x) \geqq 0 \quad (x < \xi),$$

(33) $$f'(x) \leqq 0 \quad (x > \xi).$$

Поради (32) функцията f е растяща в $[a, \xi]$ и следователно

(34) $$f(x) \leqq f(\xi) \quad (a \leqq x \leqq \xi).$$

От друга страна, поради (33) f е намаляваща в $[\xi, b]$ и следователно (34) е налице и при $\xi \leqq x \leqq b$. С това не само е установено, че f има локален максимум в ξ, но и че $f(\xi)$ е най-голямата стойност на f в интервала $[a, b]$. Читателят ще съобрази сам как да модифицира горните разсъждения и за други подобни случаи.

Задача 111. Да се намерят точките на локален екстремум на функциите:

а) $x^3 - 12x$; б) $x^3 - 3x^2 + 6x + 7$;

в) $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$; г) $a + (x - b)^4$;

д) $a + (x - b)^3$; е) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;

ж) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; з) $(x - 4)^4(x + 3)^3$;

и) $\dfrac{x}{1 + x^2}$; й) $x + \dfrac{1}{x}$; к) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a - x}$ $(0 < a \neq b > 0)$;

л) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$; м) $\dfrac{x^4 + 1}{x^2}$; н) $\dfrac{x^2}{x^4 + 4}$;

о) $x \ln x$; п) $x^2 \ln x$; р) x^x; с) $x(\ln x)^2$;

т) $x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbb{N})$; у) $x^2 e^{-x^2}$; ф) $\operatorname{ch} x$; х) $e^{-x} - e^{-2x}$;

ц) $x^3(x - 1)^{\frac{2}{3}}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$; ч) $\ln x - \operatorname{arctg} x$; ш) $e^x \cos x$.

Задача 112. За произволно α от интервала:

а) $(0, 4)$ нека $m(\alpha)$ е най-малката стойност на функцията $\ln(x^2 + \alpha x + \alpha)$ $(x \in \mathbb{R})$. При каква стойност на α минимумът $m(\alpha)$ е най-голям?

б) $(-\infty, 1]$ нека $m(\alpha)$ е най-малката стойност на функцията $(1 + x) \operatorname{arctg} x - (x + 1) \operatorname{arctg} \alpha - x \dfrac{1 + \alpha}{1 + \alpha^2}$ $(x \leqq 1)$. При каква стойност на α минимумът $m(\alpha)$ е най-голям?

в) $(-\infty, 0]$ нека $m(\alpha)$ е най-малката стойност на функцията $x \ln \dfrac{1 + x^2}{1 + \alpha^2} - \dfrac{2\alpha^2 x}{1 + \alpha^2} + 2\alpha$ $(x \geqq 0)$. При каква стойност на α минимумът $m(\alpha)$ е най-голям?

г) $(0, \infty)$ нека $M(\alpha)$ е най-голямата стойност на функцията $\operatorname{arctg} x - \dfrac{\alpha}{2} \ln(1 + x^2) + \dfrac{\alpha}{2} \ln a$ $(a > 1,\ x \in \mathbb{R})$. При каква стойност на α максимумът $M(\alpha)$ е най-малък?

Задача 113. Да се намерят точните горни и точните долни граници на следните функции в посочените интервали:

а) $x e^{-0{,}01x}$ $(x \geqq 0)$;

б) $\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ $(x \geqq 0)$;

в) $\dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$ $(x \in \mathbb{R})$; г) $e^{-x} \cos x$ $(x \geqq 0)$.

Задача 114. Да се намери число, което, прибавено към квадрата си, дава най-малка сума.

Задача 115. Измежду всички правоъгълници, вписани в кръг с радиус a, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

Задача 116. Измежду всички правоъгълници, вписани в полукръг с радиус r, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

Задача 117. В дадена сфера да се впише цилиндър с най-голяма околна повърхнина.

Задача 118. В дадена сфера да се впише цилиндър с най-голяма пълна повърхнина.

Задача 119. В дадена сфера да се впише конус с най-голям обем.

Задача 120. В дадена сфера да се впише конус с най-голяма околна повърхнина.

Задача 121. В даден конус да се впише цилиндър с най-голям обем.

Задача 122. От физиката е известно, че ако φ е ъгълът между една осветявана площадка и лъчите, а r — разстоянието до светлинния източник, съществува константа m, която зависи от силата на източника, така че силата на осветлението е $\dfrac{m\sin\varphi}{r^2}$. На каква височина върху даден стълб трябва да се окачи светлинен източник, така че в дадена точка на хоризонтална площадка, намираща се на дадено разстояние от стълба, осветлението да бъде най-голямо?

Задача 123*. При отражението на светлинен лъч ъгълът на падането е равен на ъгъла на отражението. Да се докаже, че ако A и B са две точки от една и съща страна на права l в дадена равнина, при движението си от A до B след отражение от l светлината изминава възможно най-късия път (Х е р о н).

Задача 124*. Съгласно закона на Снелиус–Ферма $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, където φ_1 и φ_2 са съответно ъгълът на падането и ъгълът на пречупването, а v_1 и v_2 — съответно скоростите на светлината преди и след пречупването. Ако A и B са две точки от различни страни на пречупващата светлината права l, да се докаже, че при движението си от A до B след пречупване от l светлината изразходва възможно най-малко време.

§ 12. Изпъкнали и вдлъбнати функции

Нека ξ е вътрешна точка от дефиниционната област X на функцията

$f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ и $f'(\xi)$ съществува. Уравнението на допирателната към графиката на f в точката ξ е

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi). \tag{35}$$

Функцията f се нарича *изпъкнала* или *конвексна* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ точката $f(x)$ от графиката на f да се намира над съответната (за същата стойност на x) точка от допирателната (35). Аналитично това означава, че за всяко x от $X \cap U$ е в сила неравенството

$$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \leqq f(x). \tag{36}$$

Функцията f се нарича *вдлъбната* или *конкавна* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ точката $f(x)$ от графиката на f да се намира под съответната (за същата стойност на x) точка от допирателната (35). Аналитично това означава, че за всяко x от $X \cap U$ е в сила неравенството

$$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \geqq f(x). \tag{37}$$

Ако функцията f е изпъкнала (вдлъбната) в точката ξ, функцията $-f$ е вдлъбната (изпъкнала) в ξ.

Точката ξ се нарича *инфлексна* за функцията f, когато f не е нито изпъкнала, нито вдлъбната в ξ. Аналитично това означава, че за произволна околност U на ξ съществуват както точки x от $X \cap U$, за които (36) е нарушено, така и точки x от $X \cap U$, за които (37) е нарушено.

Задача 125. Да се докаже, че:

а) ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е диференцируема в околност на точката ξ, $f''(\xi)$ съществува и $f''(\xi) > 0$ $(f''(\xi) < 0)$, то f е изпъкнала (вдлъбната) в ξ;

б) ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е диференцируема в околност на точката ξ, изпъкнала (вдлъбната) е в ξ и $f''(\xi)$ съществува, то $f''(\xi) \geqq 0$ $(f''(\xi) \leqq 0)$;

в) ако ξ е инфлексна точка за функцията f и $f''(\xi)$ съществува, то $f''(\xi) = 0$.

Може да се установи, че ако функцията f е два пъти диференцируема в интервала Δ, ξ е вътрешна точка за Δ, за която $f''(\xi) = 0$, и $\delta > 0$ е такова число, че множествата $f''((\xi - \delta, \xi))$ и $f''((\xi, \xi + \delta))$ са от различни страни на началото, точката ξ е инфлексна за f.

Задача 126. Да се изследва в кои точки са изпъкнали, вдлъбнати или имат инфлексия функциите:

а) $3x^2 - x^3$; б) $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$; в) $x + x^{\frac{5}{3}}$;

г) $\sqrt{1 + x^2}$; д) $x + \sin x$; е) e^{-x^2};

ж) $\ln(1 + x^2)$; з) $x\sin(\ln x)$ $(x > 0)$; и) x^x $(x > 0)$.

Задача 127. Да се докаже, че функцията $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ притежава три инфлексни точки, за които съответните точки от графиката лежат върху една права.

Задача 128. Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

Една дефинирана в интервал функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$ се нарича *изпъкнала* (в Δ), когато неравенството

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \tag{38}$$

е изпълнено за всеки две точки x_1 и x_2 от Δ и за всеки две реални числа p_1 и p_2, за които

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_1 + p_2 = 1. \tag{39}$$

Една дефинирана в интервал функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$ се нарича *вдлъбната* (в Δ), когато неравенството

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \geqq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \tag{40}$$

е изпълнено за всеки две точки x_1 и x_2 от Δ и за всеки две реални числа p_1 и p_2, за които е изпълнено (39).

Задача 129. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е изпъкнала:

а) функцията $\varphi : \Delta \setminus \{\xi\} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$, е растяща;

б) множеството на точките, в които тя не е диференцируема, е крайно или изброимо;

в) производната ѝ е растяща.

Задача 130. **а)** Ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е изпъкнала или вдлъбната, тя е непрекъсната във вътрешността на Δ.

б) Да се посочи пример на изпъкнала функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$, която е прекъсната в край на Δ.

Задача 131. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е:

а) изпъкнала и два пъти диференцируема в Δ, втората ѝ производна е неотрицателна в Δ;

б) диференцируема и производната ѝ е растяща в Δ, f е изпъкнала;

в) два пъти диференцируема в Δ и втората ѝ производна е неотрицателна в Δ, f е изпъкнала.

Задача 132. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е:

а) изпъкнала в Δ и ξ е вътрешна точка на Δ, за която $f'(\xi)$ съществува, f е изпъкнала в точката ξ;

б) два пъти диференцируема в Δ и изпъкнала във всяка вътрешна точка на Δ, тя е изпъкнала в Δ.

Задача 133. Ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е изпъкнала, в сила е неравенството $f\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu f(x_\nu)$ при $x_\nu \in \Delta$, $p_\nu > 0$

$(\nu = 2, 3, \dots, n)$ и $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1$.

Задача 134. Да се докажат неравенствата:

а) $\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^a \leqq n^{a-1} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^a \quad (1 \leqq a \in \mathbf{R},\ 0 \leqq x_\nu \in \mathbf{R})$;

б) $n^{a+1} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^a \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{x_\nu^a}\right) \quad (0 \leqq a \in \mathbf{R},\ 0 < x_\nu \in \mathbf{R}$, $\nu = 1, 2, \dots, n)$;

в) $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^a \leqq n^{1-a} \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^a \quad (0 \leqq a \leqq 1, 0 \leqq x_\nu \in \mathbf{R}, \nu = 1, 2, \dots, n)$;

г) $\dfrac{1}{n} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{p_\nu} \quad \left(n \in \mathbf{N},\ p_\nu > 0\,(\nu = 1, 2, \dots, n),\ \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$.

Задача 135. С помощта на зад. 133 да се докаже обобщеното неравенство на Коши (зад. 108 б)).

§ 13. Логаритмична изпъкналост

Задача 136. Да се докаже, че:

а) ако два пъти диференцируемата функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$ приема само положителни стойности, а функцията $\ln f$ е изпъкнала, функцията f^a е също изпъкнала за всяко положително a;

б) горното заключение остава валидно и без да се предположи, че f е диференцируема.

Задача 137. Да се докаже, че при $x > 0$ функциите:

а) x^{ax} $(a > 0)$; **б)** $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-ax}$ $(a > 0)$; **в)** $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+a}$ $\left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right)$,

са изпъкнали.

Задача 138. Да се докажат неравенствата:

а) $n(n+1)^{n+1} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu)^{2\nu}$;

б) $n(n+1)^{\varepsilon(n+1)} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu)^{2\nu\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$;

в) $\prod_{\nu=1}^{n}(1+p_\nu) < e \quad \left(0 \leqq p_\nu \in \mathbf{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$;

г) $\prod_{\nu=1}^{n}(1+xp_\nu) \leqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \left(0 \leqq x \in \mathbf{R},\ 0 \leqq p_\nu \in \mathbf{R}\ (\nu = 1, 2, \dots, n), \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$;

д) $e < \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{a_\nu} \quad \left(1 \leqq a_\nu \in \mathbf{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = n+1\right)$;

е) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{a_\nu} \quad \left(1 \leqq a_\nu \in \mathbf{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = n+x,\ x \geqq 0\right)$.

Задача 139. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е положителна и съществува редица $a_1, a_2, \dots$ от положителни числа с $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, за които функциите f^{a_n} $(n \in \mathbf{N})$ са изпъкнали (вдлъбнати), функцията $\ln f$ също е изпъкнала (вдлъбната).

Задача 140. Да се посочи пример на функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$, която приема само положителни стойности и не е вдлъбната, а функцията $\ln f$ е вдлъбната.

Задача 141. Да се докаже, че функцията $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ е вдлъбната при $x > 0$.

Задача 142. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu} \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

§ 14. Втора производна на Шварц

Задача 143. Да се докаже, че ако функцията f е диференцируема в околност на точката ξ и притежава втора производна в ξ, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = f''(\xi).$$

Нека ξ е вътрешна точка от дефиниционната област на функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$. Ако съществува границата $\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}$, тя се нарича *втора производна на Шварц* на f в ξ и се означава с $f^{[\prime\prime]}(\xi)$.

Задача 144. Да се посочи пример на диференцируема функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ и вътрешна точка ξ на X, за която $f''(x)$ не съществува, а $f^{[\prime\prime]}(x)$ съществува.

Задача 145. Да се докаже, че:

а) ако ξ е такава вътрешна точка от дефиниционната област на функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$, че $f(\xi)$ е най-малката (най-голямата) стойност на f, и ако $f^{[\prime\prime]}(\xi)$ съществува, то $f^{[\prime\prime]}(\xi) \geqq 0$ $(f^{[\prime\prime]}(\xi) \leqq 0)$;

б) ако $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната функция с $f(a) = f(b) = 0$, за която втората производна на Шварц съществува и е положителна (отрицателна) в (a, b), то $f(x) \leqq 0$ $(f(x) \geqq 0)$ за всяко x от $[a, b]$;

в) предишното заключение остава в сила и при по-слабото предположение $f^{[\prime\prime]}(x) \geqq 0$ $(f(x)^{[\prime\prime]} \leqq 0)$ за всяко x от (a, b);

г) ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в интервала Δ и $f^{[\prime\prime]}(x) = 0$ за всяка вътрешна точка x на Δ, f е линейна функция в Δ.

Задача 146. Да се докаже, че:

а) ако функцията f е изпъкнала (вдлъбната) в точката ξ и втората производна на Шварц $f^{[\prime\prime]}(\xi)$ съществува, то $f^{[\prime\prime]}(\xi) \geqq 0$ $(f^{[\prime\prime]}(\xi) \leqq 0)$;

б) съществува диференцируема функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която втората производна на Шварц в точката 0 е положителна, но f не е изпъкнала при $\xi = 0$; да се построи пример за такава функция;

в) ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и притежава неотрицателна втора производна на Шварц навсякъде във вътрешността на интервала Δ, то f е изпъкнала.

§ 15. Формула на Тейлър

Нека функцията f е $n+1$ пъти диференцируема в някой интервал Δ, а a и x са произволни точки от Δ. Тогава съществува точка ξ между a и x (различна от a и x при $a \neq x$), за която

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{41}$$

Равенството (41) се нарича *формула на Тейлър*, а последното събираемо в дясната страна — *остатъчен член във формата на Лагранж*.

При $n = 0$ равенството (41) преминава в теоремата за крайните нараствания.

Ако в (41) x се замести с $x + h$, а a — с x, равенството приема вида

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}h^{\nu} + \frac{f^{n+1}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad (42)$$

където $0 < \theta < 1$.

Ако в (42) x се замести с 0, а h — с x, получава се т. нар. *формула на Маклорен*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu} + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (43)$$

където отново $0 < \theta < 1$.

Разбира се, числото ξ в (41) и числата θ в (42) и (43) зависят не само от функцията f, а и от числата a, x, h и n.

Задача 147. Да се докаже, че:

а) числото e е ирационално;

б) числата $\sin 1$ и $\cos 1$ са ирационални.

Задача 148. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}}\left(e^x - \sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x^\nu}{\nu!}\right) = 1;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+3)!}{x^{2n+3}}\left(\sin x - \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right) = 1;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+2)!}{x^{2n+2}}\left(\cos x - \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\right) = 1.$

Задача 149*. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi(2n+1)!e^{-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi(2n)!e^{-1})$

(ф о н Н о й м а н).

Задача 150. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(2\pi(4n-1)!\sin 1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(2\pi(4n+1)!\sin 1)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(2\pi(4n-2)!\cos 1)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(2\pi(4n)!\cos 1)$.

Задача 151. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}(\pi n!ke)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)\,\mathrm{tg}(\pi(2n+1)!ke^{-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\,\mathrm{tg}(\pi(2n)!ke^{-1})$,

където k е произволно цяло число.

Задача 152*. Да се докаже, че числото e не удовлетворява квадратно уравнение с цели коефициенти.

Задача 153*. Да се докаже, че реалните числа x, за които съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!x)$, имат вида $r + ke$, където r е рационално, а k — цяло число (Д о ч е в).

§ 16. Нули

Ако функцията f е n пъти диференцируема в околност на точката ξ, тази точка се нарича *n-кратна нула* на f или *n-кратен корен* на уравнението $f(x) = 0$, когато $f^{(\nu)}(\xi) = 0$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $f^{(n)}(\xi) \neq 0$. Еднократните нули на f се наричат още *прости* нули на f, а кратните — *сливащи*. Тази дефиниция е обобщение на познатата алгебрична дефиниция на същите термини при полиноми.

Сумата от кратностите на нулите на достатъчен брой пъти диференцируема функция f в един интервал Δ се нарича *брой на нулите* на f в Δ.

Изследването на нулите на функциите е важна задача на класическия анализ и приложенията му. Теоремите за средните стойности (и по-специално теоремата на Рол) позволяват в редица случаи тази задача да се реши докрай.

Задача 154. Да се намери броят на реалните корени на уравненията:

а) $2\,\mathrm{tg}\,x - x = 0$ в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\nu\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+\nu\pi\right)$ $(\nu \in \mathrm{I})$;

б) $3\,\mathrm{tg}\,x - 3x - x^3 = 0$ в интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$.

Задача 155. Да се намери броят на реалните корени на уравненията:

а) $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$; б) $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$;

в) $x\ln x - a = 0$; г) $\ln x - ax = 0$,

където a е константа.

Задача 156. Да се докаже, че уравнението $x^3 + px + q = 0$, където p и q са реални числа, има точно един реален корен при $4p^3 + 27q^2 > 0$ и три реални корена при $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Задача 157. Да се докаже, че при $a>1$ уравнението $a^x - bx = 0$, където b е реална константа, има точно два реални корена при $b > e\ln a$, няма нито един реален корен при $e\ln a > b > 0$ и има точно един реален корен при $b < 0$.

10

Задача 158. Да се определи при какви стойности на параметъра a следните уравнения имат посочения брой реални корени:

а) два различни: $3x^4+4x^3-6x^2-12x+a=0$;

б) един: $2x^3-13x^2-20x+a=0$;

в) четири различни: $3x^4-14x^3-45x^2+a=0$;

г) два съвпадащи и един прост: $2x^3-4x^2-30x+a=0$;

д) нито един: $x^2-x-\ln x+a=0$.

Задача 159. Да се определи при какви стойности на параметъра a следните уравнения имат посочения брой реални корени:

а) $\cos x-a=0$ — един двоен корен в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sin x-ax=0$ — един троен корен в $[-\pi, \pi]$;

в) $x^2+x+e^{-x}+a=0$ — един двоен корен;

г) $6\operatorname{arc\,tg} x-x^3+a=0$ — един двоен и един прост корен.

Задача 160. Да се докаже, че ако функцията f е достатъчен брой пъти диференцируема в интервала Δ и броят на нулите ѝ в Δ е n, производната ѝ притежава поне $n-1$ нули в Δ.

Задача 161. Да се докаже, че:

а) ако всички нули на един полином са реални, нулите на производния му полином са също реални и лежат между най-малката и най-голямата нула на полинома;

б) нулите на полиномите на Льожандър са реални и различни и лежат в интервала $(-1, 1)$.

Задача 162. Да се докаже, че:

а) ако функцията $f:[a, \infty)\to \mathbf{R}$ е непрекъсната в a, диференцируема в (a, ∞) и $\lim_{x\to\infty} f(x)=f(a)$, съществува такова число ξ, че $a<\xi$ и $f'(\xi)=0$;

б) ако функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е диференцируема в $\mathbf{R}$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, съществува ξ от $\mathbf{R}$, за което $f'(\xi)=0$.

Задача 163. Да се докаже, че:

а) ако $\lambda\neq 0$ е константа, полиномът $P'-\lambda P$ има поне толкова реални нули, колкото и полиномът P; ако броят на реалните нули на P е p, при $\lambda>0$ $(\lambda<0)$ полиномът $P'-\lambda P$ има поне p реални нули, които не са вляво (вдясно) от най-малката (най-голямата) нула на P;

б) ако $\lambda\neq 0$ е константа, заключението на а) е валидно и за полинома $(D-\lambda)^n P(x)$;

в) ако полиномът φ има само различни от 0 реални нули, полиномът $\varphi(D)P(x)$ има поне толкова реални нули, колкото и полиномът P.

Задача 164. Да се докаже, че нулите на полиномите на Лагер са реални, положителни и различни.

Задача 165. Да се докаже, че нулите на полиномите на Ермит са реални и различни.

Задача 166. Да се докаже, че:

а) за всяка положителна константа λ полиномът $P'(x)-\lambda xP(x)$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът $P(x)$;

б) ако P е полином, а λ е реално число, по-голямо от степента на P, полиномът $(1+x^2)P'(x)-\lambda xP(x)$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът $P(x)$;

в) ако φ е полином от положителна четна степен с отрицателен старши коефициент, а P — произволен полином, полиномът $P\varphi'+P'$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът P;

г) ако P и Q са полиноми съответно от степени p и q, Q не притежава реални нули и α е такова число, че $\alpha q>p$, полиномът $P'Q-\alpha PQ'$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът P.

Задача 167. Да се докаже, че всички нули на полинома $(1+x^2)^n\dfrac{d^n \operatorname{arc\,tg} x}{dx^n}$ от степен $n-1$ са реални.

§ 17. Общи теореми за средни стойности

Задача 168*. Да се докаже, че:

а) ако функциите F и G са n пъти диференцируеми в интервал Δ, имат поне n общи нули в Δ и $G^{(n)}(x)\neq 0$ за всяко x от Δ, то за всяко x от Δ, за което $G(x)\neq 0$, съществува ξ от Δ, за което

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(\xi)}{G^{(n)}(\xi)}G(x);$$

б) ако функциите F и G са съответно $m+1$ и $n+1$ пъти диференцируеми в интервал Δ, числото a е $(m+1)$-кратна нула на F и $(n+1)$-кратна нула на G, а $G^{(n+1)}$ не се анулира в $\Delta\setminus\{\xi\}$, то за всяко x от Δ съществува ξ от Δ, за което

$$F(x)=\frac{n!(x-\xi)^{m-n}F^{(m+1)}(\xi)}{m!G^{(n+1)}(\xi)}G(x) \quad \text{(Тагамлицки).}$$

Задача 169. Ако функцията f е n пъти диференцируема в интервал Δ, P е полином от степен $n-1$ и x_μ $(\mu = 1, 2, \dots, m)$ е поне k_μ-кратна нула на функцията $f - P$, като числата x_μ са различни помежду си и $\sum_{\mu=1}^{m} k_\mu = n$, да се докаже, че за всяко x от Δ съществува число ξ от Δ, за което

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{\mu=1}^{m}(x - x_\mu)^{k_\mu}.$$

Задача 170*. Нека функцията f е $n+1$ пъти диференцируема в интервал Δ, $a \in \Delta$, $R_n(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ за всяко x от Δ, функцията g е диференцируема в Δ и g' не се анулира в Δ. Да се докаже, че за всяко x от Δ съществува ξ от Δ, за което:

а) $R_n(x) = \dfrac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)} \cdot \dfrac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ (Шльомилх);

б) $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^p}{p.n!}(x-\xi)^{n+1-p} f^{(n+1)}(\xi)$ (Рош);

в) $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ (Лагранж);

г) $R_n(x) = \dfrac{x-a}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)$ (Коши);

д) $R_n(x) = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} \dfrac{(b-\xi)^{n+2}}{(n+1)!(b-x)} f^{(n+1)}(\xi)$ $(a \neq b,$ $|x-a| < |b-a|)$ (Тагамлицки).

§ 18. Изследване на графики на функции

Диференциалното смятане дава възможност да се отговори на редица въпроси, които възникват при изучаване на кривите линии. В аналитичен аспект най-прости криви са графиките на диференцируемите функции.

При изследването и начертаването на графиката на една диференцируема функция понякога се препоръчва да се следва изложеният по-долу план:

1. Да се намери дефиниционната област на функцията.
2. Да се изследва дали функцията е четна или нечетна и по-общо дали графиката ѝ не е симетрична спрямо някоя вертикална права или спрямо някоя точка.

3. Да се изследва дали функцията е периодична или не.
4. Да се изследва поведението на функцията около краищата на дефиниционните интервали.
5. Да се изследва знакът на функцията, включително пресечните ѝ точки с координатните оси.
6. Да се намерят евентуалните асимптоти на графиката, както и пресечните им точки с графиката (вж. § 19, където този въпрос се обсъжда при по-общи условия).
7. Да се намерят интервалите на растене и намаляване на функцията.
8. Да се намерят екстремумите на функцията.
9. Да се изследват интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и да се определят инфлексните точки на графиката.

Задача 171. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = x^3$ (*кубична парабола*);

б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (*къдрица на Мария Анези*);

в) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (*серпентина на Нютон*);

г) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$ (*тризъбец на Нютон*).

Задача 172. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$;

в) $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; г) $y = \dfrac{x^2(x-2)}{(x+1)^2}$.

Задача 173. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$; б) $y = \cos^4 x + \sin^4 x$;

в) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$; г) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

д) $y = \sin x^2$;

е) $y = \sin\dfrac{1}{x}$ (*топологична синусоида*);

ж) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$; з) $y = x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

и) $y = x\,\mathrm{ctg}\,x$ (*квадратриса на Диностpат*).

Задача 174. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$; б) $y = x - \mathrm{arctg}\sqrt{x}$;

в) $y = \arcsin\dfrac{x}{x^2-1}$.

Задача 175. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \operatorname{sh} x$; б) $y = \operatorname{ch} x$ (*верижка*);

в) $y = \operatorname{th} x$; г) $y = \operatorname{cth} x$.

Задача 176. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$; б) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$;

в) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; г) $y = e^{-x^2}(1+x^2)$.

Задача 177. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln\cos x$;

в) $y = \ln(x^2-1)$; г) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

д) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Задача 178. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \operatorname{Ar sh} x$; б) $y = \operatorname{Ar ch} x$;

в) $y = \operatorname{Ar th} x$; г) $y = \operatorname{Ar cth} x$.

Понякога под крива се разбира множеството на точките (x, y) в равнината, които удовлетворяват уравнение от вида $f(x,y) = 0$, където f е функция на две променливи. В отделни случаи е възможно това уравнение да се реши явно спрямо y и по този начин изследването на кривата да се сведе към изследване на графики на функции.

Задача 179. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $4y^2 = x^3$ (*семикубична парабола или парабола на Нейл*);

б) $y^2(4-x) = x^3$ (*цисоида на Диоклес*);

в) $(x-1)^2(x^2+y^2) = 4x^2$ (*конхоида на Никомед*);

г) $y^2 = x^2\dfrac{1+x}{1-x}$ (*строфоида*);

д) $\left(y - \operatorname{Ar ch}\dfrac{1}{x}\right)^2 = a^2 - x^2$ (*трактриса*).

Задача 180. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y^2 = x^3 - x^4$; б) $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$;

в) $y^3(2x-1) + x^2 - x^4 = 0$; г) $y^2(1-x) + 2x^2y + x^4 = 0$;

д) $(y-x^2)^2 - x^5 = 0$; е) $x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2 = 0$.

§ 19. Изследване на криви, зададени параметрично

Кривите се задават параметрично с двойка уравнения от вида

(44) $$x = f(t), \quad y = g(t).$$

Всяка параметрично зададена крива може да се разглежда като траектория на подвижна точка, а уравненията (44) — като закон на движението на тази точка, стига t да се интерпретира като време (и, разбира се, функциите да бъдат диференцируеми).

Кривите от вида (44) се изследват, като се изследва поотделно всяка от функциите $x = f(t)$ и $y = g(t)$, след което получената по този начин информация се обединии.

Ако функциите (44) са диференцируеми в точката τ и поне една от производните $f'(\tau)$ и $g'(\tau)$ е различна от нула, уравнението на *допирателната* към кривата (44) в точката $\left(f(\tau), g(\tau)\right)$ има вида

(45) $$\frac{x - f(\tau)}{f'(\tau)} = \frac{y - g(\tau)}{g'(\tau)}.$$

Ето защо ъгловият коефициент на допирателната е

(46) $$k = \frac{g'(\tau)}{f'(\tau)}.$$

Допирателната е хоризонтална при $g'(\tau) = 0$ и вертикална при $f'(\tau) = 0$. При

(47) $$\lim_{t\to\tau} f(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\tau} g(t) = \eta$$

правата $y = \eta$ е *хоризонтална асимптота* на кривата (44), а при

(48) $$\lim_{t\to\tau} f(t) = \xi, \quad \lim_{t\to\tau} g(t) = \infty$$

правата $x = \xi$ е *вертикална асимптота* на кривата (44). Когато

(49) $$\lim_{t\to\tau} f(t) = \lim_{t\to\tau} g(t) = \infty,$$

около τ може да съществува *наклонена асимптота*. Това е така, когато при (49) границите

(50) $$\lim_{t\to\tau}\frac{g(t)}{f(t)} = k, \quad \lim_{t\to\tau}\left(g(t) - kf(t)\right) = n$$

съществуват; тогава уравнението на асимптотата е $y = kx + n$. В равенствата (47)–(50) буквата τ може да означава и някой от символите ∞ или $-\infty$. Ако пък

(51) $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \xi, \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = \eta,$$

точката (ξ, η) се нарича *асимптотична* за кривата (44); дефинициите остават в сила и когато в (51) ∞ се замени с $-\infty$.

Една характерна особеност на параметрично зададените криви е възможността да съществуват *двойни точки*. Една точка (ξ, η) от кривата (44) се нарича двойна, когато се получава за две различни стойности за параметъра t. Ето защо двойните точки се намират, като се реши системата

(52) $$f(t_1) = f(t_2), \quad g(t_1) = g(t_2), \quad (t_1 \neq t_2).$$

Графиките на функции $y = f(x)$ могат да се схващат като параметрично зададени криви с двойката параметрични уравнения $x = t$ и $y = f(t)$. Ето защо казаното дотук в общия случай и по-специално за асимптотите важи и за графиките на функции.

Задача 181. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x = \dfrac{t+2}{t^2+1}$, $y = \dfrac{1}{t-t^2}$; б) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t-2}{t^2+1}$;

в) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

Задача 182. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (*циклоида*);

б) $x = 2t - \sin t$, $y = 2 - \cos t$ (*скъсена циклоида*);

в) $x = t - 2\sin t$, $y = 1 - 2\cos t$ (*удължена циклоида*);

г) $x = t\sin t + \cos t$, $y = \sin t - t\cos t$ (*еволвента на окръжност*);

д) $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ (*крива на Лисажу*);

е) $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ (*хипоциклоида*);

ж) $x = 4\cos t - \cos 4t$, $y = 4\sin t + \sin 4t$ (*епициклоида*).

Задача 183. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x = \operatorname{sh} t - t$, $y = \operatorname{ch} t - 1$; б) $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$;

в) $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

Понякога кривите с уравнения от вида $f(x,y) = 0$ могат да се сведат към параметрични криви. Особено прост е случаят, когато f е полином на x и y, а параметризацията води до рационални функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. В този случай кривата се нарича *уникурзална*. Специален случай на уникурзална крива е налице, когато f е сума на два хомогенни полинома на x и y от различни степени. Тогава рационална параметризация се постига чрез субституцията $y = tx$.

Задача 184. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (*декартов лист*); б) $x^5 + y^5 - 5x^2y^2 = 0$;

в) $x^4 - (x^2 - y^2)y = 0$; г) $2y^3x - y^4 - x(y-x)^2 = 0$.

Задача 185. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (*астроида*);

б) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (*кардиоида*).

§ 20. Изследване на криви в полярни координати

Често употребявана координатна система е *полярната*. Връзката на полярните и декартовите координати се дава с равенствата

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \tag{53}$$

където *полярният ъгъл* θ може да взема произволни реални, а *полярният радиус* ρ — произволни неотрицателни реални стойности. В полярни координати крива се задава с уравнение от вида $F(\theta,\rho) = 0$, където F е функция на две променливи. Тук ще се интересуваме предимно от важния и интересен за приложенията частен случай, когато горното уравнение може да се реши явно спрямо ρ:

$$\rho = f(\theta). \tag{54}$$

Важна особеност на това задаване на крива в полярни координати е, че в общия случай θ не се изменя в естествената дефиниционна област на функцията f, а само в онази нейна част, за която $f(\theta) \geqq 0$.

От (53) и (54) се получава следната двойка декартови параметрични уравнения на кривата с полярно уравнение (54):

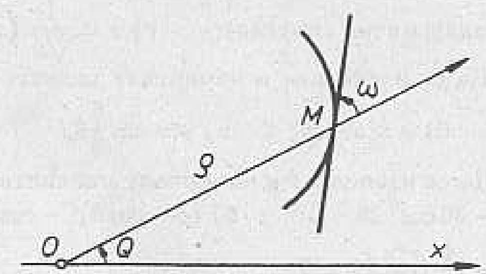
$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta. \tag{55}$$

Ето защо изследването на кривите с полярни уравнения (54) може да се сведе към аналогичния въпрос за параметрично зададени криви. На практика обаче така се постъпва рядко, тъй като начертаването на кривата (54) може да се сведе до изследване само на една функция f, както и до използуване на геометричния смисъл на полярните координати.

Геометричният смисъл на производната на функцията (54) личи от равенството

$$\rho' = \rho\operatorname{ctg}\omega, \tag{56}$$

където ω е ъгълът, който посоката на радиус-вектора OM, прекаран от полюса O към произволна точка M от кривата, сключва с посоката (към растящите ъгли) на допирателната към кривата в точката M (фиг. 5).



Фиг. 5

Асимптоти могат да се очакват за онези стойности α на θ, за които

$$\lim_{\theta\to\alpha} f(\theta) = \infty. \tag{57}$$

При

(58) $$\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathrm{I})$$

въпросната асимптота може да бъде само вертикална. Тя съществува точно когато съществува

(59) $$\lim_{\theta \to \alpha} f(\theta) \cos\theta = \xi,$$

и декартовото ѝ уравнение е

(60) $$x = \xi.$$

Когато α не удовлетворява (58), въпросната асимптота съществува точно когато съществува

(61) $$\lim_{\theta \to \alpha} (\theta - \alpha) f(\theta) = l,$$

и има декартово уравнение

(62) $$y = x \operatorname{tg}\alpha + \frac{l}{\cos\alpha}.$$

Ако в (62) се освободим от знаменателя $\cos\alpha$, получаваме уравнението на асимптотата, което важи и в случая (58). При

(63) $$\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = r$$

окръжността с център в полюса O и радиус r е *асимптотична* за кривата (54). При $r = 0$ тази окръжност се изгражда в полюса, който става *асимптотична точка* за изследваната крива. Същата бележка остава в сила и когато в (63) ∞ се смени с $-\infty$.

Задача 186. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $\rho = \theta$ (*архимедова спирала*);

б) $\rho = \dfrac{1}{\theta}$ (*хиперболична спирала*);

в) $\rho = e^{2\theta}$ (*логаритмична спирала*); г) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$ (*жезъл*).

Задача 187. Да се изследват и начертаят розите:

а) $\rho = \sin 3\theta$; б) $\rho = \sin 2\theta$; в) $\rho = \sin \frac{5}{3}\theta$.

Задача 188. Да се изследват и начертаят майските бръмбари:

а) $(\rho - \cos\theta)^2 - 36\cos^2 2\theta = 0$; б) $(\rho - \cos\theta)^2 - \cos^2 2\theta = 0$;

в) $(\rho - \cos\theta)^2 - \dfrac{4}{81}\cos^2 2\theta = 0$.

Понякога е за предпочитане кривите с декартови уравнения от вида $f(x, y) = 0$ да се изследват в полярни координати. Полярното уравнение на една такава крива се получава, като x и y в декартовото ѝ уравнение се заместят с равните им от (53). Този преход е особено удобен, когато в f фигурира комбинацията $x^2 + y^2$. Поради (53) тя се замества с ρ^2, което може да доведе до опростявания.

Задача 189. Да се намерят полярните уравнения на кривите:

а) кардиоида: $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$;

б) строфоида: $y^2 = x^2 \dfrac{1 + x}{1 - x}$;

в) цисоида на Диоклес: $y^2(4 - x) = x^3$;

г) декартов лист: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

д) обща конхоида на Никомед: $(x - 1)^2(x^2 + y^2) = d^2x^2$.

Задача 190. Да се намери полярното уравнение на коничните сечения, когато полюсът е в един от фокусите, а полярната ос е перпендикулярна на директрисата.

Задача 191. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $(x^2 + y^2 - x)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (*охлюви на Паскал*);

б) $(x^2 + y^2 - x)^2 = a^2(x^2 + y^2) + b$ (*овали на Декарт*).

Задача 192. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (*лемниската на Я. Бернули*);

б) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 + a$ (*овали на Касини*).

Осма глава

Безкрайни редове

§ 1. Сходящи и разходящи редове

Символ от вида

(1) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

или кратко

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu,$$

където u_ν ($\nu \in \mathrm{N}$) са числа, се нарича *безкраен ред*. Сумата

(3) $$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad (n \in \mathrm{N})$$

на първите n члена $u_1, u_2, \ldots, u_n$ на реда (1) се нарича *n-та парциална* (*частична*) *сума* на този ред. Ако на произволно естествено число n се съпостави n-тата парциална сума s_n на реда (1), се получава безкрайна редица $s_1, s_2, \ldots$, която се нарича *редица от парциалните суми* на реда (1). Изучаването на един безкраен ред не е нищо друго освен изучаване на редицата от парциалните му суми.

Редът (1) се нарича *сходящ* (*конвергентен*), когато е сходяща редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. В този случай числото $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ се нарича *сума* на реда (1) и се пише

(4) $$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

или

(5) $$s = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu.$$

Когато редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща, редът (1) се нарича *разходящ* (*дивергентен*). Ако редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща, но дивергира към ∞ или към $-\infty$, т. е. ако $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, пише се

(6) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = \infty$$

или

(7) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = -\infty.$$

Разбира се, при (6) и (7) редът е разходящ.

Безкрайният ред (1) е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко положително число ε съществува такова число ν_ε, че неравенството

(8) $$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

да е изпълнено за всяко естествено число p винаги когато $n > \nu_\varepsilon$ (*общо условие на Коши за сходимост на редове*).

Задача 1. Да се изследват за сходимост изброените редове и да се намерят сумите на онези от тях, които са сходящи:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$; б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu-2)(3\nu+1)}$; г) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+5)}$;

д) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$; е) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$;

ж) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(2\nu-1)^2(2\nu+1)^2}$; з) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} 4^\nu \sin^4 \frac{x}{2^\nu}$;

и) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4^\nu \cos^2 \frac{x}{2^\nu}}$; й) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \operatorname{tg} \frac{x}{2^\nu}$;

к) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4^\nu} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^\nu}$; л) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}$;

м) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$; н) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\nu$; о) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\nu$.

Ако редът (1) е сходящ, общият му член клони към нула:

(9) $$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Необходимото за сходимостта на реда (1) условие (9) обаче не е достатъчно, както показва класическият пример с т. нар. *хармоничен ред*

(10) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

който е разходящ, въпреки че общият му член $\frac{1}{n}$ клони към нула.

Един от най-често употребяваните безкрайни редове е т. нар. геометрична прогресия $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$. Този ред е сходящ при $|x| < 1$ и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x}, \tag{11}$$

а е разходящ при $|x| \geqq 1$.

Задача 2. Да се намерят всички реални числа x, за които изброените редове са сходящи, и да се пресметнат съответните суми:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x^\nu$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x^{2\nu}$; в) $\sum_{\nu=0}^{\infty}5^\nu x^{2\nu+1}$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu x^{\nu-1}$; д) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu(\nu-1)x^{\nu-2}$.

Ако редовете (2) и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu \tag{12}$$

са сходящи със суми съответно s и t, а a и b са произволни константи, то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(au_\nu + bv_\nu) = as + bt. \tag{13}$$

Задача 3. Да се изследват за сходимост изброените редове и да се намерят сумите на онези от тях, които са сходящи:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^\nu + 3^\nu}{6^\nu}$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{6^\nu}\left(2^\nu + 2^{\nu-1}.3 + 2^{\nu-2}.3^2 + \cdots + 3^\nu\right)$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu 2^\nu + 3^\nu}{\nu 3^\nu}$; г) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\nu^2 + \nu - 1}{\nu(\nu^2-1)}$.

§ 2. Принцип за сравняване на редове

Основен инструмент за изследване на редовете с положителни членове е т. нар. *принцип за сравняване на редове*: ако редът (12) е сходящ и са в сила неравенствата

$$0 \leqq u_n \leqq v_n \tag{14}$$

за всички естествени числа n от някое нататък, редът (2) е също сходящ, а ако при (14) редът (2) е разходящ, редът (12) е също разходящ.

При (14) понякога се казва, че редът (12) *мажорира* реда (2) или че е *мажоранта* на (2), както и че редът (2) *минорира* реда (12) или че е *миноранта* на (12).

Задача 4. Да се изследват за сходимост изброените редове:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}$; в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^k}$ $(k \in \mathrm{N})$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$; д) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}$; е) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\nu}}$ $(k \in \mathrm{N})$.

Задача 5. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^6+5n+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{3n^2+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{5n+1}$.

Задача 6. Нека P и Q са полиноми съответно от степени p и q и нека Q не се анулира за никое естествено число n. Да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{P(\nu)}{Q(\nu)}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $q - p > 1$.

Задача 7. Нека $u_1, u_2, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots$ са две редици с положителни членове и от известно място нататък е в сила неравенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ако редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}v_n$ е сходящ, сходящ е и редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$.

§ 3. Критерий на Даламбер

Изследването на безкрайните редове за сходимост или разходимост до известна степен може да се алгоритмизира. За това помагат т. нар. *критерии за сходимост и разходимост* на безкрайните редове. Като се прави отстъпление от общоприетия смисъл на термина „критерий“, в настоящата глава той означава *достатъчно условие*.

Критерий на Даламбер. *Нека (2) е ред с положителни членове. Ако съществува число q с $0 < q < 1$, за което от известно място нататък е в сила неравенството*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q, \tag{15}$$

редът (2) е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството

$$1 \leqq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \tag{16}$$

редът (2) е разходящ.

Задача 8. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\frac{1!}{1^1}e + \frac{2!}{2^2}e^2 + \frac{3!}{3^3}e^3 + \frac{4!}{4^4}e^4 + \cdots$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.3} + \frac{1}{2^2.3^2} + \frac{1}{2^3.3^2} + \frac{1}{2^3.3^3} + \cdots$

Вместо самия критерий на Даламбер обикновено се използува следствието: *Ако членовете на реда (2) са положителни и границата* $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *съществува, редът (2) е сходящ при* $l < 1$ *и разходящ при* $l > 1$.

Задача 9. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)!}$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2\nu}{\nu}$; в) $\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \sin\frac{\pi}{3^\nu}$;

г) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\nu}$; д) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\nu}$; е) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2.5.8\ldots(3\nu+2)}{1.5.9\ldots(4\nu+1)}$;

ж) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^8}{2^\nu}$; з) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1,001^\nu}{\nu^{1001}}$; и) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+1)!!}{3^\nu.\nu!}$.

§4. Критерий на Коши

Критерий на Коши. *Нека (2) е ред с неотрицателни членове. Ако съществува число q с $0 < q < 1$, за което от известно място нататък е в сила неравенството*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqq q, \tag{17}$$

редът (2) е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството

$$\sqrt[n]{u_n} \geqq 1, \tag{18}$$

редът (2) е разходящ.

Задача 10. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu(\nu+1)} e^{-\nu}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu(\nu+1)} 3^{-\nu}$.

Вместо самия критерий на Коши обикновено се използува следствието: *Ако членовете на реда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *са неотрицателни и границата* $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ *съществува, редът* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *е сходящ при* $l < 1$ *и разходящ при* $l > 1$.

Задача 11. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{3\nu+1}\right)^\nu$; б) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\nu)^\nu}$; в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{\nu}\right)^\nu$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\nu \arcsin\frac{1}{\nu}\right)^\nu$; д) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sqrt[\nu]{\nu}-1\right)^\nu$; е) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sqrt[\nu]{\nu}-1\right)$.

От зад. 140, гл. IV следва, че винаги когато критерият на Даламбер или следствието от него дават възможност да се установи сходимостта на един ред с положителни членове, същото е вярно и за критерия на Коши или за следствието от него. Редът $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots$ ни учи, че понякога разходимостта на един ред с положителни членове може да се установи с критерия на Даламбер, без това да е възможно с критерия на Коши. Ще отбележим още, че от зад. 140, гл. IV следва също така, че ако следствието от критерия на Даламбер дава възможност да се установи разходимостта на един ред с положителни членове, същото е вярно и за следствието от критерия на Коши. Редът от следващата зад. 12 пък показва, че има случаи, когато критерият на Коши работи, а критерият на Даламбер — не. В този смисъл с леко преувеличение се казва понякога, че критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер.

Задача 12. Да се изследва за кои двойки от положителни числа p и q редът $p + pq + p^2q + p^2q^2 + p^3q^2 + p^3q^3 + \cdots$ е сходящ.

§ 5. Критерий на Раабе–Дюамел

Следващият критерий е *по-силен* от критерия на Даламбер и може да се схваща като негово *уточняване*.

Критерий на Раабе–Дюамел. *Нека* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *е ред с положителни членове и нека за всяко естествено число n числото α_n е определено от равенството*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}. \tag{19}$$

Ако съществува число $\alpha > 1$, за което от известно място нататък е в сила неравенството

$$n\alpha_n \geqq \alpha, \tag{20}$$

редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството

(21) $$n\alpha_n \leqq 1,$$

този ред е разходящ.

Задача 13. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Вместо самия критерий на Раабе–Дюамел обикновено се използува следствието: *Ако членовете на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ са положителни и границата $\alpha = \lim_{n\to\infty} n\alpha_n$ съществува, редът е сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha < 1$.*

Задача 14. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-1)!!}{\nu!\, 2^\nu}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-1)!!\, 2^\nu}{3.7.11\ldots(4\nu-1)}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{((2\nu-1)!!)^2}{\nu!.3.7.11\ldots(4\nu-1)}$; г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu$;

д) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{\nu}\right)}$;

е) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu \frac{\nu!}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{\nu}\right)}$.

Задача 15. Да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $\alpha > 1$.

Задача 16*. Нека членовете на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ са положителни и нека за произволно естествено n числото α_n е определено от равенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$. Нека освен това $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \alpha$. Да се докаже, че:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = -\alpha$;

б) ако β и γ са произволни числа, за които $\beta < \alpha < \gamma$, от някое място нататък са в сила неравенствата $\frac{1}{n^\gamma} < u_n < \frac{1}{n^\beta}$;

в) ако $\alpha > 0$, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ и от някое място нататък редицата $u_1, u_2, \ldots$ е намаляваща.

Задача 17*. Нека членовете на редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ са положителни, а числата α_n и β_n са определени съответно от равенствата $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$ и $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1+\beta_n}$. Нека освен това $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \alpha$ и $\lim_{n\to\infty} n\beta_n = \beta$. За произволни реални числа ξ и η да разгледаме реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\xi v_\nu^\eta$ и да определим числото γ_n от равенството $\frac{u_{n+1}^\xi v_{n+1}^\eta}{u_n^\xi v_n^\eta} = \frac{1}{1+\gamma_n}$. Тогава е в сила равенството $\lim_{n\to\infty} n\gamma_n = \xi\alpha + \eta\beta$.

Задача 18. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\nu^3+1}}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{\nu}}{\sqrt{\nu}}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^5+2}}$; г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu^3}\operatorname{ctg}\frac{1}{\nu}}$.

Задача 19. Нека P и Q са полиноми съответно от степени p и q и нека Q не се анулира за никое естествено n. Ако α и β са положителни числа, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}$ е сходящ точно когато $\beta q - \alpha p > 1$.

Задача 20. Да се намерят всички реални числа α, за които следните редове са сходящи:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\nu\sin\frac{1}{\nu}\right)^\alpha$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\nu}\right)^\alpha$; в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sqrt[\nu]{e}-1\right)^\alpha$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right)^\alpha$; д) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right)^\alpha$.

Задача 21. Да се намерят всички двойки от числа α и β, за които следните редове са сходящи:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha^{\sqrt{\nu}}}{\nu^{\beta}}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu^{\alpha}} \nu^{\beta}}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha^{\ln \nu}}{\nu^{\beta}}$; г) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\nu^{\nu^{-\alpha}} - 1\right)^{\beta}$.

§ 6. Редове с намаляваща редица на членовете

Нека редицата $u_1, u_2 \dots$ *е намаляваща. Тогава редовете* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ *и* $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} u_{2^{\nu}}$ *са едновременно сходящи или разходящи* (теорема на Коши).

Задача 22. Да се изследват за сходимост с теоремата на Коши редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}}$; б) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}(\ln \nu)^{\beta}}$; в) $\sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}(\ln \nu)^{\beta}(\ln \ln \nu)^{\gamma}}$; ...

Задача 23*. Нека редицата $u_1, u_2, \dots$ е намаляваща, а $p_1, p_2, \dots$ — стриктно растяща редица от естествени числа, за която съществува такава константа M, че за всяко естествено n е в сила $p_{n+2} - p_{n+1} \leqq M(p_{n+1} - p_n)$. Тогава редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} (p_{\nu+1} - p_{\nu}) u_{p_{\nu}}$ са едновременно сходящи или разходящи.

Задача 24*. а) Ако редицата $u_1, u_2, \dots$ е намаляваща, необходимо условие за сходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ е $\lim_{n\to\infty} n u_n = 0$.

б) Да се посочи пример, от който да личи, че необходимото условие от а) не е достатъчно.

в) Да се посочи пример на сходящ ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ с положителни членове, за който редицата $\{n u_n\}_{n=1}^{\infty}$ не клони към нула.

§ 7. Критерии на Кумер, Бертран и Гаус

Наред с използваните дотук критерии за сходимост на редове с положителни членове съществуват и много други. Някои от тях са разгледани по-нататък.

Задача 25* (*критерий на Кумер*). а) Нека $c_1, c_2, \dots$ и $u_1, u_2, \dots$ са редици с положителни членове. Да се докаже, че ако съществува положително число δ, за което е в сила неравенството $c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \geqq \delta$ за всички достатъчно големи n, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ е сходящ, а ако от някое място нататък е в сила неравенството $c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \leqq 0$, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ е разходящ, стига да е разходящ редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{c_{\nu}}$.

б) Да се формулира и докаже следствие от критерия на Кумер, аналогично на следствията от разгледаните дотук критерии (вж. текста преди зад. 9, 11 и 14).

в) Да се докаже критерият на Раабе–Дюамел с помощта на а).

Задача 26. Ако членовете на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ са положителни и този ред е разходящ, а A_n означава n-тата му парциална сума, да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{A_{\nu}}$ е разходящ, а редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{A_{\nu}^{\alpha}}$ са сходящи при $\alpha > 1$.

Задача 27* (*критерий на Бертран*). а) Нека членовете на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}$ са положителни и за произволно естествено n числото α_n е определено от равенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$. Ако съществува число $\beta > 1$, за което от известно място нататък е в сила неравенството $(n\alpha_n - 1)\ln n \geqq \beta$, редът е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството $(n\alpha_n - 1)\ln n \leqq 1$, редът е разходящ.

б) Ако при означенията на а) границата $\lim_{n\to\infty} (n\alpha_n - 1)\ln n = b$

съществува, разглежданият там ред е сходящ при $b > 1$ и разходящ при $b < 1$.

в) Да се докаже критерият на Раабе–Дюамел с помощта на а).

Задача 28* (*критерий на Гаус*). **а)** Нека $f\colon[0, 1] \to \mathbf{R}$ е два пъти диференцируема положителна функция с ограничена втора производна. Тогава редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)\dots f\left(\frac{1}{\nu}\right)}$ е сходящ само при $f(0) > 1$ или при $f(0) = 1$ и $f'(0) > 1$.

б) Нека членовете на реда $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ са положителни и

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k},$$

където a_ν и b_ν $(\nu = 1, 2, \dots, k)$ са константи и $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Да се докаже, че редът е сходящ само при $a_0 < b_0$ или при $a_0 = b_0$ и $a_0 + a_1 < b_1$.

Задача 29. Да се изследва за сходимост редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{((2\nu-1)!!)^2}{4^\nu(\nu!)^2}$.

§ 8. Някои приложения на неравенството на Хьолдер

Задача 30. Да се докаже, че:

а) ако редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с неотрицателни членове е сходящ, сходящ е и редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{u_\nu u_{\nu+1}}$, но обратното не винаги е вярно;

б) ако редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с неотрицателни членове е сходящ, сходящи са и редовете $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_\nu}}{\nu}$ и $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu^\alpha}{\nu^\beta}$ $\quad (0 < \alpha < 1,\ \beta > 1 - \alpha)$;

в) ако редовете с положителни членове $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ са сходящи, а α и β са положителни числа, за които $\alpha + \beta \geqq 1$, сходящ е и редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\alpha v_\nu^\beta$;

г) ако редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с положителни членове има свойството: съществуват такива положителни константи α и β с $\alpha + \beta = 1$, че за всеки сходящ ред с положителни членове $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\alpha v_\nu^\beta$ е сходящ, то и редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ.

§ 9. Две представяния на положителните числа с редове

Задача 31. За всяко положително число x съществува единствена редица $a_1, a_2, \dots$ от неотрицателни числа, за която е в сила равенството $x = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}$ при $a_n \leqq n - 1$ $\quad (n - 1 \in \mathrm{N})$, като само в краен брой от тези неравенства може да има знак за равенство. Горният ред се редуцира на крайна сума точно когато x е рационално.

Задача 32. За всяко x от интервала $(0, 1]$ съществува единствена редица $k_1, k_2, \dots$ от естествени числа, за която е в сила равенството

$$x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \dots + \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n} + \cdots$$

при $1 < k_1 \leqq k_2 \leqq k_3 \leqq \dots$ Числото x е рационално точно тогава, когато от някое място нататък всичките k_ν са равни помежду си.

§ 10. Критерии на Лайбниц, Дирихле и Абел

Ако членовете на редицата $u_1, u_2, \ldots$ са положителни, всеки от редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}u_\nu$ се нарича *алтернативен* или *знакопроменлив*. За такива редове често се използува следният критерий за сходимост:

Критерий на Лайбниц. *Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е монотонна и клони към нула, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}u_\nu$ е сходящ.*

Ако за един безкраен ред са налице условията на критерия на Лайбниц, той понякога се нарича *ред от лайбницов тип*.

Задача 33. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu+1}$; б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\sin\frac{1}{\sqrt{\nu}}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\nu}}{2\nu-1}$; г) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{-1}{\nu}\left(1-\sqrt[\nu]{\nu}\right)$.

Задача 34. Ако P е полином от степен p, който приема положителни стойности за естествени стойности на аргумента си, да се докаже, че:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P(n+1)}{P(n)}\right)^n = e^p$;

б) редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\sqrt[n]{P(\nu)}-1\right)$ е сходящ.

Задача 35. Нека P и Q са полиноми от степени съответно p и q, като Q не се анулира за никое естествено n. Ако α и β са положителни числа, редът $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}$ е сходящ точно когато $\alpha p < \beta q$.

Задача 36*. Да се докаже, че:

а) за всеки две безкрайни редици $u_1, u_2, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots$ и за всеки две цели числа n и p с $n \geqq 0$ и $p \geqq 1$ е в сила

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} u_\nu v_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} S_\nu(v_\nu - v_{\nu+1}) - S_n v_{n+1} + S_{n+p}v_{n+p+1},$$

където $\mathcal{S}_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \quad (n+1 \in \mathrm{N})$ (*преобразуване на Абел*);

б) ако редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}S_\nu(v_\nu - v_{\nu+1})$ е сходящ и границата $\lim_{p\to\infty} S_p v_{p+1}$ съществува, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu v_\nu$ е също сходящ.

Задача 37*. Да се докаже:

а) *критерият на Дирихле*: ако редицата $u_1, u_2 \ldots$ е монотонна и клони към нула, а парциалните суми на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ са ограничени, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu u_\nu$ е сходящ;

б) критерият на Лайбниц с помощта на критерия на Дирихле.

Задача 38. Да се намерят всички x, за които са сходящи редовете:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\sqrt{\nu}}$; б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\ln(1+\nu)}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^\nu.(2\nu-1)!!}{3.7.11...(4\nu-1)}\sin\nu x$; г) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu\cos\nu x$.

Задача 39. Да се докаже, че ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е монотонна и клони към нула, то редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\sin\nu x$ е сходящ за всяко x, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\cos\nu x$ — за всяко x, различно от $2k\pi \quad (k \in \mathrm{I})$.

Задача 40* (*критерий на Абел*). Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е монотонна и ограничена, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ е сходящ, то редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu u_\nu$ е също сходящ.

§ 11. Абсолютно и условно сходящи редове

Редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ се нарича *абсолютно сходящ*, когато е сходящ редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_\nu|$ от абсолютните стойности на членовете му.

Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Задача 41. Да се докаже, че посочените редове са сходящи, но не са абсолютно сходящи:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\sqrt{3\nu+1}}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \operatorname{tg} \frac{1}{\nu}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{\nu+\frac{1}{2}}}$; г)* $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{\nu}]} \frac{1}{\nu}$.

Задача 42. Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ клони към нула, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} (u_{2\nu-1} + u_{2\nu})$ е сходящ, да се докаже, че и редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ.

Задача 43. Да се изследват за сходимост и абсолютна сходимост редовете:

а) $\frac{3}{1^2} - \frac{1}{1^2} + \frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{7}{3^2} - \frac{5}{3^2} + \cdots$;

б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$;

г) $\frac{1}{2^\alpha - 1} - \frac{1}{3^\alpha + 1} + \frac{1}{4^\alpha - 1} - \frac{1}{5^\alpha + 1} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

Задача 44. Да се изследват за сходимост и абсолютна сходимост редовете:

а) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

б) $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

Тъй като всеки абсолютно сходящ ред е сходящ, за да се докаже сходимостта на даден ред, е достатъчно да се установи чрез някой от критериите за сходимост на редове с неотрицателни членове, че редът от модулите на

членовете му е сходящ. За тази цел могат да се използуват например разгледаните вече критерии на Даламбер, Коши, Раабе–Дюамел, Кумер, Бертран и Гаус. Ако обаче с помощта на някой от тези критерии се установи, че редът от модулите на членовете на дадения ред е разходящ, в общия случай за дадения ред не може да се заключи дали е сходящ или разходящ. Изключение в това отношение правят критериите на Даламбер и Коши: когато с тяхна помощ е установена разходимостта на един ред, това означава, че общият му член не клони към нула. Ето защо, ако разходимостта на реда от модулите на членовете на даден ред е установена с някой от тези критерии, даденият ред е също разходящ.

Критериите на Лайбниц, Дирихле и Абел, както и следващите критерии на Дюбоа Раймонд и Дедекинд, които са техни обобщения, са приспособени, напротив, за установяване на сходимостта на редове, в които безбройно много от членовете са положителни и безбройно много са отрицателни. Ето защо те най-често се прилагат, когато за изследвания ред е установено, че не е абсолютно сходящ. Да отбележим изрично, че ако с помощта на критерия на Раабе–Дюамел е установена разходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с положителни членове, като при това съответната редица $\{n\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ има положителна граница, редицата $u_1, u_2, \ldots$ клони монотонно към нула (зад. 16 в)). Ето защо в този случай е налице благоприятна обстановка за прилагане на критериите на Лайбниц, Дирихле и Абел.

Задача 45*. Да се докаже:

а) *критерият на Дедекинд*: за сходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u_\nu$ е достатъчно парциалните суми на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ да са ограничени, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - u_{\nu+1})$ да е абсолютно сходящ и да е в сила $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

б) критерият на Дирихле с помощта на критерия на Дедекинд.

Задача 46*. Да се докаже:

а) *критерият на Дюбоа Раймонд*: за сходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u_\nu$ е достатъчно редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ да е сходящ, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - u_{\nu+1})$ — абсолютно сходящ;

б) критерият на Абел с помощта на критерия на Дюбоа Раймонд.

Задача 47. Да се намерят всички реални α, за които посочените редове са сходящи, както и всички реални α, за които те са абсолютно сходящи:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\nu}$; б) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\alpha}{\nu}$; в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)^{\alpha}$;

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\cos\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu^3}$; д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu\alpha$;

е) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^{\nu}}{1+\alpha^{2\nu}}$; ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha^{\nu}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{\nu}}$.

§ 12. Умножение на редове

Ако $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}$ и $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}v_{\nu}$ са произволни редове, редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_0b_{\nu}+a_1b_{\nu-1}+\cdots+a_{\nu}b_0\right) \tag{22}$$

се нарича *произведение* (*в смисъл на Коши*) на дадените редове.

Теорема на Коши за умножение на редове. *Ако редовете* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}$ *и* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}v_{\nu}$ *са абсолютно сходящи, редът* (22) *е също абсолютно сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на дадените редове.*

Теорема на Мертенс. *Ако редът* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}$ *е абсолютно сходящ, а редът* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}v_{\nu}$ *— сходящ, редът* (22) *е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на двата дадени реда.*

Задача 48. Да се докаже, че $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}=1$.

Задача 49. Да се докаже, че $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}q^{\nu}\right)^2=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)q^{\nu}$ при $|q|<1$.

Задача 50*. Да се докаже:

а) чрез построяване на пример, че съществуват сходящи редове, чието произведение е разходящ ред;

б) че произведението на два реда от лайбницов тип е сходящо точно когато общият му член клони към нула;

в) че произведението на сходящите редове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{\beta}}$ $(\beta>0)$ е сходящ ред при $\alpha+\beta>1$ и разходящ ред при $\alpha+\beta\leqq 1$.

Задача 51. Да се докаже, че произведението на разходящите редове $1-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}$ и $1+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1}\left(2^{\nu}+\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)$ е абсолютно сходящ ред.

§ 13. Вариации на тема хармоничен ред

Задача 52. Да се докажат равенствата:

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$;

б) $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\cdots=\ln 3$;

в) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}+\cdots=\ln 4$.

Задача 53. Да се докажат равенствата:

а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{9}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$
$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$;

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$
$=\frac{3}{2}\ln 2$;

в) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$
$=\frac{2}{3}\ln 2$;

г) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\dots = \frac{1}{2}\ln 6$;

д) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\dots = \ln 2$.

Задача 54. Да се докаже, че ако в реда от зад. 52 а) членовете се разместят по следното правило: най-напред се написват първите p положителни члена, след това — първите q отрицателни, после — следващите p положителни, след това — следващите q отрицателни и т. н., новополученият ред е сходящ и сумата му е равна на $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Задача 55. Да се докаже, че хармоничният ред остава разходящ, ако знаците на членовете му се променят по такъв начин, че винаги след p положителни члена да следват q отрицателни при $p \neq q$, а при $p = q$ редът става сходящ.

§ 14. Едновременна сходимост на редове

Задача 56. Да се докаже:

а) ако $u_1, u_2, \dots$ и $v_1, v_2, \dots$ са редици с положителни членове и границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} \neq 0$ съществува, редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) чрез построяване на пример, че съществуват редове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ с различни от нула членове, първият от които е сходящ, а вторият — разходящ и за които $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$.

Задача 57. Да се докаже:

а) ако членовете на редицата $u_1, u_2, \dots$ са положителни, редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{1+u_\nu}$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) чрез построяване на пример, че съществува разходящ ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с положителни членове, за който редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{1+\nu u_\nu}$ е сходящ (разходящ);

в) за всеки ред с положителни членове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и за всяко $\alpha > 1$ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{1+\nu^\alpha u_\nu}$ е сходящ.

Задача 58. Да се докаже, че:

а) ако членовете на редиците $u_1, u_2, \dots$ и $v_1, v_2, \dots$ са различни от нула, а редицата $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна и притежава различна от нула граница, редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sqrt[\nu]{\nu} u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \sin\frac{1}{\nu} u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} u_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи.

Задача 59. Да се докаже:

а) че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е абсолютно сходящ точно когато е абсолютно сходящ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sin u_\nu$ $\left(|u_\nu| \leqq \frac{\pi}{2},\ \nu \in \mathrm{N}\right)$;

б) чрез построяване на пример, че съществува сходящ ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$, за който редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sin u_\nu$ е разходящ.

Задача 60. Да се докаже, че:

а) ако членовете на редиците $u_1, u_2, \dots$ и $v_1, v_2, \dots$ са различни от нула, редицата $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ притежава различна от нула граница и редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{u_\nu}{v_\nu}-\frac{u_{\nu+1}}{v_{\nu+1}}\right)$ е абсолютно сходящ, то редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}v_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+(-1)^\nu}{\nu^2+1}u_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи, но твърдението не е непременно вярно за редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+(-1)^\nu}{\nu+1}u_\nu$.

§ 15. Безкрайни произведения

Символ от вида

(23) $$p_1p_2\cdots p_n\cdots,$$

или кратко

(24) $$\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu,$$

където числата p_ν от някой номер нататък са различни от нула, се нарича *безкрайно произведение*. Произведението

(25) $$\pi_n = p_1p_2\cdots p_n$$

на първите n члена $p_1, p_2, \ldots, p_n$ на безкрайното произведение (23) се нарича *n-то парциално (частично) произведение* на (23).

Безкрайното произведение (23) се нарича *сходящо (конвергентно)*, когато редицата (25) от парциалните му произведения е сходяща и границата ѝ е различна от нула. В този случай числото $p=\lim_{n\to\infty}\pi_n$ се нарича *стойност* на безкрайното произведение (23) и се пише

(26) $$p = p_1p_2\cdots p_n\cdots,$$

или

(27) $$p = \prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu.$$

Понякога е целесъобразно дефиницията на сходящо безкрайно произведение малко да се обобщи. А именно безкрайното произведение (24) се нарича *сходящо* (конвергентно), когато след изпускане на членовете му, които са равни на нула, редицата от парциалните произведения на новополученото безкрайно произведение е сходяща и границата ѝ е различна от нула. И в този по-общ случай под *стойност* на безкрайното произведение (24) се разбира границата на редицата от парциалните произведения (25).

Безкрайното произведение (24) се нарича *разходящо (дивергентно)*, когато не е сходящо. Това означава, че след изпускане на нулевите му членове редицата от парциалните произведения на (24) или е разходяща, или е сходяща с граница нула. В последния случай се казва, че безкрайното произведение (24) дивергира към нула, и се пише $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu=0$. Ако редицата (25) дивергира към ∞ или $-\infty$, се пише съответно $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu=\infty$ или $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu=-\infty$.

Задача 61*. Да се изследват за сходимост посочените безкрайни произведения и да се намерят стойностите на онези от тях, които са сходящи:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$; б) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$; в) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)$;

г) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\nu(\nu+1)}\right)$; д) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right)$; е) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\frac{\nu^3-1}{\nu^3+1}$;

ж) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^\nu}}\right)$; з) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+\frac{2\nu+1}{(\nu^2-1)(\nu+1)^2}\right)$;

и) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\nu\text{ корена}}}$; й) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt[\nu]{e}}{1+\frac{1}{\nu}}$.

Задача 62. Да се намерят всички реални числа α, за които посочените безкрайни произведения са сходящи, и да се определят съответните стойности:

а) $\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+\alpha^{2^\nu}\right)$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^\nu}$.

Безкрайните произведения притежават свойства, аналогични на свойствата на безкрайните редове.

Задача 63.** Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu$ е сходящо тогава и само тогава, когато за всяко положително число ε съществува такова число N, че неравенството $\left|\prod_{\nu=n+1}^{n+m}p_\nu-1\right|<\varepsilon$ да е изпълнено за всяко естествено число m винаги когато $n>N$ (*общо условие на Коши за сходимост на безкрайно произведение*).

12

Задача 64. Ако безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ е сходящо, то $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Задача 65. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ с положителни членове p_ν е сходящо точно когато безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} \ln p_\nu$ е сходящ.

Задача 66. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)$, в което α_ν от някое място нататък имат еднакви знаци, е сходящо точно когато безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ е сходящ.

Задача 67. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ е сходящо, когато безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ е абсолютно сходящ.

Задача 68. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ е сходящо, когато редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2$ са сходящи.

Задача 69. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$, където $-1 < a_\nu < 0$ $(\nu \in \mathrm{N})$, дивергира към нула, когато редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ е разходящ.

Задача 70. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ дивергира към нула, когато редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ е сходящ, но редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2$ е разходящ.

Задача 71. Да се изследват за сходимост безкрайните произведения:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+\nu+1}{(\nu+1)^2}$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^3+\nu^2+\nu+1}{\nu^3+\nu^2+2\nu+2}$; в) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{\nu^3-3\nu}{\nu^3+3\nu}}$.

Задача 72. Ако P и Q са полиноми съответно от степени p и q и Q не се анулира за никое естествено n, да се докаже, че безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{P(\nu)}{Q(\nu)}\right)$ е сходящо точно когато $q-p>1$.

Задача 73. Ако P и Q са полиноми съответно от степени p и q, като Q не се анулира за никое естествено n, а α и β са положителни числа, да се докаже, че безкрайните произведения $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}\right)$ и $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}\right)$ са сходящи точно когато $\beta q-\alpha p>1$.

Задача 74. Да се докаже, че при $0 \leqq a < b$ е в сила

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)}=0.$$

Задача 75. Да се намерят всички реални числа α, за които са сходящи безкрайните произведения:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu^\alpha}\right)$; б) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^\alpha}\right)$;

в) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right)$; г) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right)$.

Задача 76. Да се намерят всички реални числа α, за които са сходящи безкрайните произведения:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha^\nu)$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^\nu}{\nu!}\right)$.

Задача 77. Да се намерят всички реални числа α, за които безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^\alpha}\right)$ е сходящо.

Задача 78. Ако членовете на редицата $x_1, x_2, \dots$ принадлежат на интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, да се докаже, че безкрайните произведения $\prod_{\nu=1}^{\infty} \cos x_\nu$ и $\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin x_\nu}{x_\nu}$ са сходящи точно когато редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^2$ е сходящ.

Задача 79. Да се намерят всички реални числа α, β и γ, за които безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(1+\nu)(\gamma+\nu)}$ е сходящо.

Задача 80*. Да се намерят всички реални числа α, β и γ, за които са сходящи безкрайните редове:

а) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{\nu!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)};$$

б) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{\nu!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}.$$

Задача 81*. Да се докаже, че ако безкрайният ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\dots(\alpha^2-\nu^2)$$

е сходящ за някое нецяло α, той е сходящ за всички α. (С т и р л и н г).

Задача 82*. Да се докаже, че:

а) ако $p_1, p_2, \dots$ е редицата на простите числа, безкрайните произведения $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)$ и $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)$ са сходящи само при $\alpha > 1$ и в този случай е в сила равенството

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha} \quad \text{(О й л е р);}$$

б) при условието на а) безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu}$ е разходящ (О й л е р).

§ 16. Редици и редове от функции

Нека е дадена редицата

(28) $$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

от функции с обща дефиниционна област X. За произволен елемент x на X може да се образува редицата от числа

(29) $$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

— стойности на функциите (28) в точката x. Ако редицата (29) е сходяща, редицата (28) се нарича *сходяща в точката x*.

Множеството D на всички x от X, за които редицата (29) е сходяща, се нарича *област на сходимост на редицата* (28). Ако за произволно x от D положим

(30) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

се получава функция $f: D \to \mathbb{R}$. Тя се нарича *гранична функция* или *граница на редицата* (28).

Ако е даден безкрайният ред

(31) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$$

от функции (28), *област на сходимост* D на (31) се нарича множеството на всичките x от X, за които числовият ред

(32) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

е сходящ. Ако на всяко x от D се съпостави сумата $s(x)$ на реда (32), получава се функция $s: D \to \mathbb{R}$. Тя се нарича *сума на реда* (31).

Аналогично, ако е дадено безкрайното произведение

(33) $$\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$$

от функции (28), *област на сходимост* D на (33) се нарича множеството на всичките x от X, за които числовото произведение

(34) $$\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

е сходящо. Ако на всяко x от D се съпостави стойността $p(x)$ на безкрайното произведение (34), се получава функция $p: D \to \mathbb{R}$, която се нарича *произведение на функциите* (28).

Задача 83. Да се намерят областите на сходимост на посочените редици от функции и да се пресметнат границите им:

а) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$; б) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$; в) $f_n(x) = (2\sin x)^n$.

Задача 84. Да се намерят областите на сходимост на редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^2}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{1+x^{2\nu}}$; в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu x}{1+\nu^2 x^2}$.

Задача 85. Да се намерят областите на сходимост на безкрайните произведения:

а) $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right)$; б) $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+(-1)^{\nu} \sin\frac{x}{\nu}\right)$.

§ 17. Степенни редове

Редовете от вида

(35) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

или по-общо

(36) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-\xi)^\nu,$$

където ξ и a_ν $(\nu+1 \in \mathbb{N})$ са константи, се наричат *степенни редове*. Областта на сходимост на степенния ред (35) е интервал с център в нулата, който може да съвпада с цялата числова права, да бъде ограничен или да се изражда в единствената точка 0; нарича се *интервал на сходимост* на реда (35). Половината от дължината на интервала на сходимост се нарича *радиус на сходимост* на реда; радиусът на сходимост е нула, когато интервалът на сходимост се изражда в точката 0, и е ∞, когато интервалът на сходимост е $\mathbb{R}$. Ако радиусът на сходимост на степенния ред (35) е r, редът е абсолютно сходящ при $|x|<r$ и е разходящ при $|x|>r$; при $x=-r$ или $x=r$ редът може да бъде сходящ, а може да бъде и разходящ. Аналогични дефиниции и твърдения важат и за реда (36), като ролята на числото 0 играе числото ξ.

Задача 86. Да се намерят радиусите на сходимост на следните степенни редове и да се изследва поведението на редовете в краищата на интервалите на сходимост:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu}}{\nu}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}$; г) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$;

д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$; е) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$;

ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$; з) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$; и) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^{\nu}$.

Задача 87. Да се намерят радиусите на сходимост на посочените степенни редове и да се изследва поведението на редовете в краищата на интервалите на сходимост:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu^{\alpha}}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!}x^{\nu}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu^2} x^{\nu}$; г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2^{\nu}(\nu!)^2}{(2\nu+1)!}\right)^{\alpha} x^{\nu}$;

д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} x^{\nu}$; е) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}} x^{\nu^2}$;

ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{\nu}]}}{\nu} x^{\nu}$; з) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin \nu}\right)^{\nu}$;

и) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{\nu!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)} x^{\nu}$ (*хипергеометричен ред*).

Задача 88* (Коши – Адамар). Да се докаже, че радиусът на сходимост r на степенния ред $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, като под $\frac{1}{0}$ се разбира ∞ и под $\frac{1}{\infty}$ се разбира 0.

Задача 89°. Да се докаже, че степенните редове $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^3 a_\nu x^\nu$ и $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{P(\nu)}{Q(\nu)} a_\nu x^\nu$, където P и Q са ненулеви полиноми и $Q(\nu) \neq 0$ $(\nu+1 \in \mathbb{N})$, имат един и същ радиус на сходимост.

Задача 90°. Да се докаже, че произведението на редовете $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}x^\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu!}x^\nu$ е редът $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a+b)_\nu}{\nu!}x^\nu$, където е положено $(a+b)_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} a_\mu b_{\nu-\mu}$.

Ако $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ е полином на променливите $x_0, x_1, \dots, x_n$, с $\frac{\partial P}{\partial x_\nu}$ се означава производната на P спрямо променливата x_ν, като при това се предполага, че останалите променливи имат фиксирани стойности.

Задача 91*. Да се докаже, че при $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}x^\nu\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!}x^\nu$ коефициентът A_ν е полином на коефициентите $a_0, a_1, \dots, a_\nu$ $(\nu+1 \in \mathrm{N})$ и са в сила равенствата $A_0 = a_0^n$, $A_{\nu+1} = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\mu+1} \frac{\partial A_\nu}{\partial a_\mu}$ (*правило на Арбогаст*).

§ 18. Равномерна сходимост

Нека редицата

(37) $$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

от функции е сходяща в общата дефиниционна област X на тези функции и f е границата ѝ. Казва се, че редицата (37) *клони към f равномерно в X*, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова N, че е в сила неравенството $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ за всяко $n > N$ и за всяко x от X; в този случай се казва още, че редицата (37) е *равномерно сходяща в X*.

Задача 92°. Нека редицата от функции $f_1, f_2, \dots$ с обща дефиниционна област X клони към функцията f в X и нека ε е произволно положително число. За всяко x от X нека $N_\varepsilon(x)$ е най-малкото от естествените числа ν, за които е в сила неравенството $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ винаги когато $n > \nu$. Да се докаже, че редицата $f_1, f_2, \dots$ е равномерно сходяща в X точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ функцията $N_\varepsilon(x)$ на x е ограничена.

Задача 93*. Да се докаже, че редицата $f_1, f_2, \dots$ от функции с обща дефиниционна област X е равномерно сходяща в X точно когато за всяко положително число ε съществува такова число N, че неравенството $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ да е в сила за всяко $n > N$, за всяко естествено число p и за всяко x от X (*общо условие на Коши за равномерна сходимост на редици от функции*).

Задача 94. Да се изследва дали са равномерно сходящи в посочените множества редиците от функции с общи членове:

а) $f_n(x) = x^n$ в $[-1, 1]$; б) $f_n(x) = x^n$ в $[0, \theta]$ $(0 < \theta < 1)$;

в) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ в R; г) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ в $[0, \xi]$ $(\xi > 0)$;

д) $f_n(x) = x^n(1-x)$ в $[0, 1]$;

е) $f_n(x) = (n+1)x^n(1-x)$ в $[\theta, 1]$ $(0 < \theta < 1)$.

Ако редът

(38) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$$

е сходящ в общата дефиниционна област X на функциите (37), той се нарича *равномерно сходящ в X*, когато редицата от парциалните му суми е равномерно сходяща в X.

Задача 95*. Редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ от функции с обща дефиниционна област X е равномерно сходящ в X точно когато за всяко положително число ε съществува такова число N, че неравенството $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f_\nu(x)\right| < \varepsilon$ да е в сила за всяко $n > N$, за всяко естествено число p и за всяко x от X (*общо условие на Коши за равномерна сходимост на редове от функции*).

Задача 96* (Вайерщрас). Да се докаже, че достатъчно условие, за да бъде равномерно сходящ в общата дефиниционна област X на функциите f_ν $(\nu \in N)$ редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$, е да съществува сходящ числов ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, чиито членове удовлетворяват неравенствата

$$|f_\nu(x)| \leqq \alpha_\nu \quad (\nu \in \mathrm{N},\ x \in X).$$

Задача 97. Да се изследва дали са равномерно сходящи в посочените множества редовете от функции:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^2}$ в R; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}$ в $(1, \infty)$;

в) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^x}$ в (ξ, ∞) $(1 < \xi,\ \alpha \in \mathrm{R})$;

г) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(\ln \nu)^x}$ в (ξ, ∞) $(1 < \xi)$.

Задача 98* (Д и н и). Нека функциите $f_\nu : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(\nu \in \mathbf{N})$ са непрекъснати в ограничения и затворен интервал $[a, b]$, удовлетворяват неравенствата $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ за всяко x от $[a, b]$ и за всяко $n \in \mathbf{N}$, границата $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ съществува за всяко x от $[a, b]$ и е непрекъсната в $[a, b]$. Да се докаже, че тогава редицата $f_1, f_2, \ldots$ е равномерно сходяща в $[a, b]$.

Една редица от функции $f_1, f_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X се нарича *равномерно ограничена* в X, когато съществува такава константа A, че неравенствата $|f_n(x)| < A$ да са в сила за всяко n от $\mathbf{N}$ и всяко x от X.

Задача 99* (Д и р и х л е). Нека редиците от функции $f_1, f_2, \ldots$ и $g_1, g_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X притежават следните свойства: първата редица е монотонна за всяко x от X и клони равномерно към нула, а парциалните суми на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ са равномерно ограничени. Да се докаже, че тогава редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$ е равномерно сходящ в X.

Задача 100* (А б е л). Нека редиците от функции $f_1, f_2, \ldots$ и $g_1, g_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X притежават следните свойства: първата редица е монотонна за всяко x от X и е равномерно ограничена в X, а редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ е равномерно сходящ в X. Да се докаже, че тогава редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$ е равномерно сходящ в X.

Задача 101. Да се изследва дали са равномерно сходящи в посочените множества следните редове от функции:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ в $[0, 2\pi]$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^\alpha}$ в $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\alpha > 0,\ 0 < \varepsilon < \pi)$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x+\nu}$ в $[0, \infty)$; г) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sin x + \nu}$ в $\mathbf{R}$.

Задача 102. Да се докаже, че ако числовият ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е равномерно сходящ в интервала $0 \leqq x \leqq 1$.

Задача 103. Ако числовият ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$ е равномерно сходящ за всички неотрицателни x.

§ 19. Непрекъснатост на граничната функция

Границата на всяка равномерно сходяща редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция. Сумата на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции е непрекъсната функция.

Задача 104. За произволни естествени числа k и n нека $f_{kn}(x) = \cos^{2n}(k!\,\pi x)$ за всяко реално x. Да се докаже, че:

а) границата $\lim\limits_{n\to\infty} f_{kn}(x) = F_k(x)$ съществува за всяко x;

б) функцията F_k е прекъсната в точката x точно когато x има вида $\frac{\nu}{k!}$ $(\nu \in \mathbf{I})$;

в) $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = D(x)$, където D е функцията на Дирихле.

Задача 105. Да се докаже, че:

а) сумата на всеки степенен ред е непрекъсната във всяка точка от интервала на сходимост на реда;

б) ако числовият ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, то $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$;

в) ако редовете $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} v_\nu$, както и произведението им $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0)$ в смисъла на Коши са сходящи, то $uv = w$, където u, v и w са съответно сумите на тези три реда.

Редовете от вида $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$, където a_ν $(\nu \in \mathbf{N})$ са константи, се наричат *редове на Дирихле*. Те играят важна роля в аналитичната теория на числата.

Задача 106. Да се докаже, че:

а) на всеки ред на Дирихле съответствува число ξ (или някой от символите ∞ или $-\infty$), така че редът е сходящ при $x > \xi$ и разходящ при $x < \xi$;

б) сумата на всеки ред на Дирихле е непрекъсната функция във всяка точка на интервала на сходимост на реда;

в) ако числовият ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, то $\lim_{x\to 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.

Задача 107*. Да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ е сходящ за всяко x и сумата му е прекъсната в точката x точно когато x е от вида $2\nu\pi$ $(\nu \in \mathbf{I})$.

Задача 108*. За произволно реално x нека $\{x\}$ означава модула на разликата между x и най-близкото до x цяло число. Да се докаже, че сумата на реда $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4^\nu}\{4^\nu x\}$ е дефинирана и непрекъсната за всяко x функция, която не е диференцируема в никое x (Вайерщрас – Ван дер Варден).

§ 20. Диференцируемост на граничната функция

Нека функциите $f_1, f_2, \ldots$ са дефинирани и диференцируеми в един и същ интервал Δ, редицата $f_1', f_2', \ldots$ е равномерно сходяща в Δ и редицата $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots$ е сходяща за някое ξ от Δ. Тогава редицата $f_1, f_2, \ldots$ е сходяща в Δ и

(39) $$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (x \in \Delta)$$

(*почленно диференциране на редица от функции*).

Аналогично, ако функциите $f_1, f_2, \ldots$ са дефинирани и диференцируеми в един и същ интервал Δ, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'$ е равномерно сходящ в Δ, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(\xi)$ е сходящ за някое ξ от Δ, то редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ е сходящ за всяко x от Δ и

(40) $$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'(x) \qquad (x \in \Delta)$$

(*почленно диференциране на редове от функции*).

Задача 109. Да се докаже, че функцията $\zeta(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}$ е безбройно много пъти диференцируема за всяко $x > 1$.

Задача 110. Да се докаже, че функцията $\theta(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 x}$ е безбройно много пъти диференцируема за всяко $x > 0$.

Задача 111. Да се докаже, че следните безкрайни произведения притежават производни за всяко x:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\sin^2\frac{x}{\nu}\right)$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\cos\frac{x}{\nu}$;

в) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{\nu+1}\frac{x}{\nu}\right)$; г) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{\nu}\sin\frac{x}{\nu}\right)$.

Задача 112. Да се построи пример на равномерно сходяща редица от диференцируеми функции с диференцируема граница, за която редицата от производните не е сходяща.

Задача 113. Да се докаже, че ако редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ е равномерно сходящ в множеството $X \subset \mathbf{R}$, ξ е точка на сгъстяване на X (не се изключва случаят $\xi = \infty$ или $\xi = -\infty$) и $\lim_{x\to\xi} f_\nu(x)$ съществува за всяко естествено ν, то $\lim_{x\to\xi}\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\lim_{x\to\xi} f_\nu(x)$.

Задача 114. а) Ако $r_1, r_2, \ldots$ е произволна редица от реални числа, да се докаже, че функцията $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|x-r_\nu|}{2^\nu}$, е непрекъсната навсякъде в $\mathbf{R}$ и е диференцируема в някоя точка ξ точно когато $\xi \neq r_n$ за всяко естествено n.

б) Да се построи пример на непрекъсната функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която $f'(\xi)$ съществува точно когато ξ е ирационално число.

Всеки степенен ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е диференцируем във вътрешността на своя интервал на сходимост и е в сила равенството

(41) $$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}.$$

Задача 115. Ако редът в дясната страна на (41) е сходящ в някой от краищата ξ на своя интервал на сходимост, функцията $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е диференцируема в ξ и е в сила равенството (41) (с $x = \xi$).

Задача 116. Да се докаже, че сумите на редовете:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(\nu!)^2}$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{4\nu}}{(4\nu)!}$; в) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2\, 4^\nu}$;

г) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{\nu!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)} x^\nu$,

удовлетворяват съответно диференциалните уравнения:

а') $xy'' + y' - y = 0$; б') $y^{IV} - y = 0$; в') $xy'' + y' + xy = 0$;

г') $x(x-1)y'' + ((\alpha+\beta+1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0$ (*хипергеометрично диференциално уравнение*).

§ 21. Редове на Тейлър

Ако функцията f притежава производни от произволен ред в околност на точката ξ, степенният ред

(42) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu$$

се нарича *ред на Тейлър* за функцията f около точката ξ. При $\xi = 0$ редът на Тейлър преминава в *реда*

(43) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

на Маклорен. Ако остатъчният член във формулата на Тейлър за функцията f клони към нула при неограничено нарастване на n, в сила е равенството

(44) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu,$$

което при $\xi = 0$ приема вида

(45) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu.$$

Задача 117. Да се развият в ред на Тейлър около произволна точка a функциите:

а) $\cos^2 x$; б) $\sin^3 x$; в) $\operatorname{sh} x$;

г) $e^x \cos x$; д) $e^{x\cos\alpha} \sin(x \sin\alpha)$.

Задача 118. Да се докаже, че редът на Маклорен за функцията $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и с $f(0) = 0$, е сходящ за всяко x, но сумата му съвпада с $f(x)$ само при $x = 0$.

Задача 119. Да се докаже, че степенният ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-\xi)^\nu$ съвпада с тейлъровото развитие на сумата си около точката ξ в своя интервал на сходимост.

Задача 120*. Нека функцията f е безбройно много пъти диференцируема и удовлетворява неравенствата $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$ при $a < x \leqq b$ и при всички цели неотрицателни стойности на n. Да се докаже, че тейлъровото развитие на f около точката b е сходящо за всяко x от $(a, b]$ и сумата му е равна на $f(x)$ (С. Н. Бернщейн).

Задача 121*. Нека функцията f е безбройно много пъти диференцируема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$ при всички положителни стойности на x и всички цели неотрицателни n. Да се докаже, че за всички неотрицателни x и всички реални λ е в сила неравенството $\lambda^2 f(x) + 2\lambda f'(x) + f''(x) \geqq 0$ (С. Н. Бернщейн).

Задача 122*. Нека функцията f е безбройно много пъти диференцируема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата $0 \leqq (-1)^n f^{(n)}(x) \leqq e^{-x}$ при всички положителни стойности на x и всички цели неотрицателни n. Да се докаже, че $f(x) = Ce^{-x}$, където C е константа (Я. Тагамлицки).

§ 22. Развития на някои елементарни функции в степенни редове

Основните елементарни функции имат следните степенни развития:

(46) $$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!},$$

(47) $$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

(48)
$$\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

(49)
$$\ln(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1},$$

(50)
$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^{\nu}.$$

Тъждествата (46)–(48) са в сила за всяко x, тъждеството (49) важи за всяко x от интервала $(-1, 1]$, а (50) — за всяко x при неотрицателно цяло α, за всяко x от интервала $(-1, 1)$ при $\alpha \leqq -1$, за всяко x от интервала $(-1, 1]$ при $-1 < \alpha < 0$ и за всяко x от интервала $[-1, 1]$ при $\alpha > 0$ $(\alpha \in \mathrm{N})$.

Задача 123. Да се намерят маклореновите развития на функциите:

а) $\operatorname{sh} x$; б) $\operatorname{ch} x$; в) e^{-x^2};

г) $\dfrac{e^x - 1}{x}$; д) $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$; е) $\sin^2 2x$;

ж) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; з) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; и) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$;

й) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; к) $\sqrt{1+x^2}$; л) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

м) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; н) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$; о) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

п) $\dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

Задача 124. Да се намерят маклореновите развитил на функциите:

а) $(1+x)\ln(1+x)$; б) $\operatorname{arc\,tg} x$;

в) $x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; г) $\arcsin x$;

д) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; е) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

ж) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

Задача 125. Да се намерят маклореновите развития на функциите:

а) $(1+x)e^{-x}$; б) $(1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$;

в) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; г) $(\ln(1-x))^2$;

д) $\ln(1+x)\ln(1-x)$; е) $(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$;

ж) $(\operatorname{arc\,tg} x)^2$; з) $(\arcsin x)^2$.

Задача 126. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{x \sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \sin\nu\alpha \quad (|x| < 1)$;

б) $\dfrac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \cos\nu\alpha \quad (|x| < 1)$;

в) $\dfrac{x \operatorname{sh}\alpha}{1 - 2x\operatorname{ch}\alpha + x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \operatorname{sh}\nu\alpha \quad (|x| < e^{-|\alpha|})$;

г) $\dfrac{1 - x\operatorname{ch}\alpha}{1 - 2x\operatorname{ch}\alpha + x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \operatorname{ch}\nu\alpha \quad (|x| < e^{-|\alpha|})$.

Задача 127. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu}\sin\nu\alpha}{\nu} \quad (|x| < 1)$;

б) $\ln\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu}\cos\nu\alpha}{\nu} \quad (|x| < 1)$.

Задача 128. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x\sin\alpha}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}\sin(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1} \quad (|x| < 1)$;

б) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1 + 2x\cos\alpha + x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}\cos(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1} \quad (|x| < 1)$.

Задача 129. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x\cos\alpha}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}x^{2\nu-1}\cos(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1}$;

б) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x\sin\alpha+x^2}{1-2x\sin\alpha+x^2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^{2\nu-1}\sin(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1},$

където $|x|<1$.

Задача 130. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi);$

б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu}=-\ln 2-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\quad(x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{I});$

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{x}{2}\quad(-\pi<x<\pi);$

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu x}{\nu}=\ln 2+\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\quad(x\neq(2k-1)\pi,\ k\in\mathbf{I}).$

Задача 131. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi);$

б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu^3}=\frac{\pi^2 x}{6}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi);$

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^2x^2}{12}+\frac{\pi x^3}{12}-\frac{x^4}{48}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi);$

. . . .

Задача 132. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu x}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}\quad(|x|<\pi);$

б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu x}{\nu^3}=\frac{\pi^2 x}{12}-\frac{x^3}{12}\quad(|x|\leqq\pi);$

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu x}{\nu^4}=\frac{7\pi^4}{720}-\frac{\pi^2x^2}{24}+\frac{x^4}{48}\quad(|x|\leqq\pi);$

. . . .

§ 23. Намиране на сумите на някои редове

Задача 133. Да се намерят сумите на редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+1}{\nu!}x^\nu;$ б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\nu^3}{(\nu+1)!}x^\nu;$

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2\nu^2+1)}{(2\nu)!}x^{2\nu};$ г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2}{(2\nu+1)!}x^\nu.$

Задача 134. Да се намерят сумите на редовете:

а) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-1};$ б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(2\nu+1)};$ в) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^2+\nu-2};$

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2};$ д) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2};$ е) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1};$

ж) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2};$ з) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-1}{\nu^2(\nu+1)^2};$ и) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2(\nu+1)^2};$

й) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2(\nu+1)^2};$ к) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{(\nu-1)!};$ л) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\nu}{(2\nu+1)!};$

м) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(\nu^2+1)}{(2\nu)!}.$

Задача 135*. Да се намери сумата на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\nu^2}$ (Д. Скордев).

Девета глава

Неопределен интеграл

§ 1. Таблица на основните интеграли

Нека е дадена функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$, чиято дефиниционна област Δ е интервал. Една функция $F : \Delta \to \mathbb{R}$ се нарича *неопределен интеграл* или *примитивна* на f, когато $F' = f$. Ако F е примитивна на f, се пише

(1) $$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Ако F е примитивна на f и C е произволна константа, функцията $F + C$ е също примитивна на f. От друга страна, ако F и Φ са две примитивни на f, съществува константа C, за която $\Phi - F = C$. Това позволява, когато познаваме един неопределен интеграл на функцията f, чрез прибавяне на произволни константи да получим всичките неопределени интеграли на f.

В зад. 19, гл. X се установява, че всяка функция, която е непрекъсната в един интервал, притежава примитивна в този интервал.

Намирането на неопределените интеграли на някои елементарни функции се свежда до следната таблица на основните интеграли:

(2) $$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1),$$

(3) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

(4) $$\int e^x\,dx = e^x,$$

(5) $$\int \sin x\,dx = -\cos x,$$

(6) $$\int \cos x\,dx = \sin x,$$

(7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x,$$

(8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$$

(9) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x,$$

(10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Тази таблица трябва да се научи наизуст.

Задача 1. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (0 < a \neq 1);$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| \quad (a \neq 0);$

в) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x;$ г) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x;$

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x;$ е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x;$

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,th} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (|x| < 1);$

з) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,cth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (|x| > 1.$

Към следващите две най-прости правила за интегриране се налага да се прибягва извънредно често:

(11) $$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \text{ — константа})$$

и

(12) $$\int \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx.$$

Задача 2. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\displaystyle\int (2x+1)\,dx;$ б)° $\displaystyle\int (3x^2+2x-1)\,dx;$

в)° $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2x}\right)dx;$ г)° $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)dx;$

д)° $\displaystyle\int \left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx;$ е)° $\displaystyle\int x^2(x^2+1)\,dx;$

ж)° $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}\,dx;$ з)° $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx;$

и)° $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{x}\,dx;$

й)° $\int \left(3e^x - \sqrt[3]{x^2}\right) dx;$

к)° $\int \left(-\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right) dx;$

л)° $\int \left(4\cos x - \frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}\right) dx;$

м)° $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) dx;$

н)° $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{1+x^2}\right) dx;$

о)° $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)};$

п)° $\int \frac{x^2 dx}{1-x^2};$

р)° $\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx;$

с)° $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx;$

т)° $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx;$

у)° $\int \frac{x^5-x+3}{x^2-1}\,dx;$

ф)° $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}\,dx;$

х)° $\int \frac{-3x^4+3x^2-1}{x^2-1}\,dx;$

ц) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx;$

ч) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx;$

ш) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx;$

щ) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$

ъ)° $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx;$

ь)° $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx;$

ю)* $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx;$

я)° $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

§ 2. Внасяне под диференциала

Понякога интегралът $\int f(x)g'(x)\,dx$ се означава и така: $\int f(x)\,dg(x)$. Тогава по дефиниция

(13) $$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Очевидно

(14) $$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,d\big(g(x)+a\big)$$

и

(15) $$a\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,dag(x),$$

където a е произволна константа.

Въведеното по-общо означение (13) се използува в следното правило за интегриране (което понякога се нарича *интегриране чрез внасяне под диференциала*): от

(16) $$\int \varphi(u)\,du = F(u)$$

следва

(17) $$\int \varphi(g(x))\,dg(x) = F(g(x)).$$

По този начин, ако се познава интегралът (16), налице е възможност да се пресметнат всичките интеграли (17).

Задача 3. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{dx}{x+a};$

б)° $\int (2x-3)^{10}\,dx;$

в)° $\int \sin 2x\,dx;$

г)° $\int \sin^2 x\,dx;$

д)° $\int \frac{dx}{1+4x^2};$

е)° $\int \frac{dx}{e^x};$

ж)° $\int \sin(7x+3)\,dx;$

з)° $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}};$

и)° $\int \frac{dx}{2-3x^2};$

й)° $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}};$

к)° $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$

л)° $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}};$

м)° $\int \frac{dx}{3+4x^2};$

н)° $\int \frac{dx}{\sin^2 ax}$ ($a \neq 0$ — константа);

о)° $\int e^{-2x+3}\,dx;$

п) $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx;$

р) $\int \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}\,dx;$

с)° $\int \frac{x^4+3x^2+4}{x^2+2}\,dx;$

т)° $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx;$

у) $\int \frac{dx}{1+\sin x};$

ф) $\int \frac{dx}{1-\sin x};$

х) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x};$

ц) $\int \frac{\sin x\,dx}{1-\sin x};$

ч)° $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+1\right)};$

ш)° $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x-3}{2}}$; щ)° $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

ъ) $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$; ь) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$;

ю) $\int \sin ax \sin bx\, dx$ (a, b — константи, $|a| \neq |b|$);

я) $\int \sin x \sin 2x \cos 3x\, dx$.

Задача 4. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$; б)° $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx$;

в)° $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (a — константа);

г)° $\int \sin^3 x \cos x\, dx$; д)° $\int e^{x^2} x\, dx$;

е)° $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$; ж)° $\int \frac{dx}{x \ln x}$;

з)° $\int \frac{x\, dx}{1+x^4}$; и)° $\int \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx$ ($a \neq 0$, a — константа);

й)° $\int \cos^3 x\, dx$; к)° $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$;

л)° $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; м)° $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$;

н)° $\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2}$; о)° $\int \frac{x\, dx}{a^4+x^4}$ ($a \neq 0$, a — константа);

п)° $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ($a \neq 0$, a — константа);

р)° $\int \frac{x\, dx}{3-2x^2}$; с)° $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}$;

т) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; у) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[3]{\sin x + \cos x}}\, dx$;

ф) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}$; х) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}$;

ц) $\int \cos^3 x \sin^3 x\, dx$; ч) $\int \frac{\sin x\, dx}{2-\sin^2 x}$;

ш) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; щ) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

ъ) $\int \frac{dx}{\cos x}$; ь) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

ю) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

я) $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ (a, b — константи, $a^2+b^2 \neq 0$).

Задача 5. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{e^x+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2e^x-3}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx$; е) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}\, dx$;

ж) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}\, dx$; з) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2-x^2})}$;

и)* $\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}}$ ($n \in \mathrm{N}$);

й)* $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$; к)* $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\, dx$;

л) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2}$; м) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}-2}$.

§ 3. Пресмятане на интеграли от вида $\displaystyle\int \frac{(Ax+Bx)\,dx}{ax^2+bx+c}$ и $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралите от този вид се пресмятат с отделяне на точен квадрат от тричлена ax^2+bx+c, т. е. като се използува, че ax^2+bx+c
$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ $(a\neq 0)$.

Задача 6. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; б)° $\displaystyle\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$;

в)° $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$; г)° $\displaystyle\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a, b$ и c — константи, за които $4ac-b^2\neq 0)$;

е) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ $(A, B, a, b$ и c — константи, за които $4ac-b^2\neq 0)$.

Задача 7. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^2+3}$; б) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2+x+1}$;

в)° $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$; г)° $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{3x^4-2x^2+1}$.

Задача 8. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$; б)° $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+2}}$;

в)° $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+7}}$; г)° $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a$ — константа, $a>0)$;

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a, b$ и c — константи, за които

$b^2-4ac>0,\ a<0)$.

Задача 9. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\displaystyle\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$; б)° $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{3+x+x^2}}\,dx$;

в)° $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-ax}}$ $(a$ — константа, $a\neq 0)$;

г)° $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$; д)° $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(x+a)\,dx}{\sqrt{ax+x^2}}$ $(a$ — константа, $a\neq 0)$.

Задача 10*. Нека P е полином от n-та степен $(n\in \mathbf{N})$, а a, b и c са константи, за които квадратният тричлен $ax^2+2bx+c$ е положителен в някой интервал Δ. Да се докаже, че съществуват полином Q от $(n-1)$-ва степен и константа A, за които е в сила

$$\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+2bx+c}+A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

в интервала Δ.

Задача 11. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Задача 12*. Нека α, a, b и c са константи. При $J_\alpha(x) = \displaystyle\int \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ да се докаже тъждеството

$$2\alpha aJ_\alpha(x)+(2\alpha-1)bJ_{\alpha-1}(x)+(2\alpha-2)cJ_{\alpha-2}(x)=2x^{\alpha-1}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

във всеки интервал, в който подинтегралните функции имат смисъл.

Задача 13. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

§ 4. Интегриране по части

От формулата за диференциране на произведение се извежда следното *правило за интегриране по части:*

(18) $$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Задача 14. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx$ (a — константа, $a \neq 0$);

б) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ (a — константа, $a > 0$).

Задача 15. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; б) $\int \frac{dx}{(3+x^2)^2}$; в) $\int \frac{dx}{(3+2x^2)^2}$;

г) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^2}$; д) $\int \frac{dx}{(3-x^2)^2}$; е) $\int \frac{dx}{(3-2x^2)^2}$.

Задача 16. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

(a — константа, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$);

б) $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(a^2-x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$$

(a — константа, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$).

Задача 17. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,dx$$

(a — константа, $a > 0$, $m, n = 2, 3, \ldots$);

б) $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x^{m-1}}{(a^2-x^2)^{n-1}} - \frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$$

(a — константа, $a > 0$, $m, n = 2, 3, \ldots$).

Задача 18. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{x^4\,dx}{(2+x^2)^3}$; б) $\int \frac{x^4\,dx}{(2-x^2)^3}$.

Задача 19°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin(\ln x)\,dx$; б) $\int \cos(\ln x)\,dx$.

§ 5. Пресмятане на интеграли от вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$ и $\int P(x)\cos ax\,dx$

За пресмятане на интеграли от този вид, където $P(x)$ е полином на x, а a — константа, се препоръчва e^{ax}, $\sin ax$ или $\cos ax$ да се внесат под диференциала и след това да се интегрира по части.

Задача 20°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int xe^x\,dx$; б) $\int x^4e^{-x}\,dx$;

в) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x}\,dx$; г) $\int \frac{x^5}{e^{x^2}}\,dx$.

Задача 21°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x\sin x\,dx$; б) $\int x^2\sin x\,dx$;

в) $\int x^3\sin(2x+3)\,dx$; г) $\int x^3\sin x^2\,dx$.

Задача 22. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x\cos x\,dx$; б) $\int x\sin^2 x\,dx$;

в) $\int x\sin^3 x\,dx$; г) $\int x^2\cos^3 x\,dx$.

Задача 23*. Да се докаже тъждеството:

$$\int f(x)\,dg^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)g^{(n-\nu)}(x) + (-1)^{n+1}\int g(x)\,df^{(n)}(x) \quad (n+1 \in \mathbf{N}).$$

Задача 24*. Да се докаже, че ако P е полином от n-та степен, а a — различна от нула константа, то

а) $$\int P(x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{P^{(\nu)}(x)}{a^\nu};$$

б) $\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2}\right.$

$\left. + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \dots\right) + \frac{\cos ax}{a}\left(\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \dots\right);$

в) $\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2}\right.$

$\left. + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \dots\right) + \frac{\sin ax}{a}\left(\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \dots\right).$

§ 6. Пресмятане на интегралите $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Задача 25. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$

$(m = 2, 3, \dots)$;

б) $\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^{m-2} x}$

$(m = 2, 3, \dots)$.

Задача 26°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin^4 x\,dx$; б) $\int \sin^5 x\,dx$; в) $\int \sin^6 x\,dx$;

г) $\int \sin^7 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; е) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

Задача 27. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

$(n = 2, 3, \dots)$;

б) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

$(n = 2, 3, \dots)$.

Задача 28°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \cos^4 x\,dx$; б) $\int \cos^5 x\,dx$;

в) $\int \cos^6 x\,dx$; г) $\int \cos^7 x\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; е) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$; ж) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Задача 29. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x$

$+ \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\cos^n x\,dx \qquad (m = 2, 3, \dots;\ n \in \mathrm{I},\ m+n \neq 0)$;

б) $\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{1}{m+n}\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x$

$+ \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} x\,dx \qquad (n = 2, 3, \dots;\ m \in \mathrm{I},\ m+n \neq 0)$.

Задача 30°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$; б) $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

Задача 31*. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int\frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}\,dx$

$(m, n = 2, 3, \dots)$;

б) $\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int\frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x}\,dx$

$(m, n = 2, 3, \dots)$.

Задача 32°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \mathrm{tg}\, x\,dx$; б) $\int \mathrm{ctg}\, x\,dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$;

г) $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx$; д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$; е) $\int \mathrm{ctg}^5 x\,dx$.

Задача 33*. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x}$

$$+\frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}\qquad (m=2,\ 3,\ \ldots;\ n\in\mathrm{I});$$

б) $$\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}$$

$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots;\ m\in\mathrm{I}).$$

Задача 34. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$; б)° $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

§ 7. Пресмятане на $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ и $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ и на някои техни аналози

Задача 35*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

б) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$).

Задача 36. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int(e^x-\cos x)^2\,dx$;

б) $\int e^{ax}\sin^2 bx\,dx$ (a и b — константи, $a\neq 0$).

Задача 37. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int xe^{ax}\sin bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

б) $\int xe^{ax}\cos bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

в) $\int x^2e^{ax}\cos bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$).

Задача 38. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int e^{ax}\sin bx\cos cx\,dx$ (a, b и c — константи, $a\neq 0$);

б) $\int e^{ax}\sin^2 bx\cos cx\,dx$ (a, b и c — константи, $a\neq 0$).

Задача 39*. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx=\frac{(a\sin bx-nb\cos bx)e^{ax}\sin^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}$$

$$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$$

($n=2,\ 3,\ \ldots$, a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

б) $$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx=\frac{(a\cos bx+nb\sin bx)e^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}$$

$$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$$

($n=2,\ 3,\ \ldots$, a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$).

§ 8. Пресмятане на някои интеграли от вида $\int R(x)\ln x\,dx$, $\int R(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$ и $\int R(x)\arcsin x\,dx$

За пресмятане на интеграли от този вид понякога се препоръчва функцията R да се внесе под диференциала и след това да се интегрира по части.

Задача 40°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x\ln x\,dx$; б) $\int x^a\ln x\,dx$.

Задача 41. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x(\ln x)^2\,dx$; б) $\int x^a(\ln x)^3\,dx$.

Задача 42. Да се докажат тъждествата:

а) $\int(\ln x)^n\,dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\,dx$ $(n\in\mathrm{N})$;

б) $$\int x^a(\ln x)^n\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^n-\frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx$$

$(n\in\mathrm{N},\ a\neq -1)$.

Задача 43. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx$;　б) $\int x\ln(x^2-1)\,dx$;

в) $\int x\ln(x^2+a^2)\,dx$;　г) $\int x^4\ln(x^2+a^2)\,dx$.

Задача 44. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx \qquad (a>0)$;

б) $\int \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^3 dx \qquad (a>0)$;

в) $\int x\arcsin x\,dx$;　г) $\int \frac{\arccos x}{x^2}\,dx$;

д) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;　е) $\int \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

ж) $\int \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;　з) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$;

и) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$.

Задача 45. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$;　б) $\int x^3\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$;

в) $\int \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{(\alpha+\beta x)^2}\,dx \qquad (\alpha^2+\beta^2\neq 0)$;

г) $\int \frac{x^4\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x^2}\,dx$;　д) $\int \frac{x\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

§ 9. Интегриране чрез субституции

За пресмятане на интеграла

(19) $$\int f(x)\,dx$$

понякога е целесъобразно да се извърши смяна на независимата променлива с помощта на някоя *субституция*

(20) $$x=\varphi(t),$$

т. е. да се приложи следната теорема: *Нека* Δ_1 *и* Δ *са интервали и*

(21) $$\varphi:\Delta_1\to\Delta$$

е диференцируема обратима функция с $\varphi(\Delta_1)=\Delta$, *чиято обратна функция*

(22) $$\psi:\Delta\to\Delta_1$$

е също диференцируема. Нека освен това дефиниционната област на функцията f *съдържа интервала* Δ *и интегралът*

(23) $$F(t)=\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

съществува в Δ_1. *Тогава функцията* f *притежава примитивна поне в интервала* Δ *и е в сила*

(24) $$\int f(x)\,dx=F(\psi(x))$$

за $x\in\Delta$.

На практика тази теорема се прилага по следния начин. От (20) се пресмята dx:

(25) $$dx=\varphi'(t)\,dt$$

След заместване на (20) и (25) в (19) се получават интегралите от (23). Субституцията (20) се подбира така, че да можем да пресметнем тези интеграли. Нека в резултат на пресмятането е получена функция $F(t)$. За да намерим интеграла (19), трябва да се върнем към старата променлива x. За тази цел решаваме (20) относно t и получаваме

(26) $$t=\psi(x).$$

Сега интегралът (19) се получава след заместване на така получената функция на x в $F(t)$.

Този метод за краткост се нарича *интегриране чрез субституция* или *интегриране чрез смяна на променливата*.

Задача 46. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a$ — константа, $a>0)$;

б) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} \qquad (a$ — константа, $a>0)$,

с помощта на субституцията $x=a\sin t$.

Задача 47. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad (a$ — константа, $a>0)$;

б) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \qquad (a$ — константа, $a>0)$,

с помощта на субституцията $x=a\,\mathrm{sh}\,t$.

Задача 48. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ $\quad (a$ — константа, $a>0)$;

б) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(a^2+x^2)^3}$ $\quad (a$ — константа, $a>0)$,

с помощта на субституцията $x = a\operatorname{tg} t$.

Понякога при интегриране се налага да се освобождаваме от първата степен на x в квадратния тричлен $ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$. За тази цел обикновено се прилага т. нар. *субституция на Хорнер*:

$$x = t - \frac{b}{2a},$$

която автоматизира отделянето на точен квадрат (вж. § 3).

Задача 49°. Да се решат зад. 6 а) и 9 а) с помощта на субституцията на Хорнер.

Задача 50°. В интегралите от зад. 19 да се направи субституцията $x = e^t$ и полученият резултат да се сравни със зад. 35.

§ 10. Интегриране на рационални функции

Интегрирането на рационални функции в известен смисъл е централен въпрос при неопределените интеграли, тъй като редица класове от интеграли се пресмятат, като се сведат към интеграли от рационални функции.

Всяка рационална функция може да се представи като сума на един полином и на друга рационална функция, чийто числител има по-ниска степен от знаменателя. От друга страна, всяка рационална функция от последния вид може да се представи като сума от *елементарни дроби*, т. е. на рационални функции от вида

$$(27) \qquad \frac{A}{(x-a)^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

и

$$(28) \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

където числата A, a, M, N и p, q са реални и знаменателят на (28) не се анулира за реално x, т. е. $p^2-4q<0$. Това представяне се основава на следните две теореми:

1. Нека P и Q са полиноми от степени съответно π и κ, a е реално число и $Q(a)\neq 0$. Тогава за всяко естествено n с $\pi < n+\kappa$ съществуват (единствени) константи A_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ и (единствен) полином R от степен $\rho<\kappa$, за които е в сила

$$(29) \qquad \frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

за всяко x, което не анулира знаменателя на лявата страна.

2. Нека P и Q са полиноми от степени съответно π и κ; p и q са реални числа, за които $p^2-4q<0$, и (комплексните) нули на полинома x^2+px+q не анулират Q. Тогава за всяко естествено n с $\pi < 2n+\kappa$ съществуват (единствени) константи M_ν, N_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ и (единствен) полином R от степен $\rho<\kappa$, за които е в сила

$$(30) \qquad \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+px+q)^\nu} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

за всяко x, което не анулира Q.

Чрез последователно прилагане на (29) и (30) може да се осъществи разлагане в сума от елементарни дроби на всяка рационална функция, степента на чийто числител е по-ниска от степента на знаменателя ѝ, стига да се знаят нулите на знаменателя. Константите A_ν и M_ν, N_ν в десните страни на (29) и (30) могат да се определят след освобождаване от знаменателите например чрез сравняване на коефициентите.

Задача 51°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x)(3+4x)}$; в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)(c+dx)}$ $\quad (a, b, c, d$ — константи, за които $ad\neq bc)$;

д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)}$ $\quad (a, b$ — константи, за които $a\neq b)$;

е) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{9-10x^3+x^6}$.

Задача 52. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

Задача 53. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$; г) $\displaystyle\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

Задача 54. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са различни помежду си реални числа и $P(x)$ е полином от степен, по-ниска от n. Да се докаже тъждеството

$$\int \frac{P(x)\,dx}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(a_\nu)\ln|x-a_\nu|}{(a_\nu-a_1)(a_\nu-a_2)\dots(a_\nu-a_{\nu-1})(a_\nu-a_{\nu+1})\dots(a_\nu-a_n)}.$$

Задача 55. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{(1+x)(2+x)^2}$; б) $\int \frac{x\,dx}{(1+x)(2+x)^2}$;

в) $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)(2+x)^2}$; г) $\int \frac{dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$;

д) $\int \frac{x\,dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$; е) $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$.

Задача 56. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{(2-3x)(1-4x)^3}$; б) $\int \frac{x^8\,dx}{(x^2-2)^2}$; в) $\int \frac{dx}{(x^2-2x-3)^3}$.

Задача 57. Да се пресметне интегралът
$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$
където P е полином от n-та степен.

Задача 58. Да се докаже тъждеството
$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{2^n(n-1)!}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$
$$+\frac{x}{2n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2\nu+1)}{2^\nu(n-1)(n-2)\dots(n-\nu)(1-x^2)^{n-\nu}}.$$

Задача 59. Да се пресметне интегралът $\int \frac{dx}{x^n(x-1)^n}$ за произволно естествено число n.

Задача 60. При какви условия за константите a и b интегралите

а) $\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2}$, б) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2}$

са рационални функции на x?

Задача 61. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{a^3+x^3}$ (a — константа, $a \neq 0$);

б) $\int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}$ (a — константа, $a \neq 0$);

в) $\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)}$ (a — константа, $a \neq 0$);

г) $\int \frac{dx}{x^4+1}$; д) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}$;

е) $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$; ж) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$.

Задача 62. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^2}$; в) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$;

г) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+2)^2}$; д) $\int \frac{7x-4}{(3x^2+2x+5)^2}\,dx$.

Задача 63. Нека a, b и c са константи, за които $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (n=2,3,\dots);$$

б) $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (n=2,3,\dots).$$

Задача 64. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^3}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+3x+5)^3}$.

Задача 65. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{(1+x^3)^2}$; б) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2}$; в) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$;

г) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$; д) $\int \frac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}\,dx$;

е) $\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$;

ж) $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$;

з) $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$.

§ 11. Метод на Остроградски–Ермит

Вече видяхме, че при високи степени на неразложимите множители в знаменателя на една рационална функция пресмятането на коефициентите в разлагането на сума от елементарни дроби създава сериозни технически затруднения. Съществува общ метод, който позволява пресмятането на интеграли от произволни рационални функции да се сведе до пресмятане на интеграли от рационални функции, неразложимите множители в знаменателя на които са от първа степен. В следващите зад. 66 — 68 се разглежда този метод. По-долу

(31) $$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

е система от k различни реални числа, а $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$, или накратко $A_1, A_2, \ldots, A_k$, са полиномите от първа степен, дефинирани със

(32) $$A_\kappa = x - a_\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, k);$$

също така

(33) $$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_l, q_l)$$

са различни помежду си двойки реални числа, за които $p_\lambda^2 - 4q_\lambda < 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$, а $B_1(x), B_2(x), \ldots, B_l(x)$, или накратко $B_1, B_2, \ldots, B_l$ — квадратните тричлени, дефинирани с

(34) $$B_\lambda(x) = x^2 + p_\lambda x + q_\lambda.$$

Очевидно полиномите B_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ нямат реални нули. От алгебрата е известно, че всеки ненулев полином с реални коефициенти по единствен начин може да се представи като произведение на константа и полиноми от вида (32) и (34).

Задача 66*. Нека $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_l$ са цели положителни числа и полиномите S и $A_1^{s_1}, \ldots, A_k^{s_k}, B_1^{t_1}, \ldots, B_l^{t_l}$ са взаимно прости. Да се докаже, че производната на рационалната функция

$$\frac{S(x)}{A_1^{s_1}(x)\ldots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\ldots B_l^{t_l}(x)}$$

е рационална функция от вида

$$\frac{T(x)}{A_1^{s_1+1}(x)\ldots A_k^{s_k+1}(x)B_1^{t_1+1}(x)\ldots B_l^{t_l+1}(x)},$$

където T е полином, взаимно прост с полинома $A_1^{s_1+1}\ldots A_k^{s_k+1}B_1^{t_1+1}\ldots B_l^{t_l+1}$.

Задача 67*. Нека полиномите R и $A_1\ldots A_kB_1\ldots B_l$ $(k+l>0)$ са взаимно прости. Тогава интегралът

$$\int \frac{R(x)\,dx}{A_1(x)\ldots A_k(x)B_1(x)\ldots B_l(x)}$$

не е рационална функция на x.

Задача 68* (Остроградски – Ермит). Нека $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k$ са цели положителни числа и полиномите P и $A_1^{s_1}\ldots A_k^{s_k}B_1^{t_1}\ldots B_l^{t_l}$ са взаимно прости, а степента на P е по-малка от $\sum_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda$. Тогава съществуват единствен полином Q от степен, по-малка от $\sum_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda - k - 2l$, и единствен полином R от степен, по-малка от $k+2l$, за които

$$\int \frac{P(x)\,dx}{A_1^{s_1}(x)\ldots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\ldots B_l^{t_l}(x)} = \frac{Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\ldots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\ldots B_l^{t_l-1}(x)} + \int \frac{R(x)\,dx}{A_1(x)\ldots A_k(x)B_1(x)\ldots B_l(x)}.$$

Задача 69. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{x+1}{(x^2+x-2)^2}\,dx$; б) $\int \frac{x^6+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$;

г) $\frac{-2x^5+11x^4-28x^3+37x^2-30x+14}{(x^2-2x+2)^3}\,dx$;

д) $\int \frac{-4x^3-4x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{x^7+x^6-2x^4+2x^3-6x^2+3x+1}{(1+x^3)^3}\,dx.$

§ 12. Интеграли от някои специални рационални функции

Задача 70. При

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi + 1\right),$$

$$Q_\nu(x) = \operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi}{1 - x\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi}$$

да се докажат тъждествата:

а) $$\int\frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} P_\nu(x)\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi \qquad (n \text{ — четно});$$

б) $$\int\frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\ln|1+x| - \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} P_\nu(x)\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Задача 71*. При

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi + 1\right),$$

$$Q_\nu(x) = \operatorname{arctg}\frac{x + \cos\frac{2\nu+1}{n}\pi}{\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi}$$

да се докажат тъждествата:

а) $$\int\frac{dx}{1-x^n} = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} P_\nu(x)\cos\frac{2\nu}{n}\pi + \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu}{n}\pi \qquad (n \text{ — четно});$$

б) $$\int\frac{dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\ln|1-x| + \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} P_\nu(x)\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Задача 72*. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}\,dx = -\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n}\ln\left(1 - 2x\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi + x^2\right) + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n}\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2n}\pi};$$

б) $$\int\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n+1}}\,dx = (-1)^{m+1}\frac{\ln|1+x|}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\ln\left(1 - 2x\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi + x^2\right) + \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi};$$

$$\text{в)}\int\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n}}\,dx=\frac{(-1)^{m+1}}{2n}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\cos\frac{\nu m\pi}{n}\ln\left(1-2x\cos\frac{\nu\pi}{n}+x^2\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{\nu\pi}{n}}{\sin\frac{\nu\pi}{n}};$$

$$\text{г)}\int\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n+1}}\,dx=-\frac{1}{2n+1}\ln|1-x|$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\ln\left(1+2x\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi+x^2\right)$$

$$+\frac{2(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi},$$

където степента на числителя на подинтегралната функция е по-ниска от степента на знаменателя.

§ 13. Интеграли от рационална функция на x и на радикали на една и съща дробно-линейна функция

Интегралите от вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx, \tag{35}$$

където R е рационална функция на $n+1$ променливи, се свеждат към интеграли от рационални функции с помощта на субституциите

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^q, \tag{36}$$

където q е най-малкото общо кратно на знаменателите q_ν. По-точно търсената субституция се получава след решаване на (36) спрямо x.

Задача 73. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

д) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; е) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$

(a и b — константи, за които $a\neq b$);

ж) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$; з) $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

§ 14. Биномен диференциал

Интегралите от вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{37}$$

където a и b са различни от нула константи, а m, n и p — рационални числа, се наричат *интеграли от биномен диференциал* или *диференциален бином*. Съществуват три случая, когато тези интеграли са елементарни функции. Тези случаи са:

$$p\text{ — цяло}, \tag{38}$$

$$\frac{m+1}{n}\text{ — цяло}, \tag{39}$$

$$\frac{m+1}{n}+p\text{ — цяло}. \tag{40}$$

При (38) интегралът (37) е от вида (35), поради което може да се сведе до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$x=t^k, \tag{41}$$

където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n.

При (39) интегралът (37) се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$a+bx^n=t^k, \tag{42}$$

където k е знаменателят на p.

При (40) интегралът (37) най-напред се преобразува така:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx. \tag{43}$$

За интеграла в дясната страна на (43) е налице (39), поради което той се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$b + ax^{-n} = t^k, \tag{44}$$

където k отново е знаменателят на p.

Когато числата m, n и p не удовлетворяват никое от условията (38) — (40), интегралът (37) не е елементарна функция (Чебишов). Да отбележим още, че в случаите (39) и (40) съответните субституции (42) и (44) функционират и без предположението за рационалност на m и n.

Задача 74. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sqrt{x^3 + x^4}\, dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^2}\, dx$;

в) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$; г) $\int \frac{x^5\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$; е) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}$; ж) $\int \sqrt[3]{3x - x^3}\, dx$.

Задача 75. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{(2 + x^{\sqrt{2}})^{\frac{3}{2}}}{x}\, dx$; б) $\int \frac{(2 - x^{\sqrt{3}})^{\frac{3}{2}}}{x}\, dx$;

в) $\int \frac{(a + bx^{\pi})^{\frac{3}{2}}}{x}\, dx$ (a и b — константи, за които $b \neq 0$).

Задача 76. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{x^m}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ (m — цяло);

б) $\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$ (m — цяло).

§ 15. Субституции на Ойлер

Интегралите от вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx, \tag{45}$$

където R е рационална функция на две променливи, а a, b и c са константи, за които $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, могат да се сведат към интеграли от рационални функции с помощта на т. нар. *субституции на Ойлер*. При

$$a > 0 \tag{46}$$

може да се положи

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a} \tag{47}$$

или

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}. \tag{48}$$

При

$$c > 0 \tag{49}$$

може да се положи

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \tag{50}$$

или

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}. \tag{51}$$

Когато квадратният тричлен $ax^2 + bx + c$ има реални нули, т. е.

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta), \tag{52}$$

където α и β са реални числа, може да се положи

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha) \tag{53}$$

или

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \beta). \tag{54}$$

Случаите (46), (49) и (52) са единствените, в които квадратният тричлен $ax^2 + bx + c$ е положителен в някой интервал. Ето защо субституциите на Ойлер (47), (48), (50), (51), (53) и (54) са достатъчни за свеждане на всеки от интегралите (45) към интеграл от рационална функция. В зависимост от конкретните стойности на a, b и c могат да възникнат един или няколко от случаите (46), (49) и (52). Ето защо в общия случай един и същ интеграл (45) може да се сведе към интеграл от рационална функция с няколко субституции на Ойлер. Да отбележим, че обемът на пресмятанията съществено зависи от избраната субституция.

Задача 77. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$;

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$; е) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; з) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$;

и) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x(1+x)})^2}$; й) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Задача 78. Да се докаже, че пресмятането на интеграла

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})\,dx,$$

където R е рационална функция на три променливи, може да се сведе към интегриране на рационални функции.

Задача 79. При какви условия за α, β, γ и a, b, c интегралът

$$\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

е алгебрична функция?

§ 16. Интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интегралите от вида

(55) $$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

където R е рационална функция на две променливи, могат да се сведат към интеграли от рационални функции с помощта на субституцията $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тази субституция може да се използува във всеки интервал, в който функциите $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $R(\sin x,\ \cos x)$ са дефинирани. Ако този интервал се съдържа в интервала $(-\pi, a)$, субституцията $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ добива вида

(56) $$x = 2\operatorname{arctg} t.$$

Тогава

(57) $$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Задача 80. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ (r — константа, за която $0<r<1$);

б) $\displaystyle\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ (r — константа, за която $0<r<1$);

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; е) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x+2\cos x}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ (a, b и c — константи, за които $a^2\neq b^2+c^2$).

Задача 81. При $a^2+b^2\neq 0$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx = Ax + B\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

където A и B са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

Задача 82. При $a^2+b^2\neq 0$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{\alpha\sin^2 x+2\beta\sin x\cos x+\gamma\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$= A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

Задача 83. При $a^2+b^2\neq 0$ и $n=2,3,\ldots$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

Задача 84. При $a^2+b^2 \neq 0$ и $n = 2, 3, \dots$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\int \frac{dx}{(1+p\cos x)^2}$ $\quad (0<p<1)$.

Задача 85. При $0 \neq a^2+b^2 \neq c^2$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma}{a\sin x + b\cos x + c}\,dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx$.

Задача 86. Може ли да се използува субституцията (56) за пресмятане на интеграла (55) в интервала $(0, 2\pi)$? Да се посочи примитивна на функцията $\frac{1}{2+\sin x}$:

а) в интервала $(0, 2\pi)$;

б) върху цялата права.

Универсалният характер на субституцията (56) я прави неудобна в повечето конкретни случаи на интеграли от вида (55). Следващите три субституции, в случай че са приложими, обикновено водят до интеграли от по-прости рационални функции.

При

(58) $$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

може да се положи $\operatorname{tg} x = t$ или по-точно

(59) $$x = \operatorname{arctg} t.$$

Тогава

(60) $$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

При

(61) $$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

може да се положи $\cos x = t$ или по-точно

(62) $$x = \arccos t.$$

В този случай по същество няма нужда от субституция, а е достатъчно да се внесе $\sin x$ под диференциала и цялата останала подинтегрална функция да се представи като функция на $\cos x$. Аналогично се процедира при

(63) $$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

в който случай е целесъобразно да се внесе $\cos x$ под диференциала, а цялата останала подинтегрална функция да се представи като функция на $\sin x$.

Задача 87. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$; $\quad$ б) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx$;

в) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{a + b\operatorname{tg} x}$ $\quad$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2 \neq 0$);

д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1}\,dx$; $\quad$ е) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\,dx$;

ж) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,dx$; $\quad$ з) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$;

и) $\int \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\sin x\cos x + C\sin^2 x}$

(A, B и C — константи, за които $AC \neq B^2$ и $C \neq 0$).

§ 17. Някои интеграли, които не се изразяват с елементарни функции

Задача 88. Ако степенният ред $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е сходящ в някой интервал Δ, редът $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$ е също сходящ в Δ и

$$\int f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}.$$

Задача 89. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!\,(2\nu-1)}$ $(x \in \mathbf{R})$;

б) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \ln|x| + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu}$ $(x \neq 0)$.

Понякога се полага

(64) $$\operatorname{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu-1)!\,(2\nu-1)}x^{2\nu-1}$$

и

(65) $$\operatorname{ci}(x) = C + \ln|x| + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu} \qquad (x \neq 0),$$

където C е константата на Ойлер (вж. § 16, гл. IV). Дефинираните с (64) и (65) функции се наричат съответно *интегрален синус* и *интегрален косинус*. Те не са елементарни функции. При означенията (64) и (65) резултатите от зад. 89 се записват така:

(66) $$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{si}(x), \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx = \operatorname{ci}(x).$$

Задача 90. Да се изразят чрез елементарни функции и чрез функциите si и ci интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^3}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^n}\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$;

в) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x^n}\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$;

г) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a+bx}\,dx$ (a и b — константи, $b \neq 0$);

д) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+x)^2}\,dx$.

Задача 91*. Да се докаже, че ако знаменателят на рационалната функция R има само реални нули, интегралите $\int R(x)\sin x\,dx$ и $\int R(x)\cos x\,dx$ се изразяват чрез елементарни функции и чрез трансцендентните функции si и ci.

Задача 92. Да се докаже, че:

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^{\nu}}{\nu!\,\nu} \qquad (0 < x \neq 1).$$

Понякога се полага

(67) $$\operatorname{li}(x) = C + \ln|\ln x| + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^{\nu}}{\nu!\,\nu} \qquad (0 < x \neq 1),$$

където C е константата на Ойлер. Дефинираната с (67) функция се нарича *интегрален логаритъм*. Тя не е елементарна. При означението (67) резултатът от зад. 92 се записва така:

(68) $$\int \frac{dx}{\ln x} = \operatorname{li}(x).$$

Задача 93. Да се изразят чрез елементарни функции и чрез функцията li интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^a\,dx}{\ln x}$; б) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{x}$;

в) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{ax+b}$ (a и b — константи, $a \neq 0$); г) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{x^n}$.

Задача 94*. Да се докаже, че ако знаменателят на рационалната функция R има само реални нули, интегралът $\int R(x)e^x\,dx$ се изразява чрез елементарни функции и чрез трансцендентната функция li.

Задача 95. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{xe^x\,dx}{(x+1)^2}$; б) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{(x^2+x)^2}e^x\,dx$.

Десета глава

Риманов интеграл

§ 1. Интегрируемост в риманов смисъл

Нека фунцията $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ $(a<b)$ е ограничена. За произволно подразделяне π на интервала $[a,b]$ на краен брой подинтервали с помощта на точките

(1) $$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b \quad (n\in\mathbf{N})$$

се полага

(2) $$m_\nu=\inf\left\{\,f(x)\;\middle|\;x\in[x_{\nu-1},x_\nu]\right\},\ M_\nu=\sup\left\{\,f(x)\;\middle|\;x\in[x_{\nu-1},x_\nu]\right\}$$

$(\nu=1,2,\ldots,n)$,

(3) $$s_\pi(f)=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu(x_\nu-x_{\nu-1})$$

и

(4) $$S_\pi(f)=\sum_{\nu=1}^{n}M_\nu(x_\nu-x_{\nu-1}).$$

Сумите (3) и (4) се наричат съответно *малка* и *голяма сума на Дарбу* на функцията f, съответстващи на подразделянето π на интервала $[a,b]$ на подинтервали, и понякога се означават накратко с s_π и S_π или даже с s и S. Доказва се, че ако π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a,b]$ на подинтервали и точките на π_1 принадлежат на π_2, в сила са неравенствата

(5) $$s_{\pi_1}\leqq s_{\pi_2}\leqq S_{\pi_2}\leqq S_{\pi_1}.$$

От (5) следва, че ако π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a,b]$ на подинтервали, в сила е и неравенството

(6) $$s_{\pi_1}\leqq S_{\pi_2}.$$

От (6), разбира се, следва, че множеството на малките суми s_π, съответстващи на произволни подразделяния π на интервала $[a,b]$ на подинтервали, е ограничено отгоре, а също така, че множеството на всички големи суми на Дарбу е ограничено отдолу. Нека Π е множеството на всички подразделяния на интервала $[a,b]$ на краен брой подинтервали. По дефиниция се полага

(7) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\left\{s_\pi\;\middle|\;\pi\in\Pi\right\}$$

и

(8) $$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\left\{S_\pi\;\middle|\;\pi\in\Pi\right\}.$$

Числата (7) и (8) се наричат съответно *долен* и *горен интеграл на Дарбу на функцията f в интервала $[a,b]$*.

От тази дефиниция и от (6) следва неравенството

(9) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Задача 1. Нека функциите $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ $(a<b)$ са ограничени. Тогава:

а) ако $f(x)$ и $g(x)$ се различават само в краен брой точки x от интервала $[a,b]$, в сила са равенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} g(x)\,dx,\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} g(x)\,dx;$$

б) ако е изпълнено неравенството $f(x)\leqq g(x)$ за всяко x от интервала $[a,b]$, в сила са неравенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\underline{\int_a^b} g(x)\,dx,\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\overline{\int_a^b} g(x)\,dx;$$

в) ако е изпълнено неравенството $f(x)\leqq g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на интервала $[a,b]$, в сила е и неравенството

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqq\overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Задача 2. В произволен интервал $[a,b]$ $(a<b)$ да се намерят горните и долните интеграли на Дарбу на следните функции:

а) на произволна константа c;

б) на функцията x;

в) на функцията x^2;

г) на функцията x^3;

д) на функцията $D(x)$ на Дирихле (зад. 12, гл. VI);

е) на функцията $\sigma(x)$ от зад. 16 б), гл. VI.

Една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ се нарича *интегрируема в риманов смисъл в интервала* $[a, b]$ или накратко интегрируема, когато е изпълнено равенството

(10) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Общата стойност на горния и долния интеграл на функцията f се нарича *риманов* или *определен интеграл* на тази функция и се означава

(11) $$\int_a^b f(x)\,dx.$$

От (5)–(7) и дефиницията на риманов интеграл следва неравенството

(12) $$s_\pi \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq S_\pi \qquad (\pi \in \Pi).$$

Задача 3°. Да се определи кои от функциите от зад. 2 са интегрируеми в риманов смисъл и да се пресметнат римановите им интеграли.

Задача 4. Да се докаже, че една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ е интегрируема в риманов смисъл в интервала $[a, b]$, когато съществува единствено число I, за което са изпълнени неравенствата $s_\pi \leqq I \leqq S_\pi$ $(\pi \in \Pi)$. Тогава

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 5*. За да бъде една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ интегрируема, е необходимо и достатъчно за всеки две числа $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ да съществува такова подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, че сборът от дължините на онези от тях, в които осцилацията на f е по-голяма от ε, да е по-малък от η.

Задача 6. Да се докаже, че функцията $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0 \text{ и } \sin\dfrac{\pi}{x} > 0, \\ -1 & \text{при } x \neq 0 \text{ и } \sin\dfrac{\pi}{x} < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \text{ и при } x \neq 0 \text{ със } \sin\dfrac{\pi}{x} = 0 \end{cases}$$

е интегрируема в интервала $[0, 1]$.

Задача 7°. Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ е интегрируема. Тогава всяка функция $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, за която $f(x)$ и $g(x)$ се различават само в краен брой точки от интервала $[a, b]$, е също интегрируема и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 8°. Нека функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ са интегрируеми. Тогава:

а) ако е изпълнено неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на интервала $[a, b]$, в сила е и неравенството

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx;$$

б) Ако е изпълнено равенството $f(x) = g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на интервала $[a, b]$, в сила е и равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 9°. Да се посочи пример на интегрируема функция $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ и на функция $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$, за които равенството $f(x) = g(x)$ не е в сила само за изброимо много стойности на x от интервала $[0, 1]$, но функцията g не е интегрируема.

Задача 10*. При $|r| \neq 1$ да се пресметне интегралът

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx \qquad \text{(П о а с о н).}$$

Ако Δ е произволен интервал, в следващите няколко задачи дължината на Δ ще означаваме с $\mu(\Delta)$.

Задача 11°. Нека Δ и $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ са ограничени интервали. Да се докаже, че:

а) ако $\Delta \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu$, то $\mu(\Delta) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \mu(\Delta_\nu)$;

б) ако $\bigcup_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu \subset \Delta$ и интервалите Δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ два по два нямат общи вътрешни точки, то $\sum_{\nu=1}^{n} \mu(\Delta_\nu) \leqq \mu(\Delta)$.

Задача 12. Нека $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ са ограничени интервали, за които $\bigcup_{\kappa=1}^{k} \Delta_\kappa \subset \bigcup_{\lambda=1}^{l} \delta_\lambda$, и интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ два по два нямат общи вътрешни точки. Да се докаже, че

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} \mu(\delta_\lambda).$$

Задача 13*. Нека $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ са краен брой ограничени интервали, които два по два нямат общи вътрешни точки, а $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е редица от ограничени интервали, за които $\bigcup_{\kappa=1}^{k} \Delta_\kappa \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda$. Тогава $\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda)$.

Едно множество A от реални числа се нарича *пренебрежимо*, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува редица $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ от ограничени отворени интервали със следните две свойства:

$$A \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda, \tag{13}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda) \leqq \varepsilon. \tag{14}$$

Задача 14. Да се докаже, че:

а) подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо;

б) едноточковите множества са пренебрежими;

в) обединението на изброимо много пренебрежими множества е пренебрежимо;

г) неизродените интервали върху реалната права не са пренебрежими.

Задача 15. Ако A е такова множество от реални числа, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува редица $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ от ограничени, не непременно отворени интервали със свойствата (13) и (14), множеството A е пренебрежимо.

Задача 16. Ако за някое множество A от реални числа съществува редица $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ от ограничени интервали, за които редът $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda)$ е сходящ, и за всяка точка a на A е в сила $a \in \delta_\lambda$ за безбройно много индекси λ, множеството A е пренебрежимо.

Задача 17*. За да бъде една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема в риманов смисъл, е необходимо и достатъчно множеството от точките на прекъсване на f да бъде пренебрежимо (Л ь о б е г).

Задача 18. Да се докаже, че:

а) ограничените монотонни функции са интегрируеми;

б) ако функциите f и g са интегрируеми в интервала $[a, b]$, то функциите $f + g$, $f - g$, и $f.g$ са интегрируеми в $[a, b]$; ако частното $\frac{f}{g}$ е дефинирано и ограничено в $[a, b]$, то също е интегрируемо.

§ 2. Основна теорема на интегралното смятане

Нека функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е дефинирана в интервал Δ и е интегрируема във всеки негов затворен и ограничен подинтервал. Целесъобразно е на символа $\int_a^b f(t)\,dt$ $(a, b \in \Delta)$ да се придаде смисъл и когато $b \leqq a$. Това става посредством дефиниционните равенства

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad (a \in \Delta). \tag{15}$$

(16) $$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt \qquad (a,\ b \in \Delta,\ b < a).$$

При тези дефиниции е в сила равенството

(17) $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

за произволни точки a, b и c от Δ (*адитивно свойство на интеграла*).

Следващата теорема на Нютон и Лайбниц се нарича *основна теорема на интегралното смятане*, тъй като ефективното пресмятане на определени интеграли се извършва главно чрез нея.

Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана в интервала Δ и интегруема във всеки ограничен и затворен подинтервал на Δ и нека $a \in \Delta$. Тогава функцията $F : \Delta \to \mathbf{R}$, дефинирана с

(18) $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in \Delta),$$

е диференцируема във всяка точка ξ на Δ, в която f е непрекъсната, и е в сила равенството

(19) $$F'(\xi) = f(\xi).$$

Задача 19. Всяка функция, която е непрекъсната в интервал, притежава примитивна в този интервал.

Задача 20. Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в интервала Δ, а функциите $\varphi : S \to \Delta$, $\psi : S \to \Delta$ ($S \subset \mathbf{R}$) са диференцируеми. Да се докаже, че функцията $\Phi : S \to \mathbf{R}$, дефинирана със:

а) $\Phi(s) = \displaystyle\int_a^{\psi(s)} f(t)\,dt \quad (a \in \Delta)$; б) $\Phi(s) = \displaystyle\int_{\varphi(s)}^{a} f(t)\,dt \quad (a \in \Delta)$;

в) $\Phi(s) = \displaystyle\int_{\varphi(s)}^{\psi(s)} f(t)\,dt$,

е диференцируема, и производната ѝ да се изрази чрез функцията f и производните на функциите φ и ψ.

Задача 21°. Да се намерят производните на функциите:

а) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$; б) $F(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\cos t}{t}\,dt$;

в) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x} \frac{dt}{\ln t}$; г) $F(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{1} \frac{e^t}{t}\,dt$.

Следващите елементарни свойства на определените интеграли се използват често.

Ако функцията f е интегрируема в интервала $[a, b]$ и λ е константа, функцията λf е също интегрируема и

(20) $$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ако функциите f и g са интегрируеми в интервала $[a, b]$, функцията $f + g$ е също интегрируема и

(21) $$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ако функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и F е една нейна примитивна, то

(22) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Удобно е разликата $F(b) - F(a)$ да се означава с $F(x)\big|_a^b$. По този начин пресмятането на един определен интеграл схематично се представя така:

(23) $$\int_a^b f(x)\,dx = \cdots = F(x)\Big|_a^b.$$

Многоточието означава, че се пресмята неопределеният интеграл $\int f(x)\,dx$ (като по време на пресмятането продължаваме да пишем долната и горната интеграционна граница a и b).

Задача 22°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

г) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\displaystyle\int_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; е) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$;

ж) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$; з) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$; и) $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$.

Ако функцията f е интегрируема в интервала $[a,\, b]$, а функцията g е диференцируема в този интервал и производната ѝ е интегрируема, целесъобразно е символът $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ да се дефинира по следния начин:

(24) $$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Означението (24) дава възможност свободно да се прилага схемата (23) и когато неопределеният интеграл трябва да се пресмята чрез внасяне под диференциала.

Задача 23. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{b-x}$ $(0 < a < b)$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$; в) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

г) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; д) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$ $(a > 0)$;

ж) $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; з) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$; и) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

й) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$; к) $\displaystyle\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; л) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$;

м) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\,dx$; н) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$;

о) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; п) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$;

р) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}$ $(0 < \alpha,\ \beta < 1)$.

Задача 24. Да се докаже, че при $m,\ n \in \mathbf{I}$:

а) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \pi & \text{при } m = n; \end{cases}$$

б) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \pi & \text{при } m = n \neq 0; \end{cases}$$

в) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$$

(*ортогоналност на тригонометричната система*).

Задача 25. Нека a_ν $(\nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, n)$ и b_ν $(\nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ са произволни константи, а функцията $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е дефинирана със

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Да се докаже, че

а) $\displaystyle a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos \nu x\,dx$ $\quad(\nu = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$;

б) $\displaystyle b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin \nu x\,dx$ $\quad(\nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$.

Задача 26*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}\,dx \quad (n=0,\,1,\,\ldots)$ (Д и р и х л е);

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx \quad (n=0,\,1,\,\ldots)$ (Ф е е р).

§ 3. Интегриране по части при определените интеграли

Ако функциите f и g са диференцируеми в интервала $[a,b]$ и производните им са непрекъснати, в сила е равенството

(25) $$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x),$$

което се нарича *правило за интегриране по части при определените интеграли.*

Задача 27. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx;$

в) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x};$ г) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3\sin x\,dx;$

д) $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx;$ е) $\displaystyle\int_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0);$

ж) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx;$ з) $\displaystyle\int_1^{e} \ln^3 x\,dx.$

Задача 28. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad (n\in\mathbb{N});$ б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad (n\in\mathbb{N});$

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx \quad (m,\,n\in\mathbb{N}).$

Задача 29*. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x\cos(\alpha+2)x\,dx = 0 \quad (\alpha>0);$

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x\sin(\alpha+2)x\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \quad (\alpha>0);$

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos(\alpha+2)x\,dx = -\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha+1} \quad (\alpha>0);$

г) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\sin(\alpha+2)x\,dx = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha+1} \quad (\alpha>0).$

Задача 30*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\,dx \quad (n\in\mathbb{N});$

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\,dx \quad (n\in\mathbb{N}).$

Задача 31. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx \quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots);$

б) $\int\limits_0^1 x^\alpha (\ln x)^n\,dx \quad (\alpha > 0,\ n = 0, 1, 2, \dots);$

в) $\int\limits_0^1 x^m (1-x)^n\,dx \quad (m,\ n = 0, 1, 2, \dots).$

Задача 32. Нека функциите f и g са $n+1$ $(n = 0, 1, \dots)$ пъти диференцируеми в интервала $[a, b]$, а $f^{(n+1)}$ и $g^{(n+1)}$ са непрекъснати в този интервал. Да се докаже, че:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu f^{(\nu)}(x) g^{(n-\nu)}(x)\Big|_a^b$$

$$+ (-1)^{n+1} \int\limits_a^b g(x)\,df^{(n)}(x).$$

Задача 33. Нека P_n е n-тият полином на Льожандър $(n = 0, 1, \dots)$. Да се докаже, че:

а) $\int\limits_{-1}^{1} P(x) P_n(x)\,dx = 0,$

където P е произволен полином с $\deg P < n$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \dfrac{2.4^n (n!)^2}{2n+1} & \text{при } m = n \end{cases}$

(*ортогоналност на полиномите на Льожандър*).

Задача 34. Нека a_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n$) са произволни константи, а функцията $\varphi : \mathbb{R} - \mathbb{R}$ е дефинирана със

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(x).$$

Да се докаже, че

$$a_\nu = \frac{2\nu+1}{2.4^\nu (\nu!)^2} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) P_\nu(x)\,dx.$$

Задача 35*. Нека функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е $n+1$ пъти диференцируема в интервала Δ $(n = 0, 1, \dots)$, $f^{(n+1)}$ е непрекъсната в Δ, а ξ и x са произволни точки от Δ. Тогава

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu + \frac{1}{n!}\int\limits_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

(*формула на Тейлър с интегрална форма на остатъка*).

§ 4. Интегриране чрез субституции при определените интеграли

Вече видяхме, че пресмятането на определени интеграли често може да се сведе до пресмятане на неопределени интеграли. При пресмятането на последните обаче понякога е удобно да се направи една или друга субституция. Читателят би могъл да направи тази субституция, да пресметне съответния неопределен интеграл, да се върне към старата променлива и след това отклонение да завърши пресмятанията по схемата (23). Пресмятанията обаче могат да се направят и малко по-сръчно, като се използува следната теорема за смяна на променливите при определените интеграли.

Нека функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в интервала Δ, $a \in \Delta$, $b \in \Delta$, а функцията $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Delta$ е диференцируема, притежава непрекъсната производна и удовлетворява условията

(26)
$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Тогава

(27)
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Да отбележим изрично, че за разлика от теоремата за смяна на променливите при неопределените интеграли тук не се предполага нито обратимост на функцията φ, нито пък (в случай че тя е обратима) диференцируемост на обратната функция. Няма никаква нужда също така от предположението $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$, нито пък да са в сила неравенствата $a < b$ или $\alpha < \beta$. Нещо повече, формулата (27) на пръв поглед даже изглежда малко парадоксална, защото в лявата й страна фигурират само стойностите на f в интервала $[a, b]$, а в дясната могат да фигурират и стойности на f за стойности на аргумента от $\Delta \setminus [a, b]$.

На практика смяната на променливите при определените интеграли се извършва така: Търсим подходяща субституция

(28)
$$x = \varphi(t)$$

за пресмятане на неопределения интеграл $\int f(x)\,dx$ (такива субституции бяха посочени в гл. IX). В (28) заместваме x със „старите" интеграционни граници a и b и от така получените уравнения намираме „новите“ интеграционни граници, т. е. числата α и β, удовлетворяващи (26). От (28) след диференциране намираме и равенството

$$dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{29}$$

Сега в интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ заместваме x и dx с равните им от (28) и (29), сменяме старите граници с новите и получаваме (27); по-нататък пресмятанията продължават по схемата (23), без да има нужда да се връщаме към старата променлива x.

Задача 36. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$; в) $\displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$; д) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$; е) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; з) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; и) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$;

й) $\displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,dx$ $\quad (a>0,\ n\in\mathbb{N})$;

к) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ $\quad (a.b\neq 0,\ |a|\neq|b|)$.

Ако функцията $f:\Delta\to\mathbb{R}$ е интегруема във всеки затворен подинтервал на интервала Δ и $a\in\Delta$, функцията $F:\Delta\to\mathbb{R}$, дефинирана със

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (x\in\Delta), \tag{18}$$

е непрекъсната в Δ. Ето защо в сила е равенството

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt \quad (b\in\Delta). \tag{30}$$

Задача 37. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ $\quad (0<r<1)$;

б) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ $\quad (0<r<1)$;

в) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$ $\quad (0<b<a)$; г) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a+b\sin x}$ $\quad (0<b<a)$;

д) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

Задача 38. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ $\quad (a>0,\ b>0)$.

Задача 39. Нека функцията $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната. Да се докаже, че:

а) ако f е нечетна, в сила е равенството

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=0;$$

б) ако f е четна, в сила е равенството

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Запазват ли тези твърдения валидността си при по-слабото предположение за интегруемост на f в $[-a,a]$?

Задача 40°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (a > 0,\ b > 0)$; б) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sin^8 x + \cos^8 x}$.

Задача 41. Да се докаже, че

$$\int_0^a e^{ax} e^{-x^2}\, dx = 2e^{\frac{a^2}{4}} \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-x^2}\, dx \quad (a \text{ — константа}).$$

Задача 42. Нека функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и периодична с период T. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$; б) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx$.

Вярно ли е твърдението при по-слабото предположение за интегруемост на f във всеки затворен интервал?

Задача 43°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{k\pi} \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx \qquad (k \in \mathbf{I})$;

б) $\displaystyle\int_0^{k\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} \qquad (0 < b < a,\ k \in \mathbf{I})$.

Задача 44. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$

за произволна непрекъсната функция $f : [0,\ a] \to \mathbf{R}$;

б) $\displaystyle\int_0^a x f(x)\, dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x)\, dx$,

$$\int_0^a x^3 f(x)\, dx = \frac{3}{2} a \int_0^a x^2 f(x)\, dx - \frac{1}{4} a^3 \int_0^a f(x)\, dx,$$

. . . .

за произволна непрекъсната функция $f : [0,\ a] \to \mathbf{R}$ със свойството $f(a - x) = f(x)$ за $x \in [0,\ a]$;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx$

за произволна непрекъсната функция $f : [0,\ 1] \to \mathbf{R}$.

Задача 45°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \quad (a > 0,\ b > 0)$.

Задача 46*. Нека $0 < b < a$ и $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$. Да се докаже равенството

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x}}$$

(Г а у с).

§ 5. Неравенства и определени интеграли

Задача 47°. Нека функцията $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема и приема неотрицателни стойности в едно гъсто подмножество на $[a,\ b]$. Да се докаже, че:

а) ако $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, то $f(\xi) = 0$ за всяка точка ξ от $[a,\ b]$, в която f е непрекъсната;

б) ако съществува точка ξ от $[a,\ b]$, в която f е непрекъсната и $f(\xi) > 0$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

Задача 48°. Ако функциите $f : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a,\ b] \to \mathbf{R}$ са интегрируеми, удовлетворяват неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на $[a, b]$ и съществува точка

ξ от $[a, b]$, в която f и g са непрекъснати и $f(\xi) < g(\xi)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 49°. Да се докажат неравенствата:

а) $1 < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e$; б) $2^{-q} < \int_0^1 \frac{dx}{(x^p+1)^q} < 1 \quad (p, q > 0)$;

в) $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\pi}{2}$; г) $\frac{43}{30} < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < \frac{43}{30} + \frac{e-1}{10}$;

д) $\frac{9}{10} < \int_0^1 \cos x^2\,dx < \frac{9}{10} + \frac{1}{216}$.

Задача 50*. Да се докаже, че

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

(У о л и с).

Задача 51*. Да се докаже, че за всяко естествено n съществува число θ със свойството $0 < \theta < 1$, за което

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\,e^{\frac{\theta}{12n}}$$

(С т и р л и н г).

Нека функциите $f : [a, b] \to \Delta$, където Δ е интервал и $\varphi : [a, b] \to [0, \infty)$ са интегрируеми, като при това

(31) $$\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0.$$

Тогава

(32) $$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \in \Delta.$$

Ако предположим допълнително, че f е непрекъсната в $[a, b]$, съществува точка ξ от $[a, b]$, за която

(33) $$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ако в (33) положим $\varphi(x) = 1$, се получава

(34) $$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

Равенствата (32) — (34) се наричат теорема за средните стойности в интегралното смятане или по-точно първа теорема за средните стойности. Числото

(35) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

се нарича *средна стойност* на функцията f в интервала $[a, b]$.

Ако функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема, в сила е неравенството

(36) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Задача 52°. Ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е интегрируема във всеки затворен подинтервал на интервала Δ, $F \subset \mathbf{R}$ е затворено множество и за всеки две различни точки a и b от Δ средната стойност (35) на f в интервала $[a, b]$ принадлежи на F, то $f(\xi) \in F$ за всяка точка ξ от Δ, в която f е непрекъсната.

Задача 53. От формулата на Тейлър с интегрална форма на остатъка (зад. 35) да се изведе формулата на Тейлър с остатък във формата на Лагранж (зад. 170, гл. VIII).

Задача 54*. Нека функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ са интегрируеми, а p и q са положителни числа, за които $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогава

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

(Х ь о л д е р).

Задача 55*. Нека функциите $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ и $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ са интегрируеми, а p е произволно число, $p \geqq 1$. Тогава

$$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(М и н к о в с к и).

Задача 56. Нека функцията $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ притежава непрекъсната първа **производна в** $[0, 1]$. Да се докажат неравенствата:

а) $$(f(1)-f(0))^2 \leqq \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx;$$

б) $$|f(x)| \leqq \int_0^1 |f'(x)|\,dx + \int_0^1 |f(x)|\,dx \text{ за всяко } x \text{ от } [0, 1];$$

в) $$|f(x)|^p \leqq 2^{p-1}\left(\int_0^1 |f'(x)|^p\,dx + \int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)$$

$(p > 1)$ за всяко x от интервала $[0, 1]$.

Задача 57*. Нека функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ притежава непрекъсната втора производна в интервала $[a, b]$ и h е такова число, че $0 < h < \dfrac{b-a}{2}$. Да се докаже неравенството

$$\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \leqq 2^p h^{p-1}(b-a)\int_a^b |f''(x)|^p\,dx + \frac{2^{2p}}{h^p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx.$$

Задача 58*. Ако функцията $\varphi:\Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и изпъкнала в интервала Δ, а функцията $f:[a, b] \to \Delta$ $(a < b)$ е интегрируема, то

а) $$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx;$$

б) $$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx;$$

в) $$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad (a,\ b \in \Delta).$$

Задача 59*. Нека функцията $\varphi:\Delta \to \mathbf{R}$ е два пъти диференцируема в интервала Δ, втората ѝ производна е непрекъсната и е изпълнено неравенството в) от зад. 58 за всеки две точки a и b от Δ, за които $a < b$. Тогава функцията φ е изпъкнала в Δ.

Задача 60*. Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е монотонна и притежава непрекъсната първа производна, а функцията $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната, съществува точка ξ от $[a, b]$, за която

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

(*втора теорема за средните стойности*).

Задача 61. Да се докажат неравенствата:

а) $$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \qquad (a > 0,\ b > 0);$$

б) $$\left|\int_0^a \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx\right| \leqq 2\alpha + \frac{2}{a} \qquad (\alpha > 0,\ a > 0);$$

в) $$\left|\int_a^b e^{-x}\sin\alpha x\,dx\right| \leqq \frac{2}{\alpha}(e^{-a}+e^{-b}) \qquad (\alpha > 0);$$

г) $$\left|\int_a^b e^{x}\cos\alpha x\,dx\right| \leqq \frac{2}{\alpha}(e^{a}+e^{b}) \qquad (\alpha > 0).$$

Задача 62*. Да се докаже, че числото e е трансцендентно (Е р м и т).

§ 6. Пресмятане на граници чрез интеграли

Нека функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ интегрируема. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всеки начин на подразделяне

(37) $$\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали с

(38) $$x_\nu - x_{\nu-1} < \delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

и при всеки избор на точките

(39) $$\xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

да е в сила

(40) $$\left| \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

На практика най-често се използва следното следствие от това твърдение. Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегрируема и $\xi_{n,\nu}$ са числа, за които

(41) $$\xi_{n,\nu} \in \left[a + \frac{\nu-1}{n}(b-a),\ a + \frac{\nu}{n}(b-a)\right] \qquad (n \in \mathbb{N},\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогава

(42) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_{n,\nu}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Числата $\xi_{n,\nu}$ в (41) обикновено се избират да съвпадат с някой от краищата на съответния интервал.

Задача 63. Да се намерят границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right);$

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right);$

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right);$

г) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$

д) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \qquad (p > 0);$

е) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right);$

ж) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2+\cos\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{2+\cos\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \frac{1}{2+\cos\frac{n\pi}{n}}\right);$

з) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \Big(\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)(n+3)} + \cdots + \sqrt{(n+n)(n+n+1)}\Big);$

и) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2}}{n+1} + \frac{2\sqrt[n]{2^2}}{2n+1} + \cdots + \frac{n\sqrt[n]{2^n}}{n.n+1}\right).$

§ 7. Интегриране на редици и редове от функции

Нека функциите

(43) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

са интегрируеми в интервала $[a, b]$ и редицата (43) е равномерно сходяща в този интервал. Тогава граничната функция е интегрируема и

(44) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Наред с тази теорема понякога е удобно да се използва и следното твърдение:

Ако функциите (43) са интегрируеми в интервала $[a, b]$, редицата (43) е сходяща в интервала $[a, b]$, граничната функция на тази редица е интегрируема и съществува константа C, за която

(45) $$|f_n(x)| \leqq C$$

за всяко естествено n и за всяко x от $[a, b]$, в сила е (44).

Читателят лесно ще съобрази как изглеждат аналозите на тези теореми за редове от функции.

Задача 64. Да се посочи пример на редица (43) от непрекъснати в интервала $[0, 1]$ функции, която е сходяща навсякъде в този интервал, граничната функция е непрекъсната и (въпреки това) (44) не е налице.

Задача 65. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!};$ б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$

в) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2}$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right\}$ $(0<k<1)$;

е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$

$(0<k<1)$.

Интегралите от зад. 65 д) и е) се наричат *пълни елиптични интеграли*.

От зад. 115, гл. IV следва, че ако a и b са положителни числа с $a \geqq b$, редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирани с $a_1 = a$, $b_1 = b$ и $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ са сходящи и имат обща граница. Тя се нарича *средно аритметико-геометрично* и се бележи с $\mu(a,b)$. От същата задача следва, че $a \geqq \mu(a,b) \geqq b$.

Задача 66*. Да се докаже, че:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2\mu(a,b)}$ $\quad(a \geqq b > 0)$ (Г а у с);

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+k_n)$ $\quad(0<k<1)$,

където редицата $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинира с

$$k_n = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и $k_0 = k$ (Л а н д е н).

Задача 67. Да се докаже, че:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$; $\qquad$ б) $\int\limits_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$;

в) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a$, $\quad |a|<1$.

§ 8. Дължини на равнинни дъги

Ако функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ е диференцируема и производната ѝ е непрекъсната, кривата с уравнение

(46) $$y = f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

има дължина l, която се дава с формулата

(47) $$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Задача 68. Да се намерят дължините на кривите с уравнения:

а) $y = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ (*семикубична парабола*) в интервала $[0, 4]$;

б) $y = \frac{x^2}{2p}$ $\quad(p > 0)$ $\quad$ (*парабола*) в интервала $[0, p]$;

в) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $\quad(a > 0)$ $\quad$ (*верижка*) в интервала $[0, a]$.

Ако функциите $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ са диференцируеми и производните им са непрекъснати, кривата с параметрични уравнения

(48) $$x = f(t), \quad y = g(t) \qquad (t \in [a, b])$$

има дължина l, която се дава с формулата

(49) $$l = \int\limits_a^b \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt.$$

Задача 69. Да се намерят дължините на кривите с параметрични уравнения:

а) $x = a\cos t$, $\quad y = a\sin t$ $\quad(a > 0)$ $\quad$ (*окръжност*) в интервала $[0, 2\pi]$;

б) $x = a\cos^3 t$, $\quad y = a\sin^3 t$ $\quad(a > 0)$ $\quad$ (*астроида*) в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ (*циклоида*) в интервала $[0, 2\pi]$;

г) $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $(a > 0)$ (*еволвента на окръжността*) в интервала $[0, 2\pi]$;

д) $x = \mathrm{ci}(t)$, $y = \mathrm{si}(t)$ в интервала $[1, 2]$;

е) $x = a \sin t$, $y = b \cos t$ $(0 < b < a)$ (*елипса*) в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ако функцията $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$ е диференцируема и производната ѝ е непрекъсната, кривата с полярно уравнение

(50) $$\rho = f(\theta) \qquad (\theta \in [\alpha, \beta])$$

има дължина l, която се дава с формулата

(51) $$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta) - f'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Задача 70. Да се намерят дължините на кривите с полярни уравнения:

а) $\rho = a\theta$ $(a > 0)$ (*спирала на Архимед*) в интервала $[0, 2\pi]$;

б) $\rho = ae^{m\theta}$ $(a > 0, m > 0)$ (*логаритмична спирала*) в интервала $[0, 2\pi]$;

в) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ (*кардиоида*) в интервала $[0, \pi]$;

г) $\rho = a\cos\theta + b$ $(a > 0, b > 0)$ (*охлюв на Паскал*) в интервала $[0, \pi]$.

§ 9. Лица на равнинни фигури

Нека функциите $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ са непрекъснати и удовлетворяват неравенството

(52) $$f(x) \leqq g(x)$$

за всяко x от $[a, b]$. Множеството T на всички точки (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата

(53) $$\begin{cases} a \leqq x \leqq b, \\ f(x) \leqq y \leqq g(x), \end{cases}$$

се нарича криволинеен трапец, определен от функциите f и g. Лицето $\mu(T)$ на криволинейния трапец (53) се дава с формулата

(54) $$\mu(T) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Задача 71. Да се намерят лицата на фигурите, определени в декартови координати от неравенствата:

а) $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x^2$; б) $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \sin x$;

в) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$, $\sin x \leqq y \leqq \cos x$.

Задача 72. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(a > 0)$; б) $y = x^2$, $x + y = 2$;

в) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$;

д) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ $(a > 0)$.

Нека функциите $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и диференцируеми с изключение на краен брой точки и производните им са непрекъснати и ограничени. Нека (48) е *проста затворена крива*, т. е.

(55) $$f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b),$$

и от $f(t') = f(t'')$, $g(t') = g(t'')$ $(t', t'' \in (a, b))$ следва $t' = t''$. Тогава лицето на частта T от равнината, заградена от кривата (48), се дава с формулата

(56) $$\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\int_a^b (f(t)g'(t) - f'(t)g(t))\, dt\right|.$$

Задача 73. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) от *хипоциклоидата* $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(-2\sin t + \sin 2t)$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$;

б) от *еволютата на елипсата* $x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$ $(a > 0, b > 0, a > b, t \in [0, 2\pi])$;

в) от *астроидата* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$;

г) от *циклоидата* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$ и правата $y = 0$.

За произволна непрекъсната функция $f: [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$, под сектор, определен от функцията f, се разбира множеството S на всички точки от равнината с полярни координати (ρ, θ), за които са изпълнени неравенствата

(57) $$\begin{cases} \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \\ 0 \leqq \rho \leqq f(\theta). \end{cases}$$

Лицето $\mu(S)$ на сектора (57) се дава с формулата

(58) $$\mu(S) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta.$$

Задача 74. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите с полярни уравнения:

а) $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ $(a > 0)$ (*лемниската на Я. Бернули*);

б) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ (*кардиоида*);

в) $\rho = a\sin 3\theta$ $(a > 0)$ (*трилистник*);

г) $\rho = a\cos\theta + b$ $(0 < a < b)$ (*охлюв на Паскал*).

Задача 75. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(a > 0)$ (*лемниската на Я. Бернули*);

б) $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$ (*Декартов лист*);

в) $(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ $(a > 0,\ b > 0)$; (*подера на елипсата*).