

**ДИФЕРЕНЦИАЛНО И  
ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА  
ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО  
ПРОМЕНЛИВИ**

В настоящото пособие са разгледани основните понятия на математическия анализ за функции на няколко независими променливи: непрекъснатост, частни производни, развитие на функциите в ред на Тейлор, локални екстремуми, кратни интеграли и приложенията им.

Използвана литература:

- Дойчинов: Математически анализ в евклидови пространства
- Илин, Садовничий, Сендов: Курс по математически анализ, том 2
- Зорич: Математически анализ, том 1 и 2
- Рудин, Основи на математическия анализ
- Фихтенголц, Курс по диференциално и интегрално смятане, том 3

# Глава 1

## Диференциално смятане на функции на няколко променливи

### 1.1 Криволинейни интеграли от първи вид

#### Параметрично зададени криви.

Тук ще повторим някои дефиниции от параграфи 2.12 и 4.4 на част I.

**Дефиниция.** *Казваме, че множеството от точки  $\Gamma$  в равнината е параметрично зададена крива, ако са дадени две функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ , дефинирани в интервала  $\Delta$ , така че всяка точка  $(x, y) \in G$  се представя във вида*

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

за някое  $t \in \Delta$ .

Двойката функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  ще наричаме параметрично представяне на  $\Gamma$ . Ако се условим да означаваме с  $\vec{P} = (x, y)$  радиус-вектора на произволна точка от равнината, то горните две скаларни равенства могат да бъдат записани като едно векторно равенство

$$\vec{P} = \vec{P}(t), \quad t \in \Delta,$$

където сме означили  $\vec{P}(t) = (x(t), y(t))$ .

По-нататък ще видим, че всяка параметрично зададена крива притежава безкрайно много параметрични представяния. Един от основните проблеми е да се въведат понятия, независими от параметричното представяне на кривата. Засега обаче ще предполагаме, че заедно с всяка разглеждана крива е зададено и едно фиксирано параметрично представяне. Това ни дава възможност да дадем следните дефиниции:

**Дефиниция.** Кривата  $\Gamma$  ще наричаме:

- непрекъсната, ако функциите  $x(t)$ ,  $y(t)$  са непрекъснати.
- $n$ -кратно гладка, ако  $x(t)$  и  $y(t)$  са  $n$ -кратно гладки, т.е. притежават непрекъснати производни до ред  $n$  включително.
- проста (незатворена), ако на различни стойности на  $t$  съответствуват различни точки  $(x(t), y(t))$  от равнината.
- проста затворена, ако функциите  $x(t)$  и  $y(t)$  вземат еднакви стойности в двата края  $a$  и  $b$  на дефиниционния интервал  $\Delta = [a, b]$ , но на всяка друга двойка стойности на параметъра  $t_1, t_2 \in D$  съответствуват различни точки от равнината.

Същата дефиниция е в сила и за криви в тримерното пространство, или, по-общо, в  $\mathbb{R}^n$ , с единствената разлика, че параметричните функции са три (или съответно  $n$ ) на брой.

Примери на параметрично зададени криви в равнината могат да бъдат видяни в §2.12 на част I.

Ще отбележим, че графиките на функциите също могат да бъдат разглеждани като параметрично зададени криви. Наистина, ако функцията  $f(x)$  е зададена в интервала  $[a, b]$ , то нейната графика може да бъде параметрично представена чрез уравненията:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Понякога ще казваме, че такива криви са *явно зададени*.

**Забележка.** В приложенията често се разглеждат т.нар. частично гладки криви. Това означава, че дефиниционната област  $[a, b]$  може да се раздели на краен брой подинтервали, във вътрешността на всеки от които кривата е гладка, и в делящите точки производните на параметричните функции притежават граници отляво и отдясно.

**Регулярни криви.** Важно е да се види, че гладкостта на параметризиращите функции  $x(t)$  и  $y(t)$  не е достатъчна, за да бъде кривата гладка в обичайния смисъл на думата. Наистина, да разгледаме кривата с уравнения

$$x = t^2 \operatorname{sign} t, \quad y = t^2, \quad t \in [-1, 1].$$

Въпреки, че параметричните функции притежават непрекъснати първи производни, тангента при  $t = 0$  не съществува (в същност кривата съвпада с графиката на функцията  $y = |x|$ ). Още по-лошо е положението с кривата, зададена с уравненията  $x = t^3$   $y = t^2$ ,  $t \in [-1, 1]$ .<sup>\*</sup> Това налага да се постави и допълнително условие върху параметричните уравнения:

**Дефиниция.** Кривата  $\Gamma$  ще наричаме регулярна, ако тя е поне еднократно гладка и навсякъде в  $D$  е изпълнено неравенството:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0,$$

т.е. производните на  $x(t)$  и  $y(t)$  не се анулират едновременно.

Както ще видим малко по-нататък, регулярните криви притежават допирателни прави във всяка своя точка, т.е. отговарят на интуитивната представа за гладка крива.

Точките, в които горните две производни се анулират едновременно, се наричат особени точки на кривата.

Явно зададените криви винаги са регулярни: ако  $f(x)$  притежава непрекъснати производни до ред  $n$ , то нейната графика е  $n$ -кратно гладка и регулярна (проверете!).

**Връзка между различните параметрични представяния на дадена крива.**

Ако разглеждаме кривата като множество от точки в равнината, то очевидно то може да се получи чрез различни параметрични представяния. Те дори са безкраино много, защото от дадено представяне можем да получим много други чрез смена на параметъра. По-точно, изпълнено е следното очевидно твърдение:

---

<sup>\*</sup>За първата крива се казва, че в нулата притежава "ъглова точка", а за втората – "рогова точка".

**Твърдение 1.** Нека  $\Gamma$  е регулярна и проста параметрично зададена крива с уравнения

$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b].$$

Нека  $t(\tau)$  е гладка функция, изпращаща интервала  $[\alpha, \beta]$  в интервала  $[a, b]$ , като навсякъде имаме  $t'(\tau) \neq 0^*$ . Тогава уравненията

$$x = x(t(\tau)), y = y(t(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$$

също дават регулярно параметрично представяне на кривата  $\Gamma$ .

По-интересно за нас е, че и обратното твърдение също е изпълнено:

**Теорема 2.** Нека дадена крива  $\Gamma$  притежава две различни регулярни параметрични представяния:

$$\vec{P} = \vec{P}(t) : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$

$$\vec{P} = \vec{P}(\tau) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), \tau \in [\alpha, \beta].$$

Тогава те се получават едно от друго чрез смяна на параметъра. По-точно, съществува еднозначно определена гладка функция  $t(\tau) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ , такава че навсякъде  $t'(\tau) \neq 0$ , и са изпълнени равенствата

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)), \tilde{y}(\tau) = y(t(\tau)).$$

**Доказателство.** Първо ще докажем твърдението локално. Нека  $\vec{P}_0 = \vec{P}(t_0) = \vec{P}(\tau_0)$  е точка от  $\Gamma$ . Поради регулярността поне една от производните  $x'(t_0)$ ,  $y'(t_0)$  не се анулира; нека например  $x'(t_0) \neq 0$ . Тогава по теоремата за обратната функция (т. 2 от §2.2, част I) около  $t_0$  функцията  $x(t)$  притежава диференцируема обратна  $t = t(x)$ , дефинирана в околност на  $x(t_0)$ . Тогава функцията

$$t(\tau) = t(\tilde{x}(\tau)),$$

дефинирана в околност на  $\tau_0$ , удовлетворява изискванията на теоремата. Лесно се вижда, че тези изисквания определят  $t(\tau)$  еднозначно.

---

\* Оттук веднага следва, че функцията е строго монотонна и дава взаимно еднозначно съответствие между интервалите  $[\alpha, \beta]$  и  $[a, b]$ .

За да дефинираме функцията  $t(\tau)$  върху целия интервал  $[\alpha, \beta]$ , е достатъчно да го разделим на достатъчно малки подинтервали, да приложим във всеки от тях локалното твърдение, и да отбележим, че поради единствеността така дефинираните локално определени функции се сглобяват в една глобално определена. ■

**Посока върху крива.** Интуитивно, всяка параметризация на дадена крива определя посока върху нея, определена от посоката на нарастване на параметъра. Ще формализираме тази представа. Нека е дадена кривата  $\Gamma$  заедно с параметричното си представяне  $\vec{P} = \vec{P}(t)$ . Тогава върху точките от  $\Gamma$  е определена наредба. Нека са дадени точките  $\vec{P}_1, \vec{P}_2 \in \Gamma$ , като  $\vec{P}_1 = \vec{P}(t_1)$ ,  $\vec{P}_2 = \vec{P}(t_2)$ . Ще казваме, че  $\vec{P}_2$  следва  $\vec{P}_1$  (записваме  $\vec{P}_1 \prec \vec{P}_2$ ), ако  $t_1 \leq t_2$ . Такава наредба ще наричаме посока върху  $\Gamma$ .

Ще видим как наредбата се променя в зависимост от избраното параметрично представяне. Нека е дадено друго регулярно параметрично представяне  $\vec{P} = \vec{P}(t)$  на  $\Gamma$ , и нека  $\tilde{P}(\tau) = \vec{P}(t(\tau))$ . Тъй като  $t'(\tau) \neq 0$ , то знакът на  $t'(\tau)$  може да е или навсякъде плюс, или навсякъде минус. Следователно  $t(\tau)$  трябва да бъде строго монотонно растяща или строго монотонно намаляваща. Ако тя е растяща, наредбите, определени от двете параметрични представяния, съвпадат; в такъв случай ще казваме, че представянията  $\vec{P} = \vec{P}(t)$  и  $\tilde{P} = \tilde{P}(\tau)$  са еднакво ориентирани. Ако  $t(\tau)$  е монотонно намаляваща, наредбите, определени от представянията, са противоположни една на друга; в такъв случай казваме, че представянията са противно ориентирани. Накратко от горните разсъждения получаваме:

**Твърдение 3.** *Върху всяка параметрично зададена крива съществуват точно две посоки, като едната е противоположна на другата.*

**Дефиниция.** *Под ориентирана крива ще разбираме кривата като геометричен обект, заедно с една избрана върху нея посока. Казано формално, разглеждаме кривата заедно с даден клас от еднакво ориентирани нейни параметрични представяния.*

**Допирателна към параметрично зададена крива.**

Нека  $P_0$  и  $P$  са две точки от кривата  $\Gamma$ . Определената от тях права ще наричаме секуща за  $\Gamma$  ще бележим с  $l_{P_0, P}$ . Ще определим допирателната права в дадена точка като гранично положение на секущите:

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е параметрично зададена крива и  $P_0 \in \Gamma$ . Ще казваме, че правата  $l$  е допирателна, или тангентата, към  $\Gamma$  в  $P_0$ , ако тя е граница на секущите  $l_{P_0, P_n}$  за всяка редица  $\{P_n\}$  от точки, лежащи върху  $\Gamma$  и клонящи към  $P_0$ .

Ясно е, че графиката на функцията  $f(x) = |x|$ , разгледана по-горе, не притежава допирателна в началото на координатите, макар че може да бъде гладко параметризирана. Ако поискаме обаче освен гладкостта и регулярност, то допирателната съществува, както се вижда от следната теорема:

**Теорема 4.** Нека  $\vec{P}_0 = \vec{P}(t_0)$  е точка от кривата  $\Gamma$ , производните  $x'(t_0)$  и  $y'(t_0)$  съществуват и поне едната от тях не е нула. Тогава допирателната в  $P_0$  съществува и е колинеарна с вектора

$$\vec{l}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

**Доказателство.** Нека  $t_n$  е редица от стойности на параметъра  $t$ , клоняща към  $t_0$ , и  $\vec{P}_n = \vec{P}(t_n)$ . Векторът  $P_0\vec{P}_n = \vec{P}_n - \vec{P}_0$  е колинеарен със секущата  $l_{P_0, P_n}$ . Редицата от тези вектори клони към нулевия вектор и следователно е безполезна за определянето на границата секущите. Ако обаче вместо тях разгледаме пропорционалните на тях вектори

$$\frac{1}{t_n - t_0} P_0\vec{P}_n = \left( \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{y(t_n) - y(t_0)}{t_n - t_0} \right),$$

виждаме, че границата съществува и съвпада с вектора  $\vec{l}(t_0)$ . Следователно, границата на секущите съществува и съвпада с правата, минаваща през точката  $\vec{P}_0$  и колинеарна с вектора  $\vec{l}(t_0)$ . ■

**Забележка.** По дефиниция допирателната права не зависи от избраното параметрично представяне на кривата. За допирателния вектор  $\vec{l}(t)$  това не е вярно; при избор на различни параметрични представяния съответните допирателни вектори обаче са колинеарни един на друг, т.е. единият може да бъде получен от другия чрез умножение с числова функция.\*

---

\*Това лесно се вижда непосредствено като следствие от теорема 2.



Донякъде зависимостта от параметричното представяне може да бъде избягната, ако вместо  $\vec{l}(t)$  разгледаме *единичния допирателен вектор*  $\vec{e}(t)$  :

$$\vec{e}(t) = \frac{\vec{l}(t)}{|\vec{l}(t)|} = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

От горните разсъждения следва:

**Твърдение 5.** *Единичният допирателен вектор  $\vec{e}(t)$  не зависи от параметричното представяне на кривата, а само от посоката, която то определя.*

Лесно се вижда, че ако изберем друго параметрично представяне на кривата, задаващо противоположна посока, единичният допирателен вектор  $\vec{e}(t)$  се заменя с противоположния вектор  $-\vec{e}(t)$ .

От значение е и *единичният нормален вектор*  $\vec{n}(t)$ , получен от  $\vec{e}(t)$  чрез завъртане на ъгъл  $\pi/2$  срещу часовниковата стрелка:

$$\vec{n}(t) = \left( -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

**Дължина на крива.** За удобство тук ще повторим дефиницията и формулата за пресмятане на дължината на крива, дадени в §4.4 на част I. Нека е дадена параметрично зададената крива  $\Gamma$  с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ , и нека  $\prec$  е наредбата, определена от параметричното представяне и задаваща посоката на  $\Gamma$ . Ще казваме, че е зададено разбиване  $\tau$  на  $\Gamma$ , ако за дадени краен брой точки  $P_0, \dots, P_n \in \Gamma$ , така че  $P_0 = A$ ,  $P_n = B$ , и  $P_0 \prec \dots \prec P_n$ . Да означим

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n} |P_{i-1}P_i|.$$

Под  $L_\tau$  ще разбираме начупената линия, съставена от отсечките  $\overline{P_{i-1}P_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (точките  $P_i$  се наричат възли на начупената). В такъв случай ще казваме също, че начупената линия  $L_\tau$  е вписана в  $\Gamma$ .

Лесно се вижда, че понятието "вписана начупена линия" не зависи от избора на наредбата. Наистина, за да получим начупената линия,

всеки от тези възли трябва да свържем с отсечки с двата възела, които са му съседни според дадената наредба. Ако сменим тази наредба с противоположната, съседни на дадената точка ще бъдат същите две точки, както и преди това.

**Дефиниция 1.** *Дължина на дадена крива ще наричаме точната горна граница на дължините на вписаните в нея начупени линии.*

Кривата се нарича *ректифицируема*, ако дължината и е крайна, т.е. дължините на всички вписани в нея начупени линии са ограничени отгоре. Пример на неректифицируема непрекъсната крива ни дава графиката на функцията  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  в интервала  $[0, 1]$  (допълнена с условието  $f(0) = 0$ ).

**Дефиниция 2.** *Дължина на дадена крива наричаме границата на дължините на начупените линии  $L_\tau$ , когато  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .*

**Теорема 6.** *Двете дефиниции са еквивалентни. По-точно, всяка крива, която притежава дължина по първата дефиниция, притежава такава и по втората, като двете дължини съвпадат.*

Доказателството може да се види в §4.4 на част I.

### Пресмятане на дължината на гладка крива.

**Теорема 7.** *Нека кривата  $\Gamma$  е еднократно гладка, т.е. притежава координатно представяне*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b],$$

в което функциите  $x(t)$  и  $y(t)$  са диференцируеми и имат непрекъснати производни. Тогава за дължината на кривата  $\Gamma$  е в сила формулата

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

**Доказателство.** Ще използваме втората дефиниция. Нека  $\tau$  е разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n$ , като  $P_i = \vec{P}(t_i)$ , и нека  $L_\tau$  е съответната начупена линия. Тогава за нейната дължина  $l(L_\tau)$  получаваме

$$l(L_\tau) = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Използвайки теоремата за крайните нараствания, можем да запишем този израз във вида

$$\begin{aligned} l(L_\tau) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

където  $\xi_i$  и  $\tilde{\xi}_i$  са подходящи точки от интервала  $(t_{i-1}, t_i)$ .

Можем да забележим, че горният израз наподобява риманова сума за съответния интеграл. Единственото различие се състои в това, че в горната сума фигурират две различни междинни точки  $\xi_i$  и  $\tilde{\xi}_i$ . Ще видим, че това различие не е съществено. Наистина, да разгледаме римановата сума

$$R_\tau = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1}),$$

съответстваща на разбиването  $\tilde{\tau} : a = t_0 < \dots < t_n = b$  и междинните точки  $\xi_i$ . Ясно е, че  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  точно тогава, когато  $\text{diam } \tilde{\tau} \rightarrow 0$ .

Ще покажем, че

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} (R_\tau - l(L_\tau)) = 0.$$

За да оценим разликата между  $l(L_\tau)$  и  $R_\tau$ , ще използваме неравенството

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \tilde{b}^2} \right| = \left| \frac{b + \tilde{b}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + \tilde{b}^2}} (b - \tilde{b}) \right| \leq |b - \tilde{b}|.$$

Прилагайки това неравенство почленно, получаваме

$$|R_\tau - l(L_\tau)| \leq \sum_{i=1}^n |y'(\xi_i) - y'(\tilde{\xi}_i)| (t_i - t_{i-1}).$$

Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Да изберем  $\delta > 0$  такава, че от  $|t' - t''| < \delta$ ,  $t', t'' \in [a, b]$  да следва  $|y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon$ . Тогава, ако

$\text{diam } \tilde{\tau} = \max(t_i - t_{i-1}) < \delta$ , ще имаме  $|R_\tau - l(L_\tau)| < \varepsilon(b - a)$ , т.е. разликата  $R_\tau - l(L_\tau)$  може да бъде направена произволно малка.

Тъй като  $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  е граница на римановите суми  $R_\tau$  при  $\text{diam } \tilde{\tau} \rightarrow 0$ , същото е вярно и за дължините на начупените  $l(L_\tau)$ . ■

**Криволинеен интеграл от първи вид.** Ще започнем с механичната задача за маса на материална крива. По-точно, нека  $\Gamma$  е параметрично зададена крива (в равнината или пространството), и нека за точките  $P \in \Gamma$  е зададена неотрицателната функция  $f(P)$ , играеща ролята на *линейна плътност*. Ако си представим например тел с променлива дебелина и материален състав, извита по формата на  $\Gamma$ , линейната плътност  $f(P)$  е отношението на масата към дължината за малка дъга от кривата, съдържаща точката  $P$ :

$$f(P) \approx \frac{m(\Delta\Gamma)}{l(\Delta\Gamma)},$$

където  $\Delta\Gamma$  е такава дъга,  $m(\Delta\Gamma)$  е нейната маса, а  $l(\Delta\Gamma)$  – нейната дължина.

Същото понятие може да се дефинира и по-точно. Ако  $P_1$  и  $P_2$  са точки от кривата, а  $P_0$  се намира между тях (т.е.  $P_1 \prec P_0 \prec P_2$  относно някоя наредба), а с  $\Gamma_{P_1 P_2}$  означим дъгата, съставена от всички точки, лежащи между  $P_1$  и  $P_2$ , то

$$f(P_0) = \lim_{P_1, P_2 \rightarrow P_0} \frac{m(\Gamma_{P_1 P_2})}{l(\Gamma_{P_1 P_2})}.$$

Да се опитаме сега да пресметнем масата на цялата крива  $\Gamma$ . Нека  $\tau$  е разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n \in \Gamma$  (т.е.  $P_0$  съвпада с началната точка на кривата,  $P_n$  – с крайната, и  $P_0 \prec \dots \prec P_n$ ). Да означим с  $\Gamma_i$  дъгата, състояща се от точките между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ , и нека  $Q_i$  е произволна точка от тази дъга. Имайки пред вид равенството

$f(Q_i) \approx \frac{m(\Gamma_i)}{l(\Gamma_i)}$ , получаваме за масата  $m(\Gamma)$  приблизителния израз

$$m(\Gamma) = \sum_{i=1}^n m(\Gamma_i) \approx \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot l(\Gamma_i).$$

Ясно е, че колкото по-ситно е разбиването  $\tau$ , толкова по-точна е горната формула, и затова е естествено да получим масата на материалната крива като граница на израза отдясно при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е параметрично зададена крива с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ . Ще казваме, че  $\tau$  е разбиване на  $\Gamma$ , ако са зададени точките  $P_0, \dots, P_n$ , като  $P_0 = A$ ,  $P_n = B$ , и  $P_0 \prec \dots \prec P_n$  (ще ги наричаме делящи точки, и по една точка  $Q_i \in \Gamma_i$ , лежаща в дъгата  $\Gamma_i$ , ограничена от точките  $P_{i-1}$  и  $P_i$  (ще ги наричаме междинни точки). Диаметър на разбиването  $\tau$  ще наричаме израза

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n} |P_{i-1}P_i|.$$

**Дефиниция.** Нека  $\tau$  е разбиване на ректифицируемата крива  $\Gamma$ , и  $f(P)$  е функцията, дефинирана върху  $\Gamma$ . Под риманова сума за  $f$ , съответстваща на разбиването  $\tau$ , разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot l(\Gamma_i).$$

Ще отбележим, че дефиницията на разбиване, а следователно и следващата дефиниция, не зависят от избора на посока върху параметрично зададената крива.

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е ректифицируема параметрично зададена крива, и  $f(P)$  е функцията върху  $\Gamma$ . Под криволинеен интеграл от първи вид от функцията  $f$  върху кривата  $\Gamma$  ще разбираме числото

$$\int_{\Gamma} f(P) dl = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(f).$$

Ще казваме, че  $f(P)$  е интегрируема върху  $\Gamma$ , ако горната граница съществува.

Във всички важни за нас случаи горната граница съществува, както се вижда от следното твърдение:

**Теорема 8.** Нека  $\Gamma$  е непрекъсната и ректифицируема параметрично зададена крива, и  $f(P)$  е непрекъсната функция върху  $\Gamma$ . Тогава  $f(P)$  е интегрируема върху  $\Gamma$ .

Тук няма да доказваме горната теорема в пълната и общност. За нас е достатъчно да разгледаме случая на еднократно гладка крива:

**Теорема 9.** Нека  $\Gamma$  е еднократно гладка крива, зададена с параметричните уравнения

$$\vec{P} = \vec{P}(t) : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$

и нека  $f(P)$  е непрекъсната функция върху  $\Gamma$ . Тогава  $f(P)$  е интегрируема върху  $\Gamma$ , и е валидна формулата

$$\int_{\Gamma} f(P) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Формално, можем да запомним равенството

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

**Доказателство.** Нека  $\tau$ , както по-горе, е разбиване на  $\Gamma$ , като  $P_i = \vec{P}(t_i)$ ,  $Q_i = \vec{P}(\xi_i)$ . Тогава дялящите точки  $t_0, \dots, t_n$  и междинните точки  $\xi_1, \dots, \xi_n$  образуват разбиване на интервала  $[a, b]$ . За дължините на дъгите  $\Gamma_i$  използвайки формулата за дължина на крива и теоремата за средните стойности за интегралите, получаваме

$$l(\Gamma_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}),$$

където  $\tilde{\xi}_i$  е подходяща точка в интервала  $(t_{i-1}, t_i)$ .

Тогава

$$\begin{aligned} R_{\tau}(f) &= \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot l(\Gamma_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i)) \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

И тук сме в ситуация, подобна на срещнатата в доказателството на теорема 7: изразът вдясно наподобява риманова сума за интересувания ни интеграл, обаче в него фигурират две различни междинни точки  $\tilde{\xi}_i, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ . Да образуваме друг израз:

$$\tilde{R}_\tau = \sum_{i=1}^n f(x(\tilde{\xi}_i), y(\xi_i)) \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1}).$$

Тогава  $\tilde{R}_\tau$  е риманова сума, и при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  клони към търсения интеграл  $\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ .

Остава да докажем, че  $R_\tau(f) - \tilde{R}_\tau \rightarrow 0$  при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ . Да изберем  $\varepsilon > 0$ . Тъй като функцията  $f(\vec{P}(t))$  е непрекъсната функция на параметъра  $t$ , можем да намерим  $\delta > 0$  такава, че ако  $|\xi - \xi'| < \delta$ , то  $|f(\vec{P}(\xi)) - f(\vec{P}(\xi'))| < \varepsilon$ . Нека  $C$  е една горна граница за функцията  $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  в интервала  $[a, b]$ . Тогава

$$\begin{aligned} |R_\tau(f) - \tilde{R}_\tau| &< \sum_{i=1}^n |f(\vec{P}(\xi)) - f(\vec{P}(\tilde{\xi}))| \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1}) < \\ &< c\varepsilon \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = C\varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

и може да бъде направено произволно малко. ■

**Забележка.** От горното доказателство лесно се вижда, че криволинейният интеграл от първи вид може да се представи и като граница на римановите суми

$$\tilde{R}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot |P_{i-1} \vec{P}_i|,$$

т.е. границата не се променя, ако заменим дължината на дъгата  $\Gamma_i$  с дължината на отсечката  $P_{i-1} \vec{P}_i$ .

**Свойства на криволинейния интеграл от първи вид.** Свойствата на този интеграл дословно съвпадат със свойствата на обикновения риманов интеграл, и ще бъдат дадени накратко. Ще

разглеждаме само непрекъснати функции и непрекъснати ректифицируеми криви.

**Свойство 1 (Линейност).**

$$\int_{\Gamma} (f(P) + g(P)) dl = \int_{\Gamma} f(P) dl + \int_{\Gamma} g(P) dl, \quad \int_{\Gamma} \lambda f(P) dl = \lambda \int_{\Gamma} f(P) dl.$$

Наистина, достатъчно е в очевидните равенства

$$R_{\tau}(f + g) = R_{\tau}(f) + R_{\tau}(g), \quad R_{\tau}(\lambda f) = \lambda R_{\tau}(f)$$

да направим граничен преход при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .

**Свойство 2 (Позитивност).**

$$\text{Ако } f(P) \geq 0, \text{ то } \int_{\Gamma} f(P) dl \geq 0.$$

Това следва от очевидното равенство  $R_{\tau}(f) \geq 0$ .

**Свойство 3 (Монотонност).**

$$\text{Ако } f(P) \geq g(P), \text{ то } \int_{\Gamma} f(P) dl \geq \int_{\Gamma} g(P) dl.$$

(с други думи, неравенствата може да се интегрират).

Наистина, от неравенството  $f(P) - g(P) \geq 0$  и свойства 1 и 2 следва, че

$$\int_{\Gamma} f(P) dl - \int_{\Gamma} g(P) dl = \int_{\Gamma} (f(P) - g(P)) dl \geq 0.$$

**Свойство 4.**

$$\left| \int_{\Gamma} f(P) dl \right| \leq \int_{\Gamma} |f(P)| dl.$$

Получава се чрез интегриране на неравенствата

$$-|f(P)| \leq f(P) \leq |f(P)|.$$



**Свойство 5.**

$$\int_{\Gamma} 1 \, dl = l(\Gamma).$$

**Свойство 6. (Теорема за средните стойности).** Съществува точка  $P_0 \in \Gamma$  такава, че

$$\int_{\Gamma} f(P) \, dl = f(P_0) l(\Gamma)$$

(Числото  $f(P_0)$  се нарича *средна стойност* на функцията  $f$  върху  $\Gamma$ ).

**Доказателство.**

Очевидно всяка параметрично зададена непрекъсната крива е компактно подмножество на равнината (тя е непрекъснат образ на компактният интервал  $[a, b]$ ). От теоремите на Вайерщрас за непрекъснати функции върху компактни множества следва, че  $f(P)$  достига максималната и минималната си стойности върху  $\Gamma$  (да ги означим съответно  $M$  и  $m$ ). С други думи, съществуват точки  $P_{\min} = \vec{P}(t_{\min})$ ,  $P_{\max} = \vec{P}(t_{\max})$  от  $\Gamma$  такива, че за всяко  $P \in \Gamma$  имаме

$$m = f(P_{\min}) \leq f(P) \leq f(P_{\max}) = M.$$

Интегрирайки горните неравенства, вземайки пред вид свойство 5, и разделяйки неравенствата на  $l(\Gamma)$ , получаваме

$$m \leq \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(P) \, dl \leq M.$$

Функцията  $f(\vec{P}(t))$  е непрекъсната в  $[a, b]$ , и горното неравенство показва, че числото  $\frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(P) \, dl$  лежи между стойностите на тази функция в точките  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$ . По теоремата за междинните стойности тази стойност се достига в някоя точка  $t_0 \in [a, b]$ . Полагайки  $P_0 = \vec{P}(t_0)$ , получаваме

$$f(P_0) = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(P) \, dl. \blacksquare$$

**Свойство 7. (Аддитивност).** Нека  $\Gamma_1$  е крива с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ , а  $\Gamma_2$  – крива с начална точка  $B$  и крайна точка  $C$ . Да

означим с  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  кривата с начална точка  $A$  и крайна точка  $C$ , получена от съединяването на тези две криви (лесно се вижда, че  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  е също непрекъснатата параметрично задена крива). Тогава

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(P) dl = \int_{\Gamma_1} f(P) dl + \int_{\Gamma_2} f(P) dl.$$

Твърдението се вижда лесно, ако така избираме римановите суми за интеграла отдясно, че точката  $B$  да фигурира между делящите точки.

**Забележка.** Дефиницията и свойствата на криволинейния интеграл от първи вид се пренасят без изменение в случая на криви, разположени в пространство с три или повече измерения.

### Приложения на криволинейния интеграл от първи вид.

**1. Маса и център на тежестта на материална крива.** Задачата за намиране на масата на материална крива беше мотивираща при въвеждането на криволинейния интеграл от първи вид. Ако тук означим плътността с  $\varrho(P)$  (вместо с  $f(P)$ , както беше по-горе), получихме за масата  $m(\Gamma)$  на материалната крива  $\Gamma$  формулата:

$$m(\Gamma) = \int_{\Gamma} \varrho(P) dl.$$

Следващото приложение е за пресмятане на център на тежестта на материална крива. Ще повторим разсъжденията, използвани в част II, §2.7 за намиране на центъра на тежестта на материална фигура. Нека са дадени точките  $P_1, \dots, P_n$  (в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ ), с маси съответно  $m_1, \dots, m_n$ . Под център на тежестта на тази система разбираме точката

$$\vec{P}_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{P}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Ако точките  $\vec{P}_i$  имат координати  $(x_i, y_i)$ , то за координатите  $(x_*, y_*)$  на точката  $\vec{P}_*$  получаваме формулите

$$x_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Нека, както по-горе,  $\tau$  е разбиване на  $\Gamma$  с делящи точки  $P_i = (x_i, y_i)$  и междинни точки  $Q_i = (\xi_i, \eta_i) \in \Gamma_i$ , където  $\Gamma_i$  е дъгата, състояща се от точките между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . За да получим приблизителен израз за центъра на тежестта  $P_* = (x_*, y_*)$  на кривата  $\Gamma$ , ще считаме, че плътността е постоянна върху  $\Gamma_i$  и е равна на  $\varrho(Q_i)$  и следователно масата  $m(\Gamma_i)$  е равна на  $\varrho(Q_i) l(\Gamma_i)$ . Ще смятаме също, че тази маса е съсредоточена в точката  $Q_i$ . Тогава получаваме приблизителните формули

$$P_* \approx \frac{1}{m(\Gamma)} \sum_{i=1}^n \varrho(Q_i) l(\Gamma_i) \cdot Q_i,$$

т.е.

$$x_* \approx \frac{1}{m(\Gamma)} \sum_{i=1}^n \xi_i \varrho(\xi_i, \eta_i) l(\Gamma_i), \quad y_* \approx \frac{1}{m(\Gamma)} \sum_{i=1}^n \eta_i \varrho(\xi_i, \eta_i) l(\Gamma_i).$$

Не е трудно да разпознаем в тези изрази римановите суми за съответните криволинейни интеграли. При  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  получаваме вече точните формули за координатите на центъра на тежестта на  $\Gamma$ :

$$x_* = \frac{1}{m(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \varrho(x, y) dl, \quad y_* = \frac{1}{m(\Gamma)} \int_{\Gamma} y \varrho(x, y) dl$$

(в тримерния случай формулата за  $z_*$  изглежда по същия начин.

По-специално, в хомогенния случай (т.е. когато  $\varrho(P) \equiv 1$ ) тези формули добиват вида

$$x_* = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} x dl, \quad y_* = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} y dl.$$

**Пример.** Нека  $\Gamma$  е горната полуокръжност на окръжност с център в началото и радиус  $R$ . Ще намерим нейния център на тежестта. (Читателят сам ще съобрази защо не търсим центъра на тежестта на цялата окръжност.) Очевидно  $\Gamma$  се параметризира с уравненията

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in [0, \pi], \quad \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = R.$$

За координатите  $x_*, y_*$  на центъра на тежестта получаваме  $x_* = 0$  (очевидно) и

$$y_* = \frac{1}{\pi R} \int_{\Gamma} y dl = \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} R^2 \sin t dt = \frac{2}{\pi} R.$$

**Първа теорема на Гулдин\***

В §2.7 на част II беше изведена формула за лицето на повърхнината  $S_f$ , получена от въртенето около оста  $x$  на графика на функцията  $f(x)$ , дефинирана в интервала  $[a, b]$ :

$$\mu(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ако сега  $\Gamma$  е еднократно гладка параметрично зададена крива, лежаща в горната полуравнина на  $\mathbb{R}^2$ , ще осначаваме с  $S_\Gamma$  повърхнината, образувана от въртенето на  $\Gamma$  около абсцисната ос. Както ще видим по-долу, за лицето на тази повърхнина може да се напише формула, обобщаваща горната:

$$\mu(S_\Gamma) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_\Gamma y(t) dl.$$

Сравнявайки тази формула с изведената по-горе формула за  $y$ -координатата  $y_*$  на хомогенната материална крива  $\Gamma$ , ние получаваме първата теорема на Гулдин:

$$\mu(S_\Gamma) = 2\pi y_* \cdot l(\Gamma).$$

С други думи, лицето на ротационната повърхнина  $S_\Gamma$  е равно на дължината на  $\Gamma$ , умножена с дължината на окръжността, която центърът на тежестта описва при въртенето.

**Пример: Лице на тора.** Нека  $0 < r < R$ . Да означим с  $S$  окръжността с радиус  $r$  и център в точката  $(0, R)$ . Повърхността  $T$ , получена от въртенето на  $S$  около абсцисната ос, се нарича тор. В §2.7 на част II втората теорема на Гулдин беше използвана за намиране на обема на тялото, ограничено от  $T$  (т.нар. запълнен тор). Тук чрез първата теорема на Гулдин ще намерим лицето на  $T$ . Очевидно центърът на тежестта

---

\*Втората теорема на Гулдин се отнася за обема на ротационното тяло и е доказана в §2.7 на част II.

\*Формулата беше изведена на основата на интуитивната представа за лице на повърхнина. По-долу ние ще дадем точна дефиниция на това понятие.

на една окръжност съвпада с нейния център, и следователно за лицето на тора  $T$  получаваме формулата

$$\mu(T) = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

**2. Околна повърхнина на криволинеен цилиндър.** Тримерният аналог на криволинейния трапец в тримерното пространство е криволинейният цилиндър. Под криволинеен цилиндър в  $\mathbb{R}^3$  разбираме тялото, определено с условията

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

където  $D$  е измеримо подмножество в равнината,  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  са непрекъснати функции, дефинирани в  $D$  и удовлетворяващи неравенството  $f(x, y) \leq g(x, y)$ . Долната и горната основа на криволинейния цилиндър съвпадат с графиките на функциите  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , и тяхното лице може да бъде намерено по известните формули (ние ще ги изведем още веднаж по-нататък). Тук ще намерим лицето на околната повърхност на  $V$ . Ще предполагаме, че границата на  $D$  съвпада с простата ректифицируема крива  $\Gamma$  (или, с други думи,  $D$  съвпада с вътрешността на  $\Gamma$ )\*.

Да вземем, както по-горе, разбиване  $\tau$  на кривата  $\Gamma$ , състоящо се от дялящи точки  $P_1, \dots, P_n$  и междинни точки  $Q_i \in \Gamma_i$ , като  $\Gamma_i$  означава частта от кривата, разположена между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . Нека  $S_{\text{ок}}$  е цялата околна повърхнина на  $V$ , а  $S_i$  е нейната част, разположена над  $\Gamma_i$ . Повърхнината  $S_i$  е близка до правоъгълник с основа, равна на  $l(S_i)$  и височина, равна на  $g(Q_i) - f(Q_i)$ . Получаваме приблизителен израз за лицето  $\mu(S)$ :

$$\mu(S_{\text{ок}}) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i) \approx \sum_{i=1}^n (g(Q_i) - f(Q_i)) l(S_i),$$

откъдето при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  получаваме точната формула

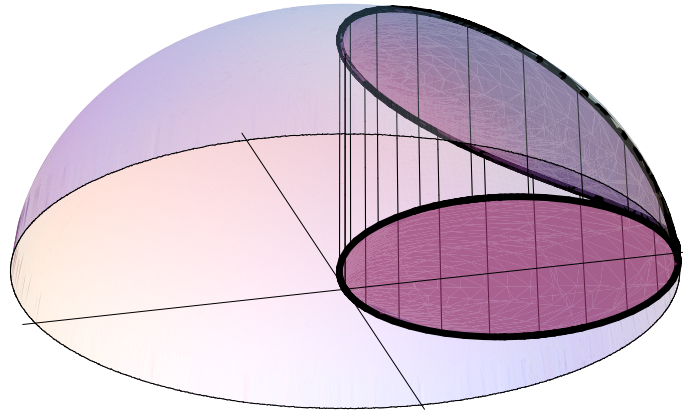
$$\mu(S_{\text{ок}}) = \int_{\Gamma} (g(P) - f(P)) dl.$$

---

\*И тук ще се основаваме на интуитивната дефиниция за лице на повърхност. По-нататък, в §???, ние ще дадем строга дефиниция на това понятие и ще проверим отново изведените тук формули.

**Пример. (Тяло на Вивиани).** Така се нарича сечението на горното полукълбо с център в началото и радиус  $R$  с вертикален прав кръгов цилиндър с радиус на основата  $R/2$  и център на основата в точката  $(R/2, 0)$ . Ако означим с  $D$  основата на цилиндъра, т.е. кръга с радиус  $R/2$  и център в  $(R/2, 0)$ , то тялото  $V$  се представя като криволинеен цилиндър с условията:

$$V = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$



Тяло на Вивиани.

Окръжността, ограничаваща  $D$ , се параметризира с формулите

$$x = \frac{R}{2} (1 + \cos t), \quad y = \frac{R}{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

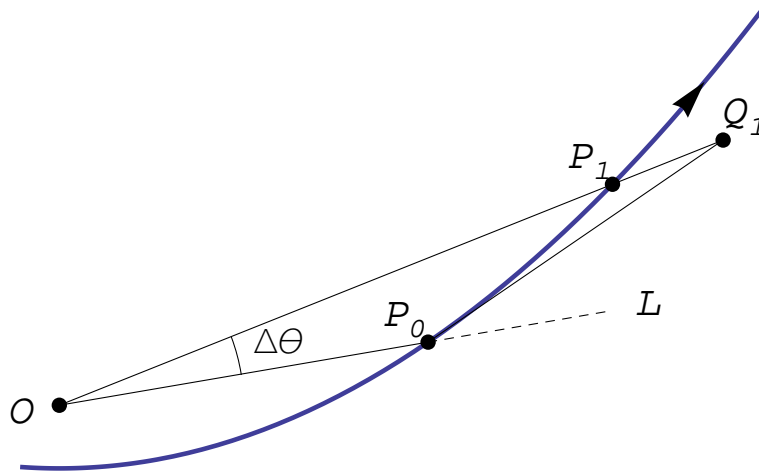
откъдето за лицето на околната повърхнина получаваме

$$\mu(S_{\text{ок}}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}(1 + \cos t)\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\sin t\right)^2} \cdot \frac{R}{2} dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2R^2.$$

От горните пресмятания се вижда следният геометричен факт: ако си представим, че околната повърхност на тялото на Вивиани е направена от хартия, и развием тази хартия, ще получим фигурата, заградена отдолу от абсцисната ос, а отгоре - от графика на синусоидата  $R \sin \left( \frac{x}{2R} \right)$ , като  $x$  се изменя в интервала  $[0, 2\pi R]$ .

**3. Интеграл на Гаус в равнината.** Нека имаме равнинна крива, която не минава през дадена точка. Гаус си е поставил следната задача: да се намери ъгъла, под който кривата се вижда от точката. Ъгълът се разглежда със знака си; при промяна на ъгъла в посока срещу часовниковата стрелка ъгълът на раства, а в противната посока – намалява. Следователно тук има значение и посоката на кривата; ако сменим посоката с противоположната, ъгълът, под който тя се вижда, че смени знака си.



Интеграл на Гаус.

Да означим с  $O$  точката, от която гледаме. Ще пресметнем приблизително промяната  $\Delta\theta$  на търсения ъгъл, съответстващ на достатъчно малка дъга от кривата  $\Gamma$ , лежаща между точките  $P_0$  и  $P_1$ . Да прекараме допирателната към  $\Gamma$  в точката  $P_0$ , и да означим с  $Q_1$  пресечната

точка на допирателната с продължението на отсечката  $\overline{OP_1}$ . Можем да считаме, че дължината на отсечката  $\overline{P_0Q_1}$  е близка до дължината  $\Delta l$  на дъгата  $P_0P_1^*$ . Ще приложим синусовата теорема към триъгълника  $\triangle OP_0Q_1$ . Получаваме

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\approx \sin(\Delta\theta) = |P_0Q_1| \frac{\sin \angle(OP_0Q_1)}{|OQ_1|} \approx \Delta l \frac{\sin \angle(OP_0Q_1)}{|OP_0|} = \\ &= \Delta l \frac{\sin \angle(\vec{OP}_0, \vec{e}(P_0))}{|OP_0|}, \end{aligned}$$

където с  $\vec{e}(P_0)$  сме означили единичния допирателен вектор в точката  $P_0$ , съответстващ на посоката на кривата.

Нека сега  $\tau$  е разбиване на кривата  $\Gamma$ , и  $\Delta\theta_i$  е нарастването на ъгъла, съответстващо на дъгата  $\Gamma_i$ . За търсения ъгъл  $\Theta$  получаваме

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{\sin \angle(\vec{OP}_i, \vec{e}(P_i))}{|OP_i|} l(\Gamma_i).$$

Ако точката  $O$  съвпада с началото на координатите, сумата отдясно може да се напише като

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \frac{\sin \angle(\vec{P}_i, \vec{e}(P_i))}{|P_i|} l(\Gamma_i).$$

Това е риманова сума за криволинеен интеграл от първи вид, и за търсения ъгъл получаваме формулата

$$\Theta = \int_{\Gamma} \frac{\sin \angle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|} dl,$$

който се нарича *интеграл на Гаус*.

---

\* Може да се докаже, че дължината на отсечката  $\overline{P_1Q_1}$  е от порядъка  $\Delta l^2$ , откъдето следва, че грешката, която допускаме при това предположение, е от същия порядък и не оказва влияние на окончателната формула.



**Пример.** Нека  $\Gamma_R$  е окръжността с център в началото и радиус  $R$ , ориентирана в положителна посока, т.е. срещу часовниковата стрелка. Тогава навсякъде върху нея имаме  $|\vec{P}| = R$  и  $\sin \angle(\vec{P}, \vec{e}(P)) = 1$ , откъдето за интеграла на Гаус получаваме

$$\Theta = \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} dl = \frac{l(\Gamma_R)}{R} = 2\pi,$$

както и трябваше да се очаква.

**4. Закон на Био-Савар.** Законът на Био-Савар описва силата, с която електрическият ток действа върху магнит (на това се основава работата на електромоторите). Нека токът тече със сила  $I$  между точката  $\vec{P}$  и близката до нея точка  $\vec{Q}$ . Да означим  $\vec{\Delta l} = \vec{PQ}$ . Тогава силата  $\vec{\Delta F}$ , с която токът действа на единичен магнитен товар, разположен в началото  $\vec{O}$  на координатите, приблизително се дава с формулата

$$\vec{\Delta F} \approx I \cdot \frac{\vec{P} \times \vec{\Delta l}}{|\vec{P}|^3}.$$

(тук знакът  $\times$  означава векторното произведение в  $\mathbb{R}^3$ ). Ако точките  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  лежат в равнината  $Oxy$ . Тогава силата  $\vec{\Delta F}$  е насочена по оста  $z$ , т.е.  $\vec{\Delta F} = \Delta F \cdot \vec{z}$ , като

$$F \approx I \cdot \frac{\sin \angle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|^2} |\vec{\Delta l}|.$$

Нека сега токът тече със сила  $I$  по равнинната крива  $\Gamma$ , и  $\tau$  е нейно разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n$ . Прилагайки горната формула за всяка от частите  $\Gamma_i$ , получаваме, че токът действа на единичен магнитен товар в началото със сила  $\vec{F} = F \cdot \vec{z}$ , и е в сила приблизителната формула

$$F \approx \sum_{i=1}^n \Delta F_i \approx \sum_{i=1}^n I \cdot \frac{\sin \angle(\vec{P}_i, \vec{e}(P_i))}{|\vec{P}_i|^2} |P_{i-1} \vec{P}_i|.$$

След граничен преход получаваме точната формула за силата на въздействие:

$$F = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{\sin \angle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|^2} dl.$$

## 1.2 Хармонични функции

**Хармонични функции в  $\mathbb{R}^3$ .** По-горе ние срещнахме диференциалния оператор, който действа върху функция  $f(x, y, z)$ , дефинирана в  $\mathbb{R}^3$ , по формулата:

$$\Delta f = \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Тъй като операциите  $\operatorname{div}$  и  $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$  не зависят от избора на ортогоналната координатна система в  $\mathbb{R}^3$ , то същото е вярно и за диференциалния оператор  $\Delta$ . По-точно, ако  $U$  е ортогонална  $3 \times 3$  матрица, разглеждана и като оператор от  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}^3$ , и означим  $(Uf)(P) = f(U.P)$ , то е в сила равенството

$$\Delta(Uf)(P) = (\Delta f)(U.P).$$

Функция  $f(x, y, z)$ , удовлетворяваща равенството  $\Delta f \equiv 0$ , се нарича хармонична функция.

Ще изведем някои интересни свойства на хармоничните функции. Започваме с три важни за нас равенства, следващи от формулата на Остроградски-Гаус. Нека  $V$  е област в  $\mathbb{R}^3$ , нейната граница  $S = \partial V$  е гладка повърхнина, и  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  са двукратно гладки функции в околност на  $\bar{V}$ . Нека  $\vec{n}(P)$ , както по-горе, да означава единичната външна нормала към  $S$ , и  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P)$  да е производната на  $f(x, y, z)$  по направление  $\vec{n}(P)$ . Тогава са в сила формулите:

$$\iiint_V \Delta f \, dx \, dy \, dz = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) \, d\sigma, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V g \cdot \Delta f \, dx \, dy \, dz = & - \iiint_V \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz + \\ & + \iint_S g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) \, d\sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\iiint_V (g \cdot \Delta f - f \cdot \Delta g) \, dx \, dy \, dz = \iint_S \left( g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) - f(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) \right) d\sigma. \quad (3)$$

**Доказателство на формулите.** Формула (1) представлява формулата на Остроградски-Гаус, приложена за векторното поле  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ , като се вземе пред вид равенството

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(P), \vec{n}(P) \rangle$$

(виж част II, §1.5).

За да докажем (2), да разгледаме векторното поле

$$g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f = \left( g \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, g \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, g \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

От формулата за диференциране на произведение следва, че

$$\text{div} (g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + g \cdot \Delta f,$$

откъдето, прилагайки Остроградски-Гаус, получаваме формулата (2).

Най-сетне, за да докажем (3), да напишем два пъти формулата (2), втория път – с размяна на местата на  $f$  и  $g$ , и да извадим получените равенства. Тройните интеграли отдясно се съкращават, и ние получаваме формулата (3).

**Теорема за средните стойности на хармоничните функции.** Нека функцията  $f(P)$  е хармонична в областта  $U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  е вътрешна точка за  $U$ , и кълбото  $B_R$  с център  $P_0$  и радиус  $R$  се съдържа в  $U$ . Да означим с  $S_R$  границата на това кълбо, т.е. сферата с център  $P_0$  и радиус  $R$ . Тогава е в сила формулата

$$f(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma.$$

С други думи,  $f(P_0)$  е равно на средната стойност на  $f(P)$  върху сферата  $S_R$ .

**Доказателство.** Да разгледаме функцията

$$g(P) = \frac{1}{\varrho(P, P_0)} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

дефинирана в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$ . Непосредствената проверка показва, че  $\Delta g \equiv 0$  (проверете). Да изберем  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < R$ , и да означим с  $V$  тялото  $V = B_R \setminus B_\varepsilon$ . Тогава  $bV = S_R - S_\varepsilon$  (знакът "-" пред малката сфера  $S_\varepsilon$  означава, че тя се взема с ориентация, обратна на обичайната). Да приложим формула (3); лявата част е равна на нула, и следователно получаване

$$\iint_{S_R} \left( g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) - f(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) \right) d\sigma = \iint_{S_\varepsilon} \left( g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) - f(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) \right) d\sigma.$$

Горните интегрални върху сфери се изчисляват лесно. Наистина, за  $P \in S_R$  очевидно  $g(P) = 1/R$ . По-нататък, нормалата  $\vec{n}(P)$  към  $S_R$  е еднопосочна с вектора  $\vec{P}_0P$  и следователно имаме

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) = \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{R^2}.$$

Разбира се, същите формули са валидни и върху сферата  $S_\varepsilon$ , и горното равенство добива вида

$$\frac{1}{R} \iint_{S_R} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma + \frac{1}{R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma + \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma.$$

Ще използваме още веднаж, че  $f(P)$  е хармонична функция; формула (1) показва, че

$$\iint_{S_R} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma = \iiint_{B_R} \Delta f(P) dx dy dz = 0,$$

и, разбира се, същото е вярно и за интеграла от  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$  върху  $S_\varepsilon$ . Така получихме, че

$$\frac{1}{R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma.$$

Ще изчислим границата на дясната страна при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . По теоремата за средните стойности за повърхнинни интегрални от първи вид имаме

$$\iint_{S_R} f(P) d\sigma = f(P_\varepsilon) \cdot \mu(S_\varepsilon) = 4\pi\varepsilon^2 f(P_\varepsilon)$$

за подходяща точка  $P_\varepsilon \in S_\varepsilon$ , откъдето

$$\frac{1}{R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma = 4\pi f(P_\varepsilon).$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  очевидно  $f(P_\varepsilon) \rightarrow f(P_0)$ , откъдето следва твърдението на теоремата. ■

**Следствие (принцип за максимума за хармоничните функции).** Нека  $U$  е ограничена свързана област в  $\mathbb{R}^3$  и  $f(P)$  е функция, хармонична в  $U$  и непрекъсната в затворената и обвивка  $\bar{U}$ . Ако  $f(P)$  не е константа, то максималната и минималната и стойности се достигат само върху границата  $\partial U$  на областта  $U$ .

**Доказателство.** По теоремата на Вайерщрас  $f(P)$  достига максималната и минималната си стойности в  $\bar{U}$ . Да допуснем, че максималната стойност се достига в точка  $P_0$ , вътрешна за  $U$ . Ще докажем, че  $f(P)$  е константа в  $U$ . Отначало ще докажем това в някаква кълбовидна околност на  $P_0$ . Нека  $B$  е кълбо с център  $P_0$ , съдържащо се в  $U$ . Ако предположим, че  $f(P)$  не е константа в  $B$ , то можем да намерим точка  $P' \in B$  такава, че  $f(P') < f(P_0)$ . Да означим  $R = \rho(P_0, P')$ , и нека е сферата  $S_R$  с център  $P_0$  и радиус  $R$ . Очевидно  $P' \in S_R$ . За всяко  $P \in S_R$  имаме  $f(P) \leq f(P_0)$ . Освен това от непрекъснатостта на  $f(P)$  следва, че за всяко  $P$ , близко до  $P_1$ , е изпълнено строгото неравенство  $f(P) < f(P_0)$ . По теоремата за средните стойности получаваме

$$f(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma < \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} f(P_0) d\sigma = f(P_0),$$

т.е. получихме противоречие, дължащо се на допускането, че  $f(P_1) < f(P_0)$ . С други думи, доказахме, че  $f(P)$  е константа в  $B$ .

Ще докажем този факт и върху цялото  $U$ . Нека  $Q$  е произволна точка от  $U$ . Можем да намерим редица  $B_0, \dots, B_n$  от кълба в  $U$  такива, че  $B_0 = B$ ,  $B_n$  съдържа  $Q$ , и всяко от кълбата  $B_k$  съдържа центъра на следващото кълбо  $B_{k+1}$ . Да означим с  $P_0, \dots, P_n$  техните центрове. Тъй като  $P_1 \in B_0$ , то  $f(P_1) = f(P_0)$ . Прилагайки горните разсъждения за кълбото  $B_1$  вместо за  $B$ , получаваме, че  $f(P) = f(P_0)$  за всяка точка  $P \in B_1$ . Разсъждавайки по същия начин последователно за кълбата

$B_2, \dots, B_n$ , достигаем до извода, че  $f(P) = f(P_0)$  за всяко  $P \in B_n$ , т.е. и в точката  $Q$ . Тъй като  $Q$  беше произволна, то  $f(P) \equiv f(P_0)$  в  $U$ , т.е.  $f(P)$  е константа в  $U$ .

Същите разсъждения вървят и ако предположим, че  $f(P_0)$  е минималната стойност на  $f(P)$  в  $U$ . ■

**Хармонични функции в равнината.** Функцията  $f(x, y)$  се нарича *хармонична* в  $\mathbb{R}^2$ , ако

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Всички доказани по-горе резултати се пренасят и в равнината, като тройните интеграли се заменят с двойни, а повърхнинните – с криволинейни. Ще скицираме накратко необходимите промени в доказателствата:

Първо, вместо формулата на Остроградски-Гаус се използва формулата на Гаус-Грин. Удобно е да се използва тази формула във леко видоизменен вид. Нека  $D$  е област в равнината, чиято граница съвпада с гладката крива  $\Gamma$ ,  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  са гладки функции в околност на  $\bar{D}$ , и  $\vec{n}(P)$  означава единичната нормала към  $\Gamma$  в посока, външна за  $D$  (тук посоката на нормалата е противоположна на приетата по-горе). Използва се формулата

$$\begin{aligned} \iint_D (A'_x + B'_y) \, dx \, dy &= \int_{\Gamma} A \, dy - B \, dx = \\ &= \int_{\Gamma} (A \cos \angle(\vec{x}, \vec{n}) + B \cos \angle(\vec{y}, \vec{n})) \, dl. \end{aligned}$$

За доказателство на горните равенства е достатъчно във формулата на Гаус-Грин да се постави  $-B$  вместо  $A$  и  $A$  вместо  $B$ , и да се използва връзката между директорните косинуси на  $\vec{e}$  и  $\vec{n}$ .

С помощта на горните равенства лесно се доказват двумерните аналози на формулите 1 - 3 по-горе. Нататък доказателството се развива по същия начин както по-горе, като вместо използваната в тримерния случай функция  $g = 1/\rho$  се използва функцията

$$g(x, y) = \ln \varrho(P_0, P) = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Лесно се доказва, че  $g(x, y)$  е хармонична в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ . Използвай същите пресмятания както по-горе, можем да докажем и в този случай теоремата за средните стойности и нейното следствие – принципа за максимума за хармоничните функции.

**Упражнения.**

1. Докажете, че ако  $f(P)$  е хармонична в  $U$  и  $B_R$  е кълбото с център  $P_0$  и радиус  $R$ , то

$$f(P_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_{B_R} f(P) \, dx \, dy \, dz.$$

**Упътване.** Докажете, че

$$\iiint_{B_R} f(P) \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \left( \iint_{\check{S}_\rho} f(P) \, d\sigma \right) d\rho.$$



### 1.3 Локална структура на повърхнините

**Локално описание на повърхнините в  $\mathbb{R}^3$ .** Нека е дадена двукратно гладката регулярна параметрично зададена повърхнина  $S \subset \mathbb{R}^3$ , и  $P_0$  е точка от  $S$ . Както видяхме по-горе, около  $P_0$  повърхнината  $S$  може да се представи като графика на определена функция на две от координатите. В този параграф обаче за нас ще бъде удобно да направим това в друга ортогонална координатна система, свързана с  $P_0$ .

Ще изберем координатната система  $Oxyz$  така, че нейното начало  $O$  да съвпада с  $P_0$ , а координатните вектори  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  да бъдат допирателни към  $S$  в тази точка. С други думи, допирателната равнина към  $S$  в точката  $O$  ще съвпада с координатната равнина  $Oxy$ . Да представим локално  $S$  като график на функция, т.е. с уравнението  $z = f(x, y)$ . Тъй като в този случай допирателното пространство в точката  $O$  се поражда от векторите  $(1, 0, f'_x(0, 0))$  и  $(0, 1, f'_y(0, 0))$ , то от горните условия следва, че

$$f'(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

Развивайки функцията  $f(x, y)$  в ред на Тейлор до третия член около точката  $(0, 0)$  и вземайки пред вид горните условия, получаваме

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + R_2(x, y),$$

където сме положили

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0), \quad \text{и}$$

$$R_2(x, y) = o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\right).$$

Следващата стъпка е да изберем друга координатна система в равнината  $Oxy$ . Теоремата за канонизация на квадратичните форми гласи, че чрез ортогонална смяна на координатите в равнината квадратичната форма

$$A(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

може да бъде приведена към вида  $\alpha_1 u^2 + \alpha_2 v^2$  спрямо новите координати  $u, v$ . След такава смяна повърхнината локално се описва с уравнението

$z = \tilde{f}(u, v)$ , където

$$\tilde{f}(u, v) = \frac{1}{2}\alpha_1 u^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 + o\left(\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^2\right).$$

Числата  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се наричат главни секционни кривини на повърхнината  $S$  в точката  $P_0$ , а координатните оси по  $u$  и  $v$  – главни координатни оси в тази точка.

**Формула за секционната кривина. Средна и Гаусова кривина.** Ще обясним геометричния смисъл на кривините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Под нормално сечение на  $S$  в точката  $P_0$  ще разбираме сечението на  $S$  с произволна равнина, минаваща през нормалата в тази точка (т.е. през оста  $z$ ). Ще намерим кривината на така получените равнинни криви в точката  $P_0$ .

Нека  $\vec{h}$  е единичен допирателен вектор към  $S$  в  $P_0$ , като  $\vec{h} = (h_1, h_2)$  относно новите координати  $u, v$  (т.е. имаме  $h_1^2 + h_2^2 = 1$ ). Да означим с  $L_{\vec{h}}$  е равнината, минаваща през точката  $O = P_0$ . Точките от тази равнина имат представянето  $(h_1 t, h_2 t, z)$  за подходящи  $t$  и  $z$ . В съответните координати сечението  $\Gamma_{\vec{h}}$  на  $S$  с  $L_{\vec{h}}$  се представя с уравнението

$$z = \tilde{f}(h_1 t, h_2 t).$$

Ще напомним формулата за *кривина* на равнинна крива – виж част I, §4.4 (геометричният смисъл на това понятие ще припомним по-долу). Ако  $y = \varphi(x)$  е уравнението на кривата, то кривината  $k(x)$  в точката  $(x, \varphi(x))$  се дава с формулата

$$k(x) = \frac{\varphi''(x)}{(1 + \varphi'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Нека означим

$$\varphi_{\vec{h}}(t) = \tilde{f}(h_1 t, h_2 t),$$

и нека  $k_{\vec{h}}$  е кривината на  $\Gamma_{\vec{h}}$  в точката  $O$ .  $k_{\vec{h}}$  се нарича секционна кривина, съответстваща на сечението на  $S$  с  $L_{\vec{h}}$ . Тогава

$$\varphi_{\vec{h}}(t) = \frac{1}{2}(\alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2)t^2 + o(t^2)$$

и следователно

$$\varphi'_{\vec{h}}(0) = 0, \quad \varphi''_{\vec{h}}(0) = \alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2,$$

(докажете!). Оттук получаваме формулата за секционната кривина:

$$k_{\vec{h}} = \alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2.$$

В частност, полагайки  $\vec{h} = (1, 0)$  или  $\vec{h} = (0, 1)$ , получаваме, че главните кривини съвпадат с секционните кривини, съответстващи на нормалните сечения, минаващи през главните оси. От формулата се вижда също така, че  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ни дават минималната и максималната секционна кривина, а всички останали секционни кривини лежат между тях.

Числото  $k_m(P_0) = \alpha_1 + \alpha_2$  се нарича средна кривина в точката  $P_0$ , а числото  $k_G(P_0) = \alpha_1 \cdot \alpha_2$  – Гаусова кривина в тази точка. Тъй като  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  не зависят от избора на координатната система в  $\mathbb{R}^3$ , то от горните формули следва, че същото е вярно и за средната и Гаусовата кривини.

За да си изясним връзката между кривините  $\alpha_1, \alpha_2$ , и коефициентите  $A, B, C$ , ще си припомним процедурата на канонизация на дадена квадратична форма. Теоремата за канонизацията може да бъде доказана по различни начини, включително и чрез използване на множителите на Лагранж (виж част II, §1. 11, зад. 2). Числата  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се получават като корени на уравнението

$$\begin{vmatrix} A - \alpha & B \\ B & C - \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

или, развито

$$\alpha^2 - (A + C)\alpha + (AC - B^2) = 0.$$

(Лесно се вижда, че това уравнение винаги има реални решения.) Формулите на Виет ни дават равенствата

$$k_m(P_0) = \alpha_1 + \alpha_2 = A + C, \quad k_G(P_0) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = AC - B^2.$$

**Забележка.** Горните формули са верни само в случая, когато координатната равнина  $Oxy$  съвпада с допирателната равнина в точката  $P_0$ , т.е. когато  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ . В общия случай те трябва да бъдат коригирани. В следващия раздел ще изведем общата формула за Гаусовата кривина.

**Геометричен смисъл на Гаусовата кривина.** Ще напомним геометричния смисъл на понятието кривина на равнинна крива. Нека  $\Gamma$  е двукратно гладка регулярна крива в  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0$  и  $P_1$  са точки от  $\Gamma$ ,  $\Delta l$  означава дължината на дъгата  $P_0P_1$ , и  $\Delta\alpha$  – ъгъла между допирателните в точките  $P_0$  и  $P_1$ . Тогава кривината  $k(P_0)$  се определя като

$$k(P_0) = \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}.$$

Ще покажем, че естественият аналог на това понятие за повърхнини е точно Гаусовата кривина.

Първо ще отбележим, че горната дефиниция няма да се промени, ако вместо допирателните вземем нормалите в съответните точки. Това води до идеята да се разгледа изображението, съпоставящо на всяка точка  $P$  от повърхнината  $S$  единичната нормала в точката  $\vec{n}(P)$ . Получаваме изображение, наречено изображение на Гаус, на повърхнината  $S$  в единичната сфера  $S^2$  в  $\mathbb{R}^3$ . Ако  $\Delta S$  е част от повърхнината  $S$ , чрез  $\Delta\Sigma$  ще означаваме нейния образ в единичната сфера чрез изображението на Гаус. Всъщност лицето  $\mu(\Delta\Sigma)$  на множеството  $\Delta\Sigma$  е точно пространственият ъгъл, описван от нормалата върху  $\Delta S$ , и аналогията със случая на крива линия е очевидна.

Сега можем да формулираме точното твърдение. Нека  $S$  е регулярна двукратно гледка повърхнина,  $P_0 \in S$ , и в околност на  $P_0$   $S$  се представя с равенството  $z = f(x, y)$ , като

$$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

Нека, както по-горе,

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

и освен това да означим

$$p = f'_x(x_0, y_0), \quad q = f'_y(x_0, y_0).$$

Ще предположим още, че  $AC - B^2 \neq 0$ .

Нека  $\Delta S_n$  е редица от части на  $S$ , съдържащи  $P_0$ , с диаметри клонящи към 0. (Понякога това се изразява с равенството  $\Delta S_n \searrow (P_0)$ .) Нека  $\Delta\Sigma_n$  са образите им при изображението на Гаус.

**Теорема (геометричен смисъл на Гаусовата кривина).** При горните условия е изпълнено равенството

$$\lim_{\Delta S_n \searrow (P_0)} \frac{\mu(\Delta \Sigma_n)}{\mu(\Delta S_n)} = \frac{|AC - B^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2} = |k_G(P_0)|.$$

**Доказателство.** Да си припомним формулата за лице на повърхност  $S$ , зададена като графика на функцията  $f(x, y)$  с дефиниционна област  $D$ :

$$\mu(S) = \iint_D \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} dx dy.$$

(виж част II, §2.7.)

Ще припомним, че единичната нормала  $\vec{n}(x, y)$  към така дефинираната повърхнина се задава с формулата

$$\vec{n}(x, y) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2}} (-f'_x(x, y), -f'_y(x, y), 1),$$

където знакът отпред зависи от това, коя от двете възможни единични нормали сме избрали. Ако означим с  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$ ,  $\gamma(x, y)$  ъглите, които нормалата  $\vec{n}(x, y)$  сключва съответно с осите  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то ще имаме

$$\vec{n}(x, y) = (\cos \alpha(x, y), \cos \beta(x, y), \cos \gamma(x, y))$$

и следователно формулата за лицето може да се напише в следния, по-удобен за нас вид\*:

$$\mu(S) = \iint_D \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}.$$

(Модулът се поставя, за да бъдем независими от избора на единичната нормала.)

Ще използваме тази формула, за да изразим лицата, участващи във формулировката на теоремата. Нека с  $\Delta D_n$  да означим проекцията на  $\Delta S_n$  върху равнината  $Oxy$ . Тогава, използвайки теоремата за средните стойности, получаваме

$$\mu(\Delta S_n) = \iint_{\Delta D_n} \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|} = \frac{\mu(\Delta D_n)}{|\cos \gamma(Q_n)|}$$

\*При извода на формулата за лицето ние получихме най-напред този неин вид.

за подходяща точка  $Q_n = (x_n, y_n) \in D_n$ .

По-сложно е намирането на  $\mu(\Delta\Sigma_n)$ . Ще въведем нови координати  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , равни на първите две координати на единичната нормала  $\vec{n}(x, y)$ . Тогава

$$\mu(\Delta\Sigma_n) = \iint_{\Delta\tilde{D}_n} \frac{d\tilde{x} d\tilde{y}}{|\cos \tilde{\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y})|},$$

където с  $\Delta\tilde{D}_n$  сме означили проекцията на  $\Delta\Sigma_n$  в равнината  $Oxy$ , а  $\tilde{\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y})$  е третата координата на нормалата  $\vec{n}(\tilde{x}, \tilde{y})$  към единичната сфера.

Ще искаме в този интеграл да преинем към променливите  $x, y$ . Ключово наблюдение: нормалата към сферата в дадена точка е колинеарна с радиус-вектора на точката. Следователно

$$\vec{n}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pm \vec{n}(x, y) \text{ и } |\cos \tilde{\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y})| = |\cos \gamma(x, y)|.$$

Да намерим функционалната детерминанта на въпросната смяна  $\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(x, y)}$ . Да въведем означенията

$$p(x, y) = f'_x(x, y), \quad q(x, y) = f'_y(x, y), \quad A(x, y) = f''_{xx}(x, y), \quad B(x, y) = \dots$$

Лесно се вижда, че

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = A(x, y)C(x, y) - B(x, y)^2 \neq 0.$$

От друга страна,

$$\tilde{x}(x, y) = -\frac{p(x, y)}{\sqrt{1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2}}, \quad \tilde{y}(x, y) = -\frac{q(x, y)}{\sqrt{1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2}},$$

откъдето

$$\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(p, q)}(p, q) = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

За интересувашата ни функционална детерминанта получаваме

$$\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(x, y)} = \frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(p, q)} \cdot \frac{D(p, q)}{D(x, y)} = \frac{A(x, y)C(x, y) - B(x, y)^2}{(1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2)^2}.$$

От теоремата за смяна на променливите получаваме

$$\mu(\Delta\Sigma_n) = \iint_{\Delta D_n} \frac{|A(x, y)C(x, y) - B(x, y)^2|}{(1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2)^2} \cdot \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}.$$

По теоремата за средните получаваме

$$\mu(\Delta\Sigma_n) = \frac{|A(Q'_n)C(Q'_n) - B(Q'_n)^2|}{(1 + p(Q'_n)^2 + q(Q'_n)^2)^2} \cdot \frac{\mu(\Delta D_n)}{|\cos \gamma(Q'_n)|}$$

за подходяща точка  $Q'_n = (x'_n, y'_n) \in D_n$ .

При  $n \rightarrow \infty$  редиците от точки  $(x'_n, y'_n)$  и  $(x_n, y_n)$  клонят към  $(x_0, y_0)$  и следователно

$$\frac{\mu(\Delta\Sigma_n)}{\mu(\Delta S_n)} \rightarrow \frac{|A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) - B(x_0, y_0)^2|}{(1 + p(x_0, y_0)^2 + q(x_0, y_0)^2)^2} = \frac{|AC - B^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Остава да докажем, че изразът отлясно е равен на  $|k_G(P_0)|$ . Тъй като лявата страна на горното равенство не зависи от избора на координатната система в  $\mathbb{R}^3$ , можем да изберем такива координати, каквито са ни удобни. Да ги изберем както по-горе, т.е. с начало в точката  $P_0$  и с координатна равнина  $Oxy$ , съвпадаща с допирателното пространство в  $P_0$ . Тогава имаме  $p = 0$ ,  $q = 0$  и, както видяхме по-горе,  $k_G(P_0) = AC - B^2$ , и второто равенство в теоремата е също вярно. ■

**Следствие.** Ако повърхнината  $S$  се представя като графика на функцията  $f(x, y)$ , то за Гаусовата кривина в точката  $(x, y, f(x, y)) \in S$  се дава с формулата

$$k_G(x, y, f(x, y)) = \frac{f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - f''_{xy}(x, y)^2}{(1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2)^2}.$$

**Примери.** Да разгледаме сферата  $S_R^2$  с радиус  $R$ . Тогава всички нормални сечения са окръжности с радиус  $R$ , и следователно всички секционни кривини са равни на  $1/R$ , а Гаусовата кривина във всяка точка е равна на  $1/R^2$ . Изображението на Гаус от  $S_R^2$  в  $S_1^2$  е просто умножение с  $1/R$ , и твърдението на теоремата се вижда непосредствено.

Също така лесно се вижда, че за равнината всички секционни кривини са равни на нула.

**"Забележителната теорема" на Гаус.** Един от най-известните резултати на Гаус е т.нар. Theorema Egregium, или забележителната теорема. Тя гласи, че Гаусовата кривина зависи само от вътрешната геометрия на повърхнината – т.е. от разстоянията между нейните точки – а не от начина, по който тя е вложена в  $\mathbb{R}^3$ . За да онагледим този резултат, да си представим, че имаме парче от сферична гумена топка и го прегъваме (без обаче да го разтягаме). При сгъването главните секционни кривини се променят, едната става по-малка, а другата – по-голяма. По теоремата на Гаус обаче произведението им остава постоянно.

Едно следствие от теоремата на Гаус е, че не може да съществува абсолютно точна карта дори на част от земната повърхност. Наистина, ако съществуваше изображение на част от сферата върху равнината, запазващо всички разстояния, то сферата и равнината биха имали една и съща Гаусова кривина. Както видяхме, това не е така, и следователно всяко изображение от сферата в равнината изменя донякъде разстоянията.



# Азбучен указател

Гаусова кривина, 35  
Параметрично зададена крива, 3  
допирателна  
    към параметрично зададена кри-  
    ва, 7  
допирателна към крива, 8  
главни секционни кривини, 34  
хармонична, 27  
интеграл на Гаус в равнината, 24  
изображение на Гаус, 36  
крива  
     $n$ -кратно гладка, 4  
    частично гладка, 4  
    дължина на, 10  
    непрекъснатата, 4  
    особени точки на, 5  
    параметрично представяне на,  
    3  
    проста, 4  
    проста затворена, 4  
    регулярна, 5  
нормално сечение, 34  
ориентирана крива, 7  
посока върху крива, 7  
представяне, 3  
секционна кривина, 34  
средна кривина, 35  
тор, 20



# Съдържание

<b>1</b>	<b>Диференциално смятане</b>	<b>3</b>
1.1	Криволинейни интеграли от първи вид . . . . .	3
1.2	Хармонични функции . . . . .	27
1.3	Повърхнини . . . . .	33