

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ  
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

---

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА  
МОДУЛ 3

**ИНТЕГРАЛИ**

**Любомир Петров      Донка Беева**

Предлаганият модул 3 **Интеграл** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в единадесет раздела, като във всеки от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е трета част от **Сборник задачи по висша математика**, състоящ се от седем модула, разработени от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на

проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

*От авторите*

## СЪДЪРЖАНИЕ

---

1. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ. ПРАВИЛА ЗА ИНТЕГРИРАНЕ .....	5
2. ОСНОВНИ МЕТОДИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ .....	14
3. ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ .....	32
4. ИНТЕГРАЛИ НА НЯКОИ КЛАСОВЕ ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ .....	44
5. ИНТЕГРАЛИ ОТ РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ на $\sin x$ и $\cos x$ .....	64
6. ДОПЪЛНИТЕЛНИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ .....	74
7. ДЕФИНИЦИЯ, СЪЩЕСТВУВАНЕ И СВОЙСТВА НА ОПРЕДЕЛЕН (РИМАНОВ) ИНТЕГРАЛ. КЛАСОВЕ ИНТЕГРУЕМИ ФУНКЦИИ .....	77
8. ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ .....	81
9. НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ .....	94
10. ИНТЕГРАЛИ, ЗАВИСЕЩИ ОТ ПАРАМЕТЪР .....	107
11. НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ, ЗАВИСЕЩИ ОТ ПАРАМЕТЪР. ГАМА ФУНКЦИЯ .....	113
ЛИТЕРАТУРА .....	120



# НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ. ПРАВИЛА ЗА ИНТЕГРИРАНЕ

---

## А. Неопределен интеграл - дефиниция и свойства

В диференциалното смятане се решава *задачата*: при дадена функция  $y = f(x)$  да се намери нейната производна  $f'(x)$ .

В тази глава (от раздела "Интегрално смятане") се разглежда *обратната задача*: да се намери функция, чиято производна е известна.

Дадена е функция  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Дефиниционният интервал на  $f(x)$  може да бъде затворен, отворен, краен, безкраен и т.н. Нека е дадена още функцията  $F(x)$  със следните свойства: а)  $F'(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ; б) производната  $F'(x)$  съществува в  $[a, b]$ ; в)  $F'(x) = f(x)$ .

**Дефиниция 1** Диференцируемата функция  $F(x)$  се нарича *примитивна (първообразна)* на  $f(x)$  в  $[a, b]$ , ако  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

**Пример 1.1.** Ако  $f(x) = x^3$ , то  $F(x) = \frac{1}{4}x^4$  е нейната примитивна, защото

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x).$$

**Пример 1.2.** От  $(\sin x)' = \cos x \implies \sin x$  е примитивна на функцията  $\cos x$ .

**Дефиниция 2** Намирането на всички примитивни функции  $F(x)$  на дадена функция  $f(x)$  в  $[a, b]$  е действие, обратното на диференцирането и се нарича *интегриране*.

**Теорема 1** Ако  $F(x)$  е примитивна функция на  $f(x)$  в  $[a, b]$ , то  $F(x) + C$  е също примитивна на  $f(x)$  и други няма,  $C = const$ .

Наистина от  $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x) \implies F(x) + C$  е примитивна на  $f(x)$ . Нека  $\Phi'(x) = f(x)$ ,  $\Phi(x) \neq F(x) + C$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Тогава от  $[\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0$  следва, че  $\Phi(x)$  и  $F(x)$  се различават с константа, т.е.  $\Phi(x) - F(x) = C \implies \Phi(x) = F(x) + C$ .

**Дефиниция 3** Множеството  $\{F(x) + C\}$ ,  $C = const$ , от всички примитивни функции на функцията  $f(x)$  в  $[a, b]$  се нарича *неопределен интеграл* от функцията  $f(x)$  и се означава

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1.1)$$

като  $f(x)$  се нарича **подинтегрална функция**,  $f(x)dx$  – **подинтегрален израз**, а  $x$  – **интеграционна променлива**. Изразът  $f(x)dx$  показва, че интегрирането се извършва относно променливата  $x$  ( $f(y)dy$  – относно променливата  $y$ ).

*Свойства на неопределения интеграл. Правила за интегриране*

1°.  $\left[ \int f(x)dx \right]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ , т.е. диференцирането и интегрирането са обратни операции (действия);

2°.  $d\left[ \int f(x)dx \right] = \left[ \int f(x)dx \right]' dx = f(x)dx$ ;

3°.  $\int F'(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow \int dF(x) = F(x) + C$ ;

4°.  $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ ,  $\lambda = \text{const.}$ ;

5°.  $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ ;

**Пример 1.3.**

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x} dx = \int x^2 dx - 2 \int x dx + 4 \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + C.$$

**Пример 1.4.**

$$\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x} = \int \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = -\text{cth}x - \text{th}x + C.$$

6°.  $\int f(x)\varphi'(x)dx = \int f(x)d\varphi(x)$ , т.е. внасяне на функция под знака на диференциала;

7°.  $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} \int f(ax)d(ax)$ ,  $a = \text{const.}$ ;

8°.  $\int f(x \pm a)dx = \int f(x \pm a)d(x \pm a)$ ,  $a = \text{const.}$

**Пример 1.5.**  $\int e^{x^2} 2x dx = \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C.$

**Пример 1.6.** 
$$\int \cos^7 x \sin x dx = - \int \cos^7 x d \cos x = -\frac{1}{8} \cos^8 x + C.$$

### Б. Таблица на основните интегралы

От (1.1) и таблицата за производните на елементарните функции получаваме следната таблица:

1. 
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$
2. 
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$
3. 
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
4. 
$$\int e^x dx = e^x + C$$
5. 
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
6. 
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
7. 
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2k-1)$$
8. 
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi$$
 (1.2)
9. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad |x| < 1$$
10. 
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$
11. 
$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$
12. 
$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$
13. 
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$
14. 
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0$$
15. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad |x| > |a|, \text{ при } (x^2 - a^2).$$

**Пример 1.7.** Решете интегралите, като приложите свойства 4° и 5°:

а)  $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx$ ; б)  $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$ ;

в)  $\int (3-x^2)^3 dx$ ; г)  $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$ ; д)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ ; е)  $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$ .

*Решение.* а) Като приложим посочените свойства, за дадения интеграл получаваме:

$$I = a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \dots + a_n \int dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + a_n x + C;$$

б) Извършваме действията в подинтегралната функция и отново прилагаме свойства 4° и 5°:

$$\begin{aligned} I &= \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx \\ &= \int dx - 6 \int x dx + 11 \int x^2 dx - 6 \int x^3 dx \\ &= x - \frac{6}{2} x^2 + \frac{11}{3} x^3 - \frac{6}{4} x^4 + C = x - 3x^2 + \frac{11}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^4 + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I &= \int (3-x^2)^3 dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6) dx \\ &= 27 \int dx - 27 \int x^2 dx + 9 \int x^4 dx - \int x^6 dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + C; \end{aligned}$$

г) Прилагаме свойство 5° след предварително еквивалентно преобразуване:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctg x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } I &= \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx \\ &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } I &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int (1-x^{-2}) x^{3/4} dx = \int (x^{3/4} - x^{-1/4}) dx \\ &= \frac{x^{7/4}}{7/4} - \frac{x^{3/4}}{3/4} + C = \frac{4}{7} x \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C = 4 \sqrt[4]{x^3} \left( \frac{x}{7} - \frac{1}{3} \right) + C. \end{aligned}$$



**Пример 1.8.** Като използвате свойства  $4^\circ$ ,  $5^\circ$  и  $7^\circ$ , решете интегралите:

$$\text{а) } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \text{д*) } \int \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= \int \frac{(e^x)^3 + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) - \int e^x dx + \int dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I &= \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x + \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I &= \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} dx - \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| - \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + \ln C \\ &= \ln C \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right|; \end{aligned}$$

$$\text{г) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1}{a} \cdot a \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\text{д*) } I = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot a \int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

**Пример 1.9.** Решете интегралите:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}; \quad \text{б) } \int \operatorname{th}^2 x dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{1 + \cos x}; \quad \text{г) } \int \cos(5x - 3) dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{1 - \sin x}; \quad \text{е) } \int \sin^2 x dx; \quad \text{ж) } \int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{2} dx.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I &= \int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int dx - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = x - \operatorname{th} x + C; \end{aligned}$$

$$\text{в) } I = \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } I &= \int \cos(5x - 3) dx = \frac{1}{5} \int \cos(5x - 3) d(5x) \\ &= \frac{1}{5} \int \cos(5x - 3) d(5x - 3) = \frac{1}{5} \sin(5x - 3) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } I &= \int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{dx}{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = - \int \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } I &= \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж) } I &= \int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \right) + \sin \left( \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ \sin \frac{5x}{6} + \sin \left( -\frac{x}{6} \right) \right] dx = \frac{1}{2} \int \sin \frac{5x}{6} dx - \frac{1}{2} \int \sin \frac{x}{6} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \int \sin \frac{5x}{6} d\left(\frac{5x}{6}\right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \int \sin \frac{x}{6} d\left(\frac{x}{6}\right) = -\frac{3}{5} \cos \frac{5x}{6} + 3 \cos \frac{x}{6} + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.10.** Решете интегралите:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{dx}{x^2 - a^2}, \quad a = \operatorname{const.}; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^3}}; \quad \text{в) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}; \\ \text{г) } \int \operatorname{cotg} x dx; \quad \text{д) } \int \frac{\sin x}{2 + (\cos x + 5)^2}; \quad \text{е) } \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}; \quad \text{ж) } \int \frac{x e^{x^2} dx}{\sqrt{1 - e^{2x^2}}}; \\ \text{з) } \int \frac{\cos x dx}{5 - \cos^2 x}; \quad \text{и) } \int \frac{x^4 dx}{(x^5 + 1)^4}; \quad \text{к) } \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \text{л) } \int \frac{dx}{\cos x}. \end{aligned}$$

Решение.

$$\text{a) } I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{a+x+a-x}{(x+a)(x-a)} dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{a+x}{(x+a)(x-a)} dx + \int \frac{a-x}{(x+a)(x-a)} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right]$$

$$= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + \ln C = \frac{1}{2a} \ln C \left| \frac{x-a}{x+a} \right|;$$

$$\text{б) } I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3)' dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$= -\frac{1}{3} \int (1-x^3)^{-1/2} d(1-x^3) = -\frac{1}{3} \frac{(1-x^3)^{1/2}}{1/2} = -\frac{2}{3} \sqrt{1-x^3} + C;$$

$$\text{в) } I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + C;$$

$$\text{г) } I = \int \cot g x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C;$$

$$\text{д) } I = \int \frac{\sin x}{2+(\cos x+5)^2} dx = -\int \frac{-\sin x}{2+(\cos x+5)^2} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{2+(\cos x+5)^2} dx$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{2+(\cos x+5)^2} = -\int \frac{d(\cos x+5)}{2+(\cos x+5)^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x+5)}{1+\frac{(\cos x+5)^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{d \frac{\cos x+5}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{\cos x+5}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x+5}{\sqrt{2}}\right) + C;$$

$$\text{е) } I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x + 1}} = \int \frac{1/\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} x)' dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}$$

$$= \int (\operatorname{tg} x + 1)^{-1/2} d(\operatorname{tg} x) = \int (\operatorname{tg} x + 1)^{-1/2} d(\operatorname{tg} x + 1)$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} x + 1)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} + C;$$

$$\text{ж) } I = \int \frac{x e^{x^2} dx}{\sqrt{1-e^{2x^2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{e^{x^2} d(x^2)}{\sqrt{1-e^{2x^2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{x^2})}{\sqrt{1-(e^{x^2})^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin(e^{x^2}) + C;$$

$$\begin{aligned} 3) I &= \int \frac{\cos x dx}{5 - \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5 - (1 - \sin^2 x)} = \int \frac{d(\sin x)}{4 + \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d(\sin x)}{1 + \frac{\sin^2 x}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{d\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и) } I &= \int \frac{x^4 dx}{(x^5 + 1)^4} = \frac{1}{5} \int \frac{5x^4 dx}{(x^5 + 1)^4} = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{(x^5 + 1)^4} \\ &= \frac{1}{5} \frac{(x^5 + 1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15(x^5 + 1)^3} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{к) } I &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2(x/2)}}{\frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{d(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)} \\ &= \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\text{л) } I = \int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = - \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + C, \text{ (вж. к).}$$

### ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

$$1. \int \left( \frac{1-x}{x} \right)^2 dx \quad \text{Отг. } \ln|x| - 2x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx \quad \text{Отг. } \frac{4}{5}\sqrt[4]{x} - \frac{27}{17}x^{12}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$$

$$3. \int \left( \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx \quad \text{Отг. } a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx \quad \text{Отг. } -\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{5-x} \quad \text{Отг. } -\ln|5-x| + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} \quad \text{Отг. } -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} \quad \text{Отг. } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}| + C$$

8.  $\int \operatorname{cth}^2 x dx$       Отг.  $x - \operatorname{cth} x + C$
9.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$       Отг.  $-\sqrt{1-x^2} + C$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$       Отг.  $2 \ln |\sqrt{x} + \sqrt{1+x}| + C$   
Упътване:  $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$ .
11.  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$       Отг.  $\frac{1}{3} \ln^3 x + C$
12.  $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$       Отг.  $\ln |\ln(\ln x)| + C$
13.  $\int \sin^5 x \cos x dx$       Отг.  $\frac{1}{6} \sin^6 x + C$
14.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$       Отг.  $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$
15.  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$       Отг.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x) + C$
16.  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$       Отг.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$

## ОСНОВНИ МЕТОДИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ

## А. Непосредствено интегриране

Под непосредствено интегриране разбираме прилагането на таблица (1.2) и следната теорема:

**Теорема 1** Ако  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , т.е.  $F(x)$  е примитивна на  $f(x)$  и съществуват функциите  $f[u(x)]$  и  $u'(x)$ , то:

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C, \quad (2.1)$$

т.е.  $F[u(x)]$  е примитивна на  $f[u(x)]u'(x)$ .

Наистина,  $(F[u(x)])' = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x)$ . И така, Т1 води до обобщени формули на формули от (1.2).

**Пример.**  $\int u^\alpha(x)u'(x)dx = \int u^\alpha(x)du(x) = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ .

*Доказателство:*  $\left(\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}u^{\alpha+1-1}(x)u'(x) = u^\alpha(x)u'(x)$ ,

т.е. получихме подинтегралната функция.

Аналогично формулите на таблица (1.2) остават в сила, когато заместим интеграционната променлива  $x$  с функция  $u(x)$ .

**Следствие 1.**  $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ .

**Пример 2.1.** Решете интегралите (вж. (1.2)):

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} dx; & \text{в) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2})^3}; & \text{д) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx; \\ \text{б) } \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx; & \text{г) } \int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)\sin^2 x}; & \text{е) } \int \sin^4 x dx. \end{array}$$

*Решение.* а)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4+4x+x^2}{x(4+x^2)} dx = \int \frac{(4+x^2)+4x}{x(4+x^2)} dx = \int \frac{4+x^2}{x(4+x^2)} dx + 4 \int \frac{xdx}{x(4+x^2)} \\ &= \int \frac{dx}{x} + 4 \int \frac{dx}{4+x^2} = \ln|x| + 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C, \quad \text{вж. пример 1.8. д);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } I &= \int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{1-x^2}{x^2(1-x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1-x^2} \\
 &= \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} \int \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)(1+x)} dx \\
 &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left[ \int \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} dx + \int \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} dx \right] \\
 &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left[ \int \frac{d(1+x)}{1+x} - \int \frac{d(1-x)}{1-x} \right] = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} (\ln|1+x| - \ln|1-x|) + C \\
 &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } I &= \int \frac{2xdx}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \\
 &= \int \frac{d\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int (1+\sqrt{1+x^2})^{-1/2} d(1+\sqrt{1+x^2}) \\
 &= \frac{(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } I &= - \int \frac{-\frac{1}{\sin^2 x} dx}{\operatorname{tg} x + 1} = - \int \frac{d(\operatorname{cotg} x)}{\frac{1}{\operatorname{cotg} x} + 1} = - \int \frac{\operatorname{cotg} x d(\operatorname{cotg} x)}{1 + \operatorname{cotg} x} \\
 &= - \int \frac{(1 + \operatorname{cotg} x) - 1}{1 + \operatorname{cotg} x} d(\operatorname{cotg} x) = - \int \frac{1 + \operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg} x} d(\operatorname{cotg} x) + \int \frac{d(1 + \operatorname{cotg} x)}{1 + \operatorname{cotg} x} \\
 &= - \int d(\operatorname{cotg} x) + \ln|1 + \operatorname{cotg} x| = -\operatorname{cotg} x + \ln|1 + \operatorname{cotg} x| + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } I &= \int \frac{\cos^2 x d(\sin x)}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^4 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x} - \int \frac{\sin^2 x d(\sin x)}{\sin^4 x} \\
 &= \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} - \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{е) } I &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{2}{4} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8.4} \int \cos 4x d(4x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{C}{32} \\
 &= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{C}{32} = \frac{1}{32} (12x - 8 \sin 2x + \sin 4x + C).
 \end{aligned}$$

**Пример 2.2.** Решете интегралите (вж. Т1):

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int e^{\sin x} \cos x dx; & \text{в) } & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(2 \arcsin x - 1)}; & \text{д) } & \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}; \\ \text{б) } & \int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}; & \text{г) } & \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx. \end{aligned}$$

*Решение.*

$$\text{а) } I = \int e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} + C;$$

$$\text{б) } I = \frac{1}{4} \int \frac{de^x}{1 + \frac{e^{2x}}{4}} = \frac{2}{4} \int \frac{d\left(\frac{e^x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{e^x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C, \text{ вж. 1.8.д);}$$

$$\text{в) } I = \int \frac{d(\arcsin x)}{2 \arcsin x - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2 \arcsin x - 1)}{2 \arcsin x - 1} = \frac{1}{2} \ln |2 \arcsin x - 1| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } I &= \frac{1}{2} \int \frac{(1-x^2)d(x^2)}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{1+x^4} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } I &= \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C. \end{aligned}$$

### Б. Интегриране по части

**Теорема 2** Нека  $u(x)$ ,  $v(x)$  са диференцируеми функции в  $[a, b]$ , т.е. съществуват  $u'(x)$ ,  $v'(x)$  и  $v(x)u'(x)$  има примитивна в  $[a, b]$ , тогава  $u(x)v'(x)$  има примитивна в  $[a, b]$  и е изпълнено

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx + C. \quad (2.2)$$

*Доказателство.* От  $(uv - \int vu'dx)' = u'v + uv' - vu' = u(x)v'(x) \implies$  функцията  $(uv - \int vu'dx)$  е примитивна на  $u(x)v'(x)$  в  $[a, b]$ .

Формула (2.2) може да се прилага във вида:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \quad (2.3)$$

*Прилагане на формула (2.3):*



I. При следните *шест интеграла* ( $P_n(x) \equiv 1$ ), като функцията пред диференциала играе ролята на  $u(x)$ , а функцията след диференциала е  $v(x) = x$ :

$$\int P_n(x) \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arccotg} x \\ \ln x \\ \sqrt{x^2 + a^2} \end{cases} dx. \quad (2.4)$$

**Пример 2.3.** Решете интеграла  $\int \arcsin x dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = A + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) \\ &= A + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.4.** Решете интеграла  $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} dx = A - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx \\ &= A - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= A - \int \frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{x^2+a^2} dx + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| \\ &\implies I = A - \int \sqrt{x^2+a^2} dx + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| \\ &\qquad 2I = A + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| \\ &\implies I = \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|) + C. \end{aligned}$$

Останалите четири интеграла оставяме за решаване на читателя.

II. При интегралите (2.4) една от шестте функции пред диференциала играе ролята на  $u(x)$ , а изразът  $P_n(x) \neq 1$  се внася под знака на диференциала и се получава  $v(x)$ :

**Пример 2.5.** Решете интеграла  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = A - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx \\ &= A - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.6\*.** Решете интеграла  $I = \int \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

*Решение.* Функцията  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  трябва да се внесе под знака на интеграла. За целта образуваме

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{Тогава от } d\left[\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = d(-\sqrt{1-x^2}) \Rightarrow \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(\sqrt{1-x^2})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\int \operatorname{arcsin} x d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsin} x + \int \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsin} x + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.7.** Решете интеграла  $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{x d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\int x d\sqrt{1-x^2} \\ &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \Rightarrow I &= -x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsin} x - I \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} x - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

III. При следните три интеграла, като изразът  $P_n(x) = u(x)$ , а една от

трите функции се внася под знака на диференциала и се получава  $v(x)$ :

$$\int P_n(x) \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{cases} dx. \quad (2.5)$$

**Пример 2.8.** Решете интеграла  $\int x^2 \cos 2x dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \int x^2 d \sin 2x = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} \int (\sin 2x) 2x dx \\ &= A - \frac{1}{2} \int x \sin 2x d(2x) = A + \frac{1}{2} \int x d \cos 2x = A + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.9.** Решете интеграла  $\int x \sin x \cos x dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \int x d \cos 2x = -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.10.** Решете интегралите

а)  $\int x^3 e^x dx$ ;      б)  $\int x^5 e^{-4x^2} dx$ .

*Решение.*

а)

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 de^x = x^3 e^x - 3 \int x^2 de^x = A - 3x^2 e^x + 3 \cdot 2 \int x de^x \\ &= A - B + 6x e^x - 6 \int e^x dx = A - B + C - 6e^x + C \\ &= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{8} \int x^4 e^{-4x^2} d(-4x^2) = -\frac{1}{8} \int x^4 de^{-4x^2} = -\frac{1}{8} x^4 e^{-4x^2} + \frac{1.4}{8} \int x^3 e^{-4x^2} dx \\
 &= A - \frac{4}{8.8} \int x^2 e^{-4x^2} d(-4x^2) = A - \frac{1}{16} \int x^2 de^{-4x^2} \\
 &= A - \frac{1}{16} x^2 e^{-4x^2} + \frac{1.2}{16} \int x e^{-4x^2} dx = A - B - \frac{2}{16.8} \int e^{-4x^2} d(-4x^2) \\
 &= A - B - \frac{1}{64} e^{-4x^2} + C = -\frac{1}{8} x^4 e^{-4x^2} - \frac{1}{16} x^2 e^{-4x^2} - \frac{1}{64} e^{-4x^2} + C \\
 &= -\frac{1}{64} e^{-4x^2} (8x^4 + 4x^2 - 1) + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.11.** Решете интеграла  $I_2 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{a^2} I_1 - \frac{1}{2a^2} \int \frac{x d(a^2 + x^2)}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{a^2} I_1 + \frac{1}{2a^2} \int x d\left(\frac{1}{a^2 + x^2}\right) \\
 &= \frac{1}{a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx \\
 &= \frac{1}{a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} - \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)}, \\
 I_1 &= \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \\
 \Rightarrow I_2 &= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + C.
 \end{aligned}$$

### В. Интегриране чрез субституция (смяна на променливата)

Този метод се прилага най-често при решаване на различните класи интегралы.

**Теорема 3** Дадени са функция  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  и строго монотонна и диференцируема функция  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ , чиято обратна функция означаваме  $t = \varphi^{-1}(x)$ ,  $(\varphi(t): [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b)$ . Тогава

$$I = \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C. \quad (2.6)$$

**Алгоритъм:**

1<sup>0</sup>. В  $I$  заместваме  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t)dt$ .

2<sup>0</sup>. Решаваме получения интеграл, т.е.  $I = F(t) + C$ .

3<sup>0</sup>. Заместваме  $t = \varphi^{-1}(x)$ , т.е.  $I = F[\varphi^{-1}(x)] + C = \Phi(x) + C$ .

**Пример 2.12.** Като използвате подходяща смяна на променливата, решете интегралите:

а)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx;$

г)  $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx;$

б)  $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx;$

д)  $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 + \ln x}};$

в)  $\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x};$

е)  $\int \frac{\arctg \sqrt{x} dx}{\sqrt{x} (1+x)}.$

**Решение.**

а) Полагаме  $\sqrt{2-x} = t \Rightarrow x = \varphi(t) = 2 - t^2$ ;  $dx = \varphi'(t)dt = -2t dt$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{(2-t^2)^2}{t} (-2t) dt = -2 \int (2-t^2)^2 dt = -2 \int (4 - 4t^2 + t^4) dt \\ &= -8 \int dt + 8 \int t^2 dt - 2 \int t^4 dt = -8t + \frac{8}{3} t^3 - 2 \frac{t^5}{5} + C \\ &= -\frac{2}{5} (\sqrt{2-x})^5 + \frac{8}{3} (\sqrt{2-x})^3 - 8\sqrt{2-x} + C \\ &= -\frac{2}{15} (32 + 8x + 3x^2) \sqrt{2-x} + C; \end{aligned}$$

б) Полагаме  $\sin x = t$ ,  $x = \arcsin t$ ,  $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int (\sqrt{1-t^2})^5 \sqrt{t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int (\sqrt{1-t^2})^4 \sqrt{t} dt \\ &= \int (1-2t^2+t^4) \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt - 2 \int t^{5/2} dt + \int t^{9/2} dt \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{4}{7} t^{7/2} + \frac{2}{11} t^{11/2} + C \\ &= \left( \frac{2}{3} \sin x - \frac{4}{7} \sin^3 x + \frac{2}{11} \sin^5 x \right) \sqrt{\sin x} + C; \end{aligned}$$

в) Полагаме  $e^{x/2} = t$ ,  $\frac{x}{2} = \ln t \Rightarrow x = 2 \ln t$ ,  $dx = \frac{2dt}{t}$ .

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{e^{x/2} + (e^{x/2})^2} = \int \frac{2/t}{t+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int \frac{1+t}{t^2(1+t)} dt - 2 \int \frac{t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2} - 2 \int \frac{1+t-t}{t(1+t)} dt \\
 &= 2 \frac{t^{-1}}{-1} - 2 \int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{d(1+t)}{1+t} = -\frac{2}{t} - 2 \ln |t| + 2 \ln |1+t| + C \\
 &= -2e^{-x/2} - x + 2 \ln(1 + e^{x/2}) + C;
 \end{aligned}$$

р) Полагаме  $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t$ ,  $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= \int \frac{\sqrt{1-t^2} t^3}{1+t^2} \left( -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = - \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 d(t^2)}{1+t^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} d(t^2) = -\frac{1}{2} d(t^2) + \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} \\
 &= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \ln \sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{2} + C;
 \end{aligned}$$

д) Полагаме  $\ln x = t \Rightarrow x = e^t$ ,  $dx = e^t dt$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= \int \frac{te^t dt}{e^t \sqrt{1+t}} = \int \frac{t+1-1}{\sqrt{1+t}} dt = \int \sqrt{1+t} dt - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} \\
 &= \frac{2}{3} (1+t)^{3/2} - 2(1+t)^{1/2} + C = \frac{2}{3} (1+t-3) \sqrt{1+t} \\
 &= \frac{2}{3} (\ln x - 2) \sqrt{1+\ln x} + C;
 \end{aligned}$$

е) Полагаме  $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= \int \frac{2t \arctg t}{t} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{\arctg t}{1+t^2} dt = 2 \int \arctg t d(\arctg t) \\
 &= (\arctg t)^2 + C = (\arctg \sqrt{x})^2 + C.
 \end{aligned}$$

### Г. Интегриране чрез рекурентни връзки

**Пример 2.13.** Решете  $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^n} dx \\
 &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{x \cdot 2x dx}{(a^2 + x^2)^n} \\
 &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{x d(a^2 + x^2)}{(a^2 + x^2)^n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x \cdot \frac{-(n-1)}{(a^2+x^2)^n} d(a^2+x^2) \\
 &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x d \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} \\
 &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[ \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \right] \\
 &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \\
 \implies I_n &= \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + C.
 \end{aligned}$$

*Забележка.* От  $I_n$  при  $n = 2$  получаваме  $I_2$  (пример 2.11):

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} \\
 &= \frac{1}{2a^2} \left( \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.14.** Решете а)  $I_n = \int \cos^n x dx$ ; б)  $I_n = \int \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Решение.* а)  $I_n = \int \cos^{n-1} x d \sin x = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x d(\cos^{n-1} x)$

$$= A + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx = A + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$= A + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx$$

$$\implies I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\implies I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};$$

б)  $I_n = - \int \sin^{n-1} x d \cos x = - \cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x d(\sin^{n-1} x)$

$$= A + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = A + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= A + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx$$

$$\implies I_n = - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\implies I_n = - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

**Пример 2.15.** Решете  $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ .

*Решение.* Нека

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dx}{\sin^k x} = \int \frac{\sin x}{\sin^{k+1} x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\sin^{k+1} x} \\ &= - \frac{\cos x}{\sin^{k+1} x} + \int \cos x d \frac{1}{\sin^{k+1} x} = A + \int \cos x \frac{[-(k+1)]}{\sin^{k+2} x} \cos x dx \\ &= A - (k+1) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^{k+2} x} dx = A - (k+1) \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^{k+2} x} dx \\ &= A - (k+1) \int \frac{dx}{\sin^{k+2} x} + (k+1) \int \frac{dx}{\sin^k x} \\ \Rightarrow I_k &= - \frac{\cos x}{\sin^{k+1} x} - (k+1) I_{k+2} + (k+1) I_k \\ \Rightarrow I_{k+2} &= \frac{1}{k+1} \left[ (k+1-1) I_k - \frac{\cos x}{\sin^{k+1} x} \right]. \end{aligned}$$

Полагаме  $k+2 = n$ ,  $k = n-2 \Rightarrow I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$ .

*Забележка.* Аналогично се извежда рекурентната формула

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}.$$

**Пример 2.16.** Решете  $I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I_n &= \int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x d \operatorname{tg} x - I_{n-2} \\ &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \\ \Rightarrow I_n &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

*Забележка.* Интегралът  $I_2$  (пример 2.2.д) може да се реши като се приложи получената рекурентна формула при  $n = 2$ :

$$I_2 = \frac{\operatorname{tg}^{2-1} x}{2-1} - I_0 = \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^0 x dx = \operatorname{tg} x - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$



Общи задачи

**Пример 2.17.** Решете интегралите

а)  $I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx$     б)  $I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx$ .

Решение. а)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} \int \cos bxe^{ax}d(ax) = \frac{1}{a} \int \cos bxd e^{ax} \\ &= \frac{1}{a} \left( e^{ax} \cos bx - \int e^{ax} d \cos bx \right) = \frac{1}{a} \left( e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bxdx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int e^{ax} \sin bxd(ax) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bxd e^{ax} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \left( e^{ax} \sin bx - \int e^{ax} d \sin bx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bxdx. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C;$$

б)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a} \int \sin bxd e^{ax} = \frac{1}{a} \left( e^{ax} \sin bx - \int e^{ax} d \sin bx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1 \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left[ \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \right] \\ &= \frac{e^{ax}}{a(a^2 + b^2)} [(a^2 + b^2) \sin bx - ab \cos bx - b^2 \sin bx] \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a(a^2 + b^2)} (a^2 \sin bx - ab \cos bx) = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C; \Rightarrow I_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

**Пример 2.18.** Решете  $I = \int \sin 2x \cos 3xdx$ .

Решение. I начин:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \sin 2xd(\sin 3x) = \frac{1}{3} \sin 2x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3xd(\sin 2x) \\ &= A - \frac{2}{3} \int \sin 3x \cos 2xdx = A + \frac{2}{9} \int \cos 2xd \cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A + \frac{2}{9} \cos 2x \cos 3x - \frac{2}{9} \int \cos 3x d \cos 2x = A + B + \frac{4}{9} \int \sin 2x \cos 3x dx \\
 \implies I &= A + B + \frac{4}{9} I + C \implies I = \frac{9}{5} \left( \frac{1}{3} \sin 2x \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 2x \cos 3x \right) + C \\
 &= \frac{1}{5} (3 \sin 2x \sin 3x + 2 \cos 2x \cos 3x) + C.
 \end{aligned}$$

И начин (непосредствено): От  $\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \implies$

$$I = \frac{1}{2} \int \sin 5x dx - \frac{1}{2} \int \sin x dx + C = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

**Пример 2.19.** Решете  $I = \int x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \\
 &= A - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{1}{1+1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx = A + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x+1} dx \\
 &= A + \frac{1}{2} \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = A + \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{x+1} \\
 &= A + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.20.** Решете  $I = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ .

*Решение.*  $I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
 &= A - \int \frac{x(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} dx = A - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \\
 &= A - \int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.21.** Да се реши  $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int \arcsin x \frac{d(1+x)}{2\sqrt{1+x}} = 2 \int \arcsin x d\sqrt{1+x} \\
 &= 2\sqrt{1+x} \arcsin x - 2 \int \sqrt{1+x} d \arcsin x = A - 2 \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= A - 2 \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx = A + 2.2 \int \frac{d(1-x)}{2\sqrt{1-x}} \\
 &= 2\sqrt{1+x} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.22.** Пресметнете  $I = \int x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} \int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} d(x^4) = \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \int x^4 d \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) \\
 &= A - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{1+(1/x)^2} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx = A + \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{x^2+1} dx \\
 &= A + \frac{1}{4} \int \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1} dx = A + \frac{1}{4} \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+1} \\
 &= A + \frac{1}{4} \int (x^2-1) dx + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x = A + \frac{1}{4} \int x^2 dx - \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x \\
 &= \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.23.** Решете  $I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \int x \frac{1}{1+(\sqrt{2x-1})^2} \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} dx \\
 &= A - \int \frac{x}{2x\sqrt{2x-1}} dx = A - \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}} \\
 &= A - \frac{1}{2} \int d\sqrt{2x-1} = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.24.** Да се реши  $I = \int e^{\arcsin x} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= x e^{\arcsin x} - \int x d e^{\arcsin x} = A - \int x \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = A + \int e^{\arcsin x} \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\
 &= A + \int e^{\arcsin x} d\sqrt{1-x^2} = A + e^{\arcsin x} \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} d(e^{\arcsin x}) \\
 &= A + B - \int \sqrt{1-x^2} \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \implies I = A + B - I \\
 \implies I &= \frac{1}{2} (x e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x}) + C = \frac{e^{\arcsin x}}{2} (x + \sqrt{1-x^2}) + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.2.5.** Решите  $I = \int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= - \int \ln(\operatorname{tg} x) d \cos x = - \cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \cos x d[\ln(\operatorname{tg} x)] \\
 &= A + \int \cos x \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = A + \int \frac{dx}{\sin x} \\
 &= - \cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad \text{вж. 1.10. к).}
 \end{aligned}$$

**Пример 2.2.6.** Да се реши  $I = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{arctg} x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\operatorname{arctg} x}) \\
 &= \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\operatorname{arctg} x} d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = A - \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} x}{1+x^2} dx \\
 &= A - \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} dx = A - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx \\
 &= A - \int \frac{d e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} = A - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int e^{\operatorname{arctg} x} d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
 &= A - B + \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} 2x \left(-\frac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}} dx = A - B - \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = A - B - I \\
 \implies I &= A - B + I \implies I = \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C.
 \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ

I. Решете непосредствено интегралите:

- |                                                                 |                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int \frac{\sqrt{x-x^3}e^x+x^2}{x^3} dx$                    | Отг. $-\frac{2}{3\sqrt{x^3}} - e^x + \ln x  + C;$                                                       |
| 2. $\int \frac{dx}{\cos^2(13x-19)}$                             | Отг. $\frac{1}{13} \operatorname{tg}(13x-19) + C;$                                                      |
| 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$                               | Отг. $\arcsin \frac{x}{3} + C;$                                                                         |
| 4. $\int \frac{dx}{7+3x^2}$                                     | Отг. $\frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} x \sqrt{\frac{3}{7}} + C;$                               |
| 5. $\int \frac{\sqrt[3]{4-4x+x^2}}{2-x} dx$                     | Отг. $-\frac{3}{2} \sqrt[3]{(2-x)^2} + C;$                                                              |
| 6. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}$        | Отг. $\frac{1}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) + C;$                                |
| 7. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$                                  | Отг. $\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left  \frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}} \right  + C;$                    |
| 8. $\int \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$                       | Отг. $\cos \frac{1}{x} + C;$                                                                            |
| 9. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$                                  | Отг. $\ln(2+e^x) + C;$                                                                                  |
| 10. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$ | Отг. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{1-\sin 2x} + C;$                                                             |
| 11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$                     | Отг. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C;$    |
| 12. $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$                                | Отг. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C;$ |
| 13. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx$   | Отг. $\ln \left  \frac{x+\sqrt{x^2+3}}{(x+\sqrt{x^2-3})^3} \right  + C;$                                |
| 14. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$                             | Отг. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C;$                                                                      |
| 15. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$                                | Отг. $\operatorname{arctg} e^x + C;$                                                                    |
| 16. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$            | Отг. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}^4 x + C;$                                                        |
| 17. $\int \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$      | Отг. $-\frac{1}{2} \ln^2(\arccos x) + C;$                                                               |
| 18. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx$                          | Отг. $\sqrt{x^2+a^2} - a \ln \left  \frac{a}{x} + \sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}} \right  + C.$                |

II. Решете интегралите чрез интегриране по части:

- |                                     |                                                                  |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int \operatorname{arctg} x dx$ | Отг. $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C;$          |
| 2. $\int \ln \sqrt{1-x^2} dx$       | Отг. $x(\ln \sqrt{1-x^2} - 1) + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C;$ |

3.  $\int x \arcsin x dx$  Отг.  $\frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arcsin x + C$ ;
4.  $\int e^x \cos x dx$  Отг.  $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$ ;
5.  $\int \ln x dx$  Отг.  $x \ln x - x + C$ ;
6.  $\int x^n \ln x dx$  Отг.  $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1) \ln x - 1] + C$ ;
7.  $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$  Отг.  $C - \frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{x}$ ;
8.  $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$  Отг.  $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9}\right) + C$ ;
9.  $\int x e^{-x} dx$  Отг.  $C - e^{-x}(x+1)$ ;
10.  $\int x^2 e^{-2x} dx$  Отг.  $C - \frac{e^{-2x}}{4}(2x^2 + 2x + 1)$ ;
11.  $\int x^3 e^{-x^2} dx$  Отг.  $C - \frac{e^{-x^2}}{2}(x^2 + 1)$ ;
12.  $\int x \cos x dx$  Отг.  $x \sin x + \cos x + C$ ;
13.  $\int x^2 \sin 2x dx$  Отг.  $-\frac{1}{2}\left(x^2 \cos 2x - x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) + C$ ;
14.  $\int x \operatorname{sh} x dx$  Отг.  $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$ ;
15.  $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx$  Отг.  $\frac{1}{9}(3x^3 + 2)\operatorname{sh} 3x - \frac{1}{9}(9x^2 + 2)\operatorname{ch} 3x + C$ ;
16.  $\int x^2 \arccos x dx$  Отг.  $\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + C$ ;
17.  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$  Отг.  $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C$ ;
18.  $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$  Отг.  $x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2}x + C$ ;
19.  $\int \frac{\sqrt{x^2+1}[\ln(x^2+1) + 2 \ln x]}{x^4} dx$  Отг.  $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{2}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] + C$ ;
20.  $\int \sqrt[3]{x} (\ln x)^2 dx$  Отг.  $\frac{3}{32}x^{4/3}(8 \ln^2 x - 12 \ln x + 9) + C$ ;
21.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$  Отг.  $-x \operatorname{cotg} x + \ln |\sin x| + C$ ;
22.  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$  Отг.  $-\frac{x}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$ ;
23.  $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$  Отг.  $\frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} - x + C$ ;
24.  $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$  Отг.  $C - \frac{\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6}{x}$ ;
25.  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$  Отг.  $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + C$ ;

26.  $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$  Отг.  $8\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \arcsin \frac{x}{2} + C$ ;
27.  $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}$  Отг.  $\frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x \sqrt{3} + \frac{1}{3} \ln |\cos x \sqrt{3}| + C$ ;
28.  $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx$  Отг.  $\frac{1}{3}(x^2 - 1) \ln \sqrt{1-x} - \frac{x}{36}(6 + 3x + 2x^2) + C$ ;
29.  $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$  Отг.  $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - x + \operatorname{arctg} x + C$ ;
30.  $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$  Отг.  $-2(1-x)\sqrt{x} + (1+x) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + C$ ;
31.  $\int \cos x \ln(1 + \sin^2 x) dx$  Отг.  $\sin x \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x + 2 \operatorname{arctg} \sin x + C$ ;
32.  $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$  Отг.  $-\operatorname{cotg} x (\ln x + 1) - x + C$ ;
33.  $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$  Отг.  $\operatorname{arctg} x (\ln \operatorname{arctg} x - 1) + C$ ;
34.  $\int \frac{\ln(\cos x) dx}{\sin^2 x}$  Отг.  $-\operatorname{cotg} x \ln \cos x - x + C$ ;
35.  $\int \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3} dx$  Отг.  $-\frac{\ln(x^2 + 1)}{2x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} + C$ ;
36.  $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$  Отг.  $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C$ ;

III. Като използвате *подходяща смяна* на променливата, решете интегралите:

1.  $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}$  Отг.  $\frac{4}{21} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3} (3e^x - 4) + C$ ;
2.  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$  Отг.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \ln \sqrt{1-x^2} + C$ ;
3.  $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$  Отг.  $\frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + C$ ;
4.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx$  Отг.  $\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C$ ;

IV. Изведете *рекурентни формули* за решаване на интегралите:

1.  $\int (a^2 - x^2)^n dx$  Отг.  $\frac{x(a^2 - x^2)^n}{1 + 2n} + \frac{2na^2}{1 + 2n} I_{n-1}$ ;
2.  $\int (\ln x)^n dx$  Отг.  $x \ln^n x - n I_{n-1}$ ;
3.  $\int x^n e^x dx$  Отг.  $x^n e^x - n I_{n-1}$ ;
4.  $\int \frac{e^x dx}{x^n}, n \neq 1$  Отг.  $\frac{1}{n-1} I_{n-1} - \frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}}$ ;
5.  $\int x^m \ln^n x dx$  Отг.  $\frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x dx$ ;

## ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

---

**Дефиниция 1** Дроб от вида

$$R(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}, \quad (3.1)$$

където  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  са полиноми съответно от степен  $n$  и  $m$ , се нарича дробна рационална функция ( $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ ).

Рационалните функции са два вида:

- а) цели, при  $\varphi(x) = 1$ , т.е.  $R(x)$  е полином;
- б) дробни, като при  $n \geq m$  рационалната дроб е *неправилна*, а при  $n < m$  – *правилна*.

### А. Интегриране на цяла рационална функция

Интегрирането на цяла рационална функция (полином) става непосредствено:

$$\begin{aligned} \int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) dx \\ = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n x + C. \end{aligned}$$

И така, интеграл от полином на  $n$ -та степен е полином от  $(n+1)$ -ва степен.

### Б. Интегриране на дробна рационална функция

Разглеждаме дробна рационална функция (3.1):

- а) ако  $n \geq m$ , делим  $f(x)$  на  $\varphi(x)$  и получаваме

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = g_{n-m}(x) + \frac{r_{m-1}(x)}{\varphi(x)}, \quad (3.2)$$

където  $g_{n-m}(x)$  и  $r_{m-1}(x)$  се наричат съответно *частно* (от степен  $(n-m)$ ) и *остатък* (от степен най-много  $(m-1)$ ). Тогава

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \int g(x) dx + \int \frac{r(x)}{\varphi(x)} dx + C.$$

- б) ако  $n < m$ , рационалната функция  $R(x)$  е правилна и тогава:



1. Намираме нулите на  $\varphi(x)$  и нека  $a$  е  $\lambda$ -кратна нула,  $b$  е  $\mu$ -кратна нула, ...,  $(\alpha \pm i\beta)$  е  $k$ -кратна комплексна двойка,...

2. От алгебрата е известно разлагането на  $R(x)$ :

$$R(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_\lambda}{(x-a)^\lambda} + \frac{A_{\lambda-1}}{(x-a)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\mu}{(x-b)^\mu} + \frac{B_{\mu-1}}{(x-b)^{\mu-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_{k-1} x + N_{k-1}}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots$$

и решаваме съответните интеграли.

Следователно, интегрирането на правилна рационална дроб се свежда до интегрирането на елементарни рационални дроби от вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad (3.3)$$

където  $n \in \mathbb{N}$ , а  $A, M, N, a, p, q \in \mathbb{R}$ , като  $\mathcal{D} = p^2 - 4q < 0$ , защото нулите на  $x^2 + px + q$  са комплексни.

I. Разглеждаме интеграл от вида  $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ .

а) при  $n = 1 \implies \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$ ;

б) при  $n > 1 \implies \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$ .

II. Разглеждаме интеграл от вида  $I = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$ .

Полагаме  $x = t - \frac{p}{2} \implies dx = dt \left( t = x + \frac{p}{2} \right)$  и заместваме (ако знаменателят е от вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , полагаме  $x = t - \frac{b}{2a}$ ,  $dx = dt$  и заместваме).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{\left[\left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t - \frac{p}{2}\right) + q\right]^n} dt = \int \frac{Mt - \frac{Mp}{2} + N}{\left(t^2 - pt + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q\right)^n} dt \\ &= \int \frac{Mt - \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} dt = M \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} \\ &= M\bar{I} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) I_n. \end{aligned}$$

За интеграла  $\bar{I} = \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^n}$ ,  $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$ , имаме:

$$* \text{ при } n = 1 \Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln |t^2 + a^2| = \ln \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2};$$

$$* \text{ при } n > 1 \Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-n} d(t^2 + a^2) \\ = \frac{(t^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right]^{1-n}}{2(1-n)}.$$

За интеграла  $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$  имаме:

$$** \text{ при } n = 1 \Rightarrow I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{a}{a^2} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a};$$

$$** \text{ при } n > 1 \Rightarrow I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} \\ (\text{вж. пр. 2.24}).$$

**Пример 3.1.** Решете интегралите

$$\text{а) } \int \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$\text{д) } \int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 7x + 6} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^2 - x + 14}{(x-2)(x-4)^2} dx$$

**Решение.** а) Подинтегралната функция е *неправилна* рационална дроб ( $n = 2, m = 1$ ) и делим числителя на знаменателя:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 2 \\ \hline -x^2 + 2x \qquad \quad x - 4 \\ \hline \quad \quad -4x + 3 \\ \quad \quad -4x - 8 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 11 \end{array}$$

Така частното при делението  $g_1(x) = x - 4$  е полином от първа степен, а остатъкът  $r_0(x) = 11$  е полином от нулева степен. Тогава от (3.2) имаме

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = x - 4 + \frac{11}{x + 2} \\ \Rightarrow I = \int x dx - 4 \int dx + 11 \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \frac{x^2}{2} - 4x + 11 \ln |x+2| + C.$$

б) Както в точка а) делим числителя на знаменателя ( $n = 4, m = 3$ ):

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + 1 \\ \underline{x^3 - 7x + 6} \\ -x^4 - 7x^2 + 6x \\ \underline{\quad\quad 4x^2 - 6x + 1} \end{array} \quad x$$

Така получаваме частно и остатък съответно  $g_1(x) = x$  и  $r_2(x) = 4x^2 - 6x + 1$ .  
Тогава от (3.2) имаме

$$I = \int x dx + \int \frac{4x^2 - 6x + 1}{x^3 - 7x + 6} dx = \frac{x^2}{2} + I_1.$$

При  $I_1$  подинтегралната функция е правилна рационална дроб и разлагаме знаменателя на множители от първа или втора степен (най-често с правилото на Хорнер).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 0 & \Rightarrow x_1 = 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & & \Rightarrow x_2 = 2 \\ -3 & 1 & 0 & & & \Rightarrow x_3 = -3 \end{array}$$

Тогава

$$\frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$4x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

\* полагаме  $x = 1 \Rightarrow -1 = -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ ,

\* полагаме  $x = 2 \Rightarrow 5 = 5B \Rightarrow B = 1$ ,

\* полагаме  $x = -3 \Rightarrow 55 = 20C \Rightarrow C = \frac{11}{4}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-2)}{x-2} + \frac{11}{4} \int \frac{d(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| + \ln|x-2| + \frac{11}{4} \ln|x+3|. \end{aligned}$$

Тогава  $I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left( (x-2)^4 |(x-1)(x+3)^{11}| \right) + C$ .

в) От  $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$$

\* Полагаме  $x = -1 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ .

\* Разкриваме скобите и по метода на неопределените коефициенти написваме система, от която определяме неизвестните константи  $B$  и  $C$ :

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \implies \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

От  $A + B = 0 \implies B = -A = -\frac{1}{3}$ , а от  $A + C = 1 \implies C = 1 - A = \frac{2}{3}$ .

$$\implies I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} I_1.$$

Интегралът  $I_1$  е от вида (3.3, II),  $p = -1$ ,  $q = 1$ . Затова полагаме  $x = t + \frac{1}{2} \implies dx = dt$  и заместваме:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{t + \frac{1}{2} - 2}{\left(t + \frac{1}{2}\right) - \left(t + \frac{1}{2}\right) + 1} dt = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + t + \frac{1}{4} - t - \frac{1}{2} + 1} dt = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\frac{3}{4} \left(1 + \frac{4t^2}{3}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3.4 \sqrt{3}}{2.3 \cdot 2} \int \frac{d\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

От  $x = t + \frac{1}{2} \implies t = x - \frac{1}{2}$  и като заместим

$$\begin{aligned} \implies I_1 &= \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} \\ &= \ln \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Тогава

$$I = \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{3} \ln \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{г) От } \frac{x^2 - x + 14}{(x-2)(x-4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x-4}$$

$$\implies x^2 - x + 14 = A(x-4)^2 + B(x-2) + C(x-2)(x-4)$$

\* полагаме  $x = 2 \implies 16 = 4A \implies A = 4$ ,

\* полагаме  $x = 4 \implies 26 = 2B \implies B = 13$ .

\* Разкриваме скобите и написваме система, от която намираме коефициента

C:

$$x^2 - x + 14 = Ax^2 - 8Ax + 16A + Bx - 2B + Cx^2 - 6Cx + 8C$$

$$\implies \begin{cases} A + C = 1 & \implies C = 1 - A = -3 \\ -8A + B - 6C = -1 \\ 16A - 2B + 8C = 14 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies I &= 4 \int \frac{dx}{x-2} + 13 \int \frac{dx}{(x-4)^2} - 3 \int \frac{dx}{x-4} \\ &= 4 \int \frac{d(x-2)}{x-2} + 13 \int (x-4)^{-2} d(x-4) - 3 \int \frac{d(x-4)}{x-4} \\ &= 4 \ln|x-2| + 13 \frac{(x-4)^{-1}}{-1} - 3 \ln|x-4| + C \\ &= \ln \frac{(x-2)^4}{|(x-4)^3|} - \frac{1}{13(x-4)} + C. \end{aligned}$$

д) Подинтегралната функция е *правилна* рационална дроб, а знаменателят е  $x^5 + 2x^3 + x = x(x^2 + 1)^2$ . От

$$\begin{aligned} \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Px + Q}{x^2 + 1} \\ \implies 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Mx + N)x + (Px + Q)(x^2 + 1)x \end{aligned}$$

$$* \text{ полагаме } x = 0 \implies 1 = A,$$

$$* \text{ полагаме } x = i \implies \begin{aligned} 3i^4 + i^3 + 4i^2 + 1 &= (Mi + N)i \\ 3 - i - 4 + 1 &= Mi^2 + Ni \\ 0 - 1 \cdot i &= -M + iN \end{aligned}$$

$$* \text{ От системата } \begin{cases} 0 = -M \\ -1 = N \end{cases} \implies \begin{cases} M = 0 \\ N = -1 \end{cases}.$$

Разкриваме скобите, написваме система, от която намираме коефициентите P и Q:

$$\begin{aligned} 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 &= Ax^4 + 2Ax^2 + A + Mx^2 + Nx + Px^4 + Px^2 + Qx^3 + Qx \\ &\left| \begin{array}{l} A + P = 3 \implies P = 3 - A = 2 \\ Q = 1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+1} = \ln|x| - I_2 + \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C \\ &= \ln|x(x^2+1)| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

*Забележка.*  $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)}$ , вж. 2, пр. 2.11).

**Пример 3.2.** Решете интегралите

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int \frac{2x+11}{x^2+6x+13} dx & \text{б) } \int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{x^4-x^3+4x^2-3x+3} dx \\ \text{в) } \int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3} dx & \text{г) } \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} \\ \text{д) } \int \frac{dx}{x^4+1}. \end{array}$$

*Решение.* а) Дискриминантата на квадратния тричлен  $x^2+6x+13$  е отрицателна, следователно той не може да се разложи. Отделяме точен квадрат:

$$x^2+6x+13 = x^2+6x+9+4 = (x+3)^2+4.$$

Полагаме  $x+3=t \Rightarrow x=t-3, dx=dt$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{2(t-3)+11}{t^2+4} dt = \int \frac{2tdt}{t^2+4} + 5 \int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{5}{2} \int \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} \\ &= \ln(t^2+4) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \ln(x^2+6x+13) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C; \end{aligned}$$

б) Знаменателят на подинтегралната функция се разлага по следния начин:

$$\begin{aligned} x^4-x^3+4x^2-3x+3 &= x^4-x^3+x^2+3x^2-3x+3 \\ &= x^2(x^2-x+1)+3(x^2-x+1) = (x^2+3)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}$$

$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Mx+N)(x^2+3)$$

\* За  $x = 3\sqrt{i}: -i\sqrt{3} - 2 = -2Ai\sqrt{3} - 2B + 3A - Bi\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} = -2A\sqrt{3} - B\sqrt{3} \\ -2 = 3A - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+B=1 \\ 3A-2B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1. \end{cases}$$

$$* \text{ За } x = 0: 1 = B + 3N \implies N = 0,$$

$$* \text{ За } x = 1: 9 = B + 4M \implies M = 2;$$

$$\begin{aligned} \implies I &= \int \frac{dx}{x^2 + 3} + \int \frac{2xdx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} + \int \frac{2xdx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + I_1 \end{aligned}$$

При решаване на  $I_1$  полагаме  $x - \frac{1}{2} = t$ ,  $x = t + \frac{1}{2}$ ,  $dx = dt$  и получаваме

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2\left(t + \frac{1}{2}\right)dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3} \int \frac{d\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \\ \implies I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C; \end{aligned}$$

в) Подинтегралната функция се разлага на сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{(x^4 + 2x^2 + 1) + 3}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^3} + \frac{3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{3}{(x^2 + 1)^3} \\ \implies I &= \int \frac{dx}{x^2 + 1} + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = I_1 + 3I_3, \quad I_1 = \operatorname{arctg} x. \\ I_3 &= \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{(x^2 + 1)^3} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{xd(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3} = I_2 + \frac{1}{4} \int xd \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \\ &= I_2 + \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3}{4} I_2 + \frac{x}{4(x^2 + 1)^2}. \\ I_2 &= \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{xd((x^2 + 1))}{(x^2 + 1)^2} = I_1 + \frac{1}{2} \int xd \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= I_1 + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = I_1 + \frac{x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(x^2 + 1)}. \\ \implies I &= I_1 + 3 \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(x^2 + 1)} \right) + \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= I_1 + \frac{9}{8}I_1 + \frac{9}{4(x^2+1)} + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + C \\
 &= \frac{17}{8}\arctg x + \frac{9x}{8(x^2+1)} + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + C = \frac{17}{8}\arctg x + \frac{3x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + C.
 \end{aligned}$$

*Забележка.* Интегралът  $I_3$  може да се реши и чрез рекурентната формула, изведена в пример 2.24 (при  $a = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{2.3-3}{2(3-1)}I_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}\left[\frac{2.2-3}{2(2-1)}I_1 + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)}\right] \\
 &= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}\right];
 \end{aligned}$$

г) Разлагането на подинтегралната функция на сума от елементарни дробни е трудно, затова преобразуваме интеграла така:

$$I = \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} = \int \frac{5x^4 dx}{5x^5(x^5+1)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{x^5(x^5+1)^2}.$$

Полагаме  $x^5 = t$  и получаваме:

$$\begin{aligned}
 5I &= \int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)^2} dt = \int \frac{dt}{t(t+1)} - \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} \\
 &= \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)} dt + \frac{1}{t+1} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{d(t+1)}{t+1} + \frac{1}{t+1} \\
 &= \ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + C = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{t+1} + C \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{5} \ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + \frac{1}{x^5+1} + C;
 \end{aligned}$$

д) Интегралът може да се реши по два начина:

**И начин:** Знаменателят на подинтегралната функция се разлага на два квадратни тричлена с отрицателни дискриминанти:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{(x^4+2x^2+1)-2x^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{1}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1}. \\
 1 &= (Ax+B)(x^2+x\sqrt{2}+1) + (Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1) \\
 1 &= Ax^3 + Ax^2\sqrt{2} + Ax + Bx^2 + Bx\sqrt{2} + B + Mx^3 - Mx^2\sqrt{2} + Mx \\
 &\quad + Nx^2 - Nx\sqrt{2} + N \\
 1 &= (A+M)x^3 + (A\sqrt{2}+B-M\sqrt{2}+N)x^2 + (A+B\sqrt{2}+M-N\sqrt{2})x + (B+N)
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} A + M = 0 \\ A\sqrt{2} + B - M\sqrt{2} + N = 0 \\ A + B\sqrt{2} + M - N\sqrt{2} = 0 \\ B + N = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, & B = \frac{1}{2} \\ M = \frac{1}{2\sqrt{2}}, & N = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} = I_1 + I_2$$

$$x^2 \pm x\sqrt{2} + 1 = \left(x^2 \pm 2\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \left(x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

За решаване на  $I_1$  полагаме  $x - \frac{1}{\sqrt{2}} = t$ ,  $x = t + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $dx = dt$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)}{t^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctgt}\sqrt{2} + C \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) + C. \end{aligned}$$

За  $I_2$  полагаме  $x + \frac{1}{\sqrt{2}} = t$ ,  $x = t - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $dx = dt$ .

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)}{t^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctgt}\sqrt{2} + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + C. \\ \Rightarrow I &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) \\
 & = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}.
 \end{aligned}$$

*Забележка.*  $\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$ .

**II начин:** Полагаме  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ .

$$\begin{aligned}
 I & = \int \frac{dt}{(\operatorname{tg}^4 t + 1) \cos^2 t} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t + \cos^4 t + 2\sin^2 t \cos^2 t - 2\sin^2 t \cos^2 t} dt \\
 & = \int \frac{\cos^2 t}{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 2t}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t} d(2t) \\
 & = \frac{1}{4} \int \frac{d(2t)}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t} + \frac{1}{4} \int \frac{d(\sin 2t)}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t} = \frac{1}{4} \int \frac{d(2t)}{\frac{1}{2}\sin^2 2t + \cos^2 2t} \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 2t + 1} \frac{d(2t)}{\cos^2 2t} + A \\
 & = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\frac{\operatorname{tg} 2t}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\operatorname{tg} 2t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} + A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2t}{\sqrt{2} - \sin 2t} + C.
 \end{aligned}$$

$$x = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t} = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad \sin 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + C.$$

## ЗАДАЧИ

1. Решете интегралите:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$$

$$\text{Отг. } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C;$$

$$2. \int \frac{x dx}{2x^3 - 3x - 2}$$

$$\text{Отг. } \frac{1}{10} \ln \frac{(x-2)^4}{|2x+1|} + C;$$

$$3. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$\text{Отг. } \frac{1}{2} \ln \frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4} + C;$$

$$4. \int \frac{dx}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

$$\text{Отг. } \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + \frac{1}{30} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C;$$

$$5. \int \frac{(5x-3)dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$$

$$\text{Отг. } \frac{1}{15} \ln \frac{|(x-2)^7(3x-1)^3|}{(x+1)^{10}} + C;$$

6.  $\int \frac{x+1}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4} dx$  Отг.  $\frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - \frac{1}{3(x-2)} + C;$
7.  $\int \frac{(9-7x)dx}{x^4-5x^3+3x^2+9x}$  Отг.  $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x-3} + C;$
8.  $\int \frac{xdx}{2x^3+13x^2+24x+9}$  Отг.  $\frac{1}{25} \ln \left| \frac{x+3}{2x+1} \right| - \frac{3}{5(x+3)} + C;$
9.  $\int \frac{x^2-5x-9}{x^2-5x+6} dx$  Отг.  $x+3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C;$
10.  $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+16}{x^3-6x^2+12x-8} dx$  Отг.  $\frac{x^2}{2} - \frac{8}{(x-2)^2} + C;$
11.  $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4} dx$  Отг.  $\frac{3x^2}{2} + \frac{11}{2} \ln|x-2| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C;$
12.  $\int \frac{2x-5}{x^2+8x+20} dx$  Отг.  $\ln(x^2+8x+20) - \frac{13}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{2} + C;$
13.  $\int \frac{x^2-2x-5}{(x-1)(x^2+2)} dx$  Отг.  $\frac{3}{2} \ln(x^2+2) - 2 \ln|x-1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C;$
14.  $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1} dx$  Отг.  $\frac{1}{4} \ln|(x-1)^3(x+1)| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;$
15.  $\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4} dx$  Отг.  $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + \frac{3x^2-1}{3x^3} + C;$
16.  $\int \frac{xdx}{x^3-1}$  Отг.  $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$
17.  $\int \frac{2xdx}{x^4+1}$  Отг.  $\operatorname{arctg}(x^2) + C;$
18.  $\int \frac{xdx}{x^4+x^3-x^2+x-2}$  Отг.  $\frac{1}{60} \ln \frac{(x-1)^{10}(x+2)^8}{(x^2+1)^9} + \frac{1}{10} \operatorname{arctg} x + C.$
19.  $\int \frac{x-5}{x^3-11x^2+44x-60} dx$  Отг.  $\frac{1}{5} \ln \frac{x^2-8x+3}{(x-3)^2} - \frac{3}{10} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{2} + C;$
20.  $\int \frac{x+1}{x^3+3x^2+3x+2} dx$  Отг.  $\frac{1}{6} \ln \frac{x^2+x+1}{(x+2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$
21.  $\int \frac{x^3 dx}{x^3-2x^2+x-2}$  Отг.  $x + \frac{1}{5} \ln(x-2)^8(x^2+1) - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} x + C;$
22.  $\int \frac{x^5+x^4+x^3+1}{x^4+x^2} dx$  Отг.  $\frac{(x+1)^2}{2} - 2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C;$
23.  $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10} dx$  Отг.  $x+3 \ln(x^2-6x+10) + 8 \operatorname{arctg}(x-3) + C;$
24.  $\int \frac{x^4-3x^3+x^2+4x-1}{x^3-3x^2+x-3} dx$  Отг.  $\frac{x^2}{2} + \frac{17}{20} \ln \frac{(x-3)^2}{x^2+1} + \frac{9}{10} \operatorname{arctg} x + C;$
25.  $\int \frac{x-3}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx$  Отг.  $\frac{1}{3} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$
26.  $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2} dx$  Отг.  $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + \frac{5}{2(x^2+1)} + C;$

## ИНТЕГРАЛИ НА НЯКОИ КЛАСОВЕ ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Основен подход за интегриране на ирационални функции е избирането на такава смяна на интеграционната променлива  $x = \varphi(t)$ , чрез която пресмятането на интеграла се свежда до интеграл на рационална функция.

### I клас

Интеграли от вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad (4.1)$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax - x^2}) dx$$

където  $R(x, u)$  е рационална функция на два аргумента:

$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$\begin{cases} x = a \sin t, & dx = a \cos t dt \\ x = a \cos t, & dx = -a \sin t dt \end{cases}$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$\begin{cases} x = a \operatorname{tg} t, & dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \\ x = a \operatorname{ctg} t, & dx = \frac{-a}{\sin^2 t} dt \end{cases}$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$\begin{cases} x = \frac{a}{\sin t}, & dx = -\frac{a \cos t}{\sin^2 t} dt \\ x = \frac{a}{\cos t}, & dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \end{cases}$
$R(x, \sqrt{ax - x^2})$	$\begin{cases} x = a \sin^2 t, & dx = 2a \sin t \cos t dt \\ x = a \cos^2 t, & dx = -2a \sin t \cos t dt \end{cases}$

**Пример 4.1.** Решете интеграла  $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ .

*Решение.*

1<sup>0</sup>. Смяна на интеграционната променлива: От  $4 - x^2 = 2^2 - x^2 \implies a = 2$ .  
Полагаме  $x = 2 \sin t \implies dx = 2 \cos t dt$ .

2<sup>0</sup>. Заместване в интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \int 4 \sin^2 t \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = 16 \int \sin^2 t \cos t \sqrt{1 - \sin^2 t} dt \\ &= 16 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int \sin^2 2t dt = 4 \int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= 2 \int dt - \frac{2}{4} \int \cos 4t d(4t) = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C \\ &= 2t - \sin 2t \cos 2t + C = 2t - 2 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) + C. \end{aligned}$$

3<sup>0</sup>. Връщане към първоначалния аргумент: От  $x = 2 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2}x \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}$ ,  $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ . Тогава

$$\begin{aligned} I &= 2 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \left(1 - 2 \frac{x^2}{2}\right) + C \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} (1 - x^2) \sqrt{4 - x^2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.2.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}}$ .

*Решение.*

1<sup>0</sup>. Смяна на интеграционната променлива: От  $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 \Rightarrow a = 1$ .  
Полагаме  $x = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$ .

2<sup>0</sup>. Заместване в интеграла:

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{\sin^3 t \frac{\cos t}{\sin^2 t}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} dt = - \int \frac{\sin t \cos t}{\frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t}} dt = - \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt \\ &= - \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos 2t dt - \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{4} \sin 2t - t + C \\ &= \frac{1}{2} \sin t \cos t - t + C. \end{aligned}$$

3<sup>0</sup>. Връщане към първоначалния аргумент: От  $x = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{x} \Rightarrow t = \arcsin \frac{1}{x}$ ,  $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ . Тогава

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2} - \arcsin \frac{1}{x} + C.$$

**Пример 4.3.** Решете интеграла  $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6} dx$ .

*Решение.*

1<sup>0</sup>. Смяна на интеграционната променлива: От  $4+x^2 = 2^2+x^2 \Rightarrow a=2$ .

$$\text{Полагаме } x = 2\operatorname{tg}t \Rightarrow dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

2<sup>0</sup>. Заместване в интеграла:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t}}{2^6 \operatorname{tg}^6 t \cos^2 t} dt = \frac{1}{16} \int \frac{\cos^6 t \cdot 1}{\sin^6 t \cos^2 t} dt = \frac{1}{16} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^6 t} dt \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^6 t} = \frac{1}{16} \int \sin^{-6} t d(\sin t) - \frac{1}{16} \int \sin^{-4} t d(\sin t) \\ &= \frac{-1}{16.5 \sin^5 t} + \frac{1}{16.3 \sin^3 t} + C = \frac{-1}{80 \sin^5 t} + \frac{1}{48 \sin^3 t} + C. \end{aligned}$$

3<sup>0</sup>. Връщане към първоначалния аргумент: От  $x = 2\operatorname{tg}t \Rightarrow \operatorname{tg}t = x/2$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \sin t &= \frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x/2}{\sqrt{1+x^2/4}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \\ \Rightarrow I &= \frac{(x^2-6)(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{120x^5} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.4.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ .

*Решение.*

1<sup>0</sup>. Смяна на интеграционната променлива: От  $x-x^2 = 1x-x^2 \Rightarrow a=1$ .

$$\text{Полагаме } x = 1 \sin^2 t, dx = 2 \sin t \cos t dt.$$

2<sup>0</sup>. Заместване в интеграла:

$$I = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t \cos t} dt = 2 \int dt = 2t + C.$$

3<sup>0</sup>. Връщане на първоначалната променлива: От  $x = \sin^2 t \Rightarrow \sin t = \sqrt{x}$ ,  
 $t = \arcsin \sqrt{x}$

$$\Rightarrow I = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

## II клас

Интеграл от вида

$$\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots, x^{p_m/q_m}) dx, \quad (4.2)$$

където  $R(x, u_1, u_2, \dots, u_m)$  е рационална функция, а  $p_m, q_m \in \mathbb{N}$ .

Полагаме  $x = t^m$ , където  $m = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ , т.е.  $m/q_1 = l_1$ ,  $m/q_2 = l_2, \dots, m/q_m = l_m$  (деление без остатък) и като намерим  $dx = mt^{m-1} dt$  заместваме:

$$I = \int R(t^m, t^{l_1 p_1}, t^{l_2 p_2}, \dots, t^{l_m p_m}) m t^{m-1} dt,$$

т.е. получаваме интеграл от рационална функция на новата променлива  $t$ .

**Пример 4.5.** Решете интеграла  $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$ .

*Решение.* Написваме  $I = \int \frac{x^{1/3} dx}{x(x^{1/2} + x^{1/3})}$ , полагаме  $x = t^6$  ( $t = \sqrt[6]{x}$ ), където  $m = \text{НОК}(3, 2, 3) = 6$ ,  $dx = 6t^5 dt$  и заместваме:

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^2 t^5 dt}{t^6 (t^3 + t^2)} = 6 \int \frac{t^7 dt}{t^8 (t+1)} = 6 \int \frac{dt}{t(t+1)} = 6 \int \frac{(t+1) - t}{t(t+1)} dt \\ &= 6 \int \frac{t+1}{t(t+1)} dt - 6 \int \frac{t dt}{t(t+1)} = 6 \int \frac{dt}{t} - 6 \int \frac{d(t+1)}{t+1} \\ &= 6(\ln |t| - \ln |t+1|) + C = 6 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C = 6 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

## III клас

Интеграл от вида

$$\int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_1/q_1}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_m/q_m} \right] dx, \quad (4.3)$$

където  $R(x, u_1, \dots, u_m)$  е рационална функция,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  (const.),  $ad - bc \neq 0$ ,  $p_m, q_m \in \mathbb{N}$ .

Полагаме  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ , където  $m = \text{НОК}(q_1, \dots, q_m)$ , намираме  $x$ ,  $dx$  и след заместване получаваме интеграл от рационална функция.

**Пример 4.6.** Решете интеграла  $\int \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1+x} x}$ .

*Решение.* Написваме

$$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} \frac{dx}{x}.$$

Полагаме  $\frac{1-x}{1+x} = t^2$  ( $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ), намираме  $x$ ,  $dx$  и заместваме (при  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , подкоренната величина е отрицателна, разглеждаме  $-1 < x < 1$ ):

$$\begin{aligned} 1-x &= t^2 + t^2 x \implies 1-t^2 = (1+t^2)x \implies x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx &= \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}, \\ \implies I &= -4 \int \frac{t^2(1+t^2)}{1-t^2} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = -4 \int \frac{t^2 dt}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}. \end{aligned}$$

От

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

като положим последователно  $t = 1, -1, i$ , получаваме  $A = B = \frac{1}{4}$ ,  $C = 0$ ,  $D = -\frac{1}{2}$ . Тогава

$$\begin{aligned} I &= 4 \cdot \frac{1}{4} \int \frac{d(1-t)}{1-t} - 4 \cdot \frac{1}{4} \int \frac{d(1+t)}{1+t} + 4 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \ln|1-t| - \ln|1+t| + 2\operatorname{arctg}t + C = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right| + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.7.** Решете интеграла

$$\int \frac{2 + \sqrt[6]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[6]{x+2}} dx.$$

*Решение.* Написваме  $I = \int \frac{(2 + \sqrt[6]{x+2}) dx}{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[6]{x+2}}$ , полагаме  $x+2 = t^6$  ( $t = \sqrt[6]{x+2}$ ), намираме  $x$ ,  $dx$  и заместваме ( $(x+2)$  е частен случай от дробно -



рационалната функция  $\frac{ax+b}{cx+d}$ , при  $a = d = 1, b = 2, c = 0$ ):

$$x = t^6 - 2, dx = 6t^5 dt \Rightarrow I = 6 \int \frac{(2+t)t^5}{t^2+t} dt = 6 \int \frac{t^5 + 2t^4}{t+1} dt,$$

$$\frac{t^5 + 2t^4}{t+1} = t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \quad (\text{ВЖ. ГЛ. 3, пр. 3.1.}).$$

$$\Rightarrow I = 6 \int t^4 dt + 6 \int t^3 dt - 6 \int t^2 dt + 6 \int t dt - 6 \int dt + 6 \int \frac{d(t+1)}{t+1}$$

$$= 6 \frac{t^5}{5} + 6 \frac{t^4}{4} - 6 \frac{t^3}{3} + 6 \frac{t^2}{2} - 6t + 6 \ln |t+1| + C$$

$$= \frac{6}{5} \left( \sqrt[6]{x+2} \right)^5 + \frac{3}{2} \left( \sqrt[6]{x+2} \right)^4 - 2 \left( \sqrt[6]{x+2} \right)^3$$

$$+ 3 \left( \sqrt[6]{x+2} \right)^2 - 6 \sqrt[6]{x+2} + 6 \ln | \sqrt[6]{x+2} + 1 | + C.$$

#### IV клас

Интеграл от вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (4.4)$$

където  $R(x, u)$  е рационална функция на два аргумента,  $a, b, c \in \mathbb{R}(\text{const}), a \neq 0$   
Интегралите от вида (4.4) се наричат *Абелеви* и се решават със субституции на Ойлер.

*Първа субституция на Ойлер.* Ако  $a > 0$ , полагаме

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} \pm t. \quad (4.5)$$

Тук знаците могат да се вземат в произволна комбинация, най-често  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$ . Като повдигнем двете страни на квадрат получаваме:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{c}}, \quad dx = -2 \frac{\sqrt{at^2 - bt + c\sqrt{a}}}{(b - 2t\sqrt{c})^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{c}} + t = - \frac{\sqrt{at^2 - bt + c\sqrt{a}}}{b - 2t\sqrt{c}}.$$

$$\Rightarrow I = -2 \int R \left( \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, - \frac{\sqrt{at^2 - bt + c\sqrt{a}}}{b - 2t\sqrt{a}} \right) \frac{\sqrt{at^2 - bt + c\sqrt{a}}}{b - 2t\sqrt{c}} dt,$$

т.е. получаваме подинтегрална рационална функция  $\bar{R}(t)$ .

**Пример 4.8.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ .

Решение. Коэффициентът  $a = 1 > 0$  и полагаме

$$\begin{aligned}
 * \quad & \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{1}x + t \implies x^2 + x + 1 = x^2 + 2tx + t^2 \\
 & \implies (1 - 2t)x = t^2 - 1 \implies x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} \quad (t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x), \\
 * \quad & dx = \frac{2t(1 - 2t) + 2(t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2} dt = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2} dt, \\
 * \quad & \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t = \frac{t^2 - 1 + t - 2t^2}{1 - 2t} = -\frac{t^2 - t + 1}{1 - 2t}, \\
 * \quad & x + \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} - \frac{t^2 - t + 1}{1 - 2t} = \frac{t - 2}{1 - 2t}. \\
 \implies I &= -2 \int \frac{(t^2 - t + 1)(1 - 2t)}{(1 - 2t)^2(t - 2)} dt = \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{2t^2 - 5t + 2} dt \\
 &= \int \frac{2t^2 - 5t + 2}{2t^2 - 5t + 2} dt + 3 \int \frac{t dt}{(t - 2)(2t - 1)} = t + 3I_1.
 \end{aligned}$$

За да решим  $I_1$  разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дробни.

$$\frac{t}{(t - 2)(2t - 1)} = \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{2t - 1}, \quad t = A(2t - 1) + B(t - 2).$$

Полагаме

$$\begin{aligned}
 * \quad & t = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} = B\left(\frac{1}{2} - 2\right) \implies B = -\frac{1}{3}, \\
 * \quad & t = 2 \implies 2 = 3A \implies A = \frac{2}{3}. \\
 \implies I_1 &= \frac{2}{3} \int \frac{d(t - 2)}{t - 2} - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{d(2t - 1)}{2t - 1} \\
 &= \frac{2}{3} \ln |t - 2| - \frac{1}{6} \ln |2t - 1| = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(t - 2)^4}{2t - 1} \right|
 \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
 I &= t + \frac{3}{6} \ln \left| \frac{(t - 2)^4}{2t - 1} \right| + C \\
 &= \sqrt{x^2 + x + 1} - x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2)^4}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Втора субституция на Ойлер. Ако  $c > 0$ , полагаме

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt. \quad (4.6)$$

определеност нека  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt$ . Като повдигнем двете страни на квадрат, получаваме:

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{(a - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{a - t^2}.$$

След заместване на този израз в (4.4) отново получаваме рационална подинтегрална функция  $\bar{R}(t)$ .

**Пример 4.9.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$ .

*Решение.* Коэффициентът  $a = -1 < 0$ , но  $c = 1 > 0$  и полагаме

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1+xt \implies 1+x-x^2 = 1+2tx+t^2x^2$$

$$\implies (1-2t)x = (t^2+1)x^2 : x \neq 0 \implies x = \frac{1-2t}{t^2+1}, \quad \left(t = \frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}\right),$$

$$* \quad dx = \frac{-2(t^2+1) - 2t(1-2t)}{(t^2+1)^2} dt = 2 \frac{t^2-t-1}{(t^2+1)^2} dt,$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1 + \frac{t-2t^2}{t^2+1} = \frac{t^2-t-1}{t^2+1}, \quad x+1 = \frac{1-2t}{t^2+1} + 1 = \frac{t^2-2t+2}{t^2+1}$$

$$\implies I = -2 \int \frac{(t^2-t-1)(t^2+1)^2 dt}{(t^2+1)^2(t^2-2t+2)(t^2-t-1)} = -2 \int \frac{dt}{t^2-2t+2}.$$

Знаменателят на подинтегралната функция е квадратен тричлен с дискриминанта  $D = -4 < 0$  и не може да се разложи на реални множители. Интегралът ще решим със субституцията на Хорнер. Полагаме

$$t = u - \frac{b}{2a} = u + \frac{2}{2}, \quad \text{т.е.} \quad t = u + 1 \implies dt = du$$

$$\implies I = -2 \int \frac{du}{(u+1)^2 - 2(u+1) + 2} = -2 \int \frac{du}{u^2+1} = -2\arctgu + C$$

$$= -2\arctg(t-1) + C \implies I = -2\arctg\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1-x}{x}\right) + C.$$

*Трета субституция на Ойлер.* Ако квадратният тричлен от (4.4) има реални и различни корени  $x_1$  и  $x_2$ , ( $b^2 - 4ac > 0$ ), полагаме

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \quad (4.7)$$

$$\implies a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2 \implies ax - ax_2 = t^2x - t^2x_1$$

$$\implies x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2}, \quad dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(a - t^2)^2} dt, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_2 - x_1)t}{a - t^2}.$$

Заместваме тези изрази в (4.4) и получаваме рационална подинтегрална функция  $\bar{R}(t)$ .

**Пример 4.10.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$ .

*Решение.* От  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$  и полагаме ( $a < 0, c < 0$ ):

$$\begin{aligned} * \quad \sqrt{-(x-1)(x-3)} &= t(x-1) \Rightarrow -(x-1)(x-3) = t^2(x-1)^2 \\ &\Rightarrow -x+3 = t^2x - t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+3}{t^2+1}, \end{aligned}$$

$$* \quad dx = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2+3)}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt,$$

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = t \left( \frac{t^2+3}{t^2+1} - 1 \right) = \frac{2t}{t^2+1}, \quad x-2 = \frac{t^2+3}{t^2+1} - 2 = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\frac{4}{2} \int \frac{t(t^2+1)^2 dt}{(t^2+1)^2(1-t^2)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} \\ &= \frac{2}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} dt = \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{d(t+1)}{t+1} \\ &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{От } \sqrt{-(x-1)(x-3)} = t(x-1) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}} = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$$

$$\Rightarrow I = \ln \left| \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1}} \right| + C.$$

### V клас

Интеграл от вида (биномен)

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (4.8)$$

като предполагаме, че  $m, n, p$  са рационални числа, поне едно от тях е дробно,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Изразът  $x^m (a + bx^n)^p dx$  се нарича *диференциален бином*.

Интегралът от вида (4.8) е решим *само* в три случая:

*I случай.* Ако  $p$  е цяло число, то (4.8) е от вида (4.2).

*II случай.* Ако  $p = \frac{r}{s}$  е дробно число, но  $\frac{m+1}{n}$  е цяло, то полагаме

$$a + bx^x = t^s, \quad (4.9)$$

където  $s$  е знаменателят на  $p$  и намираме

$$x = \left( \frac{t^s - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1}}{nb^{\frac{1}{n}}} st^{s-1} dt.$$

Получените изрази заместваме в (4.8) и получаваме интеграл, в който подинтегралната функция е реална, защото  $\frac{m+1}{n}$  е цяло число.

III случай. Ако  $p = \frac{r}{s}$  и  $\frac{m+1}{n}$  са дробни числа, но  $(\frac{m+1}{n} + p)$  е цяло число, полагаме

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s. \quad (4.10)$$

Намираме

$$x = a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}}, \quad dx = a^{\frac{1}{n}}(-\frac{1}{n})(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} st^{s-1} dt$$

и като заместим в (4.8) се получава интеграл от рационална функция.

И така, ако поне едно от числата  $p$ ,  $\frac{m+1}{n}$ ,  $\frac{m+1}{n} + p$  са цели, то (4.8) се решава с елементарни функции.

**Пример 4.11.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})^3}$

*Решение.* Записваме интеграла във вида (4.8):  $I = \int x^{-1}(1 + x^{1/3})^{-3} dx$ , където  $m = -1$ ,  $n = 1/4$ ,  $p = -3$ . Тъй като  $p$  е цяло число, интегралът не свежда до (4.2):

$$I = \int \frac{dx}{x(1 + x^{1/3})^3} = \int \frac{dx}{x(1 + 3x^{1/3} + 3x^{2/3} + x)}$$

Полагаме  $x = t^3$  ( $t = \sqrt[3]{x}$ ),  $dx = 3t^2 dt$  и заместваме:

$$I = \int \frac{3t^2 dt}{t^3(1 + 3t + 3t^2 + t^3)} = 3 \int \frac{dt}{t(1 + t)^3}.$$

Разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{t(1 + t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 + t} + \frac{C}{(1 + t)^2} + \frac{D}{(1 + t)^3}$$

$$1 = A(1+t)^3 + Bt(1+t)^2 + Ct(1+t) + Dt$$

$$= (A+B)t^3 + (3A+2B+C)t^2 + (3A+B+C+D)t + A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 3A + B + C + D = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 3 \left[ \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{(1+t)^2} - \int \frac{dt}{(1+t)^3} \right]$$

$$= 3 \left[ \ln|t| - \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2} \right] + C$$

$$= 3 \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + \frac{3(2t+3)}{2(1+t)^2} + C = 3 \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \right| + \frac{3(2\sqrt[3]{x}+3)}{2(1+\sqrt[3]{x})^2} + C.$$

**Пример 4.12.** Решете интеграла  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

*Решение.* Написваме интеграла във вида (4.8)  $I = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3} dx$ , където  $m = -1/2$ ,  $n = 1/4$ ,  $p = 1/3$  ( $s = 3$ ).

Тъй като  $p$  е дробно число, образуваме  $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$ , което е цяло число (II случай).

Полагаме (вж. (4.9))  $1+x^{1/4} = t^3 \Rightarrow x^{1/4} = t^3 - 1 \Rightarrow x = (t^3 - 1)^4$  ( $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ ),  $dx = 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt$  и заместваме:

$$I = 12 \int (t^3 - 1)^{-2} t^3 (t^3 - 1)^3 dt = 12 \int t^3 (t^3 - 1) dt = 12 \int t^6 dt - 12 \int t^3 dt$$

$$= 12 \frac{t^7}{7} - 12 \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7} \left( \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \right)^7 - 3 \left( \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \right)^4 + C$$

**Пример 4.13.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ .

*Решение.* Написваме интеграла във вида (4.8):  $I = \int x^0(1+x^4)^{-1/4} dx$ , като  $m = 0$ ,  $n = 4$ ,  $p = 1/4$  ( $s = 4$ ). Тъй като  $p$  е дробно число, образуваме  $\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$ , което е също дробно число. Тогава образуваме  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$  - цяло число (III случай).

$$\text{Полагаме (вж. (4.10)) } \frac{1+x^4}{x^4} = t^4 \Rightarrow \frac{1}{x^4} + 1 = t^4 \Rightarrow \frac{1}{x^4} = t^4 - 1 \Rightarrow x^4 =$$

$(t^4 - 1)^{-1} \Rightarrow x = (t^4 - 1)^{-1/4} \left( t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right), dx = -\frac{1}{4}(t^4 - 1)^{-5/4} 4t^3 dt$  и заместваме

$$\begin{aligned} I &= - \int \left( 1 + \frac{1}{t^4 - 1} \right)^{-\frac{1}{4}} (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} t^3 dt = - \int \left( \frac{t^4 - 1 + 1}{t^4 - 1} \right)^{-\frac{1}{4}} (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} t^3 dt \\ &= - \int t^2 (t^4 - 1)^{\frac{1}{4}} (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt = - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1}. \end{aligned}$$

Разлагаме подинтегралната функция на получения интеграл в сума от елементарни дроби:

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(t^2 + 1)(t - 1)(t + 1)} &= \frac{At + B}{t^2 + 1} + \frac{C}{t - 1} + \frac{D}{t + 1} \\ t^2 &= (At + B)(t^2 - 1) + C(t^2 + 1)(t + 1) + D(t^2 + 1)(t - 1). \end{aligned}$$

\* Полагаме  $t = 1 \Rightarrow 1 = 4C \Rightarrow C = 1/4$ .

\* Полагаме  $t = -1 \Rightarrow 1 = -4D \Rightarrow D = -1/4$ .

\* Полагаме  $t = i \Rightarrow -1 = (Ai + B)(-2) \Rightarrow \begin{cases} -2B = -1 \\ -2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/2 \\ A = 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{1}{4} (\ln |t + 1| - \ln |t - 1|) + C \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.14.** Решете интеграла  $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{\sqrt{x+1}} dx$ .

*Решение.* Написваме интеграла във вида (4.8)

$$I = \int x^{\frac{1}{2}} (x+1)^{\frac{1}{15}} dx,$$

като  $m = \frac{1}{2}, n = 1, p = \frac{1}{15} (s = 15)$ .

Тъй като  $p$  е дробно число, образуваме  $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1} = \frac{3}{2}$ , което е дробно число, а  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{3}{2} + \frac{1}{15} = \frac{47}{30}$  е също дробно число. Следователно даденият интеграл е нерешим.

## Общи задачи

**Пример 4.15.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} dx$ .

*Решение.* Интегралът се свежда до интеграл от вида (4.3):

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^4(x+2)^4 \left(\frac{x+2}{x-1}\right)}} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2) \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}.$$

Полагаме

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} = t^4 &\Rightarrow x = \frac{t^4+2}{t^4-1} \quad (t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}), \quad dx = \frac{-12t^3 dt}{(t^4-1)^2} \\ \Rightarrow I &= \int \frac{-12t^3}{9t^4 (t^4-1)^2 t} dt = -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.16.** Решете интеграла  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}}$ .

*Решение.* Интегралът е от вида (4.1), но чрез предварително преобразуване може да се сведе до по-прост интеграл от ирационална функция:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 2x dx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Полагаме  $x^2 = z \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{z dz}{\sqrt{z+2}}$  (интеграл от вида (4.3)). Правим второ полагане:

$$\begin{aligned} z+2 = t^2, \quad z = t^2 - 2 \quad (t = \sqrt{z+2} = \sqrt{x^2+2}), \quad dz = 2t dt \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2-2)2t}{t} dt = \int (t^2-2) dt = \frac{t^3}{3} - 2t + C \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+2)^3} - 2\sqrt{x^2+2} + C = \frac{x^2-4}{3} \sqrt{x^2+2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.17.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$ .



*Решение.* Преобразуваме подинтегралната функция:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2(x + x\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1})} = \int \frac{dx}{x^3(1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1})} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \left(\frac{-2}{x^3}\right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1/x^2)}{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1/x^2 + 1)}{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}. \end{aligned}$$

Полагаме  $\frac{1}{x^2} + 1 = t^2$ ,  $x^2 = \frac{1}{t^2 - 1}$  ( $t = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$ ).

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{1+t} = -\frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{1+t} = -\int \frac{t+1-1}{1+t} dt = -\int dt + \int \frac{dt}{1+t} \\ &= -t + \ln|1+t| + C = \ln\left|1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right| - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.18.** Да се реши  $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx$ .

*Решение.* Записваме интеграла във вида

$$I = \int x^{1/3}(1-x^2)^{1/3} dx$$

(интеграл от диференциален бином,  $m = 1/3$ ;  $n = 2$ ;  $p = 1/3$ ).

Правим субституцията  $\frac{1}{x^2} - 1 = t^3$  ( $\frac{m+1}{n} + p = 1$ ) (вж. (4.10)). От

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{t^3+1}} \quad \left(t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}\right), \quad dx = -\frac{3t^2 dt}{2\sqrt{(t^3+1)^3}} \\ \Rightarrow I &= \int \frac{1}{\sqrt{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}} \left(1 - \frac{1}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{3t^2 dt}{2\sqrt{(t^3+1)^3}}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}} \frac{(t^3+1-1)^{\frac{1}{3}}}{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}} \frac{t^2 dt}{(t^3+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{2} \int \frac{t^3 dt}{(t^3+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{t \cdot 3t^2 dt}{(t^3+1)^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{td(t^3+1)}{(t^3+1)^2} = \frac{1}{2} \int td \frac{1}{t^3+1} \\ &= \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{2} I_1 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{1}{3} \ln \frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \quad (\text{вж. пример 3.1, в})$$

$$\Rightarrow I = \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{6} \ln \frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \quad t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}.$$

**Пример 4.19.** Решете интеграла  $\int \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

*Решение.* Тъй като

$$(x + \sqrt{1+x^2})' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}},$$

интегралът може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} I &= \int (x + \sqrt{1+x^2})^{14} \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int (x + \sqrt{1+x^2})^{14} d(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^{15}}{15} + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.20.** Да се реши  $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$ .

*Решение.* Интегралът може да се разглежда като интеграл от дифференциален бином ( $m = -3/2$ ,  $n = 1$ ,  $p = -3/2$ ), от вида  $\int R(x, \sqrt{ax-x^2}) dx$  и като абелев. Ще решим интеграла по трите начина.

*1 начин.* Интеграл от дифференциален бином (вж. (4.8)).

$$I = \int x^{-3/2} (2-x)^{-3/2} dx.$$

Тъй като  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-3/2+1}{1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$  (вж. (4.10)), полагаме

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - 1 = t^2 &\Rightarrow x = \frac{2}{t^2+1} \quad (t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}), \quad dx = \frac{-4t dt}{(t^2+1)^2} \\ \Rightarrow I &= \int \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)^{-3/2} \left[-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right] dt \\ &= \int \frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\right)^{-3/2} \left[-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} \int \sqrt{(t^2+1)^3} \frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{t^3} \frac{t}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^2} dt \\
 &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} + C \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x-2+x}{\sqrt{x(2-x)}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.
 \end{aligned}$$

II начин. Интеграл от вида  $\int R(x, \sqrt{ax-x^2}) dx$ ,  $a=2$ .

Полагаме (вж. (4.4))

$$x = 2 \sin^2 t \quad (t = \arcsin \sqrt{x/2}), \quad dx = 4 \sin t \cos t dt, \quad \sqrt{2x-x^2} = 2 \sin t \cos t.$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= \int \frac{4 \sin t \cos t}{(2 \sin t \cos t)^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin^2 t \cos^2 t} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t} dt \\
 &= \frac{1}{2} (\operatorname{tg} t - \operatorname{cotg} t) + C = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t \cos t} + C = \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{2} - \frac{2-x}{2}}{\sqrt{\frac{x}{2} \frac{2-x}{x}}} + C \\
 &= \frac{1}{4} \frac{x-2+x}{\frac{1}{2} \sqrt{x(2-x)}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.
 \end{aligned}$$

III начин. Абелев интеграл с положителна дискриминанта на квадратния тричлен ( $x_1=0$ ,  $x_2=2$ ) (вж. (4.7)). Полагаме  $\sqrt{x(2-x)} = tx$ . От

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2}{t^2+1} \quad \left(t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right), \quad dx = \frac{-4t dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{2x-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}. \\
 \Rightarrow I &= \int \frac{-4t}{(t^2+1)^2 \left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^3} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^2} dt \\
 &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-x}{x}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{2-x}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 4.21.** Решете  $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$ .

Решение. Интегралът е абелев от вида (4.5), но може да се реши и по следния начин:

$$I = \int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{9x^2+6x+1+1}} = \int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{(3x+1)^2+1}}.$$

Полагаме  $3x + 1 = t$ ,  $x = (t - 1)/3$ ,  $dx = dt/3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{\frac{2}{3}(t-1) + 5}{\sqrt{t^2+1}} \frac{dt}{3} = \frac{1}{9} \int \frac{2t+13}{\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{1}{9} \int \frac{2t dt}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{13}{9} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{t^2+1} + \frac{13}{9} \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9} \ln |3x+1 + \sqrt{9x^2+6x+2}| + C. \end{aligned}$$

**Пример 4.22.** Решете  $I = \int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} dx$ .

*Решение.* Интегралът не може да се причисли към нито една от групите интегралы от ирационални функции. Затова преработваме подинтегралната функция:

$$I = \int \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^3 \sqrt{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + 3\left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}.$$

Полагаме  $\frac{1}{x^2} = z \Rightarrow I = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-z)dz}{z\sqrt{1+3z+z^2}}$ . Този интеграл е абелев от вида (4.4). От  $a = 1 > 0$  следва полагането (вж. (4.5)):  $\sqrt{1+3z+z^2} = t + z$ ,

$$z = \frac{t^2 - 1}{3 - 2t} \left( t = \frac{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} - 1}{x^2} \right), \quad dz = \frac{2(-t^2 + 3t - 1)}{(3 - 2t)^2} dt,$$

$$\sqrt{1+3z+z^2} = \frac{-t^2 + 3t - 1}{3 - 2t}, \quad 1 - z = -\frac{t^2 + 2t - 4}{3 - 2t}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\frac{1}{2} \int \frac{-t^2 + 2t - 4}{3 - 2t} \cdot \frac{(3 - 2t)^2}{(t^2 - 1)(-t^2 + 3t - 1)} \cdot \frac{2(-t^2 + 3t - 1)}{(3 - 2t)^2} dt \\ &= \int \frac{t^2 + 2t - 4}{(3 - 2t)(t - 1)(t + 1)} dt. \end{aligned}$$

$$\frac{t^2 + 2t - 4}{(3 - 2t)(t - 1)(t + 1)} = \frac{A}{3 - 2t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t + 1} \quad (A = 1, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{dt}{3 - 2t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \ln |3 - 2t| - \frac{1}{2} \ln |t - 1| + \frac{1}{2} \ln |t + 1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t + 1}{(t - 1)(3 - 2t)} \right| + C, \quad t = \frac{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} - 1}{x^2}. \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$  Отг.  $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$
2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$  Отг.  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$
3.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$  Отг.  $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$
4.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$  Отг.  $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$
5.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$  Отг.  $-4\arccos \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$
6.  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx$  Отг.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} \right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(1+x^2)}+x}{\sqrt{2(1+x^2)}-x} \right| + C$
7.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$  Отг.  $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$
8.  $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$  Отг.  $\frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}} \right| + C$
9.  $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$  Отг.  $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin \frac{x}{2} + C$

Решете интегралите:

1.  $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$  Отг.  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\arctg(\sqrt[6]{x}) + C$
2.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}$  Отг.  $\frac{7}{2}\arctg(\sqrt[6]{x}) - \frac{\sqrt[6]{x}}{2(1 + \sqrt[3]{x})} + C$
3.  $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$  Отг.  $12 \ln \left( \frac{\sqrt[12]{x} + 1}{\sqrt[12]{x}} \right) - \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + C$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$  Отг.  $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C$
5.  $\int \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{x} \right) dx$  Отг.  $C - \sqrt{1-x^2} + 2\arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln|x|$
6.  $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$  Отг.  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$
7.  $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$  Отг.  $2\arctg \sqrt{\frac{x}{2-x}} + \frac{2-x}{4} \sqrt{\frac{x}{2-x}} + C$
8.  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$  Отг.  $\arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

9.  $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}} \frac{dx}{x^3}$  Отг.  $\frac{5}{4} \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} - \frac{5}{9} \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9} + C$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$  Отг.  $-3 \sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} + C$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$  Отг.  $\frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$
12.  $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{3x+4}} dx$   
Отг.  $\frac{3x+4}{3} - \frac{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}{2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln|1 + \sqrt[3]{3x+4}| + C$
13.  $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$  Отг.  $\frac{3x+11}{15} \sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$
14.  $\int \frac{x^3 dx}{1 + \sqrt[3]{x^4+1}}$  Отг.  $\frac{3}{8} t^2 - \frac{3}{4} t + \frac{3}{4} \ln|t+1| + C, \quad t = \sqrt[3]{x^4+1}$
15.  $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$  Отг.  $\frac{-3x^4 - 4x^2 - 8}{15} \sqrt{1-x^2} + C$
16.  $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}$  Отг.  $\ln(\sqrt{1+x^2} + 1) + C$

III. Решете абелевите интегралы:

1.  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$  Отг.  $\ln\left|1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right| + C$
2.  $\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$  Отг.  $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C$
3.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$  Отг.  $\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}-1}{x}\right| + C$
4.  $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$  Отг.  $x\sqrt{x^2-2x+5} - 5 \ln|x-1 + \sqrt{x^2-2x+5}| + C$
5.  $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}$  Отг.  $\frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|} + C$
6.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$  Отг.  $\frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$
7.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}$  Отг.  $\frac{4x-14}{9\sqrt{7x-x^2-10}} + C$
8.  $\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx$   
Отг.  $\sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C$

$$9. \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} \quad \text{Отг. } C - \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3} \right|$$

$$10. \int \frac{x dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}} \quad \text{Отг. } \frac{2(7x^2-34x+40)}{9(x-2)\sqrt{7x-10-x^2}} + C$$

$$11. \int \frac{x dx}{(x^2+x+2)\sqrt{4x^2+4x+3}} \\ \text{Отг. } \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{35}} \ln \frac{|\sqrt{7(4x^2+4x+3)} - \sqrt{5}(2x+1)|}{\sqrt{x^2+x+2}} + C$$

$$12. \int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx \\ \text{Отг. } \frac{2x^2+x+7}{6} \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2} \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$$

$$13. \int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}, x > 3 \quad \text{Отг. } \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{1}{x-2} + C$$

$$14. \int \frac{(x^2-1) dx}{x\sqrt{62x^2-x^4-1}} \quad \text{Отг. } \operatorname{arcsin} \frac{x^2+1}{8x} + C$$

IV. Решете биномните интегралы:

$$1. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}} \quad \text{Отг. } \frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \\ \text{Отг. } \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{4} \ln |t^2+t+1| + \frac{3}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, t = \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \quad \text{Отг. } \frac{1}{6} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, t = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}} \quad \text{Отг. } \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} \quad \text{Отг. } -\frac{1}{10} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t + C, t = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{Отг. } \frac{3}{7} (4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3) \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C$$

$$7. \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} \quad \text{Отг. } \frac{1}{5} \ln \frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, t = \sqrt[3]{1+x^5}$$

$$8. \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C.$$

**ИНТЕГРАЛИ ОТ РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ на  $\sin x$  и  $\cos x$**

---

И при този клас интеграли (както в глава 4) избираме такава смяна на интеграционната променлива  $x = \varphi(t)$ , чрез която пресмятането на интеграла се свежда до интеграл от рационална функция.

Разглеждаме интеграл от вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \tag{5.1}$$

където  $R(\dots, \dots)$  е рационална функция на  $\sin x$  и  $\cos x$ .

**I клас**

Нека  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , т.е. функцията  $R$  е *нечетна* относно  $\sin x$ . Тогава

$$\begin{aligned} \text{полагаме } \cos x = t &\implies x = \arccos t \implies dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} &= \sqrt{1-t^2} \\ \text{и заместяваме } &\implies I = -\int R(\sqrt{1-t^2}, t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

**Пример 5.1.** Решете интеграла  $\int \frac{\sin x dx}{2 + 3 \cos^2 x}$ .

*Решение.* От условието  $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{2 + 3 \cos^2 x}$ . Тогава  $R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)}{2 + 3 \cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$ . От (5.2) имаме:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+3t^2} \left( \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = -\int \frac{dt}{2+3t^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+\frac{3t^2}{2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{1+\left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C = -\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos x\right) + C. \end{aligned}$$



**Забележка.** Интегралът може да се реши и непосредствено:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x dx}{2 + 3 \cos^2 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{2 + 3 \cos^2 x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x)}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos x\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos x\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos x\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos x\right) + C. \end{aligned}$$

### II клас

Нека  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , т.е. функцията  $R$  е нечетна относно  $\cos x$ . Тогава

$$\begin{aligned} \text{полагаме } \sin x = t &\implies x = \arcsin t \implies dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x &= \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-t^2} \\ \text{и заместваем } &\implies I = \int R(t, \sqrt{1-t^2}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

**Пример 5.2.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$ .

**Решение.** От условието  $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{2 \sin^2 x \cos x}$ . Тогава  $R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{2 \sin^2 x (-\cos x)} = -\frac{1}{2 \sin^2 x \cos x} = -R(\sin x, \cos x)$ . От (5.3) имаме:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2t^2 \sqrt{1-t^2} \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2(1-t)(1+t)} \\ \frac{1}{t^2(1-t)(1+t)} &= \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t} \\ \implies 1 &= (-B+C-D)t^3 + (-A+C+D)t^2 + Bt + A \\ \implies &\begin{cases} -B+C-D=0 & A=1 \\ -A+C+D=0 & B=0 \\ B=0 & C=1/2 \\ A=1 & D=-1/2 \end{cases} \\ \implies I &= \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln|1-t^2| + C \\ &= -\frac{1}{\sin x} - \ln|\sqrt{1-\sin^2 x}| + C = -\frac{1}{\sin x} - \ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

**Забележка.** До същия интеграл от рационална функция се достига и след като подинтегралната функция се преобразува по следния начин:

$$I = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}.$$

Полагаме  $\sin x = t$ ,  $x = \arcsin t$ ,  $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$ .

### III клас

Нека  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , т.е. функцията  $R$  е четна относно  $\sin x$  и  $\cos x$  едновременно. Тогава

$$\begin{aligned} \text{полагаме } \operatorname{tg} x = t &\Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \text{и заместяваме } &\Rightarrow I = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Пример 5.3.** Решете интеграла  $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ .

**Решение.** От условието  $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ . Тогава

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\sin x)}{(-\sin x)^3 + (-\cos x)^3} = R(\sin x, \cos x). \text{ От (5.4) имаме:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^3+1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{t dt}{t^3+1} \\ \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} &= \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \\ \Rightarrow t &= (A+B)t^2 + (-A+B+C)t + A+C \\ \Rightarrow &\begin{cases} A+B=0 & A=-1/3 \\ -A+B+C=1 & B=1/3 \\ A+C=0 & C=1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3} \int \frac{d(t+1)}{t+1} + \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = -\frac{1}{3} \ln|t+1| + I_1.$$

За да решим  $I_1$ , полагаме  $t = u - b/2a = u + 1/2$ ,  $dt = du$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{u + \frac{1}{2} + 1}{u^2 + u + \frac{1}{4} - u - \frac{1}{2} + 1} du = \int \frac{u + \frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}} du = \int \frac{u du}{u^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 + \frac{3}{4})}{u^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2} \int \frac{d(2u/\sqrt{3})}{(2u/\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2(t - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln |t^2 - t + 1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Тогава

$$I = -\frac{1}{3} \ln |\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{3} \ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

*Забележка.* Интегралът се свежда до интеграл от рационална функция чрез елементарни преобразувания и съответното полагане:

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x \left( \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 1 \right)} dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dt}{\operatorname{tg}^3 x + 1}.$$

Полагаме  $\operatorname{tg} x = t$ ,  $x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow I = \int \frac{t dt}{t^3 + 1}.$

И така при интегралите от I, II и III клас може да се стигне до интеграл от рационална функция чрез елементарни преобразувания и подходяща субституция.

#### IV клас

Ако интегралът (5.1) не е от изброените три класа, прилагаме класическата субституция:

$$\text{полагаме } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{и заместяваме } \Rightarrow I = 2 \int R \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{dt}{1+t^2}. \quad (5.5)$$

**Пример 5.4.** Решете интеграла  $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$ .

*Решение.* От (5.5) имаме

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dt}{2 + \frac{1+t^2}{1-t^2}} = 2 \int \frac{dt}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\frac{t^2}{3} + 1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

**Пример 5.5.** Решете интеграла  $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ .

*Решение.* Преобразуваме подинтегралната функция:

$$I = \int \frac{\cos 2x}{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos 2x dx}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}.$$

$$R(\sin 2x, \cos 2x) = \frac{2 \cos 2x}{2 - \sin^2 2x},$$

$$R(\sin 2x, -\cos 2x) = -\frac{2 \cos 2x}{2 - \sin^2 2x} = -R(\sin 2x, \cos 2x).$$

Следователно полагаме (вж. (5.3))

$$\begin{aligned} \sin 2x = t, \quad x = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} t, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}, \quad \cos 2x = \sqrt{1-t^2} \\ \Rightarrow I = \int \frac{2\sqrt{1-t^2}}{2-t^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| + C \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 5.6.** Решете интеграла  $\int \frac{(\cos 2x - 3) dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \cot^2 x}}$ .

*Решение.* От условието  $R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 3}{\cos^4 x \sqrt{4 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}}$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$  (функцията е четна спрямо  $\sin x$  и  $\cos x$ ).

Полагаме  $\cotg x = t$  (вместо  $\tg x = t$ ),

$$x = \operatorname{arccotg} t, \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{\frac{t^2-1}{t^2+1} - 3}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \sqrt{4-t^2}} \left(-\frac{dt}{1+t^2}\right) = \int \frac{2t^2+4}{t^4 \sqrt{4-t^2}} dt.$$

Правим второ полагане (вж. пр. 4.1)  $t = 2 \sin z$ ,  $dt = 2 \cos z dz$ ,  $z = \arcsin \frac{t}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{8 \sin^2 z + 4}{16 \sin^4 z \sqrt{4-4 \sin^2 z}} (2 \cos z) dz = \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 z + 1}{\sin^4 z} dz \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{2 \sin^2 z + \cos^2 z}{\sin^4 z} dz = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sin^2 z} + \frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \cdot \frac{dz}{\sin^2 z} \\ &= -\frac{1}{2} \cotg z - \frac{1}{4} \int \cotg^2 z d(\cotg z) = -\frac{1}{2} \cotg z - \frac{1}{12} \cotg^3 z + C. \end{aligned}$$

$$\text{От } \sin z = \frac{t}{2} \Rightarrow \cotg z = \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z} = \frac{\sqrt{4-t^2}}{2t} = \frac{\sqrt{4-\cotg^2 x}}{2 \cotg x}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \cotg \frac{\sqrt{4-\cotg^2 x}}{2 \cotg x} - \frac{1}{12} \cotg^3 \frac{\sqrt{4-\cotg^2 x}}{2 \cotg x} + C.$$

**Пример 5.7.** Да се реши  $\int \frac{1+\cos x}{(\cos x + \sin x + 2)^3} dx$ .

*Решение.*  $R(\sin x, \cos x) = \frac{1+\cos x}{(\cos x + \sin x + 2)^3}$ . Полагаме  $t = \tg \frac{x}{2}$ . От (5.5) имаме

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 2\right)^3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 4 \int \frac{(1+t^2)dt}{(t^2+2t+3)^3} \\ &= 4 \int \frac{t^2+2t+3-2t-2}{(t^2+2t+3)^3} dt = 4 \int \frac{dt}{(t^2+2t+3)^2} - 8 \int \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^3} dt \\ &= 4 \int \frac{dt}{[(t+1)^2+2]^2} - 8 \int \frac{t+1}{[(t+1)^2+2]^3} dt. \end{aligned}$$

Полагаме  $t + 1 = u$ ,  $t = u - 1$ ,  $dt = du$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 4 \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} - 8 \int \frac{udu}{(u^2 + 2)^3} = 2 \int \frac{2 + u^2 - u^2}{(u^2 + 2)^2} du - 4 \int \frac{d(u^2 + 2)}{(u^2 + 2)^3} \\ &= 2 \int \frac{du}{u^2 + 2} - \int \frac{ud(u^2 + 2)}{(u^2 + 2)^2} - 4 \frac{(u^2 + 2)^{-2}}{-2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 2} \\ &+ \int u d \frac{1}{u^2 + 2} + \frac{2}{(u^2 + 2)^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 2} + \frac{u}{u^2 + 2} - \int \frac{du}{u^2 + 2} + \frac{2}{(u^2 + 2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} + \frac{u(u^2 + 2) + 2}{(u^2 + 2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u^3 + 2u + 2}{(u^2 + 2)^2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{От } u = t + 1 = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3)^2} + C.$$

**Пример 5.8.** Решете интегралите

$$\text{а) } I_1 = \int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx \quad \text{б) } I_2 = \int \frac{\sin x}{\sin 3x} dx$$

*Решение.* Прилагаме формулите  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ;  $\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x$ .

$$\text{а) } I_1 = \int \frac{\cos x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x} dx = \int \frac{dx}{4 \cos^2 x - 3} \text{ и от (5.4) имаме (полагаме } \operatorname{tg} x = t):$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{4 \frac{1}{1+t^2} - 3} dt = \int \frac{dt}{1-3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(t\sqrt{3})}{1-(t\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\text{б) } I_2 = \int \frac{\sin x}{3 \sin x - 4 \sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{3 - 4 \sin^2 x} \text{ и аналогично на а) получаваме}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{3 - \frac{4t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{3-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 5.9.** Решете интеграла  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$ .

*Решение.* Полагаме

$$\sqrt{1 + \sin^2 x} = t \implies 1 + \sin^2 x = t^2 \implies \sin x = \sqrt{t^2 - 1}; \quad x = \arcsin \sqrt{t^2 - 1}$$

$$\implies dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2 - 1}} \cdot 2tdt = \frac{tdt}{\sqrt{2 - t^2}\sqrt{t^2 - 1}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{2 - t^2}}$$

$$\begin{aligned} \implies I &= \int \frac{\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{2 - t^2}}}{t} \cdot \frac{tdt}{\sqrt{2 - t^2}\sqrt{t^2 - 1}} = \int \frac{dt}{(\sqrt{2 - t^2})^2} = \int \frac{dt}{2 - t^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(\sqrt{2} + t)^2}{|2 - t^2|} + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 t})^2}{2 - 1 - \sin^2 t} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 t})^2}{\cos^2 t} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 t}}{|\cos t|} + C. \end{aligned}$$

**Пример 5.10.** Да се реши интегралът  $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x dx$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

*Решение.*

1) При  $m < n$ :

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \cos^{m-1} x \sin^n x d(\sin x) = \frac{1}{n+1} \int \cos^{m-1} x d(\sin^{n+1} x) \\ &= \frac{1}{n+1} \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x - \frac{1}{n+1} \int \sin^{n+1} x d(\cos^{m-1} x) \\ &= A + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{n+2} x \cos^{m-2} x dx \\ \implies I_{m,n} &= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2, n+2}. \end{aligned}$$

*Забележка.* Рекурентната формула се прилага неколкократно, като при  $m = 2k$  се стига до интеграл от вида  $\int \sin^n x dx$  (вж. пример 2.14.б), а при  $m = 2k + 1$  до

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int \sin^n x d(\sin x) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}.$$

2) При  $n < m$ :

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= - \int \cos^m x \sin^{n-1} x d(\cos x) = - \frac{1}{m+1} \int \sin^{n-1} x d(\cos^{m+1} x) \\ &= - \frac{1}{m+1} \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{1}{m+1} \int \cos^{m+1} x d(\sin^{n-1} x) \\ &= A + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x dx \\ &\Rightarrow I_{m,n} = - \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}. \end{aligned}$$

*Забележка.* Рекурентната формула се прилага неколкократно, като при  $n = 2k$  се стига до интеграл от вида  $\int \cos^n x dx$  (вж. пример 2.14.а), а при  $n = 2k + 1$  до

$$\int \cos^n x \sin x dx = - \int \cos^n x d(\cos x) = - \frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

### ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

- $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x}$ , пол.  $\cos x = t$       Отг.  $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \cos x - 1 + \sqrt{5}}{2 \cos x - 1 - \sqrt{5}} \right| + C$
- $\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x}$       Отг.  $\cos x - 2 \operatorname{arctg}(\cos x) + C$
- $\int \frac{\sin x dx}{2 - \sin^2 x - \cos x}$       Отг.  $-\frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos x - 1}{\sqrt{3}} + C$
- $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x + \sin^2 x + 1}$       Отг.  $\frac{1}{5} \ln \frac{(1 + \cos x)^2}{\cos^2 x - 2 \cos x + 2} - \frac{6}{5} \operatorname{arctg}(\cos x - 1) + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1 - \cos x)}}$       Отг.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{2 \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2 \cos x}} + C$
- $\int \frac{\cos x dx}{3 + \cos^2 x}$ , пол.  $\sin x = t$       Отг.  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} + C$
- $\int \sin^{10} x \cos^5 x dx$       Отг.  $\frac{\sin^{11} x}{11} - 2 \frac{\sin^{13} x}{13} + \frac{\sin^{15} x}{15} + C$
- $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$       Отг.  $\ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C$
- $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$       Отг.  $\sin x - \operatorname{arctg}(\sin x) + C$
- $\int \frac{dx}{\sin 2x \sin x + \cos x}$       Отг.  $\frac{1}{6} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \sin x) + C$



11.  $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ , пол.  $\operatorname{tg} x = t$   
 Отг.  $\frac{1}{3} \ln \frac{|t x - 1|}{\sqrt{t^2 x + t x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t x + 1}{\sqrt{3}} + C$
12.  $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos^2 x} dx$   
 Отг.  $\operatorname{tg} x + \ln |t x| + C$
13.  $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$   
 Отг.  $-(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x) + C$
14.  $\int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}$   
 Отг.  $\ln \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + C$
15.  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$   
 Отг.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$
16.  $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x(4 + \operatorname{tg}^2 x)} dx$   
 Отг.  $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg} x - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C$
17.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$   
 Отг.  $\frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} + C$
18.  $\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x + 2 \cos x}$ , пол.  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$   
 Отг.  $\frac{2}{5} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2)^2} + \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C$
19.  $\int \frac{dx}{\cos x(2 + \sin x + \cos x)}$   
 Отг.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2})^3}{(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2})(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3)} \right| + C$
20.  $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$   
 Отг.  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$
21.  $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$   
 Отг.  $-\ln |1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$
22.  $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$   
 Отг.  $\frac{1}{3} \ln \frac{3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{|\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}|} + C$

ДОПЪЛНИТЕЛНИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

РЕШЕТЕ ИНТЕГРАЛИТЕ

1.  $\int \frac{dx}{9+x^2}$  Отр.  $\frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C$
2.  $\int x^2 \sqrt{x^3+8} dx$  Отр.  $\frac{2}{9} (x^3+8)^{3/2} + C$
3.  $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$  Отр.  $\ln(e^x+5) + C$
4.  $\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}} dx$  Отр.  $\frac{1}{8} \arctg \left( \frac{e^{2x}}{2} \right) + C$
5.  $\int \frac{dx}{x(5+\ln^2 x)}$  Отр.  $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \left( \frac{\ln x}{\sqrt{5}} \right) + C$
6.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5+\cos x}}$  Отр.  $C - 2\sqrt{5+\cos x}$
7.  $\int \frac{\sin 2x dx}{b^2 \cos^2 x + a^2}$  Отр.  $C - \frac{\ln(a^2 + b^2 \cos^2 x)}{b^2}$
8.  $\int \frac{b \cos x - c \sin x}{\sqrt{a + b \sin x + c \cos x}} dx$  Отр.  $2\sqrt{a + b \sin x + c \cos x} + C$
9.  $\int \frac{x dx}{\operatorname{sh}(3x^2+5)}$  Отр.  $C - \frac{1}{6} \operatorname{cth}(3x^2+5)$
10.  $\int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$  Отр.  $2 \operatorname{ch} \sqrt{x} + C$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$  Отр.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left( \frac{6x-7}{109} \right) + C$
12.  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$  Отр.  $\frac{1}{4} \arcsin(x^4) + C$
13.  $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{12}}$  Отр.  $C - \frac{1}{8(x-1)^8} - \frac{1}{3(x-1)^9} - \frac{3}{10(x-1)^{10}} - \frac{1}{11(x-1)^{11}}$
14.  $\int \sin(\ln x) dx$  Отр.  $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
15.  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$  Отр.  $\operatorname{tg} x \ln(\sin x) - x + C$
16.  $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$  Отр.  $\operatorname{arctg}[\ln(\operatorname{arctg} x) - 1] + C$

$$17. \int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{Отг. } C - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2$$

$$18. \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx \quad \text{Отг. } \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

$$19. \int \frac{x \arctg x}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{Отг. } C - \frac{\arctg x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctg x}{4} + \frac{x}{4(1+x^2)}$$

$$20. \int x \arctg(x-1) dx \quad \text{Отг. } \frac{x^2}{2} \arctg(x-1) - \ln \sqrt{x^2-2x+2} - \frac{x}{2} + C$$

$$21. \int \frac{x^4 \arctg x}{1+x^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{x(x^2-3)}{3} \arctg x + \frac{(\arctg x)^2}{2} + \frac{2}{3} \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{6} + C$$

$$22. \int (x^2+x) \ln(x+1) dx \quad \text{Отг. } \frac{2x^3+3x^2-1}{6} \ln(x+1) - \frac{4x^3+3x^2+6x}{36} + C$$

$$23. \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x(1-\ln x)}} \quad \text{Отг. } 2 \arcsin(\sqrt{\ln x}) + C$$

$$24. \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} \quad \text{Отг. } \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2-x^2}} + C$$

$$25. \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}} \quad \text{Отг. } \frac{x(3a^2-2x^2)}{3a^4(a^2-x^2)^{3/2}} + C$$

$$26. \int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{x-1}{2(1+x)} \ln(1+x+x^2) - \ln(1+x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$27. \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{x-7}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16} \arctg \frac{x+1}{2} + C$$

$$28. \int \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1} dx \quad \text{Отг. } \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{3}} + C$$

Упътване: положете  $x + \frac{1}{x} = t$ ;  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ ;  $\frac{x^2-1}{x} dx = dt$

$$29. \int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx \quad \text{Отг. } \arctg x + \frac{1}{3} \arctg(x^3) + C$$

Упътване:  $\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$

$$30. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} \quad \text{Отг. } \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C$$

$$31. \int \frac{dx}{(2x+1)(\sqrt{2x+1}+1)} \quad \text{Отг. } \ln \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} + C$$

$$32. \int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}} dx \quad \text{Отг. } \frac{2(x+7)}{3} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \right| + C$$

33.  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$  Отг.  $C - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}$   
*Упътване:* положете  $x + \frac{1}{x} = t$
34.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$  Отг.  $-\frac{n}{a-b} \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} + C, \quad a \neq b$
35.  $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$  Отг.  $\frac{2a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$
36.  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^2}}$  Отг.  $C - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x} - \ln \sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{1 + x^4} - x}{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}}$
37.  $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 4x}} dx$  Отг.  $C - \frac{x + 10}{2} \sqrt{-x^2 + 4x} + 26 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{4 - x}}$
38.  $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x - 5}$  Отг.  $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}$
39.  $\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$  Отг.  $\frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} + C$   
*Упътване:* положете  $\sin x - \cos x = t$ ;  $\sin 2x = 1 - t^2$ ;  $(\cos x + \sin x) dx = dt$
40.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x - 3} dx$  Отг.  $\frac{\cos^2 x}{2} + 3 \cos x + 8 \ln(3 - \cos x) + C$
41.  $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$  Отг.  $\frac{1}{4} \ln \frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - \frac{\operatorname{tg} x + 1}{4(\operatorname{tg}^2 x + 1)} + C$
42.  $\int \frac{\ln(\cos x + \sqrt{\cos 2x})}{1 - \cos 2x} dx$   
 Отг.  $C - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \ln \left| \frac{\operatorname{cotg} x + \sqrt{\operatorname{cotg}^2 x - 1}}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}} \right| + \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{cotg}^2 x - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x - \frac{\pi}{2}$
43.  $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$  Отг.  $\frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x + 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} \right| + C$
44.  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx$  Отг.  $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$
45.  $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1 - \cos x)}}$  Отг.  $\sqrt{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} \right| + C$
46.  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{cotg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 + 3 \sin 2x} dx$  Отг.  $\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\operatorname{cotg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}}{2} \right) + C$
47.  $\int \frac{(x + \sin x) dx}{1 + \cos x}$  Отг.  $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$
48.  $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$  Отг.  $e^{\sin x} \left( x - \frac{1}{\sin x} \right) + C$

## ДЕФИНИЦИЯ, СЪЩЕСТВУВАНЕ И СВОЙСТВА НА ОПРЕДЕЛЕН (РИМАНОВ) ИНТЕГРАЛ. КЛАСОВЕ ИНТЕГРУЕМИ ФУНКЦИИ

---

### А. Дефиниция на определен интеграл

Дадена е декартова координатна система  $K_2 : Oxy$  и функция  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $a < b$ .

а) *Разбиваме* (разделяме) затворения интервал  $[a, b]$  на  $n$  подинтервала с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

и означаваме дължината на  $i$ -тия подинтервал  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ;

б) *Избираме* произволна точка  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  и пресмятаме  $f(\xi_i)$ ;

в) *Образуваме* сумата (числото)  $\sigma(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , която се нарича

*Риманова интегрална сума* за това разбиване на  $[a, b]$  и за този избор на точките  $\xi_i$ . При даденото разбиване има неизброимо много интегрални суми. При друго разбиване също има неизброимо много интегрални суми. Следователно получаваме двойно неизброимо множество от Риманови интегрални суми.

**Дефиниция 1** Числото  $I$  се нарича *граница* на Римановите интегрални суми  $\sigma(x_i, \xi_i)$  при  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , ако  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  така, че при всяко разбиване на  $[a, b]$ , за което  $\max \Delta x_i < \delta$  и при всеки избор на точките  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , да бъде изпълнено  $|\sigma(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$ .

**Дефиниция 2** Функцията  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  се нарича *интегруема в Риманов смисъл*, ако съществува  $I = \lim \sigma(x_i, \xi_i)$ , при  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  и бележим  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $a [a, b]$  се нарича *интеграционен интервал*.

**Дефиниция 3** Числото  $I$  се нарича *определен (Риманов) интеграл* и бележим

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.1)$$

Числата  $a$  и  $b$  се наричат съответно *долна и горна граница* на интеграла, а  $f(x)$  – *подинтегрална функция*.

**Теорема 1** (*Необходимо условие за интегрируемост на  $f(x)$* ). Ако  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f(x)$  е ограничена в затворения интервал  $[a, b]$ .

Ако  $f(x) = c$ ,  $c = \text{const.}$ ,  $x \in [a, b]$ , то  $f(\xi_i) = c$ ,  $\forall \xi_i$  и тогава

$$\sigma(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c(b-a)$$

при всяко разбиване на  $[a, b]$ , където  $(b-a)$  е дължината на  $[a, b]$

И така  $\int_a^b c dx = c(b-a)$ . Ако  $c = 1$ , то  $\int_a^b dx = b-a$ .

### Б. Свойства на определения интеграл

1° Приемаме  $\int_a^a f(x) dx = 0$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}[a, a]$ .

2°  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .

3°  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .

4°  $\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$ ,  $A = \text{const.}$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .

5°  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ ,  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .

6° Ако  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .

7° Ако  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ , където  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .

8° Ако  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

9° Ако  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x)$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

10° Ако  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

11° Ако  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $a < c < b$ , то  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

12° Ако  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$  и  $m = \inf f(x)$ ,  $M = \sup f(x)$  за

$$x \in [a, b], \text{ то } m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

13° Ако  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то в сила е неравенството на Коши-Буняковски-Шварц

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

### В. Теорема за средните стойности в интегралното цмятане

**Теорема 2** Ако  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $a < b$  и  $m = \inf f(x)$ ,  $M = \sup f(x)$  за  $x \in [a, b]$ , то съществува число  $\mu$ ,  $m \leq \mu \leq M$ , за което е изпълнено

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a). \quad (7.2)$$

*Следствие 1.* Ако  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , съществува точка  $\xi \in [a, b]$ , за която е изпълнено равенството

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \quad (7.3)$$

**Теорема 3** Ако функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяват условията:

- a)  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $a < b$ ;
- б)  $m \leq f(x) \leq M$  за  $x \in [a, b]$ ;
- в)  $g(x)$  не мени знака си в  $[a, b]$ ,

то съществува число  $\mu$ ,  $m \leq \mu \leq M$ , за което е изпълнено

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (7.4)$$

### Г. Малки и големи суми на Дарбу. Свойства

Нека функцията  $f(x)$  е дефинирана и ограничена в  $[a, b]$ . Разделяме  $[a, b]$  на  $n$  подинтервали с помощта на точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Означаваме

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f(x) & \text{за } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ M_i &= \sup f(x) & \text{за } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n} \end{aligned}$$

**Дефиниция 4** Сумите

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

където  $\Delta x_i$  е дължината на  $[x_{i-1}, x_i]$ , се наричат **малка и голяма сума на Дарбу**, съответстващи на това разделяне на  $[a, b]$ .

Очевидно  $m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m \Delta x_i &\leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i \\ \text{или} \quad m(b-a) &\leq s \leq \sigma(x_i, \xi_i) \leq S \leq M(b-a) \end{aligned} \quad (7.5)$$

**Свойства на сумите на Дарбу**

1. От () следва, че множествата  $\{s\}$  и  $\{S\}$  са ограничени.
2. При въвеждането на нови точки на делене на  $[a, b]$  малките суми на Дарбу монотонно растат, а големите суми на Дарбу монотонно намаляват.
3. Всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума, т.е., ако  $s, S$  и  $s', S'$  са получени при разбивания на  $[a, b]$ , то

$$s \leq S' \quad \text{и} \quad s' \leq S.$$

4.  $\forall \varepsilon > 0$  съществуват  $\xi'_i, \xi''_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$  така, че

$$\sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x_i - s < \varepsilon \quad \text{и} \quad S - \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \Delta x_i < \varepsilon.$$

**Д. Класове интегрируеми функции**

**Теорема 4 (Критерий за интегрируемост на функции).** *Необходимо и достатъчно условие функцията  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  е  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  така, че щом  $\max \Delta x_i < \delta, 1 \leq i \leq n$ , то  $S - s < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (S - s) = 0$ .*

**Теорема 5** *Ако функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в  $[a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .*

**Теорема 6** *Ако функцията  $f(x)$  е дефинирана и монотонна в  $[a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .*

**Теорема 7** *Ако функцията  $f(x)$  има краен брой точки на прекъсване от първи род и е ограничена в  $[a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .*



## ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

---

### А. Интегралът като функцията на горната си граница

Нека  $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогава  $f(t) \in \mathcal{R}[a, x]$ ,  $\forall [a, x] \subset [a, b]$ ,  $a \leq x \leq b$  (вж. гл. 6, св. 7°), т.е. съществува  $\int_a^x f(t)dt$ , който има напълно определена стойност при дадено  $x$ .

**Дефиниция 1** *Функцията*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (8.1)$$

се нарича **интеграл като функцията на горната си граница**.

При какви условия  $F(x)$  е непрекъсната, диференцируема и как се намира нейната производна:

**Теорема 1** *Ако  $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $F(x) \in C[a, b]$ .*

**Теорема 2** *Ако  $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(t)$  е непрекъсната в точка  $x_0 \in [a, b]$ , то  $F(x)$  е диференцируема в точка  $x_0$  и  $F'(x_0) = f(x_0)$ .*

**Следствие 1.** Ако  $f(t) \in C[a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , то  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  е диференцируема във всяка точка  $x \in [a, b]$  и  $F'(x) = f(x)$ , т.е.  $F(x)$  е примитивна функция на  $f(t)$  в  $[a, b]$  (всяка функция  $f(t) \in [a, b]$  има примитивна функция в  $[a, b]$ ).

**Теорема 3 (Основна теорема на интегралното смятане)** *Ако  $f(x) \in C[a, b]$  и  $F(x)$  е примитивна функция на  $f(x)$  в  $[a, b]$ , то в сила е равенството*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (8.2)$$

Това равенство се нарича *формула на Нютон-Лайбниц*, която дава връзка между определен и неопределен интеграл и правило за пресмятане на определен интеграл.

**Пример 8.1.** Решете интеграла  $\int_0^2 x^2 dx$ .

*Решение.* Съответният неопределен интеграл има решение  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$  и тогава по формула (8.2) имаме

$$\int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Числото  $8/3$  геометрически интерпретира лице на криволинеен триъгълник образуван от правите  $x = 2$ ,  $y = 0$  и параболата с уравнение  $y = x^2$ . (вж. модул 5, гл. 4, с. 37)

**Пример 8.2.** Решете интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ .

*Решение.* От  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$  и по формула (8.2) имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

**Пример 8.3.** Решете интеграла  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Решение.* От  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$  и по формула (8.2) имаме

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

### Б. Интегриране по части при определен интеграл

Формулата за интегриране по части при определен интеграл се дава със следната теорема

**Теорема 4** Ако функциите  $u(x)$  и  $v(x)$  са непрекъснати в  $[a, b]$  и имат интегруемни производни  $u'(x)$  и  $v'(x)$  в  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (8.3)$$

**Пример 8.4.** Решете интеграла  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ .

*Решение.* След като внесем  $\cos x$  под знака на диференциала, интегрираме по части по формула (8.3)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} x d \sin x = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

**Пример 8.5.** Решете интеграла  $\int_0^1 x e^x dx$ .

*Решение.* Внасяме  $e^x$  под знака на диференциала и интегрираме по части по формула (8.3)

$$I = \int_0^1 x de^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - e^0) = 1.$$

Може да се докаже ( $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ ):

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx \\ &= \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, & m = 2n \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{\pi}{2}, & m = 2n+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Формулите (8.4) се наричат *формули на Валис* ( $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$ ).

### В. Смяна на променливите при определен интеграл

Нека е даден интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  и извършим подходяща смяна на интеграционната променлива  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . В много случаи пресмятането на интеграла се опростява.

**Теорема 5** Нека са изпълнени условията:

- а)  $f(x) \in C[a, b]$ , т.е.  $f(x)$  е непрекъсната в  $[a, b]$ ;  
 б)  $\varphi(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ , т.е.  $\varphi(t)$  има непрекъсната производна в  $[\alpha, \beta]$ ;  
 в)  $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$ , т.е.  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ . Тогава

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (8.5)$$

*Приложение 1.* Нека  $f(x)$  е четна функция, т.е.  $f(-x) = f(x)$ . Графиката на  $f(x)$  е симетрична спрямо  $Oy$ . Тогава

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx. \quad (8.6)$$

*Доказателство.*  $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ . В първия интеграл правим смяна  $x = -t$ , при  $x = -a \rightarrow t = a$ ; при  $x = 0 \rightarrow t = 0$ ;  $dx = -dt$ . Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx \\ &= - \int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx. \end{aligned}$$

*Приложение 2.* Нека  $f(x)$  е нечетна функция, т.е.  $f(-x) = -f(x)$ . Графиката на  $f(x)$  е симетрична спрямо  $O$ . Тогава

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0. \quad (8.7)$$

*Доказателство.*  $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ . В първия интеграл правим смяна  $x = -t$ , при  $x = -a \rightarrow t = a$ ; при  $x = 0 \rightarrow t = 0$ ;  $dx = -dt$ . Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

**Пример 8.6.** Решете интеграла  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2 \sin x)dx$ .

*Решение.*  $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x dx = I_1 + I_2$ . Подинтегралната функция в  $I_1$  е  $f_1(x) = \cos^2 x$ .  $f_1(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2 x = f_1(x)$  По формула (8.6) имаме

$$I_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Подинтегралната функция в  $I_2$  е  $f_2(x) = x^2 \sin x$ .  $f_2(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f_2(x)$  Следователно по формула (8.7) имаме  $I_2 = 0$ .

$$\implies I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}.$$

**Теорема 6** Ако  $f(x)$  е **периодична** функция с период  $T$ , т.е.  $f(x + T) = f(x)$ ,  $T > 0$ , то  $\forall a \in \mathbb{R}$  е изпълнено

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx. \quad (8.8)$$

**Теорема 7**  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ .

*Доказательство.* Полагаем  $x = \pi/2 - t \implies dx = -dt$  и  $(0, \pi/2) \rightarrow (\pi/2, 0)$ .

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = - \int_{\pi/2}^0 f[\sin(\pi/2 - t)] dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx. \quad (8.9)$$

**Пример 8.7.** Решете интегралите  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}$  и  $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x}$ .

*Решение.* Полагаем  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ;  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ; при  $x = 0 \implies t = 0$ , при  $x = \frac{\pi}{2} \implies t = 1$ .

$$\begin{aligned} \implies I_1 &= \int_0^1 \frac{2}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{4 + 2t^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d(t/\sqrt{2})}{1 + (t/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

По формула (8.9) имаме  $I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### Теорема 8

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (8.10)$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx \quad (8.11)$$

*Доказательство.* (8.10): Полагаем  $x = \pi - t$ ,  $dx = -dt$ , при  $x = 0 \implies t = \pi$ , при  $x = \pi \implies t = 0$ .

$$\begin{aligned} \implies I &= \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - I. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

(8.11): Докажем, че  $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ . В този интеграл полагаме

$x = \pi/2 - t$ ,  $dx = -dt$ , при  $x = 0 \Rightarrow t = \pi/2$ , при  $x = \pi \Rightarrow t = -\pi/2$ .

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx. \end{aligned}$$

При доказателството използвахме, че  $f(\cos t)$  е четна функция (формула (8.6))

и че  $\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$  (формула (8.9)).

**Пример 8.8.** Решете интеграла  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

*Решение.* Прилагаме формула (8.10) от теорема 8:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} \\ &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} (\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}1) = -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

### Г. Геометрични приложения на определения интеграл

Определеният интеграл се прилага за пресмятане на лица на равнинни области, дължини на дъги на равнинни линии, обеми на някои тела и лица на ротационни повърхнини. Тези въпроси са разгледани в модул 5, гл. 4.

**Пример 8.9.** Решете интеграла  $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$ .

*Решение.*  $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx. |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

**Пример 8.10.** Да се реши  $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}}{x+9-x} dx = \frac{1}{9} \left[ \int_0^{16} \sqrt{x+9} d(x+9) + \int_0^{16} \sqrt{x} dx \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ \frac{(x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{16} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{16} \right] = \frac{2}{27} (125 - 27 + 64) = 12. \end{aligned}$$

**Пример 8.11.** Решете  $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = \int_1^2 \frac{1+x^2}{x(1+x^2)} dx - \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x(1+x^2)} = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} \\ &= \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

**Пример 8.12.** Решете интеграла  $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$ .

*Решение.*

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x de^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin x de^{2x}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx = -\frac{1}{2} + \frac{e^\pi}{4} - \frac{1}{4} I \\
 &\implies \frac{5}{4} I = \frac{e^\pi - 2}{4} \implies I = \frac{e^\pi - 2}{5}.
 \end{aligned}$$

**Пример 8.13.** Решете интеграла  $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$ .

*Решение.* Полагаме  $x - 2 = t^3$ ,  $x = t^3 + 2$  ( $t = \sqrt[3]{x-2}$ ),  $dx = 3t^2 dt$ . При  $x = 3 \implies t = 1$ , при  $x = 29 \implies t = 3$ .

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 \frac{t^2}{3+t^2} 3t^2 dt = 3 \int_1^3 \frac{t^2 + 3 - 3}{3+t^2} t^2 dt = 3 \int_1^3 \frac{t^2 + 3}{3+t^2} t^2 dt - 9 \int_1^3 \frac{t^2 + 3 - 3}{3+t^2} dt \\
 &= 3 \int_1^3 t^2 dt - 9 \int_1^3 dt + 27 \int_1^3 \frac{dt}{3+t^2} = 3 \frac{t^3}{3} \Big|_1^3 - 9t \Big|_1^3 + 9 \int_1^3 \frac{dt}{1+(t/\sqrt{3})^2} \\
 &= (27 - 1) - 9(3 - 1) + 9\sqrt{3} \arctg(t/\sqrt{3}) \Big|_1^3 \\
 &= 8 + 9\sqrt{3}(\arctg\sqrt{3} - \arctg(1/\sqrt{3})) = 8 + 9\sqrt{3} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 8 + 3\sqrt{3} \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

**Пример 8.14.** Решете интегралите: а)  $\int_0^\pi \sin^6 \frac{x}{2} dx$ , б)  $\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x dx$ .

*Решение.* а) Полагаме  $x = 2t$ ,  $dx = 2dt$  ( $t = x/2$ ). При  $x = 0 \implies t = 0$ , при  $x = \pi \implies t = \pi/2$ .

$$\implies I = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^6 t dt = 2 \frac{1.3.5 \pi}{2.4.6 \cdot 2} = \frac{5\pi}{16}$$

(вж. формула (8.4) – формули на Валис).

б) Полагаме  $2x = t$ ,  $dx = dt/2$  ( $x = t/2$ ). При  $x = 0 \implies t = 0$ , при  $x = \pi/4 \implies t = \pi/2$ .

$$\implies I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^7 t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2.4.6}{1.3.5.7} = \frac{8}{35}$$

(вж. формула (8.4) – формули на Валис).

**Пример 8.15.** Пресметнете  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ .

*Решение.* Подинтегралната функция е периодична с период  $\pi/2$ . Според теорема 6

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \\
 &= 4 \left[ \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x (\operatorname{tg}^4 x + 1)} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x (1 + \operatorname{ctg}^4 x)} \right] \\
 &= 4 \left[ \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x) d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x + 1} + \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^4 x} \right] \\
 &= 4 \left[ \int_0^1 \frac{(1 + t^2) dt}{1 + t^4} + \int_0^1 \frac{(1 + t^2) dt}{1 + t^4} \right] \\
 &= 8 \int_0^1 \frac{1 + t^2}{1 + t^4} dt = 4 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 + t\sqrt{2} + t^2 + 1 - t\sqrt{2}}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} dt \\
 &= 4 \left[ \int_0^1 \frac{dt}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \int_0^1 \frac{dt}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^1 \frac{d(t\sqrt{2} - 1)}{(t\sqrt{2} - 1)^2 + 1} + \int_0^1 \frac{d(t\sqrt{2} + 1)}{(t\sqrt{2} + 1)^2 + 1} \right] \\
 &= 4\sqrt{2} \left[ \operatorname{arctg}(t\sqrt{2} - 1) + \operatorname{arctg}(t\sqrt{2} + 1) \right] \Big|_0^1 = 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2} - 1 + t\sqrt{2} + 1}{1 - (2t^2 - 1)} \Big|_0^1 \\
 &= 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \Big|_0^1 = 4\sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2\sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

*Забележка.*  $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$ .

## ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

1.  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$  Отг. 2
2.  $\int_{1/2}^{(3\frac{1}{2})/2} \frac{x^3 dx}{(\frac{5}{8} - x^4)\sqrt{\frac{5}{8} - x^4}}$  Отг. 4/3
3.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 1}$  Отг.  $\arctg \frac{1}{7}$
4.  $\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$  Отг.  $\pi/6$
5.  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$  Отг. 2
6.  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x + \cos^3 x} dx$  Отг. 4/3
7.  $\int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$  Отг.  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
8.  $\int_{(2\frac{1}{2})/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$  Отг. 8/15
9.  $\int_{(8\frac{1}{2})/3}^{8\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$  Отг.  $\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}$
10.  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$  Отг.  $\pi/6$
11.  $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$  Отг.  $\ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}$
12.  $\int_1^{16} \arctg \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$  Отг.  $\frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx \quad \text{Отг. } \ln \frac{4}{3}$$

$$14. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{Отг. } \frac{1}{8}(3 - \pi - \ln 2)$$

$$15. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\cos x(2 + \sin 2x)} \quad \text{Отг. } \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

$$16. \int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx \quad \text{Отг. } \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$17. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x(1 + \cos^2 x)} \quad \text{Отг. } \frac{1}{4} \ln \frac{12}{5} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$18. \int_{-1}^1 |x| \ln(1+x^2) dx \quad \text{Отг. } \ln 2 + 1 - \pi/2$$

$$19. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin x(1 + \cos^2 x)} \quad \text{Отг. } \frac{1}{4} \ln \frac{9}{5}$$

$$20. \int_0^1 \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx \quad \text{Отг. } \pi/2 - 2/3$$

$$21. \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{8 \cos^3 x + \sin^3 x} \quad \text{Отг. } \frac{1}{12} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{24\sqrt{3}}$$

$$22. \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{4 \cos x + 3 \sin x} \quad \text{Отг. } \frac{3}{13} \ln \frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{\pi}{3}$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x + 1) \sin x}{(\cos^2 x + 2)^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{1}{6} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$24. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx \quad \text{Отг. } 4\pi/3 - \sqrt{3}$$

$$25. \int_0^{\ln 5} \frac{e^{-x} \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx \quad \text{Отг. } \frac{1}{9} \ln \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$$

26.  $\int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$  Отг.  $\ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \pi/3$
27.  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x - 2 \sin^2 x - 1}$  Отг.  $\frac{1}{7} \ln \frac{3}{19} + \frac{6\sqrt{3}}{7} \left( \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right)$
28.  $\int_1^{5\frac{1}{3}} \frac{x^2 dx}{13 - 6x^3 + x^6}$  Отг.  $\pi/12$
29.  $\int_0^{\pi/4} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx$  Отг.  $\ln \frac{3}{2}$
30.  $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$  Отг.  $\frac{1}{4} \ln \frac{8}{5} - \frac{1}{10} \ln 2$
31.  $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$  Отг.  $\sqrt{3} - 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{3^3(1+\sqrt{2})^4}{(3+2\sqrt{3})^3}$
32.  $\int_0^1 \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$  Отг.  $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi+1}{6} - \frac{2}{3} \ln 2$
33.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$  Отг.  $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$
34.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 - \sin^2 x - \cos x}$  Отг.  $2\pi\sqrt{3}/9$
35.  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$  Отг.  $\ln \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2e - 1 + 2\sqrt{e^2 + e + 1}}$

## НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

---

При дефиниране на определен (риманов) интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  се предполага,

- че а) интеграционният интервал  $[a, b]$  има *крайна дължина*;  
 б) подинтегралната функция  $f(x)$  е *ограничена*.

Понятието определен интеграл се обобщава и когато поне едно от тези предположения се нарушава, т.е. както за безкраен интервал, така и за неограничени функции.

**Дефиниция 1** Интегралът  $\int_a^b f(x)dx$ , при който интервалът  $(a, b)$  е безкраен или  $f(x)$  е неограничена функция, се нарича **несобствен интеграл**.

### А. Несобствен интеграл с безкрайни граници (първи вид)

Нека  $f(x)$  е дефинирана за  $x \in [a, +\infty)$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}[a, \alpha]$ ,  $\forall \alpha \geq a$ .

**Дефиниция 2** Ще казваме, че **несобственият интеграл (9.1) съществува**

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \quad (9.1)$$

ако съществува **крайната граница (числото)**

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^{\alpha} f(x)dx. \quad (9.2)$$

В този случай (9.1) се нарича **сходящ** и за негова стойност се приема числото (9.2). Ако числото (9.2) не съществува или е  $\infty$ , интегралът (9.1) се нарича **разходящ**. И така

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^{\alpha} f(x)dx. \quad (9.3)$$

**Забележка. 1°.** Ако  $a < c < \alpha < +\infty$ , то (9.1) и (9.4)

$$\int_c^{\infty} f(x)dx \quad (9.4)$$

са едновременно сходящи или разходящи, което следва от равенството

$$\int_a^\alpha f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\alpha f(x)dx.$$

2°. Аналогично на (9.3) имаме

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\beta^a f(x)dx, \quad (9.5)$$

като  $f(x) \in \mathcal{R}[\beta, a], \forall \beta \leq a$

3°. По дефиниция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx, \quad (9.6)$$

ако двата интеграла отгядно са сходящи, а числото  $a$  е произволно (крайно).

4°.  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  се свежда до  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  посредством субституцията  $x = -t$ .

Наистина,  $dx = -dt$ , за  $x = -\infty, x = a$  имаме съответно  $t = +\infty, t = -a$ , т.е.

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = - \int_a^{-\infty} f(x)dx = - \int_{-a}^{\infty} f(-t)d(-t) = \int_{-a}^{\infty} f(-t)dt.$$

Последният интеграл е (9.1) по вид. И така, достатъчно е да изучим несобствения интеграл (9.1).

**Пример 9.1.** Изследвайте относно сходимост интеграла  $I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x}, a > 0,$

$a = \text{const.}$

*Решение.* По формула (9.3) имаме

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^\alpha \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\ln \alpha - \ln a) = +\infty - \ln a = +\infty,$$

т.е.  $I$  е разходящ.

**Пример 9.2.** Изследвайте относно сходимост интеграла  $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

*Решение.* По формула (9.3) имаме

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т.е.  $I$  е сходящ.

**Пример 9.3.** Докажете ( $a > 0$ ,  $\lambda > 0$  - константи)

$$I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^{\alpha} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{за } \alpha > 1 - \text{сходящ} \\ +\infty, & \text{за } \alpha \leq 1 - \text{разходящ.} \end{cases}$$

*Доказателство.* При  $\lambda = 1$  интегралът  $I$  е разходящ (вж. пр. 9.1).

$$\text{При } \lambda \neq 1 \Rightarrow I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^{\infty} = \frac{\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

а) Нека  $\lambda < 1$  ( $1 - \lambda > 0$ ). Тогава

$$I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \left( \infty - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \infty \text{ разходящ};$$

б) Нека  $\lambda > 1$  ( $1 - \lambda < 0$ ). Тогава

$$I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \left( 0 - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} \text{ сходящ.}$$

**Теорема 1 (критерий на Коши за сходимост).** Ако  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  е сходящ, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists L(\varepsilon) > 0 \text{ така, че } \forall \alpha', \alpha'' > L \text{ е изпълнено } \left| \int_{\alpha'}^{\alpha''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

**Дефиниция 3**  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  се нарича **абсолютно сходящ**, ако  $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$  е сходящ.



**Теорема 2** Ако  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  е абсолютно сходящ, той е сходящ (обратно не е вярно).

**Теорема 3 (за сравнение).** Ако  $|f(x)| \leq g(x)$  е изпълнено за всяко достатъчно голямо  $x$  и ако  $\int_a^{\infty} g(x)dx$  е сходящ, то  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  е абсолютно сходящ.

**Следствие 1.** Ако  $|f(x)| \leq A/x^\lambda$  е изпълнено за всяко достатъчно голямо  $x$ , където  $A > 0$ ,  $\lambda > 1$ , то  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  е абсолютно сходящ (твърдението следва от пример 9.3 и Т3).

**Следствие 2.** Ако  $f(x) > A/x^\lambda$  ( $f(x) < -A/x^\lambda$ ) е изпълнено за всяко достатъчно голямо  $x$ , където  $A > 0$ ,  $\lambda \leq 1$ , то  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  е разходящ.

**Пример 9.4.** Изследвайте и решете интеграла  $I = \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)^3}$ .

**Решение.** Знаменателят на подинтегралната функция  $x/(x+1)^3$  се анулира при  $x = -1$ , но  $-1 \notin [1, +\infty)$ . От

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{(x+1)^3} \right| = \frac{x}{(x+1)^3} < \frac{x}{(x+0)^3} = \frac{1}{x^2}$$

следва, че  $I$  е сходящ и има смисъл да го решим. (вж. Сл. 1,  $A = 1 > 0$ ,  $\lambda = 2 > 1$ , а от  $x \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$ ). По формула (9.3) имаме

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)^3} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \int_1^{\alpha} \frac{x dx}{(x+1)^3} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \int_1^{\alpha} \frac{(x+1) - 1}{(x+1)^3} dx \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ - \int_1^{\alpha} (x+1)^{-3} d(x+1) + \int_1^{\alpha} (x+1)^{-2} d(x+1) \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] \Big|_1^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{1}{2(\alpha+1)^2} - \frac{1}{\alpha+1} \right) - \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= 0 - 0 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

**Пример 9.5.** Изследвайте и решете интеграла  $I = \int_0^{\infty} \frac{x^7 dx}{\sqrt{1+x^3}}$ .

*Решение.* От  $[0, \infty) \Rightarrow x > 0$  и тогава  $|x| = x$ . От

$$|f(x)| = \left| \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}} \right| = \frac{|x^7|}{|\sqrt{1+x^3}|} = \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}}$$

като се ръководим от критерия (Сл. 1 и Сл. 2), извършваме следното: Разглеждаме

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^7 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int_0^2 \frac{x^7 dx}{\sqrt{1+x^3}} + \int_2^{\infty} \frac{x^7 dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

и в интервала  $[2, +\infty)$  от

$$+ \left| \begin{array}{l} x^3 < x^{16} \\ 1 < x^{16} \end{array} \right. \Rightarrow 1 + x^3 < 2x^{16}.$$

Като заместим  $1 + x^3$  с  $2x^{16}$  (заместваме с нещо по-голямо), получаваме

$$|f(x)| = \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}} > \frac{x^7}{\sqrt{2x^{16}}} = \frac{x^7}{x^8\sqrt{2}} = \frac{1/\sqrt{2}}{x^1}.$$

От  $A = 1/\sqrt{2} > 0$  и  $\lambda = 1$  (вж. Сл2) следва, че  $\int_2^{\infty} \frac{x^7 dx}{\sqrt{1+x^3}}$  е *разходящ* и тогава

$I = \int_0^{\infty} \frac{x^7 dx}{\sqrt{1+x^3}}$  е *разходящ*. Няма смисъл да се решава даденият интеграл.

*Забележка.* За  $I = \int_0^2 + \int_2^{\infty}$  прилагаме следната теорема: Ако  $f(x) \geq \varphi(x)$  и  $\int_a^b \varphi(x) dx$  е *разходящ*, то  $\int_a^b f(x) dx$  е *също разходящ*.

**Пример 9.6.** Решете интеграла  $I = \int_{-\infty}^{\ln 2} e^x dx$ .

*Решение. I начин.* По формула (9.3) имаме

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\ln 2} e^x dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\ln 2} e^x dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (e^x) \Big|_{-\alpha}^{\ln 2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (e^{\ln 2} - e^{-\alpha}) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{e^\alpha}\right) = 2 - \frac{1}{\infty} = 2. \end{aligned}$$

*II начин.* Прилагаме направо формулата на Нютон-Лайбниц:

$$I = \int_{-\infty}^{\ln 2} e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^{-\infty} = 2 - 0 = 2.$$

### Б. Несобствен интеграл от неограничени функции (втори вид)

Нека  $f(x)$  е дефинирана и интегрируема във всеки интервал  $[a, \alpha] \subset [a, b]$  и е неограничена във всяка лява околност на точката  $b$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$ .

**Дефиниция 4** Казваме, че  $f(x)$  е интегрируема в несобствен смисъл в  $[a, b]$  или че несобственият интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  е сходящ, ако съществува крайна граница (числото)

$$\lim_{\alpha \rightarrow b-0} \int_a^{\alpha} f(x) dx. \quad (9.7)$$

Стойността на несобствения интеграл се нарича числото (9.7) и пишем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow b-0} \int_a^{\alpha} f(x) dx \quad (9.8)$$

Ако границата (9.7) не съществува или несобственият интеграл има стойност  $\infty$ , интегралът се нарича **разходящ**.

#### Критерий за сходимост

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\alpha \rightarrow b} \int_a^{\alpha} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \text{за } \lambda < 1 - \text{сходящ} \\ +\infty, & \text{за } \lambda \geq 1 - \text{разходящ.} \end{cases}$$

В сила са следните теореми:

**Теорема 4** Ако  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ, то  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  така, че  $\forall \beta', \beta'' < \delta$  е изпълнено  $\left| \int_{b-\beta'}^{b-\beta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$ .

**Дефиниция 5**  $\int_a^b f(x)dx$  се нарича **абсолютно сходящ**, ако  $\int_a^b |f(x)|dx$  е сходящ.

**Теорема 5** Ако  $\int_a^b |f(x)|dx$  е сходящ, то  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ (обратно не е вярно).

**Теорема 6 (за сравнение)**. Ако  $\forall x \in [a, b)$ , които стойности на  $x$  са достатъчно близки до  $b$  е изпълнено  $|f(x)| \leq g(x)$  и ако  $\int_a^b g(x)dx$  е сходящ, то  $\int_a^b f(x)dx$  е абсолютно сходящ.

**Следствие 1°**. Ако  $|f(x)| \leq A/(b-x)^\lambda$  е изпълнено  $\forall x \in [a, b)$ , които са достатъчно близки до  $b$ , където  $A > 0, \lambda < 1$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  е абсолютно сходящ.

**Следствие 2°**. Ако  $f(x) > A/(b-x)^\lambda$  ( $f(x) < -A/(b-x)^\lambda$ ) е изпълнено  $\forall x \in [a, b)$ , които са достатъчно близки до  $b$ , където  $A > 0, \lambda \geq 1$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  е разходящ.

**Пример 9.7.** Изчислете стойността на  $I = \int_0^1 \ln x dx$ .

**Решение.** Интегралът е несобствен, защото  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ .

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 dx = -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon + 1 - \varepsilon) \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} - 1 = -1. \end{aligned}$$

**Пример 9.8.** Изследвайте сходимостта или разходимостта на интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} \text{ и в случай, че е сходящ, изчислете стойността му.}$$

*Решение.* Интегралът е несобствен, защото подинтегралната функция е неограничена при  $x = 1$ .

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1/2}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} \leq \frac{1/2}{(1-x)^{1/2}}$$

Тук използваме, че за  $x \in [0, 1) \Rightarrow 1-x^2 > 0$ ,  $\sqrt{1-x^2} > 0$ . Функцията удовлетворява условията на Сл. 1° ( $A = 1/2$ ,  $\lambda = 1/2 < 1$ ), следователно интегралът е сходящ.

За решаването на интеграла полагаме  $x = \sin t$  ( $t = \arcsin x$ ),  $dx = \cos t dt$ , при  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ , при  $x = 1 \Rightarrow t = \pi/2$ .

$$\Rightarrow I = \lim_{\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^{\beta} \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 2|\cos t|}, \quad \text{но при } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos t \geq 0$$

$$\Rightarrow I = \lim_{\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^{\beta} \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 2\cos t} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 + \cos t}, \quad (\text{свежда се до риманов}).$$

Полагаме  $\operatorname{tg}(t/2) = z$ ,  $t = 2\operatorname{arctg} z$ ,  $dt = \frac{dz}{1+z^2}$ . При  $t = 0 \Rightarrow z = 0$ , при  $t = \pi/2 \Rightarrow z = 1$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 \frac{2}{\frac{1+z^2}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}}} dz = 2 \int_0^1 \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \int_0^1 \frac{d\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

**Пример 9.9.** Изследвайте относно сходимост и решете (ако е сходящ) интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ .

**Решение.**  $|f(x)| = \frac{1}{|\sqrt[3]{1-x^3}|} = \frac{1}{|\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}|}$ . За  $x \in [0, 1) \Rightarrow 1+x+x^2 > 0; 1-x > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-x} > 0 \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-1/3}$ . Според следствие 1° ( $A = 1, \lambda = \frac{1}{3} < 1$ ) интегралът е сходящ.

$$I = \int_0^1 x^0(1-x)^{-1/3} dx.$$

Полагаме  $\frac{1}{x^3} - 1 = t^3$  (интегралът е от типа диференциален бином  $m = 0, n = 3$ ,

$p = \frac{1}{3}$  и  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{3} - \frac{1}{3} = 0$  - цяло);  $(t = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}), x^3 = \frac{1}{1+t^3}, 3x^2 dx = -\frac{3t^2}{(1+t^3)^2} dt$ . При  $x = 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty$ ; при  $x = 1 \Rightarrow t = 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= - \int_{\infty}^0 \frac{t^2 dt}{x^2 t x (1+t^3)^2} = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{\frac{1}{1+t^3} (1+t^3)^2} = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{1+t^3} \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \right) dt = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \\ &= -\frac{1}{3} \ln|t+1| \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= -\frac{1}{3} \ln|t+1| \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{d\left[ (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right]}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\left( \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right)}{\left( \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{3} \ln|t+1| \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{6} \ln(t^2 - t + 1) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{6} \ln \frac{t^2 - t + 1}{(t+1)^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{1}{6} (\ln 1 - \ln 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

**Пример 9.10.** Решете интеграла  $I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1+x^2)^2} dx$ .

*Решение.* Несобственият интеграл е сходящ, защото

$$\left| \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{(\pi/2)^2}{x^4}.$$

Чрез субституцията  $\operatorname{arctg} x = t$ ,  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$  несобственият интеграл се свежда до риманов. При  $x = 0 \implies t = 0$ , при  $x \rightarrow \infty \implies t = \pi/2$ .

$$\begin{aligned}
 \implies I &= \int_0^{\pi/2} t^2 \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t^2 (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} t^2 \cos 2t dt = \frac{1}{6} t^3 \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} t^2 d \sin 2t \\
 &= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4} \left( t^2 \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} t \sin 2t dt \right) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} t d \cos 2t \\
 &= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4} \left( t \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt \right) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4} \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) \\
 &= \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{48} (\pi^2 - 6).
 \end{aligned}$$

**Пример 9.11.** Пресметнете  $I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ .

*Решение.* Даденият интеграл е несобствен с безкрайна граница, който е сходящ, защото

$$\left| \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Решаваме неопределения интеграл чрез интегриране по части:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int \ln x \left[ \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right] dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{x} dx \right) \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon}^A \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = - \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{2(1+A^2)} + \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{A^2}{1+A^2} \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{\ln \varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{4} \ln(1+\varepsilon^2) \right] \\ &= - \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1/A}{4A} + \frac{1}{4} \ln \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2A}{2A} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{1}{4} \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1+\varepsilon^2) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+\varepsilon^2)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon^2} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+\varepsilon^2)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\varepsilon}{-2/\varepsilon^3} = 0. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно *сходимост* интегралите:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad \text{Отг. сходящ}$$

$$2. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \quad \text{Отг. сходящ}$$

$$3. \int_1^{\infty} \frac{1+x}{\sqrt{x^3}} dx \quad \text{Отг. разходящ}$$

$$4. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{Отг. разходящ}$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx \quad \text{Отг. разходящ}$$

$$6. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-5x+6} \quad \text{Отг. сходящ}$$



7.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, a > 0$  Отг. сходящ
8.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$  Отг. сходящ
9.  $\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$  Отг. разходящ
10.  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$  Отг. разходящ
11.  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}$  Отг. разходящ
12.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^2 x}$  Отг. разходящ
13.  $\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \alpha}}, 0 < \alpha < \pi/2$  Отг. сходящ

II. Изследвайте относно *сходимост* интегралите. В случай, че са сходящи, намерете *стойността* им:

1.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  Отг. сходящ  $I = 1$
2.  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$  Отг. сходящ  $I = \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{4a^3}$
3.  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4}$  Отг. сходящ  $I = \pi/4$
4.  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$  Отг. сходящ  $I = \pi^2/8$
5.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx, a > 0$  Отг. сходящ  $I = b/(a^2 + b^2)$
6.  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  Отг. сходящ  $I = 0$

7.  $\int_{2^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$  Отг. сходящ  $I = 3\pi/4$
8.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$  Отг. сходящ  $I = 2\pi/3\sqrt{3}$
9.  $2 \int_0^{2a} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} dx$  Отг. сходящ  $I = 3\pi a^2$
10.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  Отг. сходящ  $I = 2$
11.  $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^2 x}$  Отг. разходящ
12.  $\int_{-1}^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$  Отг. сходящ  $I = \pi^2/12$
13.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$  Отг. сходящ  $I = \sqrt{3}/2$
14.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$  Отг. сходящ  $I = 2$
15.  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$  Отг. разходящ
16.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  Отг. сходящ  $I = \pi/2$
17.  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$  Отг. сходящ  $I = \sqrt{3}$

## ИНТЕГРАЛИ, ЗАВИСЕЩИ ОТ ПАРАМЕТЪР

### А. Понятие за интеграл, зависещ от параметър

Дадена е функция  $f(x, \alpha)$  на два аргумента (вж. модул 2, гл. 1) с дефиниционна област (затворена и ограничена)  $\mathcal{D} : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ x \leq \alpha \leq d, \end{cases}$   $\alpha$  – параметър.

**Дефиниция 1** Функцията

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx, \quad (10.1)$$

където  $f(x, \alpha)$  е интегрируема функция  $\forall \alpha \in [c, d]$ , се нарича **интеграл, зависещ от параметър**.

**Пример 10.1.**  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x + \alpha}, \alpha \notin [-1, 0]$ .

$$F(\alpha) = \ln|x + \alpha| \Big|_0^1 = \ln|1 + \alpha| - \ln|\alpha| = \ln \left| \frac{1 + \alpha}{\alpha} \right|.$$

**Теорема 1** Ако  $f(x, \alpha) \in C[\mathcal{D}]$ , то  $F(\alpha) \in C[c, d], \forall \alpha \in [c, d]$ .

### Б. Диференциране под знака на интеграла

**Теорема 2** Ако  $f(x, \alpha), f_\alpha(x, \alpha) \in C[\mathcal{D}]$ , то  $F(\alpha)$  е диференцируема в  $[c, d]$ , т.е.  $\exists F'(\alpha) \in C^1[c, d]$  или  $F(\alpha)$  има непрекъснатата първа производна и  $\forall \alpha \in [c, d]$  е изпълнено

$$F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx. \quad (10.2)$$

*Забележка.* Функцията  $f_\alpha(x, \alpha)$  е частна производна относно  $\alpha$  на дадената функция  $f(x, \alpha)$  на два аргумента (вж. модул 2, гл. 2).

*Практическо правило*

1°. Дадена е функцията  $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ .

$$2^\circ. \text{ Намираме } F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx = \dots = \Phi(\alpha).$$

$$3^\circ. \text{ От } \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \Phi(\alpha) \implies F(\alpha) = \int \Phi(\alpha) d\alpha + C.$$

$$4^\circ. C = ?$$

**Пример 10.2.** Чрез диференциране под знака на интеграла да се пресметне

$$I = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx, \alpha^2 < 1.$$

*Решение.* 1°. Разглеждаме дадения интеграл като функция на параметъра  $\alpha \in [-1, 1]$

$$I = F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx \implies F(0) = 0.$$

2°. Прилагаме формула (10.2)

$$F'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cos x} \cdot \cos x dx = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha \cos x}.$$

За решаване на получения интеграл полагаме  $\operatorname{tg}(x/2) = t$ ,  $x = 2\operatorname{arctgt}$ ,  
 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ . При  $x = 0 \implies t = 0$ , при  $x = \pi \implies t \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \implies F'(\alpha) &= 2 \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2) \left(1 + \alpha \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2 \int_0^\infty \frac{dt}{(1+\alpha) + (1-\alpha)t^2} \\ &= \frac{2}{1+\alpha} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + \left(t\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2}, \quad |\alpha| < 1. \end{aligned}$$

Несобственият интеграл е сходящ, защото  $\left| \frac{1}{1+\alpha + (1-\alpha)t^2} \right| \leq \frac{1/(1-\alpha)}{t^2}$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{2}{1+\alpha} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^\infty \frac{dt\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{1 + \left(t\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arctgt} \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \end{aligned}$$

3°. След интегриране по параметъра  $\alpha$  получаваме стойността на търсения интеграл:

$$I = F(\alpha) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha = \pi \arcsin \alpha + C.$$

4°. От условието имаме  $F(0) = 0$ . От получения резултат  $F(0) = \pi \arcsin 0 + C = C \implies 0 = C$ . Окончателно  $I = \pi \arcsin \alpha$ ,  $\alpha \in [-1, 1]$ .

**Теорема 3 (обобщение на T2).** Ако  $f(x, \alpha)$ ,  $f_\alpha(x, \alpha) \in C[\mathcal{D}]$  и  $u(\alpha)$ ,  $v(\alpha)$  са диференцируеми функции в  $[c, d]$ ,  $a \leq u(\alpha) \leq b$ ,  $a \leq v(\alpha) \leq b$ , то  $F(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx$  е диференцируема функция в  $[c, d]$  и

$$F'(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha) dx + f[v(\alpha), \alpha]v'(\alpha) - f[u(\alpha), \alpha]u'(\alpha). \quad (10.3)$$

**Пример 10.3.** Чрез диференциране под знака на интеграла да се пресметне

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx.$$

*Решение.* 1°. Функцията (интегралът)  $F(\alpha)$  има променлива горна граница. Ще приложим формула (10.3).

$$2^\circ. F'(\alpha) = \int_0^\alpha f_\alpha(x, \alpha) dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \alpha' = \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^2} \frac{x}{1+\alpha x} dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.$$

Разлагаме рационалната дроб под знака на интеграла в сума от елементарни дроби:

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+\alpha x}$$

$$\implies x = (Ax+B)(1+\alpha x) + C(1+x^2) \implies \begin{cases} A\alpha + C = 0 \\ A + B\alpha = 1 \\ C + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{1+\alpha^2} \\ B = \frac{1+\alpha^2}{-\alpha} \\ C = \frac{1}{1+\alpha^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^{\alpha} \frac{x dx}{(1+x^2)(1+\alpha x)} &= \int_0^{\alpha} \left[ \frac{1}{1+\alpha^2} \frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \frac{1}{1+\alpha x} \right] dx \\
&= \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \int_0^{\alpha} \frac{x dx}{1+x^2} + \alpha \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{\alpha} \frac{d(1+\alpha x)}{1+\alpha x} \right) \\
&= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \alpha \operatorname{arctg} x - \ln|1+\alpha x| \right] \Big|_0^{\alpha} \\
&= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2) + \alpha \operatorname{arctg} \alpha - \ln(1+\alpha^2) \right] \\
&= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ \alpha \operatorname{arctg} \alpha - \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^{\circ}. F'(\alpha) &= \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha - \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \ln(1+\alpha^2) + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \\
&= \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha + \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \ln(1+\alpha^2).
\end{aligned}$$

4°. Интегрираме по  $\alpha$  и получаваме:

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\alpha^2} \ln(1+\alpha^2) d\alpha + C \\
&= \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \int \ln(1+\alpha^2) d\operatorname{arctg} \alpha + C \\
&= \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2) \operatorname{arctg} \alpha - \frac{1}{2} \int \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha d\alpha + C \\
&= \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2) \operatorname{arctg} \alpha + C.
\end{aligned}$$

5°. От условието имаме  $F(0) = 0$ . Тогава

$$0 = \frac{1}{2} \ln 1 \cdot \operatorname{arctg} 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

И така,  $F(\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha \ln(1+\alpha^2)$ .

### В. Интегриране под знака на интеграла

**Теорема 4** (формула за смяна реда на интегриране). Ако  $f(x, \alpha) \in C[\mathcal{D}]$ , то  $F(\alpha) \in \mathcal{R}[c, d]$ ,  $\forall \alpha \in [c, d]$  и е в сила равенството:

$$\int_c^d F(\alpha) d\alpha = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, \alpha) d\alpha \right] dx. \quad (10.4)$$

**Пример 10.4.** Да се пресметне  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ,  $0 < a < b$ .

*Решение.* Разглеждаме функцията  $f(x, y) = x^y$  в правоъгълника  $\{[0, 1], [a, b]\}$ . Функцията е непрекъсната в разглеждания правоъгълник. Следователно интегрирането под знака на интеграла е възможно. Тогава

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \int_0^1 x^y dx \right] dy &= \int_0^1 \left[ \int_a^b x^y dy \right] dx \iff \int_a^b \left[ \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^y}{\ln x} \Big|_a^b \right] dx \\ \iff \int_a^b \frac{dy}{y+1} &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \implies \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln(y+1) \Big|_a^b = \ln \frac{1+b}{1+a} \\ &\implies \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{1+b}{1+a}. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ

I. Решете следните интегрални чрез диференциране по параметъра под знака на интеграла:

- $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $\alpha \geq 0$  Отг.  $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{\alpha})$
- $\int_0^{\pi/2} \ln \left( \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \right) \frac{1}{\cos x} dx$ ,  $\alpha < 1$  Отг.  $\pi \arcsin \alpha$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \sin x - \operatorname{arctg}(\alpha \sin x)}{\sin^3 x} dx$  Отг.  $\frac{\pi}{4}(\alpha\sqrt{1+\alpha^2} - \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}))$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \cos^2 x - \ln(1 + \alpha \cos^2 x)}{\cos^4 x} dx$ ,  $\alpha > -1$  Отг.  $\frac{\pi}{3}[\sqrt{(1+\alpha)^3} - 3\sqrt{1+\alpha} + 2]$
- $\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $\alpha^2 < 1$  Отг.  $\pi(\sqrt{1-\alpha^2} - 1)$
- $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$  Отг.  $\frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})$
- $\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{(1 + \alpha \cos x)^2}$ ,  $|\alpha| < 1$  Отг.  $-\frac{\pi\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$

$$8. \int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x) dx, \alpha > 0 \quad \text{Отг. } \pi \ln \frac{\alpha + 1}{2}$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx, \alpha > 1 \quad \text{Отг. } \pi \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}$$

$$10. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx, |\alpha| > 1 \quad \text{Отг. } 2\pi \ln |\alpha|$$

II. Намерете производните на функциите:

$$1. F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2} dx \quad \text{Отг. } 2\alpha e^{-\alpha^5} - e^{-\alpha^3} - \int_{\alpha}^{\alpha^2} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

$$2. F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x} dx \quad \text{Отг. } \frac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2)$$



## НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ, ЗАВИСЕЩИ ОТ ПАРАМЕТЪР. ГАМА ФУНКЦИЯ

---

### А. Понятие за несобствен интеграл, зависещ от параметър. Сходимост

Дадена е функция  $f(x, \alpha)$ , дефинирана в област  $\mathcal{D}_\infty : \begin{cases} a \leq x \leq +\infty \\ c \leq \alpha \leq d, \end{cases}$   $\alpha$  – параметър.

**Дефиниция 1** *Функцията*

$$F(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx, \quad (11.1)$$

където  $f(x, \alpha)$  е интегрируема функция  $\forall \alpha \in [c, d]$ , т.е.  $f(x, \alpha) \in \mathcal{R}[c, d]$ , се нарича **несобствен интеграл, зависещ от параметър**.

**Дефиниция 2**  $F(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$  е **сходящ** в интервала  $[c, d]$ , ако  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\exists N_0(\varepsilon, \alpha) \text{ така, че } \forall N > N_0 \implies \left| F(\alpha) - \int_a^N f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

**Дефиниция 3**  $F(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$  е **абсолютно сходящ**, ако е сходящ интег-

ралът  $\int_a^\infty |f(x, \alpha)| dx$ .

### Б. Равномернаходимост. Свойства. Критерий на Ваерщрас

**Дефиниция 4**  $F(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$  е **равномерно сходящ** в интервала  $[c, d]$ , ако  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N_0(\varepsilon)$ , но не зависи от  $\alpha$  така, че  $\forall N > N_0 \implies$

$$\left| F(\alpha) - \int_a^N f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

**Критерий на Ваерцрас.** Ако  $\exists g(x) \geq 0, x \in [a, +\infty), |f(x, \alpha)| \leq g(x),$   
 $\forall x \in [a, +\infty), \forall \alpha \in [c, d]$  и  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  е сходящ, то  $F(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx$  е  
 равномерно и абсолютно сходящ  $\forall \alpha \in [c, d]$ .

*Свойства на несобствен интеграл*

1°. (За непрекъснатост на  $F(\alpha)$ ). Ако  $f(x, \alpha) \in C(\mathcal{D}_{\infty})$  и  $F(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx$   
 е равномерно сходящ в интервала  $[c, d]$ , то  $F(\alpha) \in C[c, d]$ .

2°. (За интегрируемост на  $F(\alpha)$ ). Ако  $f(x, \alpha) \in C(\mathcal{D}_{\infty})$  и  $F(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx$   
 е равномерно сходящ в интервала  $[c, d]$ , то  $F(\alpha) \in \mathcal{R}[c, d]$  и

$$\int_c^d F(\alpha) d\alpha = \int_c^d \left[ \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_a^{\infty} \left[ \int_c^d f(x, \alpha) d\alpha \right] dx.$$

3°. (За диференцируемост на  $F(\alpha)$ ). Ако  $f(x, \alpha) \in C(\mathcal{D}_{\infty})$  и  $F(\alpha) =$   
 $\int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx$  е сходящ в интервала  $[c, d]$  и  $\int_a^{\infty} f_{\alpha}(x, \alpha) dx$  е равномер-  
 но сходящ в интервала  $[c, d]$ , то  $F(\alpha)$  е диференцируема  $\forall \alpha \in [c, d]$  и  
 $F'(\alpha) = \int_a^{\infty} f_{\alpha}(x, \alpha) dx.$

Всичко казано до тук важи и за несобствен интеграл от неограничена функция.

### В. Гама функция – дефиниция, свойства, графика

**Дефиниция 5** Несобственият интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (11.2)$$

се нарича гама функция.

Ако  $\alpha < 1$ , то подинтегралната функция е неограничена и тогава

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

т.е.  $\Gamma(\alpha)$  ще има смисъл, ако всеки от двата интеграла има смисъл.

Свойства на  $\Gamma(\alpha)$

1.  $\Gamma(\alpha)$  е равномерно сходящ и тогава  $\Gamma(\alpha)$  е непрекъсната и диференцируема функция при  $\alpha > 0$ , т.е.  $\mathcal{D} : x \in (0, +\infty)$ .

2.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ;  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3.  $\Gamma'(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \ln x e^{-x} dx$ ,  $\Gamma''(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \ln^2 x e^{-x} dx > 0$ ,

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$  и тогава  $\Gamma(\alpha)$  има минимум в точката  $(\alpha_0, \Gamma(\alpha_0))$ ,  $\alpha_0 \in (1, 2)$  (теорема на Рол).

4.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Gamma(\alpha) = +\infty$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Gamma(\alpha) = +\infty$ .

5.  $y = kx + n$ ,  $k = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)}{\alpha}$   
 $= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Gamma(\alpha - 1) = \infty$ , т.е. няма наклонени асимптоти.

**Пример 11.1.** Изследвайте относно равномерна сходимост  $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ .

*Решение.*  $|f(x, \alpha)| = \left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x) \geq 0$ . Образуваме

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\arctg x) \Big|_0^{\beta} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т.е.  $I$  е сходящ и тогава според критерия на Ваершрас  $F(\alpha)$  е равномерно сходящ  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Пример 11.2.** (Интеграл на Поасон). Решете  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

*Решение.* Полагаме  $x = \alpha t$  ( $\alpha > 0$  - параметър),  $dx = \alpha dt$ ,  $\frac{x}{0} \Big|_0^t$ . Тогава

$$I = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2} dt \Big| \cdot e^{-\alpha^2} \Rightarrow I e^{-\alpha^2} = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt$$

и след като интегрираме по  $\alpha$  в интервала  $(0, +\infty)$ , получаваме

$$\begin{aligned} I \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha &= I^2 = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \right] d\alpha = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2(1+t^2)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2(1+t^2)} d[\alpha^2(1+t^2)] \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\arctgt) \Big|_0^{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{От } I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*Забележка.*  $\int_0^{\infty} e^{-u} du = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} e^{-u} du = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} (e^{-u}) \Big|_0^{\beta} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} (e^{-\beta} - e^0) = -(0 - 1) = 1.$

**Пример 11.3.** Чрез диференциране под знака на интеграла да се пресметне

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\arctg \alpha x}{x(1+x^2)} dx.$$

*Решение.*

$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} f_{\alpha}(x, \alpha) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} \cdot \frac{x}{1+\alpha^2 x^2} dx$$

$$\text{От } \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+\alpha^2 x^2}$$

$$\Rightarrow 1 = (A\alpha^2 + C)x^3 + (B\alpha^2 + D)x^2 + (A+C)x + (B+D)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\alpha^2 + C = 0 \\ B\alpha^2 + D = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} \Rightarrow A = C = 0, \quad B = \frac{1}{1 - \alpha^2}, \quad D = \frac{-\alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

Тогава

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{1}{1 + x^2} - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} \right) dx \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} \operatorname{arctg} x - \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \operatorname{arctg}(\alpha x) \right) \Big|_0^{\beta} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(1 + \alpha)}. \end{aligned}$$

След като интегрираме  $F'(\alpha)$  по  $\alpha$ , получаваме

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int \frac{d\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\pi}{2} \ln |1 + \alpha| + C.$$

От условието  $F(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2} \ln 1 + c \Rightarrow C = 0$ . Тогава

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln |1 + \alpha|.$$

**Пример 11.4.** Пресметнете  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  (интеграл на Дирихле).

*Решение.* Разглеждаме интеграла  $F(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$  и помощната функция  $F(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ ,  $\alpha \geq 0$ . Интегралът  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin \beta x}{x} dx$  е равномерно сходящ. Диференцираме по  $\beta$ :

$$F'_{\beta}(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\alpha > 0).$$

След интегриране по  $\beta$ :

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} d\beta = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha). \\ F(\alpha, 0) &= 0 \Rightarrow C(0) = 0 \Rightarrow F(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{При } \beta = 1 \Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 11.5.** Чрез интегриране и диференциране под знака на несобствения интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$  пресметнете

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}.$$

*Решение.* а) Даденият интеграл е равномерно сходящ, тъй като  $\frac{1}{x^2 + \alpha^2} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $\alpha > 1$ . От сходимостта му следва, че  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

Интегрираме по  $\alpha$  в граници от 1 до  $y$  равенството  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \int_1^y \left[ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} \right] d\alpha &= \int_0^{\infty} \left[ \int_1^y \frac{d\alpha}{x^2 + \alpha^2} \right] dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx = \int_1^y \frac{\pi}{2\alpha} d\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} \ln y \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln y. \end{aligned}$$

б) Диференцираме дадения интеграл по  $\alpha$ :

$$\left( \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} \right)'_{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{-2\alpha}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx.$$

Полученият интеграл е равномерно сходящ относно  $\alpha > 1$ , защото

$$\begin{aligned} \left| \frac{-2S}{(x^2 + \alpha^2)^2} \right| &\leq \frac{2C}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{е сходящ} \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{-2\alpha}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx &= -\frac{\pi}{2\alpha^2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^2}. \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно сходимост интегралите:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2}$  Отг. равномерно сходящ  $\forall \alpha$

б)  $\int_1^{\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx$  Отг. равномерно сходящ  $\forall \alpha$

в)  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^\beta} dx, 0 < \beta < 1$  Отг. равномерно сходящ  $\forall \alpha \geq 0$

2. Чрез интегриране и диференциране под знака на интеграла  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin \alpha x dx$  пресметнете

а)  $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} dx$  Отг.  $\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha^2)$

б)  $\int_0^{\infty} x e^{-x} \cos \alpha x dx$  Отг.  $\frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}$

3. Пресметнете  $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos \alpha x dx, \alpha > 0$  Отг.  $\ln \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha}$

4. Пресметнете  $\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$  Отг.  $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

5. Изчислете интегралите на Лаплас

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx$  Отг.  $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$

б)  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx$  Отг.  $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha e^{-|\alpha|}$

6. Изчислете интегралите на Френел:

а)  $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$  Отг.  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

б)  $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$  Отг.  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

\*\*\*

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 2, София, Техника, 1977.
2. *Шополов Н., Бончев Е.*, Математически анализ I част, София, ТУ, 1990.
3. *Шмелев П.*, Теория рядов, Москва, Висшая школа, 1983.
4. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ – Втора част, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
5. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ – Първа част, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
6. *Берман Г.Н.*, Сборник задач по курсу математического анализа, Москва, “Наука”, 1985.
7. *Манолов С., Шополов Н. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика – втора част, София, Техника, 1979.
8. *Божоров Е. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика – втора част, София, Техника, 1979.