УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА,
СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

Михаил Константинов

ИНТЕГРАЛИ

София
2003

Една от целите на обучението по математика е да ни научи „да разкриваме скоби'' – нещо, което може би някога ще ни потрябва. А и да не ни потрябва за нещо конкретно, разкриването на скоби помага за развиване на интелекта. А това вече си струва усилията.

Из математическия фолклор на тема **скоби**.

Анотация Книгата е преработено и разширено издание на учебника [6]. Разглеждат се дефинициите, основните факти и техниките за пресмятане на неопределен и определен интеграл. Разгледани са интеграли от рационални, ирационални и трансцендентни функции.

При излагане на теорията на определения интеграл като водещо е избрано понятието *интеграл по Нютън*. Това е направено както с оглед на по–лесното и естествено възприемане на материала, така и поради обстоятелството, че за практически всички важни за инженерната практика функции обобщеният интеграл по Нютън съществува [6]. Аналогичен подход е възприет и в учебника [13]. Задълбочен увод в темата представлява и монографията [9]. Сред най-пълните колекции от формули в областта на интегралите и редовете са справочниците [2, 11].

Книгата е предназначена за студенти от университетите и другите технически и икономически висши училища, както и за специалистите в областта на техническите и природните науки. Тя може да се използва и като учебник по съответните раздели от дисциплината „Математически анализ 1" (или „Математика 2 част") от курса по математика на техническите и икономическите университети.

За четене на книгата не се изискват знания, надхвърлящи училищния курс по математика. В частност предполагаме, че читателят е запознат с понятията полином, числова функция, граница и производна. Действително, ако някой не е запознат с тези понятия, то едва ли ще му се наложи да се занимава с интеграли. Впрочем, за решаване на някои от упражненията и задачите се изискват и знания в обема на курса по математика за първа година на техническите и икономическите университети.

Съдържание

Глава 1

УВОД

В тази книга са разгледани последователно въпросите, свързани с понятията неопределен интеграл и определен интеграл по Нютън и по Риман, основните методи за интегриране и техниките за интегриране на рационални, ирационални и трансцендентни функции. Разгледани са също двойни интеграли, криволинейни интеграли и интеграли по повърхнина. Накратко са разгледани някои схеми за числено интегриране.

Интегрирането е класическа област на математическия анализ и е било обект на интензивни изследвания, особено през XVIII и XIX в. Почти всички известни математици от онова време имат приноси в интегрирането. По-подробни сведения по въпросите за интегрирането могат да се намерят както в учебниците по математически анализ [4, 5, 8, 10, 12, 9], така и в различните справочници и сборници [1, 2, 3, 7, 11].

В книгата са избягвани подробни доказателства на всички използвани твърдения, т.е. тя има предимно справочен характер. Впрочем, самата тематика тук е такава, че една книга, посветена на интегрирането, винаги ще прилича поне малко на сборник с готварски рецепти. Същевременно материалът е илюстриран с помощта на много примери (краят на примерите се отбелязва с $\mathcal{T}$). В края на всеки раздел са дадени упражнения за самостоятелна работа. В някои от упражненията са изложени и резултати с теоретичен характер, така че упражненията следва да се смятат като неразделна част от основния материал. Изобщо, книга като тази трябва да се чете „с лист и молив” за да има читателят някаква полза от четенето.

Допреди 50-тина години (а в някои висши училища у нас и доскоро) интегрирането се смяташе за основна част от курса по математика. От друга страна интегрирането „на ръка”, т.е. без използване на справочници и/или компютри, все повече изглежда като анахронизъм и в много университети по света практически не се изучава. Основание за това е фактът, че повечето (да не кажем всички) интеграли, които един инженер или икономист среща в своята практика, могат да се намерят в специализираните справочници или пък да се решат с използване на съответни компютърни системи. Тогава къде е истината и какъв е смисълът от една книга, посветена на класическите техники за интегриране?

Както винаги, истината е някъде по средата. Вярно е, че един съвременен инженер, икономист и изобщо специалист-нематематик, спокойно може да мине без владеене на техниката на интегриране поради изброените по-горе причини. Но вярно е също така, че:

1. И най-подробният справочник (на хартия или електронен) не съдържа всички формули. Да не говорим за това, че не винаги разполагаме с необходимата книга или пък електронен бележник.

2. Каквато и компютърна система да използваме, и колкото и да ни е мощен компютърът, винаги ще се намерят интеграли, които да не могат да се решат успешно само с натискане на клавишите (друг е въпросът дали бихме се справили с такъв интеграл по какъвто и да е друг начин). Да не говорим за това, че не всички, които се сблъскват с интеграли, разполагат с подходящата компютърна техника и с нужните програми.

3. Дори когато използваме справочник или компютър за да намерим някой интеграл, винаги е по-добре да имаме поне бегла представа за това *как* е бил пресметнат интегралът. Това впрочем важи за всички останали случаи, когато прибягваме до външни средства - таблици, номограми, справочници, компютри и т.н., за да решим конкретна математическа задача. Полезна тук е аналогията със шофирането. Човек може да кара кола (и дори да го прави сравнително добре) без да има и най-малка представа за устройството на автомобила и без дори да знае отпред ли е двигателят и кои са двигателните колела. Но все пак е по-добре да се познава поне малко това устройство. И не само за да шофираме професионално. Всеки, който е закъсвал на пътя, знае каква е разликата.

Има и едно последно съображение, което на математически жаргон се нарича *ползата от разкриване на скоби*. Една от целите на обучението по математика е да ни научи да „разкриваме скоби”, т.е. да усвоим основните техники на математическите операции, които може би някога ще ни потрябват. А и да не ни потрябват точно тези операции, разкриването на скоби (ако сме го усвоили като хората) ще ни е помогнало да развием интелекта си. А това вече си струва усилията.

По традиция, в края на всеки увод авторът прави две неща. Първо благодари на някого, за когото се предполага, че му е помагал при писането, или поне, че не му е пречил много. И второ, извинява се предварително на читателите за възможните печатни грешки. [1]

Традициите трябва да се спазват независимо от това дали ни харесват или не. Затова използвам случая да благодаря на колегите си и на ръководството на

[1] вж. забележката под линия на стр. 35.

УАСГ за коректните служебни отношения и наистина добрите условия за работа. Печатните грешки, които се надявам да са в поносимо количество, са лично мои, още повече, че сам съм набирал текста на компютър с използване на системата Естествено, тя няма никаква вина за въпросните грешки.

Всякакви критични бележки ще бъдат приети с благодарност на адрес: М. Константинов, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски'' 1, 1046 София, e-mail: mmk_fte@uacg.bg

София, юни 2003

ИЗПОЛЗВАНИ ОЗНАЧЕНИЯ

Множеството на реалните числа се означава с $\mathbb{R}$, а $J \subset \mathbb{R}$ е интервал.

Навсякъде в книгата с буквата R (със или без индекси) се означава рационална функция на една или повече променливи, т.е. функция, която може да се представи като отношение на два полинома от съответния брой променливи.

С буквите P, Q, S, T се означават полиноми, а с A, B, C, M, N - константи. Степента на полинома P се означава с $\deg P$.

С малки гръцки букви, както и с малки латински букви от началото на азбуката (a, b, c, d) се означават константи. С буквите x, y, z, t се означават променливи.

С f, g, u, v, w и F, G, H са означени функции.

С буквите m, n, p са означени цели или рационални числа.

Диференциалът на независима променлива или на функция се означава с d, а с $\int f(x)\mathrm{d}x$ и $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ са означени примитивната на функцията f и определеният интеграл по Нютън от f в съответния интервал. С $\mathrm{Int}(f)$ е означен неопределеният интеграл от функцията f, т.е. множеството на всички примитивни на f. Често примитивната на f се означава с F.

Определен интеграл от функцията f в интервала $[a, b]$ (не само в смисъл на Нютън) се означава и с $I(f, [a, b])$.

За краткост и съгласно възприетата традиция термините „примитивна” и „неопределен интеграл” понякога се използват като синоними.

Производната на функцията f се означава с f', а производните от по-висок ред - с $f'', f''', \ldots, f^{(n)}$.

Ако $f : J \to \mathbb{R}$ е функция и $K \subset J$, то с $f|_K$ означаваме свиването на f в K, т.е. функцията $f|_K : K \to \mathbb{R}$ е определена от $f|_K(x) = f(x)$, $x \in K$.

Ако функцията f има лява (съответно дясна) граница в точката x_0, тя се означава с $f(x_0 - 0)$ (съответно с $f(x_0 + 0)$).

С $[x]$ се означава цялата част на неотрицателното число x, т.е. $[x]$ е най-голямото цяло число, ненадвишаващо x.

Определяемите термини са дадени *в курсив*.

Глава 2

НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

2.1 Примитивна и неопределен интеграл

Нека J е интервал и $f : J \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ е зададена функция. Диференцируемата функция $F : J \to \mathbb{R}$ се нарича *примитивна* на функцията f (в интервала J), ако е изпълнено $F' = f$. Примитивната F очевидно е непрекъсната в J (следва от диференцируемостта на F в J).

Ако функцията $F : J \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в интервала J и равенството $F'(x) = f(x)$ е изпълнено навсякъде в J с изключение на краен брой точки x (в които точки F евентуално не е диференцируема), то F се нарича *обобщена примитивна* на f в J. От съображения за пълнота се приема, че ако f има примитивна F, то тя има и обобщена примитивна, съвпадаща с F.

Понякога в определението за обобщена примитивна се допуска условието $F'(x) = f(x)$ да бъде нарушено и за безкрайна редица от стойности x_i на аргумента x. Някои автори наричат „точна примитивна" и „примитивна" това, което ние по-горе нарекохме „примитивна" и „обобщена примитивна". И накрая, възможно е обобщената примитивна да се дефинира без изискването за непрекъснатост. При това се допуска точките x, за които равенството $F'(x) = f(x)$ е нарушено, да са точки на прекъсване на F. За приложенията, обаче, са важни само непрекъснатите примитивни.

Изобщо читателят трябва да е наясно, че макар математиката да е точна наука (всъщност математиката е единствената точна наука), в много области няма единство на термините, много термини са претоварени с различни значения, и т.н. Това впрочем не пречи на математиците да се занимават с науката си, а на останалия свят - да продължава да функционира.

Едно обобщение на понятието примитивна е дадено в упражнение 6 на настоящия раздел.

Ясно е, че не всяка функция f има примитивна, т.е. не всяка функция може да бъде производна на някаква друга функция. Така например, според теоремата на Дарбу (френски математик, 1842-1917), ако функцията $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема, то производната ѝ $F' = f : [a,b] \to \mathbb{R}$ приема всички стойности между числата $f(a)$ и $f(b)$. Следователно функцията f няма примитивна, ако тя има точки на прекъсване от 1 род. Функцията f може да няма примитивна и в други случаи, например ако тя има някои прекъсвания от 2 род.

Пример 1 Функцията $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(това е т.н. *сигнум-функция*, или *знакова функция* защото е равна на знака на аргумента), няма примитивна в интервалите J, съдържащи точката $x = 0$ (по-точно е да се каже, че няма примитивна свиването $\mathrm{sign}|_J$ на sign върху J в случаите $0 \in J$). Същевременно функцията sign има обобщена примитивна F, определена от $F(x) = |x|$, тъй като F е непрекъсната и $F'(x) = \mathrm{sign}(x)$ при $x \neq 0$. В точката $x = 0$ функцията F няма производна.

В същото време функцията $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$G(x) = \begin{cases} -x-1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

удовлетворява равенството $G'(x) = \mathrm{sign}(x)$ при $x \neq 0$, но не е обобщена примитивна, защото има прекъсване при $x = 0$.

Интересно е да се види кои функции имат примитивна. Такива са например непрекъснатите функции (вж. задача 6 от раздел 10). Но една функция може да има прекъсване от 2 род (и в частност може да не е ограничена) и все пак да има примитивна, както е показано в пример 2.

Пример 2 Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{ако} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ако} \quad x = 0 \end{cases}$$

има прекъсване от 2 род при $x = 0$ и не е ограничена в околност на тази точка. Същевременно f има примитивна F, която се дава от

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{ако} \quad x \neq 0 \\ 0 & \qquad\quad x = 0. \end{cases}$$

Примери на функции с прекъсване, които имат обобщена примитивна, са дадени в задачи 19 и 20 на раздел 10.

Необходимо е да се отбележи, че повечето функции с инженерно приложение имат поне обобщена примитивна. Функция, която няма обобщена примитивна, е дадена по-долу в пример 3.

Пример 3 Функцията на Дирихле (немски математик, 1805-1859),

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ е рационално число} \\ 0 & x \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

няма не само примитивна, но и обобщена примитивна.

За пример на функция с една точка на прекъсване, която няма обобщена примитивна, виж задачи 21 и 22 от раздел 10.

Може да се окаже, че функцията $f : J \to \mathbb{R}$ няма примитивна (съответно обобщена примитивна) поради наличие на точки на прекъсване, но свиването на f в някой подинтервал $K \subset J$, който не съдържа въпросните точки, има примитивна (обобщена примитивна). В този случай за краткост казваме, че самата f има съответна примитивна в K.

Ако F и Φ са две примитивни на f, то те могат да се различават само с адитивна константа. Така, ако F е примитивна на f, всяка друга примитивна Φ на f се определя от $\Phi(x) = F(x) + C$, където C е константа.

Множеството на всички примитивни на дадена функция f се нарича *неопределен интеграл* на f и се бележи с $\mathrm{Int}(f)$. Според тази дефиниция всяка функция има определен интеграл! Действително, ако f има примитивна F, то $\mathrm{Int}(f)$ се състои от всички функции, които се отличават от F с адитивна константа и следователно множеството $\mathrm{Int}(f)$ има мощността на множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа. Ако f няма примитивна, то множеството $\mathrm{Int}(f)$ е празно, т.е. $\mathrm{Int}(f) = \emptyset$.

За примитивната F на функцията f е прието означението

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

или съкратено $F = \int f$. Тук f се нарича *подинтегрална функция*, $f(x)\mathrm{d}x$ се нарича *подинтегрален израз*, а $\int$ е *знакът на интеграла.*

Накои автори означават с $\int f$ неопределения интеграл, но тогава се налага да се уточнява какво се разбира например под сума на две множества. Затова ние предпочитаме да използваме означението $\int f$ за някоя от примитивните на f.

Операцията намиране на примитивна на дадена функция се нарича *неопределено интегриране*, или съкратено *интегриране* когато това не води до недоразумения (проблемът е, че с термините „интеграл" и „интегриране" в математиката се означават и други неща). В този смисъл термините „примитивна" и „интеграл" се използват като синоними.

Интегрирането и диференцирането са *взаимнообратни операции* в смисъл, че

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x, \ \int \mathrm{d}F(x) = F(x).$$

Непосредствено се проверява, че ако функциите $f, g : J \to \mathbb{R}$ имат примитивни и α, β са константи, то

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x.$$

2.2 Определен интеграл по Нютън

Нека F е примитивна на f в J и $x_0 \in J$ е фиксирана точка от интервала J. Тогава функцията Φ, определена от $\Phi(x) = F(x) - F(x_0)$, е също примитивна на f в J, която удовлетворява условието $\Phi(x_0) = 0$. За тази примитивна е запазено специално означение, а именно

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(x_0).$$

В подинтегралния израз $f(t)\mathrm{d}t$ променливата t е *няма*, т.е. тя може да се замести с всяка друга променлива, например

$$\int_{x_0}^{x} f(z)\mathrm{d}z = F(x) - F(x_0).$$

Използува се и съкратеното означение $\int_{x_0}^{x} f = F(x) - F(x_0)$.

Не е трудно да построим примитивна Ψ на f, удовлетворяваща условието $\Psi(x_0) = y_0$, където $y_0 \in \mathbb{R}$ е произволно число. Очевидно това е функцията, определена от

$$\Psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ако $a, b \in J$ $(a < b)$, числото

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

се нарича *определен интеграл по Нютън* (английски математик и физик, 1643-1727) от функцията f в интервала $[a, b]$. Определеният интеграл се записва и като

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b .$$

Използва се и съкратеният запис $\int_a^b f$, който даже е по-логичен доколкото изразът $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ всъщност не зависи от x и x може да бъде заменено с всяка друга буква.

Определен интеграл може да се въведе и по друг начин, например по Риман (немски математик, 1826-1866), по Стилтес (холандски математик, 1856-1894), по Лебег (1875-1941) и т.н. (вж. част 2 от книгата). Когато съществуват които и да са два различни определени интеграла от една и съща функция в даден интервал, те са равни помежду си. Възможно е обаче някои от определените интеграли да не съществуват. Това именно е довело до въвеждането на различни понятия за определен интеграл.

Изобщо, на дадена функция $f: J \to \mathbb{R}$ и на даден подинтервал $[a, b] \subset J$ можем да съпоставим величината

$$I = I(f, [a, b]).$$

Тази величина ще наричаме *определен интеграл* от функцията f в интервала $[a, b]$, ако са изпълнени някои условия, например

1) Линейност: Ако $f, g : J \to \mathbb{R}$ и α, β са числа, то

$$I(\alpha f + \beta g, [a, b]) = \alpha I(f, [a, b]) + \beta I(g, [a, b])$$

където функцията $\alpha f + \beta g$ е определена от $x \to \alpha f(x) + \beta g(x)$.

2) Адитивност: Ако $c \in [a, b]$, то

$$I(f, [a, c]) + I(f, [c, b]) = I(f, [a, b]).$$

В частност, ако $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ е разбивка на интервала $[a, b]$, то

$$I(f, [a, b]) = \sum_{k=0}^{n-1} I\left(f, [x_k, x_{k+1}]\right).$$

Условията 1) и 2) не са достатъчни за съдържателното дефиниране на понятието интеграл, тъй като те са в сила например в тривиалния случай, когато сме положили $I(f, [a, b]) = 0$. Поради това се въвежда и следното условие.

3) Нетривиалност: Ако означим с $\mathbf{1}$ постоянната функция $x \to 1$, то

$$I(\mathbf{1}, [a, b]) = b - a.$$

Лесно се проверява, че определеният интеграл по Нютън удовлетворява горните три условия.

Самото понятие определен интеграл по Нютън може да се обобщи така, че да обхване практически всички важни случаи както в инженерната практика, така и в останалите приложни науки. Действително, определеният интеграл по Нютън в изложената по-горе форма не съществува, ако функцията f няма примитивна в интервала $[a, b]$ и в частност, ако f има прекъсване от първи род. Обаче такива функции се използват понякога в математическото моделиране. Поради това е въведено и следното обобщение на понятието определен интеграл по Нютън.

Нека функцията f има обобщена примитивна F в интервала $[a, b]$, като равенството $F'(x) = f(x)$ е нарушено само в точките $x_0, x_1, \ldots x_n \in [a, b]$ $(x_k < x_{k+1})$ на прекъсване на f, в които $F'(x_k)$ не съществува. Напомняме, че в същото време f може да има точки на прекъсване от втори род, в които обаче $F'(x)$ съществува и е равно на $f(x)$ (вж. пример 2).

В този случай числото

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

се нарича *обобщен интеграл по Нютън* от функцията f в интервала $[a,b]$.

Горното определение се оправдава от следната конструкция, която „отстранява" прекъсванията, пречещи на обикновения (необобщен) определен интеграл по Нютън да съществува.

Винаги можем да смятаме, че $a = x_0$ и $x_n = b$, тъй като в противен случай просто ще прибавим една или две точки към съвкупността $\{x_k\}$.

Да разгледаме функциите $f_k : (x_k, x_{k+1}) \to \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, определени от $f_k(x) = f(x)$, $x \in (x_k, x_{k+1})$. Тези функции са непрекъснати и следователно съществуват примитивните $F_k : (x_k, x_{k+1}) \to \mathbb{R}$, такива че $F_k' = f_k$. Да предположим, че съществуват границите

$$F_k(x_k + 0) = A_k,\ F_k(x_{k+1} - 0) = B_k.$$

Тогава числото

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = B_k - A_k$$

ще наричаме *обобщен интеграл по Нютън* от функцията f в интервала $[x_k, x_{k+1}]$.

Съгласно свойствата 1)-3) можем да определим обобщения интеграл по Нютън от f в интервала $[a,b]$ като

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} I_k.$$

Остава да покажем, че съществува обобщена примитивна F на f в интервала $[a,b]$, такава че $I = F(b) - F(a)$.

За да построим обобщената примитивна като непрекъсната функция ще „слепим" графиките на функциите $\Phi_k = F_k + C_k$ чрез подходящ избор на адитивните константи C_k. Преди всичко нека доопределим функциите F_k в затворените интервали $J_k = [x_k, x_{k+1}]$ като положим $F_k(x_k) = A_k$, $F_k(x_{k+1}) = B_k$. Така функциите F_k и Φ_k са непрекъснати в J_k и $\Phi'(x) = f(x)$ при $x \in (x_k, x_{k+1})$.

Условията за слепване на графиките на функциите $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ в точките $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ са $\Phi_j(x_{j+1}) = \Phi_{j+1}(x_{j+1})$ $(j = 0, 1, \dots, n-2)$, откъдето $F_j(x_{j+1}) + C_j = F_{j+1}(x_{j+1}) + C_{j+1}$ и

$$C_{j+1} = C_j + B_j - A_{j+1};\ j = 0, 1, \dots, n-2.$$

Ако изберем C_0 произволно, от последната рекурентна зависимост получаваме

$$C_k = C_0 + \sum_{p=0}^{k-1} B_p - \sum_{q=1}^{k} A_q,\ k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Така графиките на Φ_k се слепват и

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \Phi_{n-1}(b) - \Phi_0(a) = B_{n-1} + C_{n-1} - A_0 - C_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(B_k - A_k).$$

При това функцията $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, определена от $F(x) = \Phi_k(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, е непрекъсната, и

$$F'(x) = \Phi'_k(x) = f_k(x) = f(x),\ x \in (x_k, x_{k+1}).$$

Следователно F е обобщена примитивна на f в $[a, b]$ и тъй като $F(a) = \Phi_0(a)$, $F(b) = \Phi_{n-1}(b)$, то $I = F(b) - F(a)$.

Горната конструкция е в сила както в случаите, когато x_k са точки на прекъсване от първи род, така и когато някои от границите $f(x_k \pm 0)$ не са крайни (вж. задачи 19 и 20 от раздел 10).

В досегашните разглеждания приемахме, че $a < b$. Нищо не пречи да разпространим определението за (обобщен) определен интеграл по Нютън за случая $a \geq b$. Тогава в частност имаме

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

където F е (обобщена) примитивна на f в $[a, b]$.

В горните определения думата „обобщен” обикновено се изпуска. Така определеният интеграл по Нютън има важното практическо предимство, че се дефинира в термините на примитивната, която често има ясен физически или геометричен смисъл и в много случаи може да се намери в явен вид.

Ще отбележим накрая, че когато определеният интеграл е въведен по друг начин, например по Риман (вж. част 2 от книгата), за функция f, която има обобщена примитивна F, то зависимостта $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ се нарича *формула на Нютън-Лайбниц* в чест на откривателите на диференциалното и интегралното смятане Нютън и Лайбниц (немски математик, 1646-1716).

2.3 Елементарни функции

Да предположим, че сложната функция f е зададена с някакъв аналитичен израз $x \to f(x)$ чрез *елементарни функции* (т.е., че $f(x)$ се получава в резултат на аритметични действия над елементарни функции и/или чрез заместване на едни елементарни функции в други), например

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

В този случай се казва още, че f е *суперпозиция* от елементарни функции. Въпросът сега е кои функции ще наречем елементарни. Това наименование, впрочем, е условно и не означава непременно, че въпросните функции са елементарни в житейския смисъл на думата.

Обикновено към елементарните функции се отнасят *степенната функция*

$$x \to x^d\ (d \in \mathbb{R})$$

показателната функция

$$x \to e^x = \exp(x)$$

логаритмичната функция

$$x \to \log x$$

както и *тригонометричните* и *обратните тригонометрични функции*, например

$$x \to \sin x,\ x \to \cos x,\ x \to \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \to \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

и

$$x \to \arcsin x,\ x \to \arccos x,\ x \to \arctan x,\ x \to \operatorname{arccot} x.$$

Важен клас елементарни функции са *хиперболичните функции* (хиперболичен синус, хиперболичен косинус, хиперболичен тангенс и хиперболичен котангенс), които се дефинират с помощта на показателната функция както следва

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},\ \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Обратните хиперболични функции се дефинират чрез логаритми

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ \operatorname{arsinh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \end{aligned}$$

За разлика от диференцирането, което се извършва по прости правила и по принцип води да намиране на израз за производната $f'(x)$ в елементарни функции (ако самата функция се изразява в елементарни функции), интегрирането не само е по-трудно, но и понякога не може да се извърши в елементарни функции дори при много прости на вид подинтегрални функции. Често в такива случаи решението, т.е. примитивната F, се търси в т.н. *специални функции*, каквито са тези от пример 4 по-долу. Естествено, възможността за интегриране на конкретна функция f в елементарни функции зависи от това кои функции сме приели за елементарни (някои автори причисляват към елементарните функции и някои от специалните функции).

Пример 4 Интегралите

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t;\ x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Li}(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t};\ x \in (0,1) \end{aligned}$$

не могат да се изразят в елементарни функции. Те са специални функции, наречени *интегрален синус* и *интегрален логаритъм*.

Изобщо, интегрирането в много голяма степен е изкуство. За щастие примитивните на много функции са дадени в специални справочници, например [3, 2, 7]. Също така през последните години бяха разработени мощни компютърни системи за нечислени (символни) пресмятания, които дават възможност за интегриране, включително в специални функции [14, 15]. Недостатък на тези системи е недостатъчната им (засега!) универсалност и бързодействие, дори когато се използва мощна техника.

2.4 Упражнения

1. Пресметнете обобщения определен интеграл по Нютън

$$\int_a^b \mathrm{sign}(x)\mathrm{d}x$$

от сигнум-функцията sign (пример 1), където $a < b$, във всеки от случаите $a \geq 0$, $b \leq 0$ и $ab < 0$.

2. Докажете следните свойства на (обобщения) определен интеграл по Нютън:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x &= \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

където α и β са константи и за всички изписани интеграли се предполага, че съществуват.

3. Дайте пример за две функции f и g, които нямат обобщена примитивна, но за които функцията $f + g$ е непрекъсната.

4. Нека функциите u и v са диференцируеми в интервала J, нека функцията $x \to v(x)u'(x)$ има примитивна, и $a, b \in J$. Докажете, че определеният интеграл $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ съществува и

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

Това равенство се нарича *формула за интегриране по части* при определен интеграл.

5. Нека K и J са интервали и $a, b \in J$. Нека функцията $\varphi : K \to \mathbb{R}$ има примитивна Φ, а функцията $f : J \to \mathbb{R}$ е диференцируема, като $f(J) \subset K$. Докажете, че

$$\int_a^b \varphi(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = \Phi((f(x))\,\Big|_a^b = \Phi(t)\,\Big|_{f(a)}^{f(b)}.$$

Тази зависимост, известна като *формула за смяна на променливите* при определен интеграл, се записва още като

$$\int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}f(x) = \int_{f(a)}^{f(b)} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

6. Функцията $F : J \to \mathbb{R}$ ще наричаме *обобщена примитивна от n-ти ред* на функцията $f : J \to \mathbb{R}$, ако тя е n пъти диференцируема и $F^{(n)} = f$ (така, въведената по-рано примитивна се оказва примитивна от първи ред според настоящото определение).

Покажете, че F зависи от n произволни константи.

Ако $x_0 \in J$ и $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ са n произволни числа, покажете, че единствената обобщена примитивна F от n-ти ред на f, удовлетворяваща условията

$$F^{(k)}(x_0) = y_k;\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

се дава от

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{(x-x_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

Глава 3

ТАБЛИЦА НА ОСНОВНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

Като процес интегрирането има за цел да сведе първоначалната задача до някоя по-проста задача, чието решение е известно или пък лесно се получава. В качеството на такива прости задачи се приема интегрирането на някои елементарни функции.

Съществуват различни по обем таблици с интеграли от елементарни функции, които носят наименованието "таблици на основните интеграли". Какво ще включим в една такава таблица зависи от потребностите на тези, за които е предназначена. В долната таблица са дадени някои основни според нас интеграли.

Подинт. ф-я	Интеграл	Забележка
x^d	$x^{d+1}/(d+1)$	$d \neq -1$
$1/x$	$\ln\|x\|$	
a^x	$a^x/\ln a$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$\ln\|\cos x\|$	
$\cot x$	$\ln\|\sin x\|$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\ln\coth x$	
$\coth x$	$\ln\|\sinh x\|$	
$1/\sin x$	$\ln\|\tan(x/2)\|$	
$1/\cos x$	$\ln\|\tan(\pi/4 + x/2)\|$	
$1/\sinh x$	$\ln\|\tanh(x/2)\|$	
$1/\sin^2(x)$	$-\cot x$	
$1/\cos^2(x)$	$\tan x$	
$1/\sinh^2(x)$	$-\coth x$	
$1/\cosh^2(x)$	$\tanh x$	
$1/(a^2 + x^2)$	$(1/a)\arctan(x/a)$	
$1/(a^2 - x^2)$	$(1/2a)\ln((a+x)/(a-x))$	$a > 0$, в сила при $\|x\| < a$
$1/(x^2 - a^2)$	$(1/2a)\ln((x-a)/(x+a))$	$a > 0$, в сила при $\|x\| > a$
$1/\sqrt{a^2 - x^2}$	$\arcsin(x/a)$	
$1/\sqrt{x^2 + a^2}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$	
$1/\sqrt{x^2 - a^2}$	$\ln\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\|$	

Всички функции са дефинирани в максималните си дефиниционни множества (тук и по-нататък интеграционната константа C не се изписва). Верността на таблицата се проверява като функциите във втората колонка се диференцират. В резултат се получават функциите в първата колонка.

Глава 4

ОСНОВНИ МЕТОДИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ

В тази глава са разгледани основните методи за интегриране: непосредствено интегриране, интегриране чрез заместване и интегриране по части. В удачното комбиниране на тези подходи се състои майсторлъкът на неопределеното интегриране.

При интегрирането се наблюдава един интересен феномен: при използване на различни методи за пресмятане на даден интеграл е възможно да се получат различни по форма резултати. Например след прилагане на метод 1 и на метод 2 получавате две примитивни F_1 и F_2, които съвсем не си приличат на външен вид. Ние обаче знаем, че две примитивни могат да се различават само с адитивна константа, т.е. ако сме работили вярно би трябвало да е изпълнено $F_2(x) = F_1(x) + C$, където C е константа. В това именно е загадката: константата C така може да е скрита в израза $F_1(x) + C$, че коренно да го промени по форма в сравнение с $F_1(x)$.

Естествено, ако след интегриране по два начина сме получили два различни по форма резултат, това може да е свързано с малко неприятния факт, че единият резултат е грешен [1].

4.1 Непосредствено интегриране

Методът на непосредственото интегриране се състои в използване на таблицата на основните интеграли (стр. 20), като при необходимост подинтегралният израз предварително се преработва. При този подход се спазват определени практически правила и в частност се използват някои общи формули.

1. Ако е възможно, подинтегралната функция се представя като сума на функции, чиито интеграли са известни.

[1] Може да са грешни и двата.

Пример 5 В следващия интеграл използваме формулата $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tan x - \cot x = -2\cot 2x.\end{aligned}$$

2. Ако е известен интегралът

$$\int g(x)\mathrm{d}x = G(x)$$

то можем да пресметнем интеграл от $f(x) = g(ax+b)$ по формулата

$$\int g(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}G(ax+b).$$

Пример 6

$$\int \cos(4x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(4x-1).$$

3. Ако $f(x) = u'(x)/u(x)$, то

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u(x)}{u(x)} = \ln|u(x)|.$$

Пример 7

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x + 2} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x + 2)}{\sin x + \cos x + 2} = \ln|\sin x + \cos x + 2|.$$

4. Ако $f(x) = u^d(x)u'(x),\ d \neq -1$, то

$$\int u^d(x)u'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\frac{u^{d+1}(x)}{d+1} = \frac{u^{d+1}(x)}{d+1}.$$

Пример 8

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-1/2}\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-1/2+1}}{1/2} = \sqrt{1+x^2}.$$

5. Обобщение на 3 и 4 е формулата

$$\int (u(x)+a)^d u'(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} (u(x)+a)^{d+1}/(d+1) & d \neq -1 \\ \ln|u(x)+a| & d = -1. \end{cases}$$

6. Понякога е удобно да се използват приведените по-долу формули, в които a е ненулева константа:

$$\begin{aligned}\int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{u^2(x)+a^2} &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u(x)}{a}\right) \\ \int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{u^2(x)-a^2} &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u(x)-a}{u(x)+a}\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{au^2(x)+u(x)} &= \ln\left|\frac{u(x)}{au(x)+1}\right| \\
\int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-u^2(x)}} &= \arcsin\left(\frac{u(x)}{a}\right) \\
\int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{u^2(x)+a}} &= \ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)+a}\right| \\
\int \frac{u'(x)\mathrm{d}x}{u(x)\sqrt{u^2(x)-a^2}} &= \frac{1}{a}\arccos\left(\frac{a}{u(x)}\right) \\
\int \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x &= \frac{u(x)}{v(x)} \\
\int \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{u(x)v(x)}\mathrm{d}x &= \ln\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right| \\
\int \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{u^2(x)+v^2(x)}\mathrm{d}x &= \arctan\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \\
\int \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{u^2(x)-v^2(x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u(x)-v(x)}{u(x)+v(x)}\right|.
\end{aligned}$$

4.2 Интегриране чрез полагане

Този метод всъщност обобщава предишния. При него се въвежда нова интеграционна променлива така, че първоначалният интеграл да се сведе до интеграл, който знаем как да решим. При този метод се използува формулата

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t$$

където е извършено полагането (субституцията) $x = g(t)$.

Пример 9 Нека

$$f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Ако направим полагането $x = g(t) = 1/t$ имаме $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t/t^2$ и

$$f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = -\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = -\mathrm{d}\sqrt{1+t^2}.$$

Следователно

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \mathrm{d}\sqrt{1+t^2} = -\sqrt{1+t^2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Понякога е по-удобно полагането да се прави в обратна посока, а именно $t = \gamma(x)$, където γ е обратната функция на функцията g.

Пример 10 При решаване на интеграла

$$F(x) = \int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(2+x^2)^2}$$

полагаме $t = 2 + x^2$, откъдето $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ и $x^2 = t - 2$. Следователно

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{(t-2)\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + \frac{1}{2+x^2}. \end{aligned}$$

4.3 Интегриране по части

Методът за интегриране по части се състои в прилагане (понякога многократно) на формулите

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

или

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

Ако непосредственото прилагане на тези формули не е очевидно, налага се предварителна работа, наричана понякога *вкарване под знака на диференциала.* Нека например пресмятаме интеграла

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Тогава можем да опитаме да представим функцията f като произведение: $f(x) = u(x)w(x)$, така че да са изпълнени условията:

– Интегралът

$$v(x) = \int w(x)\mathrm{d}x$$

се пресмята лесно, и

– Интегралът

$$G(x) = \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

се пресмята в окончателен вид, или във всеки случай е (или изглежда) по-прост от първоначалния интеграл. Първата фаза е именно вкарването на $w(x)$ под знака на диференциала, при което подинтегралният израз се преработва съгласно равенството

$$f(x)\mathrm{d}x = u(x)w(x)\mathrm{d}x = u(x)\mathrm{d}v(x).$$

Остава да си спомним, че

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Макар че няма общи принципи за това какво е най-добре да вкарваме под знака на диференциала, все пак добре е да се помнят следните правила:

1) Вкарвайте показателни и тригонометрични функции (те се вкарват лесно, а и запазват вида си след интегриране; така новополучените интеграли не се усложняват допълнително). Това означава в израза $w(x)$ да съсредоточите по възможност показателни и тригонометрични функции, вж. примери 11 и 12 по-долу.

2) Изразите, съдържащи логаритми и обратни тригонометрични функции (ако има такива) ги концентрирайте в множителя $u(x)$. Причината е, че след диференциране тези изрази се преобразуват в алгебрични (и в частност рационални) изрази, при което интегралът $G(x)$ се оказва (евентуално!) по-прост от $F(x)$, вж. примери 13 и 14.

Пример 11

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x.$$

Пример 12 Да разгледаме интегралите

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \\ S(x) &= \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Имаме

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - aS(x)\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\cos bx = -\frac{1}{b}\left(e^{ax}\cos bx - a\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{1}{b}\left(e^{ax}\cos bx - aC(x)\right). \end{aligned}$$

Последните две уравнения образуват система за определяне на $C(x)$ и $S(x)$, която има решение

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} \\ S(x) &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Пример 13

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{\mathrm{d}x}{x} = x(\ln x - 1).$$

Пример 14

$$\begin{aligned} \int x\mathrm{arctan}x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \mathrm{arctan}x\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{arctan}x - \int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{arctan}x - \int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{arctan}x - x + \mathrm{arctan}x\right). \end{aligned}$$

Използува се и следното обобщение на формулата за интегриране по части

$$\begin{aligned}\int u(x)v^{(n)}(x)\mathrm{d}x &= u(x)v^{(n-1)}(x) - u'(x)v^{(n-2)}(x) + \cdots \\ &+ (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}(x)v(x) + (-1)^n \int u^{(n)}(x)v(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

4.4 Метод на неявната функция

При този метод дясната страна на равенството

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

с редица преобразувания (например чрез интегриране по части) се свежда до израза $U(x, F(x))$. Тогава $F(x)$ може да се определи като неявна функция от уравнението

$$F(x) = U(x, F(x)).$$

За съжаление полученото уравнение понякога се оказва тъждество. Това от една страна е радостно (показва, че сме работили вярно или поне, че сме допуснали четен брой грешки), но от друга - не е толкова радостно, защото интегралът остава нерешен.

По същество този метод беше използван в пример 12. В следващия пример разглеждаме първия интеграл от пример 12, който след две интегрирания по части се свежда до уравнение за първоначалния интеграл.

Пример 15

$$\begin{aligned}C(x) &= \frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\mathrm{d}\cos bx\right) \\ &= \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b}\left(e^{ax}\cos bx - aC(x)\right)\right) = U(x, C(x)).\end{aligned}$$

От това уравнение получаваме израза за $C(x)$ (вж. пример 12).

4.5 Рекурентен метод

Този метод се използува за намиране на интеграли

$$F_n(x) = \int f_n(x)\mathrm{d}x$$

зависещи от натуралното число n при условие, че са известни (или лесно могат да се намерят) първите $k \geq 1$ интеграла

$$F_0(x) = \int f_0(x)\mathrm{d}x, \ldots, F_{k-1}(x) = \int f_{k-1}(x)\mathrm{d}x.$$

Тук с помощта на преобразувания (най-често интегриране по части) дясната страна на интеграла $F_n(x)$ при $n > k$ се свежда до израз от вида

$$F_n(x) = V(x, F_{n-1}(x), \ldots, F_{n-k}(x)).$$

Това е именно рекурентната зависимост, която заедно с изразите за първите k интеграла ни дава възможност да намерим (поне по принцип) $F_n(x)$ за всяко $n > k$.

Пример 16 Нека $n \geq 2$ е цяло число, и

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int \tan^n x \, \mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x \\ &= \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d} \tan x - \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - F_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Така при n четно свеждаме интеграла до

$$F_0(x) = \int \mathrm{d}x = x$$

а при n нечетно - до

$$F_1(x) = \int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|.$$

Понякога е по-лесно да се работи по-посока на увеличаване на индекса n, т.е. търсят се преобразувания, чрез които $F_n(x)$ се изразява с помощта на $F_{n+1}(x), \ldots, F_{n+k}(x)$:

$$F_n(x) = W(x, F_{n+1}(x), \ldots, F_{n+k}(x)).$$

Сега, обаче, е необходимо да изразим $F_{n+k}(x)$ чрез $F_n(x), \ldots, F_{n+k-1}(x)$, което може да затрудни решението.

При този подход не е необходимо да се спазват правилата 1) и 2) от стр. 26, т.е. допуска се трансформиране на първоначалния интеграл в посока на усложняване.

Пример 17 Нека $n \geq 1$ и

$$F_n(x) = \int x^n e^{ax} \mathrm{d}x.$$

Имаме

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \int e^{ax} \, \mathrm{d}x^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} e^{ax} - a \int x^{n+1} e^{ax} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} e^{ax} - a F_{n+1}(x) \right). \end{aligned}$$

Оттук

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{a} \left(x^{n+1} e^{ax} - (n+1) F_n(x) \right).$$

4.6 Комбиниран метод

При този метод се комбинират подходите от раздели 5.4 и 5.5. Решава се интеграл от типа

$$F_n(x) = \int f_n(x)\mathrm{d}x$$

който след преобразувания се свежда до уравнението

$$F_n(x) = Z(x, F_n(x), F_{n-1}(x), \ldots, F_{n-k}(x))$$

за $F_n(x)$. Ако това уравнение не е тъждество, и ако можем да го решим относно $F_n(x)$, получаваме рекурентната зависимост

$$F_n(x) = V(x, F_{n-1}(x), \ldots, F_{n-k}(x)).$$

и после действаме както при рекурентния метод.

4.7 Упражнения

1. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}.$$

2. Пресметнете интегралите $F_9(x)$ и $F_{10}(x)$ чрез рекурентната зависимост от пример 16. Намерете рекурентна формула за интеграла

$$G_n(x) = \int \cot^n x \,\mathrm{d}x$$

и пресметнете $G_9(x)$ и $G_{10}(x)$.

3. Пресметнете интеграл

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

4. Пресметнете интеграла

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

като определите примитивната по метода на неявната функция след еднократно интегриране по части и отчетете, че интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

е табличен.

Глава 5

ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

5.1 Разлагане в елементарни дроби

В тази глава ще разгледаме интеграли от рационални функции, т.е.

$$\int R(x)\mathrm{d}x$$

където

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + p_1x + \cdots + p_mx^m}{q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n}.$$

Основният метод за решаване интеграли от този тип е разлагането в елементарни дроби.

Ще предполагаме, че полиномите P и Q са от степен $\deg P = m$ и $\deg Q = n$ съответно, т.е., че $p_m \neq 0$ и $q_n \neq 0$. Ще предполагаме също, че $n \geq 1$, тъй като при $n = 0$ (т.е. при $Q(x) = q_0 \neq 0$) подинтегралната функция се свежда до полином. И накрая ще приемем, че

1) $m < n$, т.е. че степента на числителя е по-малка от тази на знаменателя, както и че

2) полиномите P и Q са взаимно прости (в този случай изразът $R(x)$ се нарича *правилна алгебрична дроб*).

Действително, ако условията 1) и 2) не са първоначално изпълнени, то след съкращаване на общите множители на P и Q (ако има такива) стигаме до израза $R_1(x) = P_1(x)/Q_1(x)$, където P_1 и Q_1 нямат общи множители от степен ≥ 1. Накрая, ако $\deg P_1 \geq \deg Q_1$, то $R_1(x)$ може да се представи във вида

$$R_1(x) = P_2(x) + \frac{P_3(x)}{Q_1(x)}$$

където P_2, P_3 са полиноми и $P_3(x)/Q_1(x)$ е правилна алгебрична дроб.

Пример 18

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^3+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &\to \; R_1(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1} = 1 - \frac{x}{x^2+1} = P_2(x) + \frac{P_3(x)}{Q_1(x)}. \end{aligned}$$

И така, нека е дадена правилната алгебрична дроб $R(x)$. Според една основна теорема в алгебрата, полиномът Q има n нули $x_1, \dots, x_n$ (т.е. $Q(x_j) = 0$), които могат да бъдат реални или комплексни, прости или кратни. Нека

$$x_1 = c_1, \dots, x_r = c_r$$

са реалните нули с кратности $k_1, \dots, k_r$ съответно, а

$$x_{r+1} = a_1 + b_1 i, x_{r+2} = a_1 - b_1 i, \dots, x_{n-1} = a_s + b_s i, x_n = a_s - b_s i$$

са комплексните нули (последните се срещат само в комплексно-спрегнати двойки $a_k \pm b_k i$, $i = \sqrt{-1}$) с кратности $\ell_1, \dots, \ell_s$, където

$$k_1 + \cdots + k_r + 2(\ell_1 + \cdots + \ell_s) = n.$$

Тъй като

$$\begin{aligned} Q(x) &= q_n(x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ &= q_n(x-c_1)^{k_1}\cdots(x-c_r)^{k_r}(x^2+\mu_1 x+\nu_1)^{\ell_1}\cdots(x^2+\mu_s x+\nu_s)^{\ell_s} \end{aligned}$$

където

$$\mu_j = -2a_j,\ \nu_j = a_j^2 + b_j^2$$

то $Q(x)$ се състои от множители от вида

$$(x-c)^k$$

и

$$(x^2+\mu x+\nu)^\ell = ((x-a)^2+b^2)^\ell.$$

Може да се докаже, че $R(x)$ се представя като сума от т.н. *елементарни дроби* от първи

$$\frac{A_1}{(x-c)}, \frac{A_2}{(x-c)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-c)^k}$$

и от втори тип

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x-a)^2+b^2}, \frac{B_2 x + C_2}{((x-a)^2+b^2)^2}, \dots, \frac{B_\ell x + C_\ell}{((x-a)^2+b^2)^\ell}$$

където A_i и B_j, C_j са константи, числото c е реална нула на Q с кратност k и $a \pm bi$ е двойка комплексно-спрегнати нули на Q с кратност ℓ.

За да демонстрираме възможността за разлагане на правилна алгебрична дроб в сума от елементарни дроби, ще разгледаме първо случая, когато c е реална нула на Q с кратност k, т.е. когато

$$Q(x) = (x-c)^k T(x)$$

където T е полином от степен $n-k$ и $T(c) \neq 0$. Тогава $R(x)$ може да се представи като сума от две правилни алгебрични дроби

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-c)^k} + \frac{S(x)}{(x-c)^{k-1}T(x)}$$

където $\deg S \leq n-2$ и $A \neq 0$.

Действително, за да бъде в сила последното представяне е необходимо и достатъчно да бъде изпълнено

$$P(x) = AT(x) + (x-c)S(x).$$

Като положим $x = c$ за A получаваме

$$A = \frac{P(c)}{T(c)}.$$

Така за определяне на полинома S имаме зависимостта

$$(x-c)S(x) = E(x) = P(x) - \frac{P(c)}{T(c)}T(x).$$

Степента на така дефинирания полином E очевидно не е по-голяма от $n-1$, тъй като $\deg P < \deg Q = n$ и $\deg T = n-k \leq n-1$. От друга страна имаме $E(c) = 0$, т.е. числото c е нула на E и следователно $E(x)$ се дели на $x-c$. Така полиномът S, определен от

$$S(x) = \frac{E(x)}{x-c}$$

е от степен, ненадвишаваща $n-2$.

Аналогично се доказва, че ако $a \pm bi$ е комплексно-спрегната двойка нули на Q с кратност ℓ, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^\ell} + \frac{S(x)}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}T(x)}$$

където константите B, C не са едновременно нули и S е полином от степен, ненадвишаваща $n-3$.

Сега общият резултат за разлагане на $R(x)$ в сума от елементарни дроби от първи и втори тип следва непосредствено чрез последователно прилагане на доказаните формули за разлагане върху изразите

$$\frac{S(x)}{(x-c)^{k-1}T(x)}$$

и/или

$$\frac{S(x)}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}T(x)}.$$

И така, правилната алгебрична дроб $R(x)$ се разлага в елементарни дроби както следва

$$(*)\qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{k_i}\frac{A_{i\alpha}}{(x-c_i)^\alpha} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{\ell_j}\frac{B_{j\beta}x+C_{j\beta}}{((x-a_j)^2+b_j^2)^\beta}.$$

За определяне на неизвестните n числа $A_{i\alpha}, B_{j\beta}, C_{j\beta}$ най-често се използва *методът на неопределените коефициенти.* Той включва освобождаване от знаменателите в (*) чрез умножаване на двете страни на равенството с $Q(x)$, разкриване на скобите и привеждане на подобните членове, и приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x. В резултат се получава линейна алгебрична от n-ти ред за неизвестните коефициенти в разложението, която има единствено решение.

Пример 19 Да разгледаме правилната алгебрична дроб

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2}{x^6+3x^5+4x^4-4x^2-4x}.$$

Числителят Q има реални нули $c_1 = 0, c_2 = 1$, както и двойка комплексно-спрегнати нули $a \pm bi = -1 \pm i$ с кратност $\ell = 2$. Така

$$Q(x) = x(x-1)((x-1)^2+1)^2 = x(x-1)(x^2+2x+2)^2$$

и разложението в елементарни дроби има вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+2x+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2x+2)^2}.$$

След освобождаване от знаменателите получаваме

$$\begin{aligned} x^2 &= A_1(x-1)(x^2+2x+2)^2 + A_2x(x^2+2x+2)^2 \\ &+ (B_1x+C_1)x(x-1)(x^2+2x+2) + (B_2x+C_2)x(x-1) \end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned} x^2 &= (A_1+A_2+B_1)x^5 + (3A_1+4A_2+B_1+C_1)x^4 \\ &+ (4A_1+8A_2+C_1+B_2)x^3 + (8A_2-2B_1-B_2+C_2)x^2 \\ &+ (-4A_1+4A_2-2C_1-C_2)x - 4A_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 0 &=& A_1 &+& A_2 &+& B_1 & & & & & & \\ 0 &=& 3A_1 &+& 4A_2 &+& B_1 &+& C_1 & & & & \\ 0 &=& 4A_1 &+& 8A_2 & & &+& C_1 &+& B_2 & & \\ 1 &=& & & 8A_2 &-& 2B_1 & & &-& B_2 &+& C_2 \\ 0 &=& -4A_1 &+& 4A_2 & & &-& 2C_1 & & &-& C_2 \\ 0 &=& -4A_1 & & . & & & & & & & & \end{array}$$

Решението на тази линейна система е

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0.04,\ B_1 = -0.04,\ C_1 = -0.12,\ B_2 = -0.2,\ C_2 = 0.4$$

и следователно

$$\frac{x^2}{x^6 + 3x^5 + 4x^4 - 4x^2 - 4x} = \frac{0.04}{x-1} - \frac{0.04(x+3)}{x^2 - 2x + 2} - \frac{0.2(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}.$$

Методът на неопределените коефициенти има и един друг вариант, който може да се окаже по-ефективен в сравнение с подхода, при който се приравняват коефициентите пред еднаквите степени на x. При този вариант, след освобождаване от знаменателя в представянето $(*)$, променливата x се полага равна последователно на нулите на знаменателя Q. При това някои от коефициентите $A_{i\alpha}, B_{j\beta}, C_{j\beta}$ се определят непосредствено, а за други се получават линейни алгебрични системи от по-нисък ред.

Да разгледаме например правилната алгебрична дроб

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0}$$

където $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$ е полином от степен, не по-висока от 2, а знаменателят Q има една реална нула $x_1 = c$ и две комплексно-спрегнати нули $x_{2,3} = a \pm bi$. Тогава

$$Q(x) = (x-c)((x-a)^2 + b^2)$$

и разлагането на $R(x)$ в елементарни дроби има вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-c} + \frac{Bx + C}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Оттук

$$P(x) = A((x-a)^2 + b^2) + (Bx + C)(x-c).$$

В последното равенство полагаме $x = c$ и определяме A:

$$A = \frac{P(c)}{(c-a)^2 + b^2}.$$

За определяне на B и C полагаме $x = a + bi$. След приравняване на реалните и имагинерните части в двете страни на равенството получаваме линейна система от две уравнения за B и C.

Този вариант на метода на неопределените коефициенти е особено ефективен когато знаменателят Q има само прости реални нули $c_1, \ldots, c_n$, тъй като тогава всички коефициенти A_k в разложението

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x - c_k}$$

се намират непосредствено:

$$A_k = \frac{P(c_k)}{Q_k(c_k)} = \frac{P(c_k)}{Q'(c_k)}$$

където с Q_k сме означили полиномите, определени от

$$Q_k(x) = \prod_{j \neq k} (x - c_j) = \frac{Q(x)}{x - c_k}.$$

Ще отбележим накрая, че не е необходимо x непременно да се полага равно на нулите на Q, а може да се изберат които и да са n стойности на x, стига само получената система за коефициентите $A_{i\alpha}, B_{j\beta}, C_{j\beta}$ да е разрешима.

5.2 Интегриране на елементарни дроби

1. Интегрирането на елементарните дроби от първи тип наистина е елементарно:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-c)^k} = \begin{cases} \ln|x-c| & k = 1 \\ (x-c)^{1-k}/(1-k) & k > 1. \end{cases}$$

2. При интегриране на елементарните дроби от втори тип

$$F_\ell(x) = \int \frac{(Bx + C)\mathrm{d}x}{((x-a)^2 + b^2)^\ell}$$

ще използваме рекурентния метод. Полагаме

$$G_\ell(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{((x-a)^2 + b^2)^\ell}, \; H_\ell(x) = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{((x-a)^2 + b^2)^\ell}$$

откъдето

$$F_\ell(x) = CG_\ell(x) + BH_\ell(x).$$

Остава да определим рекурентно $G_\ell(x)$ и $H_\ell(x)$. За $\ell > 1$ преработваме израза за $H_\ell(x)$ както следва.

$$\begin{aligned} H_\ell(x) &= \int \frac{(a + x - a)\mathrm{d}x}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} \\ &= aG_\ell(x) + \int \frac{(x-a)\mathrm{d}x}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} \\ &= aG_\ell(x) + \int \frac{\mathrm{d}((x-a)^2 + b^2)^{1-\ell}}{2(1-\ell)} \\ &= aG_\ell(x) - \frac{1}{2(\ell-1)((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}}. \end{aligned}$$

По-сложно е преработването на израза за $G_\ell(x)$, $\ell > 1$ (на този интеграл му се носи лошата слава, че е помогнал за скъсването на десет хиляди студенти само у нас[1])

$$\begin{aligned}
G_\ell(x) &= \frac{1}{b^2}\int \frac{(x-a)^2+b^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{b^2}\int \frac{(x-a)^2\mathrm{d}x}{((x-a)^2+b^2)^\ell} \\
&= \frac{G_{\ell-1}(x)}{b^2} - \frac{1}{b^2}\int \frac{(x-a)\mathrm{d}((x-a)^2+b^2)^{1-\ell}}{2(1-\ell)} \\
&= \frac{G_{\ell-1}(x)}{b^2} - \frac{1}{2b^2(1-\ell)}\left(\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right) \\
&= \frac{G_{\ell-1}(x)}{b^2} + \frac{x-a}{2(\ell-1)b^2((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \frac{G_{\ell-1}(x)}{2(\ell-1)b^2} \\
&= \frac{x-a}{2(\ell-1)b^2((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2(\ell-1)b^2}G_{\ell-1}(x).
\end{aligned}$$

Полученото рекурентно уравнение за $G_\ell(x)$ заедно с израза за

$$G_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-a}{b}\right)}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} = \frac{1}{b}\mathrm{arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

позволява последователното интегриране на елементарни дроби от втори тип.

5.3 Метод на Остроградски-Ермит

При решаване на интеграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$$

където $P(x)/Q(x)$ е правилна алгебрична дроб ($\deg P < \deg Q$) чрез разлагане в елементарни дроби, една от основните трудности е намирането на нулите $x_1, \ldots, x_n$ на знаменателя Q. За избягване на този проблем се прилага методът, предложен от Остроградски (руски математик, 1801-1862) и Ермит (френски математик, 1822-1901), който се състои в следното.

Нека D е най-големият общ делител на знаменателя Q и производната му Q', който може да се намери така. Полагаме $Q = Q_0$ и $Q' = Q_1$. Делим Q_0 на Q_1 като получаваме остатък Q_2:

$$\frac{Q_0(x)}{Q_1(x)} = A_1x + B_1 + \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}$$

където A_1, B_1 са константи и $\deg Q_2 < \deg Q_1 = n-1$. След това делим Q_1 на Q_2, означаваме остатъка с Q_3 и т.н. Продължаваме този процес докато не получим нулев остатък, да кажем при делението на Q_{p-1} на Q_p:

$$\frac{Q_{p-1}(x)}{Q_p(x)} = A_px + B_p.$$

[1] Не се изненадвайте, ако в следващата формула има печатни грешки. Те просто са неизбежни при този интеграл.

Делителят в това последно частно е търсеният най-голям общ делител: $D = Q_p$.

Пример 20 Най-големият общ делител на полиномите

$$\begin{aligned} Q(x) &= -x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ Q'(x) &= -5x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

е полиномът $x^2 + 1$.

Да означим с $d = \deg D$ степента на полинома D и нека

$$S(x) = \frac{Q(x)}{D(x)}$$

(ще отбележим, че полиномът S от степен $\deg S = n - d$ има само прости нули). След определяне на D и S първоначалният интеграл се представя във вида

$$(**) \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{D(x)} + \int \frac{P_2(x)}{S(x)} \mathrm{d}x$$

където P_1 и P_2 са неизвестни полиноми от степен $d_1 = \deg P_1 < \deg D$ и $d_2 = \deg P_2 < \deg S$. За намиране на неизвестните полиноми диференцираме последното равенство:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)D(x) - P_1(x)D'(x)}{D^2(x)} + \frac{P_2(x)}{S(x)}$$

откъдето

$$P(x)D(x) = (P_1(x)D(x) - P_1(x)D'(x))S(x) + P_2(x)D^2(x).$$

Заедно с (**), това е основната формула на метода на Остроградски-Ермит. Тук полиномите P_1 и P_2 търсим от степени $d_1 = d - 1$ и $d_2 = n - d - 1$ съответно, т.е. неизвестните коефициенти в P_1 и P_2 са общо $d_1 + d_2 + 2 = n$ на брой.

Пример 21 Да пресметнем интеграла

$$F(x) = \int \frac{3x^5 - 3x^2 + x + 1}{(x^3 + x + 1)^2} \mathrm{d}x$$

по метода на Остроградски-Ермит. Имаме

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^3 + x + 1)^2 \\ Q'(x) &= 2(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1) \end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned} D(x) &= x^3 + x + 1 \\ S(x) &= x^3 + x + 1. \end{aligned}$$

Търсим полиномите P_1 и P_2 във вида

$$P_j(x) = A_j x^2 + B_j x + C_j.$$

След диференциране, освобождаване от знаменателите, разкриване на скобите и привеждане на подобните членове, основната формула добива вида

$$\begin{aligned} 3x^5 - 3x^2 + x + 1 &= A_2x^5 + (B_2 - A_1)x^4 + (A_2 + C_2 - 2B_1)x^3 \\ &+ (A_1 + A_2 + B_2 - 3C_1)x^2 + (2A_1 + C_2 + B_2)x \\ &+ B_1 - C_1 + C_2. \end{aligned}$$

След приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x получаваме система от шест уравнения за шестте неизвестни коефициенти, която има решение

$$A_1 = 0, B_1 = 2, C_1 = 2;\ A_2 = 3, B_2 = 0, C_2 = 1.$$

Така

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2(x+1)}{x^3+x+1} + \int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2(x+1)}{x^3+x+1} + \int \frac{(x^3+x+1)'}{x^3+x+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2(x+1)}{x^3+x+1} + \ln|x^3+x+1|. \end{aligned}$$

Необходимо е да се отбележи, че методът на Остроградски-Ермит се прилага и когато нулите на Q са известни, тъй като в редица случаи той е по-ефективен в сравнение с разлагането в елементарни дроби.

По принцип методът на Остроградски-Ермит е по-ефективен в случаите, когато полиномът Q има кратни нули, т.е. когато най-големият общ делител D на Q и Q' е нетривиален (различен от константа).

И накрая ще напомним, че в някои случаи най-ефикасно се оказва прилагането на някакво специално преобразуване, например като се използват формулите от т. 6 на раздел 4.1, като се разложи числителя по специален начин, и т.н.

Пример 22

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x^4}{(x^4)^2+2^2} = \frac{1}{8}\mathrm{arctan}\frac{x^4}{2}.$$

Пример 23

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x-1)^{10}} &= \int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^{10}}\mathrm{d}x \\ &= \int (x-1)^{-8}\mathrm{d}x + 2\int (x-1)^{-9}\mathrm{d}x + \int (x-1)^{-10}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{7(x-1)^7} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9}. \end{aligned}$$

Пример 24

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctan}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}. \end{aligned}$$

5.4 Упражнения

1. Покажете, че ако

$$Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$$

е полином от степен $n \geq 2$, то

$$\frac{Q(x)}{Q'(x)} = \frac{x}{n} + \frac{q_{n-1}}{n} + \frac{Q_2(x)}{Q'(x)}$$

където

$$Q_2(x) = c_{n-2}x^{n-2} + \cdots$$

е полином от степен $\deg Q_2 \leq n-2$, като

$$c_{n-2} = \frac{2q_{n-2} - (n-1)q_{n-1}^2}{n}.$$

2. Пресметнете интегралите

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4},\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1},\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}.$$

3. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$$

чрез разлагане в елементарни дроби и по метода на Остроградски-Ермит. Сравнете ефективността на двата подхода за този пример.

4. Приложете метода на Остроградски-Ермит към интегралите

$$G_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n},\ H_n(x) = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}.$$

Сравнете резултата с този от т. 2 на раздел 5.2.

5. Решете интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$$

с "хитрост", т.е. без разлагане в елементарни дроби и без да използвате метода на Остроградски-Ермит (например, представете числителя като $1 - x^4 + x^4$; има и други хитри начини).

Глава 6

ИНТЕГРИРАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

В тази глава ще разгледаме интегрирането на някои ирационални функции. По принцип интегрирането на такива функции води до нееелементарни трансцендентни функции. Все пак, в редица случаи интегралите от ирационални функции могат да се изразят в елементарни функции, или пък в т.н. елиптични функции, които са добре изучени (някои автори дори причисляват елиптичните функции към елементарните).

6.1 Интеграли, които се решават в елементарни функции

В този раздел с $R(.)$ означаваме рационален израз на съответните променливи, например

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

където P и Q са полиноми на две променливи:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{02}y^2 + (p_{12} + p_{21})xy + \cdots \\ Q(x, y) &= \sum_{\alpha,\beta} q_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = q_{00} + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{02}y^2 + (q_{12} + q_{21})xy + \cdots \end{aligned}$$

Аналогично се дефинира рационален израз $R(x, y, \ldots, z)$ на три и повече променливи.

6.1.1 Интеграли, съдържащи ирационалности от дробно-линеен израз

Интегралите от вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right) \mathrm{d}x$$

където $ad \neq bc$ и m_i, n_i са цели числа, се свеждат до интеграли от рационални функции с помощта на полагането

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

където n е най-малкото общо кратно на знаменателите $n_1, \dots, n_s$.

Пример 25 Да разгледаме интеграла

$$F(x) = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Имаме $s = 1$, $p_1 = 1/2$ и следователно полагаме

$$\frac{1-x}{1+x} = t^2.$$

Оттук

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

и

$$\mathrm{d}x = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

След заместване в първоначалния интеграл получаваме

$$\begin{aligned} F(x) &= -4\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)} = 2\int \frac{(1-t^2)-(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= 2\mathrm{arctan}t + \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| \\ &= 2\mathrm{arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|. \end{aligned}$$

Частен случай на интеграли от този тип е интегралът

$$\int R(x, x^{m_1/n_1}, \dots, x^{m_s/n_s})\mathrm{d}x$$

съответстващ на случая $a = 1$, $b = c = d = 0$. Той се рационализира с полагането $x = t^n$.

Пример 26 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

полагаме $x = t^6$, откъдето $\mathrm{d}x = 6t^5$ и

$$\begin{aligned} F(x) &= 6\int \frac{t^3 \mathrm{d}t}{1+t} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1). \end{aligned}$$

6.1.2 Интеграли, съдържащи квадратична ирационалност от квадратен двучлен

1. В интегралите от вида

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$$

полагаме

$$x = a\cos t,\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t$$

или

$$x = a\sin z,\ \mathrm{d}x = a\cos z\,\mathrm{d}z$$

след което те се свеждат до интеграли от рационални изрази на тригонометрични функции:

$$F(x) = -a\int R(a\cos t, a\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

или

$$F(x) = a\int R(a\sin z, a\cos z)\cos z\,\mathrm{d}z.$$

Интегралите от рационални изрази от тригонометрични функции са разгледани в раздел 8.1.

Пример 27 В интеграла

$$F(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

полагаме $x = a\sin t,\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, откъдето $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$ и

$$\begin{aligned} F(x) &= a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Понякога такива интеграли се взимат непросредствено или по метода на неявната функция (раздел 4.4).

Пример 28 За интеграла от пример 27 имаме

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int x\,\mathrm{d}\sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a^2\int \frac{\mathrm{d}x/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \\ &= a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - F(x). \end{aligned}$$

Оттук определяме
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

2. В интегралите от вида
$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) \mathrm{d}x$$
полагаме
$$x = a\tan t,\ \mathrm{d}x = \frac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
или
$$x = a\sinh z,\ \mathrm{d}x = a\cosh z\,\mathrm{d}z$$
след което те се свеждат до интеграли от рационални изрази на тригонометрични функции
$$F(x) = a\int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
или на хиперболични функции
$$F(x) = a\int R(a\sinh z, a\cosh z)\cosh z\,\mathrm{d}z.$$

Интегралите от рационални изрази от тригонометрични функции са разгледани в раздел 8.1, а интегралите от рационални изрази на хиперболични функции се рационализират лесно, например чрез полагането
$$u = e^z,\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u}$$
тъй като тогава
$$\cosh z = \frac{u^2+1}{2u},\ \sinh z = \frac{u^2-1}{2u}.$$
(вж. също раздел 8.2)

Пример 29 В интеграла
$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$$
полагаме $x = \tan t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t/\cos^2 t$, откъдето
$$F(x) = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Използва се и полагането
$$t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}$$
при което интегралът се рационализира предвид на зависимостите
$$x = \frac{a}{2}\,\frac{t^2-1}{t},\ \mathrm{d}x = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t,\ \sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{2}\,\frac{t^2+1}{t}.$$

Такива интеграли се взимат и непросредствено или по метода на неявната функция (раздел 4.4).

3. В интегралите от вида

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$$

полагаме

$$x = \frac{a}{\cos t},\ \mathrm{d}x = \frac{a \sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

или

$$x = a\cosh z,\ \mathrm{d}x = a\sinh z\,\mathrm{d}z$$

след което те се свеждат до интеграли от рационални изрази на тригонометрични функции

$$F(x) = a\int R\left(\frac{a}{\cos t}, a\tan t\right)\frac{\tan t\,\mathrm{d}t}{\cos t}$$

или на хиперболични функции

$$F(x) = a\int R(a\cosh z, a\sinh z)\sinh z\,\mathrm{d}z.$$

Интегралите от рационални изрази от тригонометрични функции са разгледани в раздели 8.1, а интегралите от рационални изрази на хиперболични функции се рационализират лесно (вж. т. 2 от настоящия раздел).

Пример 30 В интеграла

$$F(x) = \int (x^2 - 1)^{3/2}\mathrm{d}x$$

полагаме $x = \cosh z,\ \mathrm{d}x = \sinh z\,\mathrm{d}z$, откъдето

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sinh^4 z\mathrm{d}z = \frac{\sinh 4z}{32} - \frac{\sinh 2z}{4} + \frac{3x}{8} \\ &= \frac{2x^3 - 5x}{8}\sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

Такива интеграли се взимат и непросредствено или по метода на неявната функция (раздел 4.4).

6.1.3 Интеграли, съдържащи квадратична ирационалност от квадратен тричлен

Интегралите от вида

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x$$

могат да се решат по различни начини (предполага се, че $a \neq 0$ и $b^2 \neq 4ac$, тъй като в противен случай интегралите от този тип се рационализират непосредствено).

1. Ако $b = 0,\ a < 0$ и $c > 0$, то

$$\sqrt{ax^2 + c} = \sqrt{-a}\sqrt{A^2 - x^2},\ A^2 = -\frac{c}{a} > 0$$

и интегралът се свежда до разгледания в т. 1 на раздел 7.1.2.

2. Ако $b = 0,\ a > 0$ и $c > 0$, то

$$\sqrt{ax^2 + c} = \sqrt{a}\sqrt{x^2 + B^2},\ B^2 = \frac{c}{a} > 0$$

и интегралът се свежда до интеграла от т. 2 на раздел 7.1.2.

3. Ако $b = 0,\ a > 0$ и $c < 0$, то

$$\sqrt{ax^2 + c} = \sqrt{a}\sqrt{x^2 - {}^2},\ {}^2 = -\frac{c}{a} > 0$$

и интегралът се свежда до случая от т. 3 на раздел 7.1.2.

4. Ако $b \neq 0$ полагаме

$$x = t - \frac{b}{2a}$$

при което интегралът се свежда до

$$F(x) = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{at^2 + d}\right),\ d = c - \frac{b^2}{4a}$$

и може да се реши както в някой от случаите 1-3 по-горе.

5. Освен по предложените в т. 1-4 начини, интегралът може да се рационализира чрез едно от следните три полагания, предложени от Л. Ойлер (швейцарски математик, 1707-1783):

5.1 Ако $a > 0$, то

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}.$$

5.2 Ако $c > 0$, то

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

5.3 Ако полиномът $ax^2 + bx + c$ има реални нули α и β, то

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = t(x - \alpha).$$

В случаите 5.1-5.3 основното (субституционно) равенство първо се повдига на квадрат, откъдето се определя x чрез t и после $\mathrm{d}x$ се изразява чрез t и $\mathrm{d}t$.

Пример 31 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$$

полагаме

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} = t - 2x$$

откъдето след повдигане в квадрат получаваме

$$x = \frac{t^2 - 3}{4(t + 1)},\ \mathrm{d}x = \frac{t^2 + 2t + 3}{4(1 + t)^2}$$

и

$$F(x) = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right|.$$

Като вземем предвид израза за t окончателно получаваме

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}} \right|.$$

6. Полаганията на Ойлер понякога водят до тежки изрази и е възможно непосредственото решаване на интеграла (евентуално с техниката, предложена в раздел 6.1.2) да се окаже по-ефективно.

Пример 32 Интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

чрез отделяне на пълен квадрат (както в т. 4) посредством полагането $x = t - b/(2a)$ се свежда до някои от последните три таблични интеграла на стр. 20.

Пример 33 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

отделяме в числителя производната на квадратния тричлен:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2a} \int \frac{(2ax+b-b)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

Решаването на последния интеграл беше разгледано в пример 32.

7. Един друг подход за решаване на интеграла $F(x)$ се основава на следната идея. Да положим

$$y = y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Тъй като четните степени на y са полиноми:

$$y^{2k} = (ax^2+bx+c)^k$$

а нечетните имат вида

$$y^{2k+1} = (ax^2+bx+c)^k y$$

то рационалният израз $R(x, y)$ може да се представи като сума от четири събираеми:

1) рационален израз $R_1(x)$.

2) израз от вида

$$R_2(x, y) = \frac{G(x)}{y}$$

където G е полином.

3) сума от членове от вида

$$R_3(x,y) = \frac{A}{(x-r)^k y}.$$

4) сума от членове от вида

$$R_4(x,y) = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\ell y}.$$

Така търсеният интеграл

$$F(x) = \int R(x,y(x))\mathrm{d}x$$

се представя като сума от съответните четири събираеми. За всеки от тези случаи постъпваме както следва.

1) Интегралът

$$\int R_1(x)\mathrm{d}x$$

се получава съгласно резултатите от раздел 6.

2) Интегралът

$$\int R_2(x,y(x))\mathrm{d}y$$

се представя във вида

$$\int \frac{G(x)\mathrm{d}x}{y(x)} = H(x)y(x) + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{y(x)}$$

където H е полином, чиято степен е с единица по-малка от тази на полинома G, а λ е константа. След диференциране на последното равенство с отчитане на зависимостта

$$y'(x) = \frac{2ax+b}{2y(x)}$$

получаваме

$$\frac{G(x)}{y(x)} = H'(x)y(x) + H(x)y'(x) + \frac{\lambda}{y(x)}$$

и

$$P(x) = H'(x)(ax^2+bx+c) + H(x)(ax+\frac{b}{2}) + \lambda.$$

От това равенство по метода на неопределените коефициенти получаваме линейна алгебрична система за коефициентите на полинома H и за константата λ.

3) Интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^k y(x)}$$

с помощта на полагането

$$t = \frac{1}{x-r}$$

се свежда до случай 2). Действително, нека за определеност $x > c$, т.е. $t > 0$. Имаме

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2},\ \frac{1}{(x-r)^k} = t^k$$

и

$$y=\frac{\sqrt{Mt^2+Nt+a}}{t};\ M=ar^2+br+c,\ N=2ar+b.$$

Оттук

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^k y(x)}=-\int\frac{t^{k-1}\mathrm{d}t}{\sqrt{Mt^2+Nt+a}}.$$

4) Интегралът

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\ell y(x)}\mathrm{d}x$$

се решава по-трудно. Да разгледаме първо случая, когато тричленът ax^2+bx+c се отличава от x^2+px+q само с постоянен множител, т.е.

$$ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)$$

което е равносилно на $b=ap$, $c=aq$. Тогава след полагане

$$z=z(x)=\sqrt{x^2+px+q}$$

търсеният интеграл се свежда до

$$\int\frac{Bx+C}{z^{2\ell+1}(x)}\mathrm{d}x=-\frac{B}{(2\ell-1)z^{2\ell-1}(x)}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{\mathrm{d}x}{z^{2\ell+1}(x)}.$$

Последният интеграл се решава със субституцията на Абел (норвежки математик, 1802-1829)

$$t=z'(x)=\frac{2x+p}{2z(x)}$$

която го свежда до интеграл от полином

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{z^{2\ell+1}(x)}=\frac{1}{(q-p^2/4)^\ell}\int(1-t^2)^{\ell-1}\mathrm{d}t.$$

В общия случай условията $b=ap$, $c=aq$ не са изпълнени. Да предположим първо, че $b=p=0$, $c\neq aq$. Тогава имаме интеграла

$$\int\frac{(Bx+C)\mathrm{d}x}{(x^2+q)^\ell\sqrt{ax^2+c}}=BH(x)+CG(x)$$

където

$$\begin{aligned}H(x)&=\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+q)^\ell\sqrt{ax^2+c}}\\G(x)&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+q)^\ell\sqrt{ax^2+c}}.\end{aligned}$$

Предпоследният интеграл чрез полагането

$$ax^2+c=t^2,\ ax\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$$

се свежда до

$$H(x)=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+q-c/a)}.$$

(вж. раздел 7.1.4)

За намиране на $G(x)$ полагаме (раздел 7.1.4)

$$a + \frac{c}{x^2} = t^2$$

откъдето след някои пресмятания свеждаме интеграла до

$$G(x) = -c^2 \int \frac{(t^2 - a)^{\ell-2}}{(c + q(t^2 - a))^\ell} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ако коефициентите b и p са различни от нула, но $b = ap$, то полагаме

$$x = t - \frac{p}{2}$$

и свеждаме интеграла до разгледания по-горе:

$$\int \frac{(Bt + C_1)\mathrm{d}t}{(t^2 + q_1)^\ell \sqrt{at^2 + c_1}}$$

където

$$\begin{aligned} C_1 &= C - \frac{Bp}{2} \\ q_1 &= q - \frac{p^2}{4} \\ c_1 &= c - \frac{ap^2}{4}. \end{aligned}$$

Остава най-сложният случай когато $b \neq ap$. Тук с помощта на смяната

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}$$

анулираме линейните членове в числителите на преобразуваните квадратни тричлени. Имаме

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{a_0 t^2 + b_0 t + c_0}{(1+t)^2} \\ x^2 + px + q &= \frac{r_0 x^2 + p_0 x + q_0}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} a_0 &= a\mu^2 + b\mu + c \\ b_0 &= 2a\mu\nu + b(\mu + \nu) + 2c \\ c_0 &= a\nu^2 + b\nu + c \\ r_0 &= \mu^2 + p\mu + q \\ p_0 &= 2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q \\ q_0 &= \nu^2 + p\nu + q. \end{aligned}$$

От условията $b_0 = 0$, $p_0 = 0$ получаваме система от квадратни уравнения за μ и ν:

$$\begin{aligned} 2a\mu\nu + b(\mu+\nu) + 2c &= 0 \\ 2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q &= 0 \end{aligned}$$

която е еквивалентна на системата

$$\begin{aligned} \mu+\nu &= 2\frac{aq-c}{b-ap} \\ \mu\nu &= \frac{cp-bq}{b-ap}. \end{aligned}$$

Следователно μ и ν са корените $z_{1,2}$ на квадратното уравнение

$$z^2 - 2\frac{aq-c}{b-ap}z + \frac{cp-bq}{b-ap} = 0.$$

Ще отбележим попътно, че направената субституция има смисъл само ако корените $z_1 = \mu$ и $z_2 = \nu$ са реални и различни. Следователно дискриминантата на квадратното уравнение трябва да е положителна:

$$\left(\frac{c-aq}{b-ap}\right)^2 - \frac{cp-bq}{b-ap} > 0.$$

Оттук

$$(c-aq)^2 > (cp-bq)(b-ap).$$

Последното неравенство е еквивалентно на следното квадратно неравенство относно параметъра c:

$$S(c) = c^2 - (2aq + p(b-ap))c + a^2q^2 + bq(b-ap) > 0.$$

Дискриминантата на тричлена S е

$$D = (2aq + p(b-ap))^2 - 4(a^2q^2 + bq(b-ap)) = (b-ap)^2(p^2-4q).$$

По предположение $b \neq ap$. От друга страна полиномът x^2+px+q има комплексни нули и следователно $p^2-4q<0$. Но това означава, че $D<0$, т.е. неравенството $S(c)>0$ е изпълнено за всяко c. Така доказахме, че квадратното уравнение за μ и ν има реални и различни корени

$$\mu,\nu = \frac{aq-c\pm\sqrt{S(c)}}{b-ap}.$$

С така определените константи μ и ν интегралът

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\ell y}\mathrm{d}x$$

чрез дробно-линейната смяна $x = (\mu t+\nu)/(t+1)$ се записва като

$$(\mu-\nu)\int \frac{((B\mu+C)t + B\nu + C)(1+t)^{2\ell-2}\mathrm{d}t}{(r_0t^2+q_0)^\ell\sqrt{a_0t^2+c_0}}.$$

6.1.4 Интеграли от биномен диференциал

Интегралът

$$F(x) = \int x^m (a + bx^n)^p \mathrm{d}x$$

където m, n и $p = r/s$ са рационални числа (числата r и s са цели), се нарича *интеграл от биномен диференциал.* Руският математик Чебишов (1821-1894) е доказал, че този интеграл се взима в елементарни функции само в един от следните три случая:

1. Числото p е цяло. Тук, ако $p > 0$, разкриваме скобите и извършваме интегрирането непосредствено. Ако $p < 0$, полагаме $x = t^k$, където k е общият знаменател на дробите m и n. След това освобождаваме подинтегралния израз от ирационалности (ако има такива).

Пример 34 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}$$

имаме $m = 1/2$, $n = 1/3$ и $p = -2$. Полагаме $x = t^6$, откъдето $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$ и

$$\begin{aligned} F(x) &= 6\int \frac{t^8 \mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{3+4t^2}{(1+t^2)^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - 6\int \frac{t^2 \mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

Тъй като

$$\int \frac{t^2 \mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\mathrm{arctan} t}{2}$$

то окончателно получаваме

$$F(x) = \frac{6x^{5/6}}{5} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21\mathrm{arctan} x^{1/6}.$$

2. Числото

$$\frac{m+1}{n}$$

е цяло. В този случай полагаме

$$a + bx^n = t^s.$$

Пример 35 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3} \mathrm{d}x$$

имаме $m = -1/2$, $n = 1/4$, $p = 1/3$ и

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-1/2+1}{1/4} = 2.$$

Следователно можем да положим

$$t^3 = 1 + x^{1/4}$$

откъдето

$$x = (t^3-1)^4,\ \mathrm{d}x = 12t^2(t^3-1)\mathrm{d}t$$

и

$$F(x) = 12\int (t^6 - t^3)\mathrm{d}t = \frac{12t^7}{7} - 3t^4 = \frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

3. Числото

$$\frac{m+1}{n} + p$$

е цяло. Полагането, което рационализира интеграла, тук е

$$ax^{-n} + b = t^s.$$

Последната зависимост се записва и като $a + bx^n = t^s x^n$.

Пример 36 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

имаме $m = 0$, $n = 4$ и $p = -1/4$, като числото

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

е цяло. Затова полагаме

$$t^4 = 1 + x^{-4}$$

откъдето

$$4t^3\mathrm{d}t = -4x^{-5}\mathrm{d}x,\ x^4 = \frac{1}{t^4-1}$$

и

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{x^4\mathrm{d}x}{x^5\sqrt[4]{1+x^{-4}}} = \int \frac{(-t^3)\mathrm{d}t}{t(t^4-1)} \\
&= \int \frac{t^2\mathrm{d}t}{1-t^4} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{\mathrm{arctan}t}{2} \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\mathrm{arctan}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.
\end{aligned}$$

6.2 Елиптични интеграли

6.2.1 Елиптични интеграли и привеждането им в стандартна форма

Нека
$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4$$
е полином от степен 3 или 4.

Безуспешните опити да се решат в общия случай в елементарни функции интегралите
$$\int \sqrt{P(x)}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P(x)}}$$
довели в началото на XIX в. до хипотезата, че това принципно е невъзможно. Скоро след това с усилията на най-добрите математици от онази епоха, между които Лиувил (френски математик, 1809-1882), Абел и Льожандр (френски математик, 1752-1833), тази невъзможност била доказана. Функциите, определени с помощта на такива интеграли, били наречени *елиптични* (една от причините е, че дължината на елипсата се изразява с подобен интеграл).

Нека $R(x, y)$ е рационален израз на променливите x, y. Да разгледаме интеграла
$$I(x) = \int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) \mathrm{d}x.$$
В общия случай ще предполагаме, че полиномът P е поне от трета степен и няма кратни нули (в противен случай интегралът се рационализира както в раздел 7.1). В действителност даже можем да считаме, че P е от четвърта степен и няма кратни нули. Действително, ако P е от трета степен, той има поне една реална нула $x = \gamma$ и може да се представи като
$$P(x) = (x - \gamma)(ax^2 + bx + c) = (x - \gamma)S(x), \ a \neq 0.$$
Да положим $x = \gamma \pm t^2$, където знакът $+$ се взима при $x > \gamma$, а знакът $-$ се взима при $x < \gamma$. Тогава
$$\mathrm{d}x = \pm 2t\,\mathrm{d}t, \ \sqrt{P(x)} = t\sqrt{\pm a t^4 + S'(\gamma)t^2 \pm S(\gamma)} = t\sqrt{T(t)}.$$
Следователно
$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P(x)}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{T(t)}}$$
където T е полином от четвърта степен, съдържащ само четните степени на t.

Може да се покаже (вж. например упражнение 4 в раздел 7.4), че елиптичният интеграл се изразява чрез един от трите интеграла
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \int \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \int \frac{(1-k^2t^2)\mathrm{d}t}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

наречени съответно *(стандартни) елиптични интеграли от първи, втори и трети род*, където $0 < k < 1$.

Посредством полагането $t = \sin\psi$ $(0 < \psi < \pi/2)$ за последните три интеграла получаваме

$$\int \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \ \int \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi, \ \int \frac{\mathrm{d}\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Съответните примитивни, които се анулират при нулева стойност на аргумента φ, се означават както следва

$$\begin{aligned} F(k,\varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \\ E(k,\varphi) &= \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi \\ \Pi(h,k,\varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}. \end{aligned}$$

Те са табулирани за различни стойности на параметрите k (наречен *модул* на елиптичния интеграл) и h и на аргумента φ още от Льожандр.

Общата смяна, която води от първоначалните елиптични интеграли до стандартните елиптични интеграли от първи, втори и трети род има вида

$$x = \frac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi}$$

където константите A, B, C, D се определят в зависимост от вида на нулите на полинома P, вж. например [2, 7].

6.2.2 Интеграли, които се свеждат до елиптични

Някои интеграли от вида

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt[k]{Q(x)}\right)\mathrm{d}x$$

където $k \geq 2$ и/или Q е полином от степен $\deg Q \geq 4$, с помощта на остроумни полагания $x = g(t)$ могат да се сведат до елиптични интеграли:

$$F(x) = G(t) = G(\gamma(x))$$

$$G(t) = \int R_1\left(t, \sqrt{P(t)}\right)\mathrm{d}t$$

където P е полином от степен 3 или 4, γ е обратната функция на функцията g и $R_1(t,\tau)$ е рационален израз.

1. Интегралът

$$F_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^6}}$$

чрез смяната

$$x^2 = \frac{1}{1+t^2}$$

се свежда до

$$G_1(t) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3+3t^2+t^4}}.$$

2. В интеграла

$$F_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^6+bx^4+cx^2+d}}$$

полагаме $t = x^2$ и получаваме

$$G_2(t) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at^4+bt^3+ct^2+dt}}.$$

Следващите няколко полагания наистина са майсторски.

3. Полагането

$$x = t + \sqrt{t^2-1}$$

свежда интеграла

$$F_3(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+cx^4+bx^5+ax^6}}$$

до

$$G_3(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)S(t)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)S(t)}}$$

където

$$S(t) = 2a(4t^3-3t) + 2b(2t^2-1) + 2ct + d.$$

4. Аналогично на случай 3, в интеграла

$$F_4(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2+cx^4+bx^6+ax^8}}$$

полагаме

$$x = \sqrt{t+\sqrt{t^2-1}}$$

което го свежда до

$$G_4(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)T(t)}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)T(t)}}$$

където

$$T(t) = 2a(2t^2-1) + 2bt + c.$$

5. Интегралът

$$F_5(x) = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{ax^4+2bx^2+c}}$$

се решава с полагането (сравнете с раздел 7.1.4)

$$t^4 = ax^4 + 2bx^2 + c$$

което води до

$$G_5(t) = \int \frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2-ac+at^4}}.$$

6.3 Псевдоелиптични интеграли

В някои изключителни случаи интегралите от вида

$$F(x) = \int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) \mathrm{d}x$$

където P е полином от трета или четвърта степен, могат да се изразят чрез елементарни функции. Такива интеграли се наричат *псевдоелиптични*.

1. Нека функцията f_1 удовлетворява условието

$$f_1(x) = -f_1\left(\frac{1}{k^2 x}\right)$$

например

$$f_1(x) = \frac{1}{x} - k^2 x.$$

Тогава интегралът

$$\int \frac{f_1(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

се рационализира чрез полагането

$$t = \frac{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}{x}.$$

2. Ако функцията f_2 удовлетворява условието

$$f_2(x) = -f_2\left(\frac{1-k^2x}{k^2(1-x)}\right)$$

интегралът

$$\int \frac{f_2(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

се рационализира чрез полагането

$$t = \sqrt{\frac{x(1-k^2x)}{1-x}}$$

(вж. също упр. 8).

6.4 Абелеви интеграли

Функцията $h : J \to \mathbb{R}$ се нарича *алгебрична*, ако $Q(x, h(x)) = 0$, $x \in J$, където Q е полином. С други думи, за всяко $x \in J$ величината $y = h(x)$ удовлетворява алгебрично уравнение от вида

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$$

където P_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ са полиноми. В този случай интегралът

$$F(x) = \int R(x, h(x))\mathrm{d}x$$

се нарича *абелев* в чест на норвежкия математик Абел.

Множеството от точки (x, y) , удовлетворяващи уравнението $Q(x, y) = 0$, се нарича *алгебрична крива*. Алгебричните криви са обект на изучаване в *алгебричната геометрия* - вероятно най-важната в момента математическа област.

Алгебричната крива се нарича *рационална*, ако съществуват рационални субституции

$$x = R_1(t),\ y = R_2(t)$$

такива че

$$Q(R_1(t), R_2(t)) = 0.$$

В този случай абелевият интеграл се рационализира:

$$F(x) = \int R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)\mathrm{d}t$$

и се решава в елементарни функции (естествено, абелевият интеграл може да се рационализира и чрез субституции, които не са рационални).

От особено значение е случаят, когато $Q(x, y) = y^n - P(x)$, т.е. $y^n = P(x)$ и

$$h(x) = \sqrt[n]{P(x)}.$$

Да разгледаме основните случаи.

1. Ако $n = 2$ и $\deg P = 2$ имаме

$$h(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

и интегралът се рационализира със субституциите на Ойлер (т. 5 на раздел 7.1.3).

2. $n = 2$ и $\deg P = 3, 4$ имаме елиптичен интеграл стига само полиномът P да няма кратни нули.

3. $n = 2$ и $\deg P > 4$ интегралът се нарича *хиперелиптичен*. В някои частни случаи хиперелиптичните интеграли се свеждат до елиптични (т. 1-4 на раздел 7.2.2).

4. При $n > 2$ абелевите интеграли също се свеждат до елиптични в отделни случаи (вж. т. 5 на раздел 7.2.2 и упр. 6 от раздел 7.5).

6.5 Упражнения

1. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^4(2+x)^5}}$$

като предварително представите подинтегралния израз във вида

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{1-x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)(2+x)^2}.$$

2. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

чрез две от субституциите на Ойлер и по метода, разгледан в т. 7 на раздел 7.1.3. Кой способ е най-икономичен?

3. Пресметнете интеграла

$$\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{2+\frac{1}{x\,\sqrt[15]{x}}}$$

чрез подходящата субституция на Чебишов (раздел 7.1.4).

4. Да означим

$$I_n(x) = \int \frac{(x-r)^n}{\sqrt{P(x)}} \mathrm{d}x$$

където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и

$$P(x) = p_4x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0 = r_4(x-r)^4+r_3(x-r)^3+r_2(x-r)^2+r_1(x-r)+r_0.$$

Покажете, че $I_n(x)$ може да се пресметне чрез рекурентната формула

$$\begin{aligned}(2n-2)r_4I_n(x) \quad &+ \quad (2n-3)r_3I_{n-1}(x)+(2n-4)r_2I_{n-2}(x)\\ &+ \quad (2n-5)r_1I_{n-3}(x)+(2n-6)r_0I_{n-4}(x)\\ &= \quad 2(x-r)^{n-3}\sqrt{P(x)},\ n \geq 3\end{aligned}$$

където интегралите $I_1(x), I_0(x), I_1(x), I_2(x)$ се приемат за зададени.

Напишете изразите за първите три интеграла $I_1(x), I_0(x), I_1(x)$ и изразете $I_2(x)$ чрез тях.

5. Трансформирайте интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^8+bx^4+c}}$$

в елиптичен чрез подходящо полагане като използвате резултата от т. 4 на раздел 7.2.2.

6. Чрез полагането

$$t^2 = c^2x^2+2bcx+b^2$$

преобразувайте интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{a+2bx+cx^2+dx^3}}$$

в елиптичен. Аналогичен резултат е в сила и за интеграла

$$\int \sqrt[3]{a+2bx+cx^2+dx^3}\,\mathrm{d}x.$$

7. Покажете, че ако функцията f_3 удовлетворява условието

$$f_3(x) = -f_3\left(\frac{1-x}{1-k^2x}\right)$$

то интегралът

$$\int \frac{f_3(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

се рационализира чрез полагането

$$t = \sqrt{\frac{x(1-x)}{1-k^2x}}.$$

8. Дайте пример за функция f_3, удовлетворяваща съотношението от упражнение 7.

Глава 7

ИНТЕГРИРАНЕ НА ТРАНСЦЕНДЕНТНИ ФУНКЦИИ

7.1 Интеграли от тригонометрични функции

7.1.1 Универсална субституция

1. Интегралите от вида

$$F(x) = \int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$

където R е рационална функция, се рационализират във всички случаи с полагането

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

при което имаме

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

т.е.

$$F(x) = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 37

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{1+2t+t^2}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t \\
&= \int\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\ln|t| - \frac{1}{t} - \ln(1+t^2) \\
&= \ln\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{t} = \ln\sin^2\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Горното полагане се нарича още *универсална субституция*, което е в чест на факта, че тя винаги решава задачата. За съжаление тази субституция обикновено води до рационални изрази относно t, в които знаменателят е от висока степен. Изобщо, универсалната субституция е „тежката артилерия” при интегрирането на рационални изрази от тригонометрични функции, която естествено не винаги е ефективна (например когато целта е малка).

7.1.2 Други субституции

В следните три случая съществуват по-ефективни способи (в сравнение с универсалната субституция) да се рационализира интегралът, а именно:

1. Ако

$$R(u,-v) = -R(u,v)$$

то подходящото полагане е

$$\sin x = t.$$

Действително, в този случай имаме

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos x}$$

и

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R_1(\sin x, \cos x)\mathrm{d}t$$

където

$$R_1(u,v) = \frac{R(u,v)}{v}.$$

Тъй като $R_1(u,-v) = R_1(u,v)$, то изразът $R_1(\sin x, \cos x)$ съдържа само четни степени на $\cos x$ и се изразява рационално чрез $\sin x$:

$$R_1(\sin x, \cos x) = R_2(\sin x).$$

Окончателно получаваме

$$\begin{aligned}\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x &= \int R_1(\sin x, \cos x)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int R_1(\sin x, \cos x)\mathrm{d}\sin x = \int R_2(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

което доказва, че интегралът се рационализира.

Пример 38 В интеграла

$$F(x) = \int \sin^2 x \cos^3 x \mathrm{d}x$$

полагаме $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ и получаваме

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int t^2(1-t^2)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}.\end{aligned}$$

2. Ако

$$R(-u,v) = -R(u,v)$$

полагането

$$\cos x = t$$

решава ефективно задачата. Доказателството е както в случая 1.

Пример 39 Да разгледаме интеграла

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x.$$

След полагане $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$ получаваме

$$F(x) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2\cos^2 x}.$$

3.

$$R(-u,-v) = R(u,v)$$

то икономичната субституция е

$$\tan x = t.$$

Действително, тук от равенствата

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) = R(t\cos x, \cos x)$$

следва, че $\cos x$ участва в подинтегралния израз в четни степени и поради това се изразява рационално чрез t предвид на зависимостта

$$\cos^2 = \frac{1}{1+t^2}.$$

Следователно

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(t)$$

и тъй като

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

то интегралът се рационализира:

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \frac{R_1(t)\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 40 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$$

полагаме $t = \tan x$. Оттук $x = \mathrm{arctan} t$ и

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Следователно

$$F(x) = \int (1+t^2)\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}.$$

Наред с полагането $t = \tan x$ се използва и полагането

$$t = \cos 2x.$$

4. Възможно е след рационализирането на даден интеграл (с непрекъсната и ограничена в някакъв интервал подинтегрална функция) и решаването му чрез изложената по-горе техника да получим първоначално функция, която не е определена в някои точки. Тук е необходимо да доопределим функцията като непрекъсната предвид известното свойство на примитивната (за повече подробности вж. [8]).

Така например след прилагане на универсалната субституция първоначално се получава примитивна F^* не на самата подинтегрална функция, а на нейните свивания в интервалите $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, където n е цяло, тъй като функцията $x \to \tan(x/2)$ има точки на прекъсване $x = (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В този случай за примитивната F можем да напишем

$$F(x) = F^*(x) + C_n,\ x \in ((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$$

където константите C_n се определят от условието за непрекъснатост на F в точките $x = (2k+1)\pi$:

$$F((2k+1)\pi - 0) = F((2k+1) + 0)$$

т.е.

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= C_k + \Delta F^* \\ \Delta F^* &= F^*((2k+1)\pi + 0) - F^*((2k+1)\pi - 0). \end{aligned}$$

7.1.3 Някои полезни преобразувания

1. Ако подинтегралната функция е рационална относно

$$\sin mx,\ \cos nx,\ \tan px,\ \cot qx$$

където m, n, p, q са цели числа, то преминаваме към рационална функция относно $\sin x, \cos x$ посредством известните формули

$$\begin{aligned} \sin mx &= \binom{m}{1} \cos^{m-1} x \sin x - \binom{m}{3} \cos^{m-3} x \sin^3 x \\ &+ \binom{m}{5} \cos^{m-5} x \sin^5 x - \cdots \\ \cos mx &= \cos^m x - \binom{m}{2} \cos^{m-2} \sin^2 x + \binom{m}{4} \cos^{m-4} \sin^4 - \cdots \end{aligned}$$

Ако числата m, n, p, q са дробни, първо ги привеждаме към общ знаменател:

$$m = \frac{m_1}{s}, n = \frac{n_1}{s}, p = \frac{p_1}{s}, q = \frac{q_1}{s}$$

и после полагаме

$$y = \frac{x}{s}.$$

Пример 41 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}} \mathrm{d}x$$

полагаме $y = x/6,\ \mathrm{d}x = 6\,\mathrm{d}y$. Оттук

$$\begin{aligned}
F(x) &= 6\int \frac{\cos 3y}{\sin 2y}\mathrm{d}y = 6\int \frac{\cos^3 y - 3\cos y \sin^2 y}{2\sin y\cos y}\mathrm{d}y \\
&= 3\int \frac{\cos^2 y}{\sin y}\mathrm{d}y - 9\int \sin y\,\mathrm{d}y = 3\int \frac{1-\sin^2 y}{\sin y}\mathrm{d}y - 9\int \sin y\,\mathrm{d}y \\
&= 3\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin y} - 12\int \sin y\,\mathrm{d}y \\
&= 3\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| + 12\cos y = 3\ln\left|\tan\frac{x}{12}\right| + 12\cos\frac{x}{6}.
\end{aligned}$$

2. Ако в подинтегралната функция се срещат произведения от типа $\sin\cos$, $\cos\cos$ или $\sin\sin$, то те се преобразуват по формулите

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right) \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right) \\
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right).
\end{aligned}$$

По-общо, всеки израз

$$\cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2)\cdots\cos(a_k x + b_k)$$

с помощта на последователно прилагане на формулата

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

се свежда до сума от членове от вида

$$A_i\cos(B_i x + C_i).$$

3. Интегралите от вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

където m и n са цели, се рационализират чрез полагането $t = \sin x$, ако n е нечетно и $t = \cos x$, ако m е нечетно (вж. т. 1 и 2 от раздел 8.1.2). Ако числата m и n са положителни и четни, може да се окаже полезно подинтегралната функция да се изрази чрез функции на кратни ъгли.

Използват се и полаганията $t = \sin x$ или $t = \cos x$ $m+n$ е нечетно число, и $t = \tan x$ или $t = \cos 2x$, ако $m+n$ е четно.

Пример 42 В интеграла

$$F(x) = \int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

полагаме

$$t = \cos x, -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

откъдето

$$F(x) = -\int (1-t^2)\mathrm{d}t = -t + \frac{t^3}{3} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}.$$

Пример 43

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{8} - \frac{\sin 2x}{32}.\end{aligned}$$

Използват се и следните рекурентни формули, които се проверяват чрез непосредствено диференциране

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x &= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos^{n+1} x\sin^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\cos^n x\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x} &= \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}\cos^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^{n-2} x} \\ &= \frac{-1}{(m-1)\sin^{m-1}\cos^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{m-2} x\cos^n x} \\ \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\mathrm{d}x &= -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos^{n-1} x}{(n-m)\sin^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^m x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(в последния случай се предполага, че $m \neq n$. Случаят $m = n$ е разгледан в пример 16 и упражнение 1 от раздел 5.7)

Последователното прилагане на горните формули води до някой от табличните интеграли.

7.2 Интеграли от показателни функции

Интегралите

$$\int R(e^x)\mathrm{d}x$$

се решават с полагането

$$t = e^x,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Същото полагане върши работа и при интеграли от вида

$$F(x) = \int R(\sinh x, \cosh x)\mathrm{d}x.$$

Тук, обаче, може да се използва и хиперболичният аналог на универсалната субституция при интегралите от тригонометрични функции:

$$t = \tanh\frac{x}{2}$$

при което

$$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2},\ \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

и

$$F(x) = 2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Пример 44 В интеграла

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1+2e^{-x}}\mathrm{d}x$$

полагаме $t = e^x$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$ и получаваме

$$F(x) = \int\frac{1+t}{2+t}\mathrm{d}t = \int\frac{2+t-1}{2+t}\mathrm{d}t = t - \ln(2+t) = e^x - \ln(2+e^x).$$

7.3 Интеграли от тригонометрични и показателни функции

Интегралите

$$F(x) = \int e^{ax}P(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$

където P е полином, се свеждат до сума от интеграли от вида

$$\int e^{ax}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

където m и n са натурални числа. Тук първо произведението $\sin^m x\cos^n x$ се представя като сума от синуси и косинуси на кратни ъгли, след което получаваме интеграли от вида

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,\ \int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$$

които вече разгледахме в пример 12.

7.4 Интеграли от тригонометрични и степенни функции

1. Интегралите

$$\int P(x, \sin bx, \cos bx)\mathrm{d}x$$

където P е полином, се свеждат до интеграли от вида

$$\int x^m \cos bx \,\mathrm{d}x, \int x^m \sin bx \,\mathrm{d}x.$$

Те на свой ред могат да се решат рекурентно чрез последователно интегриране по части, като тригонометричните функции се вкарват под знака на диференциала.

Използуват се и формулите

$$\begin{aligned} \int Q(x)\cos bx \,\mathrm{d}x &= \frac{\sin bx}{b}S(x) + \frac{\cos bx}{b}T(x) \\ \int Q(x)\sin bx \,\mathrm{d}x &= \frac{\sin bx}{b}T(x) - \frac{\cos bx}{b}S(x) \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} S(x) &= Q(x) - \frac{Q''(x)}{b^2} + \frac{Q''''(x)}{b^4} - \cdots \\ T(x) &= \frac{Q'(x)}{a} - \frac{Q'''(x)}{b^3} + \frac{Q'''''(x)}{b^5} - \cdots. \end{aligned}$$

2. Ако R е рационална функция, различна от полином, интегралите

$$\int R(x)\sin x \,\mathrm{d}x, \int R(x)\cos x \,\mathrm{d}x$$

не се изразяват чрез елементарни функции. Така например, ако алгебричната дроб $R(x)$ се разлага в сума от елементарни дроби от първи тип, то след няколкократно интегриране по части интегралът се представя чрез елементарни функции и чрез някои от следните интеграли,

$$\int \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x, \int \frac{\cos x}{x} \,\mathrm{d}x$$

които не се изразяват в елементарни функции (вж. пример 4).

7.5 Интеграли от тригонометрични, показателни и степенни функции

1. Интегралите

$$\int P(x, e^{ax}, \sin bx, \cos bx)\mathrm{d}x$$

където P е полином, се свеждат до интеграли от вида

$$\begin{aligned} C_m(x) &= \int x^m e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x \\ S_m(x) &= \int x^m e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

След интегриране по части с вкарване на експонентата под знака на диференциала, получаваме

$$\begin{aligned} C_m(x) &= \frac{x^m e^{ax}\cos bx}{a} - \frac{m}{a}C_{m-1}(x) + \frac{b}{a}S_m(x) \\ S_m(x) &= \frac{x^m e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{m}{a}S_{m-1}(x) - \frac{b}{a}C_m(x). \end{aligned}$$

От тази система определяме C_m и S_m:

$$\begin{aligned} C_m(x) &= \frac{x^m e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} - \frac{m}{a^2+b^2}\left(aC_{m-1}(x) + bS_{m-1}(x)\right) \\ S_m(x) &= \frac{x^m e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + \frac{m}{a^2+b^2}\left(bC_{m-1}(x) - aS_{m-1}(x)\right). \end{aligned}$$

като отчитаме факта, че $C_0(x)$ и $S_0(x)$ са всъщност изразите $C(x)$ и $S(x)$ от пример 12.

2. Ако Q е полином, то се използва формулата

$$\int Q(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a}\left(Q(x) - \frac{Q'(x)}{a} + \frac{Q''(x)}{a_2} - \frac{Q'''(x)}{a^3} + \cdots\right).$$

3. Ако R е рационална функция, различна от полином, то интегралът

$$\int R(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

не се изразява в елементарни функции. Ако $R(x)$ се разлага в сума от елементарни дроби от първи тип, то след последователно интегриране по части интегралът се представя като сума от елементарни функции и интеграл от типа

$$\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(вж. пример 4). При интеграли от този тип се използва и рекурентната формула

$$\int \frac{e^{ax}}{x^m} = \frac{1}{m-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}}\,\mathrm{d}x\right).$$

7.6 Други интеграли

1. Интегралите

$$\int P(x, \arcsin x)\,\mathrm{d}x$$

където P е полином, се рационализират чрез полагането

$$t = \arcsin x.$$

Аналогично, интегралите

$$\int P(x, \ln x)\,\mathrm{d}x$$

се рационализират като се положи

$$t = \ln x.$$

2. Интегралите

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) g(x)\,\mathrm{d}x$$

могат да се рационализират чрез интегриране по части, ако примитивната на R и производната на g се окажат рационални функции на аргументите x и $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Такива са например интегралите

$$\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \arcsin x\,\mathrm{d}x$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{arctan} x\,\mathrm{d}x$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \ln x\,\mathrm{d}x.$$

3. Интегралите

$$\int R(\ln x)x^m\,\mathrm{d}x$$

и

$$\int R(\arcsin x)x^m\,\mathrm{d}x$$

чрез полаганията

$$t = \ln x$$

и

$$t = \arcsin x$$

се свеждат до вече разгледаните в раздели 8.1-8.5.

7.7 Упражнения

1. Пресметнете интегралите

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x + \cos^n x}$$

за $n = 3, 4, 5, 6$ чрез стандартните субституции. Опитайте да решите интегралите и с хитрост, например като използвате тъждеството $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Докажете зависимостите от т. 1 на раздел 8.4.

3. Докажете зависимостта от т. 2 на раздел 8.5.

4. Развийте рекурентната формула от т. 3 на раздел 8.5 така, че в дясната страна да остане единствено интеграла

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\mathrm{d}x.$$

5. Решете интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + 0.1\cos x}$$

с помощта на универсалната субституция $t = \tan(x/2)$. Първоначално ще получите примитивна само за интервалите $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$. Намерете примитивната върху цялата числова ос като използвате техниката, скицирана в т. 4 на раздел 8.1.2.

Глава 8

СИСТЕМИ ЗА СИМВОЛНО ИНТЕГРИРАНЕ

8.1 Системи за символни пресмятания

В момента съществуват мощни компютърни системи за символни пресмятания (наричани още системи за компютърна алгебра), като например MATHEMATICA [15], MAPLE [14], MATLAB [], DERIVE, REDUCE, GAUSS и много други. Те дават възможност за пресмятане и на неопределени интеграли от различни класове функции.

Естествено, системите за символни пресмятания могат и много други неща, например да извършват пресмятания с полиноми и дробно-рационални изрази (включително да разлагат полиноми на множители), да развиват и опростяват сложни изрази, да пресмятат граници и производни, да извършват сложни функционални преобразувания, да извършват действия с нечислови матрици и др. В тези системи са предвидени и ефективни средства за числени пресмятания, например за пресмятане на определени интеграли и числено решаване на уравнения.

Всички такива системи притежават и език за програмиране, който значително разширява възможностите за приложението им, включително и в автоматичен режим.

Използването на системите за символни пресмятания е максимално улеснено от потребителска гледна точка.

Така например в MATHEMATICA за пресмятане на интеграла

$$F(x) = \int \frac{3+x^2}{1+x-x^2}\mathrm{d}x$$

се използва командата

```
Integrate[(3 + x ^ 2)/(1 + x - x ^ 2), x]
```

в резултат на което се получава

$$\mathtt{F(x)} = \frac{9\mathtt{ArcTanh}[\frac{-1+2x}{\mathtt{Sqrt}}[5]}{]}\mathtt{Sqrt}[5] + \frac{\mathtt{Log}[-1-x+x^2]}{2}.$$

Отбележете разликите в записа на обратния хиперболичен тангенс `ArcTanh`, натуралния логаритъм `Log` и квадратния корен `Sqrt` в сравнение с приетите досега в книгата.

Аналогично, в системата MAPLE командата

```
int(1/(x ^ 8 - 1), x);
```

ще реши следния интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^8-1} &= -\frac{\mathrm{artanh}}{(}x)4 - \frac{\arctan(x)}{4}\\ &- \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)\right.\\ &+ \left. 2\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right) + 2\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)\right).\end{aligned}$$

Повече информация за възможностите и начините на използване на системите MATHEMATICA и MAPLE читателят може да намери в [15] и [14].

8.2 Упражнения

1. Пресметнете „на ръка” интегралите, получени по-горе с MATHEMATICA и MAPLE и обяснете разликите в записа на резултатите.

2. С помощта на някоя система за символно интегриране пресметнете интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

за $n = 1, 2, \ldots$. При коя стойност на n системата практически не може да реши интеграла (получавате съобщение за прекъсване или пък времето за решаване на задачата става недопустимо дълго)?

3. Като използвате система за символно интегриране решете определения интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^5}$$

първо като използвате формулата $I = F(1) - F(0)$, където

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^5}$$

и второ като използвате опцията за числено (несимволно) интегриране. Сравнете точността и бързодействието на двата способа.

Глава 9

ОБЩИ ЗАДАЧИ

1. Интегралите

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\mathrm{d}x, \ \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \ \int \frac{1-\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

и

$$\int e^{ax^2}\mathrm{d}x, \ \int \sin(x^2)\mathrm{d}x, \ \int \cos(x^2)\mathrm{d}x$$

не се решават в елементарни функции. Напишете развитието в степенен ред (в околност на точката $x = 0$) на онези от примитивните

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

които се анулират при $x = 0$.

2. Решете интегралите

$$\int_a^b x|x|\mathrm{d}x, \ \int_a^b e^{|x|}\mathrm{d}x$$

при $a < b \leq 0$, $ab < 0$ и $0 \leq a < b$.

3. При какви условия интегралът

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{p_2x^2 + p_1x + p_0}{q_2x^2 + q_1x + q_0}\mathrm{d}x$$

се изразява в елементарни функции?

Обобщете резултата за случая на произволни полиноми P и Q.

4. Докажете, че ако $R(u,v) = R(-u,-v)$, то полагането $t = \cos 2x$ рационализира интеграла

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$

(вж. т. 3 от раздел 8.1.3).

5. Пресметнете примитивните на функциите $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определени от

$$f(x) \quad = \quad |x|$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \max\{1, x^2\} \\ f(x) &= \min\{16, x^4\} \\ f(x) &= |\sin x| \\ f(x) &= |\cos x|. \end{aligned}$$

6 (тази задача не е от най-лесните). Докажете, че ако функцията f е непрекъсната, то тя има примитивна.

7. Докажете, че ако f има примитивна в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$$

за някое $\xi \in [a, b]$ (това е т.н. *формула за средните стойности* при определения интеграл по Нютън). Покажете с помощта на контрапример, че формулата за средните стойности не е в сила при обобщения интеграл по Нютън, т.е. когато f има обобщена примитивна, но няма примитивна.

8. Докажете обобщението на формулата за интегриране по части от края на раздел 5.3 (стр. 27).

9. Докажете, че в разлагането (*) на стр. 34

$$A_{i,k_i} = \frac{k_i! P(c_i)}{Q^{(k_i)}(c_i)}.$$

10. Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има примитивна $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Какво свойство притежава F, ако функцията f е съответно четна, нечетна, периодична? Дайте примери за тези три случая (още по-добре е да започнете с примери и после да се опитате да докажете констатираното свойство на F).

11. Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има примитивна $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Намерете f, ако

$$2xF(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}$$

($f = 0$ е едно тривиално решение; намерете общото решение).

12. Да означим с F^* примитивната от пример 24. Тя не е определена при $x = 0$. Нещо повече, имаме

$$F^*(-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ F^*(+0) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Намерете примитивна F върху цялата числова ос (използвайте знаковата функция от пример 1).

13. Проучете внимателно всички примери и упражнения. Има ли и други случаи, когато примитивната е определена не за цялото дефиниционното множество на подинтегралната функция, а за някоя негова част? Намерете примитивна за цялото дефиниционно множество както в задача 12.

14. Докажете, че субституциите от раздел 7.1.4 рационализират интеграла от биномен диференциал. Може да използвате междинното полагане $z = x^n$, което

свежда интеграла до

$$\frac{1}{n}\int z^{(m+1)/n-1}(a+bz)^p\mathrm{d}z = \frac{1}{n}\int z^{(m+1)/n+p-1}\left(\frac{a+bz}{z}\right)\mathrm{d}z.$$

15. Намерете израз за непрекъснатата функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяваща уравнението

$$F(x)-F(y)=(x-y)f\left(\frac{x+y}{2}\right);\ x,y\in\mathbb{R}$$

където F е примитивната на f.

16. Да допуснем в определението (стр. 9) за обобщена примитивна $F:J\to\mathbb{R}$ на функцията $f:J\to\mathbb{R}$ равенството $F'(x)=f(x)$ да бъде нарушено за безкрайна редица $\{x_k\}$ от стойности на аргумента x.

Да означим с $[x]$ цялата част на неотрицателното число x, т.е. най-голямото цяло число, ненадвишаващо x (например $[\pi]=3$, $[7]=7$ и т.н.).

Пресметнете

$$F(x)=\int_0^x [t]\mathrm{d}t$$

(отговорът е $F(x)=[x]x-[x]([x]+1)/2$). Начертайте графиките на подинтегралната функция $x\to[x]$, $x\in[0,\infty)$, и на примитивната F.

17. Нека функцията $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ е определена от

$$\varphi(x)=\begin{cases}1/[1/x] & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$

т.е.

$$\varphi(x)=\frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$$

където n е цяло, и $\varphi(0)=0$. Докажете, че функцията φ е непрекъсната в $[0,1]$ с изключение на точките $1/2,1/3,\ldots,1/n,\ldots$.

18 (тази задача също не е съвсем лесна). Нека обобщената примитивна е определена както в задача 16. Покажете, че обобщената примитивна Φ на функцията φ от пример 17, удовлетворяваща условието $\Phi(0)=0$, се дава от

$$\Phi(x)=\frac{x}{[1/x]}+\sum_{k=0}^{[1/x]-1}\frac{1}{k(k+1)^2}-\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right),\ x\in(0,1]$$

и $F(0)=0$. За целта използвайте равенството

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

19. Нека функцията $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена от

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ x\neq 0$$

и $f(0) = 0$. Начертайте графиките на f и на примитивната $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$F(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Докажете, че за лявата и дясната граница на F' в точката $x = 0$ е изпълнено

$$F'(-0) = F'(+0) = +\infty.$$

20. Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е определена от

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\ x \neq 0$$

и $f(0) = 0$. Начертайте графиките на f и на примитивната $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$F(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

Докажете, че за лявата и дясната граница на F' в точката $x = 0$ е изпълнено

$$F'(-0) = -\infty,\ F'(+0) = +\infty.$$

21. Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$$

и $f(0) = 0$, няма обобщена примитивна. Начертайте графиките на f и на функцията $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от

$$F(x) = \ln|x|,\ x \neq 0$$

и $F(0) = 0$, за която е в сила $F'(x) = f(x)$, $x \neq 0$.

22. За кои стойности на степенния показател $d \in \mathbb{R}$ функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от $f(x) = x^d$, $x \neq 0$ и $f(0) = 0$,

- има примитивна;
- няма примитивна, но има обобщена примитивна;
- няма и обобщена примитивна?

Глава 10

ИМЕНЕН УКАЗАТЕЛ

Библиография

[1] И. Бронштейн, К. Семендяев: *Справочник по математике.* „Наука”, Москва, 1986.

[2] И. Градштейн, И. Рыжик: *Таблицы интегралов, сумм,рядов и произведений.* ГИФМЛ, Москва, 1962.

[3] Г. Двайт: *Таблицы интегралов и другие математические формулы.* „Наука”, Москва, 1973.

[4] А. Дороговцев: *Математический анализ.* „Вища школа”, Киев, 1985.

[5] А. Карташев, Б. Рождественский: *Математический анализ.* „Наука”, Москва, 1984.

[6] М. Константинов: *Техника на интегрирането. Неопределен интеграл.* Изд. „УАСГ”, София, 1996.

[7] Г. Корн, Т. Корн: *Справочник по математике.* „Наука”, Москва, 1968.

[8] И. Ляшко, А. Боярчук, Я. Гай, А. Калайда: *Математический анализ. Часть 1.* „Вища школа”, Киев, 1983.

[9] П. Петков: *Увод в теория на интегрирането.* Студии на БИАП по математически науки, т. 3, София, 2000.

[10] И. Плужников: *Интегральное исчисление.* В кн. *Справочник машиностроителя, т. 1.* ГНТИМЛ, М., 1961.

[11] А. Прудников, Ю. Брычков, О. Маричев: *Интегралы и ряды*, том 1,2 и 3. „Физматлит”, Москва, 2003.

[12] А. Тер-Крикоров, М. Шабунин: *Курс математического анализа.* „Наука”, М., 1988.

[13] В. Тодоров: *Интеграли от числови функции.* Изд. „УАСГ”, София, 1997.

[14] B. Char, K. Geddes, G. Gonnet, B. Leong, M. Monagan, S. Watt: *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V.* Springer–Verlag, Berlin, 1991.

[15] S. Wolfram: *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer.* Addison–Wesley, Redwood City, CA, 1991.

УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
1046 София, бул. „Христо Смирненски ” 1
Тираж: 300 бр.
Печат: Полиграфическа база при УАСГ