Скъпи студенти,
във вашата подготвителна работа
за семестриалните си изпити по
Висша математика във ВУЗ,
Вие няма да сте сами.
Ваш самоучител е този сборник
от подробно решени задачи.

Доверете ни се!

Изберете

най-подходящото помагало за ВУЗ!

В тази книга са включени над 120 подробно решени задачи по програмата и учебното съдържание на ВУЗ.

Трета част: Линейна алгебра. Аналитична геометрия. Изследване на функция.

Търсете:

Първа част: Производна на функция. Неопределен и определен интеграл.

Втора част: Диференциални уравнения. Многократни интеграли. Екстремуми на функции с две променливи.

Изберете

най-подходящото помагало за ВУЗ!

За справки и заявки тел. (070) 2 44 10.

Цена ... лв.

Цветанка Стоилкова

СБОРНИК

подробно решени задачи по

ВИСША МАТЕМАТИКА

Рая

Трета част

Линейна алгебра

Аналитична геометрия

Изследване на функции

Цветанка
Стоилкова

СБОРНИК

подробно решени задачи по

ВИСША МАТЕМАТИКА

Линейна алгебра
Аналитична геометрия
Изследване на функции

1998

С това учебно пособие, състоящо се от над 120 подробно решени и степенувани по трудност задачи е поставена целта да се подпомогнат студентите от ВУЗ в самостоятелната им подготовка за семестриалните изпити по Висша математика (Линейна алгебра, Аналитична геометрия и Изследване на функции), да научи студента да решава основните елементарни задачи и да даде един минимум от знания и умения за усвояване на задължителния курс по Висша математика. То е незаменим самоучител в самостоятелната им работа.

Трета част – Линейна алгебра. Аналитична геометрия. Изследване на функции.

Първо издание

ISBN 954-90084-2-8(ч. 3)

ПРЕДГОВОР

Настоящото учебно пособие е предназначено за подпомагане на студентите от ВУЗ в самостоятелното овладяване на методите за решаване на задачите от курса по Висша математика от разделите „Линейна алгебра“, „Аналитична геометрия“ и „Изследване на функции“.

Застъпените задачи отговарят на материала, предвиден по програмите и учебните планове на ВУЗ. Във всеки раздел са дадени кратки теоретични сведения и формули, необходими за решаване на задачите за самостоятелни упражнения.

Някои от условията на задачите са взаимствани от наши и руски автори, други са давани често на семестриални изпити в различни ВУЗ, а една част от тях са съставени специално за това ръководство.

Авторът

Август, 1996 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

Действия с комплексни числа

Алгебричен вид на комплексно число:
$z = a + bi$; a – *реална част;* b – *имагинерна част.*

$$z_1 = a + bi; \qquad z_2 = c + di;$$

$$z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i; \quad 2 + 5i + 4 - 3i = 6 + 2i;$$

$$z_1 . z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 =$$

$$= ac + bci + adi - bd = ac - bd + (bc + ad)i;$$

$$(2 + 5i)(4 - 3i) = 8 + 20i - 6i - 15i^2 = 8 + 14i + 15 = 23 + 14i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + d_1} = \frac{a + bi}{c + di} . \frac{c - di}{c - di} =$$

$$= \frac{ac + bci - adi + bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{ac - bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2};$$

$$\frac{2 + 5i}{4 - 3i} = \frac{2 + 5i}{4 - 3i} . \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{8 + 20i + 6i + 15i^2}{16 - 9i^2} =$$

$$= \frac{8 + 26i - 15}{16 + 9} = -\frac{23}{25} + \frac{26i}{25}.$$

Степени на имагинерната единица:

$$i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 . i = -1i; \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1;$$

$$i^5 = i^2 i^3 = -1.(-i) = i; \quad i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1.$$

Тригонометричен вид на комплексни числа:
$z = a + bi$; $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *където* r *е модул на комплексното число и* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, *с което задължително проверяваме в алгебричния вид на числото.*

Зад. 1 Представете в тригонометричен вид числото $z = 1 + i$.

Решение: $a = 1; b = 1, r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{1} = 1$; $\varphi = \frac{1}{4}$. Тогава

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

Следователно числото е $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2);\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2);$$

$$z_1.z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];$$

$$z_1:z_2=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)];$$

$$z^n=r^n[\cos n\varphi+i\sin n\varphi];$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

където $k=0,1,2,\dots(n-1)$.

Зад. 2 Пресметнете $(1-i)^{10}$.

Решение: Най-напред ще намерим тригонометричния вид на комплексното число.

$$z=1-i;\ a=1,\ b=-1,\ r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\ \mathrm{tg}\varphi=-\frac{1}{1}=-1;$$

$$\varphi=135^\circ;\ z=\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Следователно $\varphi\neq 135^\circ$; $\varphi=360^\circ-45^\circ=315^\circ$.

$$z=\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315o)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

следователно $1-i=\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$. Тогава

$$z^{10}=(\sqrt{2})^{10}(\cos 3150^\circ+i\sin 3150^\circ)=32(0-i)=-32i,$$

където взехме пред вид, че $\sin 3150^\circ=\sin 35.90^\circ=0$; $\cos 3150=\cos 35.90^\circ=-1$.

Зад. 3 Пресметнете $\sqrt[3]{1+i}$.

Решение: В първата задача представихме $1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$. Тогава

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{45+2k.180^\circ}{3}+i\sin\frac{45+2k.180^\circ}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{45^\circ}{3}+i\sin\frac{45^\circ}{3}\right)=\sqrt[6]{2}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ);$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{225^\circ}{3}+i\sin\frac{225^\circ}{3}\right)=\sqrt[6]{2}(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ);$$

$$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{45^\circ+360^\circ}{3}+i\sin\frac{45^\circ+360^\circ}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Деление на полиноми и схема на Хорнер

Означението за деление е знакът $\underline{|\quad}$.

Например $x^4-1\,\dfrac{|x^2+1}{x^2-1}$ *или* $\dfrac{x^4-1}{x^2-1}=x^2+1$, *което може да се запише и така* $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$. *Начина на деление е следния: Например* $x^2-5x+6\,\underline{|x-2}$. *Делим старшият член на полинома* x^2 *на* x. *Получаваме* x, *който резултат записваме под хоризонталната черта* $x^2-5x+6\,\dfrac{|x-2}{x}$. *Сега умножаваме* x *по* $(x-2)$ *и получения резултат написваме под дадения полином.*

$$\begin{array}{rl}
x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2} \\
- \quad & x-3 \\
\underline{x^2-2x\quad} & \\
// \quad -3x+6 & \\
- \quad & \\
\underline{-3x+6} & \\
// \quad // &
\end{array}$$

Изваждаме двата полинома и резултата написваме под хоризонтална черта. Старшият член $(-3x)$ *на получения полином* $(-3x+6)$ *делим наново на* x *и получаваме* -3 $\left(\text{от } \dfrac{-3x}{x}=-3\right)$, *който резултат записваме до първото получено частно* x, *т.е.* $(x-3)$. *Умножаваме* (-3) *по* $(x-2)$ *и получения резултат нанасяме под последния резултат в получената табличка. Изваждаме получените резултати. Делението е точно и няма остатък. Можем да запишем, че*

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=x-3\quad\text{или}\quad x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Зад. 1 Пресметнете $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$.

Решение:

$$
\begin{array}{rl}
x^3-3x^2+3x-1 & \underline{|\ x-1} \\
-\quad x^3-x^2 & \ x^2-2x+1 \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad -2x^2+3x-1 & \\
-\quad -2x^2+2x & \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad x-1 & \\
-\quad x-1 & \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad {}^{\prime\prime} &
\end{array}
$$

Старшият член x^3 делим на старшия член x на полинома, на който делим. Получаваме $x^3 : x = x^2$. Умножаваме x^2 по $(x-1)$ и полученото произведение нанасяме под дадения полином за деление. Пишем хоризонтална черта и изваждаме двата полинома. Получаваме $-2x^2+3x-1$. Старшият член $(-2x^2)$ на този полином делим на старшия член x на делителя и получаваме $(-2x^2) : x = -2x$. Умножаваме $(-2x)$ по $(x-1)$ и полученото произведение нанасяме под последния полином. Получаваме $x-1$, който полином се дели точно на $(x-1)$ и частното едно прибавяме към другия резултат от делението, т.е. получихме x^2-2x+1.

Зад. 2 Извършете делението $\dfrac{x^2-6x+10}{x-3}$.

Решение:

$$
\begin{array}{rl}
x^2-6x+10 & \underline{|\ x-2} \\
-\quad x^2-2x & \ x-4 \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad -4x+10 & \\
-\quad -4x+8 & \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad 2 &
\end{array}
$$

Следователно $\dfrac{x^2-6x+10}{x-2} = x-4+\dfrac{2}{x-2}$, т.е. остатъкът 2 има знаменател полинома, на който делим.

Зад. 3 Извършете делението: $\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2-1}$.

Решение:

$$
\begin{array}{rl}
x^4+x^2-1 & \underline{|\ x^2-1} \\
-\quad x^4-x^2 & \ x^2+2 \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad 2x^2-1 & \\
-\quad 2x^2-2 & \\
\hline
{}^{\prime\prime}\quad 1 &
\end{array}
$$

Следователно $\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2-1} = x^2+2+\dfrac{1}{x^2-1}$.

Зад. 4 Извършете делението:

а) $\dfrac{x^4-x^3+6x^2-5x+5}{x^2+5}$; б) $\dfrac{x^5}{x^2+x+1}$.

Отг. а) x^2-x+1; б) $x^3-x^2+1+\dfrac{4-x}{x^3-x^2+1}$.

Зад. 5 Намерете корените на уравненията:

а) $x^3-6x^2+11x-6=0$;

Отг. 1, 2, 3.

б) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$;

Отг. $-1, 1, 2, 3$.

в) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$.

Отг. $1, 2, \pm i$.

г) $x^4+4x^3+6x^2+5x+2=0$.

Отг. $-1, -2, \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Матрици и детерминанти

Правоъгълна таблица от числа, разположени в m реда и n стълба от вида

$$
A = \left\|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{array}\right\|,
$$

се нарича матрица

Матрицата е правоъгълна, ако $m \neq n$ и квадратна, ако $m = n$. Квадратната матрица има равен брой редове и стълбове

$$A_n = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Елементите $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ образуват главния диагонал на матрицата.

Квадратна матрица от n-ти ред, на който елементите от главния диагонал имат стойност единица, а всичките останали елементи са нули, е единична матрица. Тя има вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = E_n$$

Ако в една матрица се сменят местата на редовете и стълбовете, получаваме транспонирана матрица, т.е. матрицата:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

има транспонирана матрица:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Действия с матрици

$A + B = C$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{n1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{n2}+b_{n2} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Умножение на матрица с число

Матрица се умножава с число, като всеки елемент на матрицата се умножи с числото.

Произведение на матрици $A.B = C$ $(B.A \neq A.B)$: Необходимо е матрицата A да има толкова стълба, колкото реда има B. Тогава елементът C_{ij} на матрицата C е сума от произведенията на елементите на i-тия ред на A със съответните елементи от j-тия стълб на B. Например:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 8 \end{Vmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{Vmatrix} 1.6+4.3 & 1.7+4.8 \\ 2.6+5.3 & 2.7+5.8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 18 & 39 \\ 27 & 54 \end{Vmatrix}.$$

(Умножаваме първия ред на A по I стълб на B и събираме получените произведения, умножаваме I ред на A с втория стълб на B и получените произведения съберем. Втория ред на A умножаваме с I стълб на B и получените произведения съберем. Втория ред на A умножаваме с втория стълб на B и получените произведения съберем.)

Матричното записване $A.X = B$ е кратък запис на записването

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Детерминанта от n-ти ред:

Това е квадратна таблица от вида:

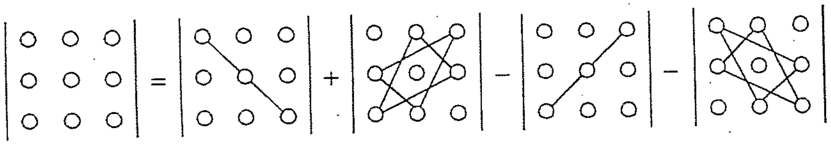
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

съставена от n^2 елемента (съответна на квадратна матрица).

Детерминанта от втори ред $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Например: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 4.1 = 2.$

Детерминанта от трети ред:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$



Пресмятането се извършва по три начина:

I – по правилото на триъгълниците;

II – по правилото на Сарус.

III – чрез адюнгираните количества.

I начин: Произведението на елементите по главния диагонал със знак $+$, т.е. $a_{11}a_{22}a_{33}+$ произведението на елементите по върховете на триъгълниците с една страна, успоредна на този диагонал $a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$ – произведението от елементите на другия диагонал $a_{33}a_{22}a_{13}$ – произведението на елементите по върховете на триъгълниците с една страна, успоредна на него $a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

II начин:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Преписваме след елементите на детерминантата първия и втория стълб и прекарваме диагоналите. Произведението на елементите, разположени по успоредните на главния диагонали вземаме със знак $+$, а на останалите диагонали – със знак $-$, т.е.

$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

Пресмятането на детерминантите извършваме като използваме съществено свойствата на детерминантите.

Свойства на детерминатите.

1. Детерминантата не променя стойността си, ако сменим местата на елементите на редовете и стълбовете.

2. Всяко твърдение вярно за редовете е вярно и за стълбовете.

3. Детерминанта с два еднакви реда е равна на нула.

4. Ако елементите на един ред (стълб) умножим с едно число, то и детерминантата се умножава със същото число.

5. Детерминанта с два пропорционални реда има стойност нула.

6. Ако елементите на един ред на детерминатата са сума от две събираеми, то и детерминантата може да се представи като сбор от две детерминанти (съответни на събираемите).

7. Ако един ред (стълб) на детерминантата е линейна комбинация на други редове (стълбове), то детерминантата е равна на нула.

8. Детерминантата не променя стойността си, ако към един ред (стълб) прибавим друг ред, умножен с произволно число.

III начин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\Delta_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

където A_{11}, A_{12}, A_{13} са съответните адюнгирани количества на елементите от първия ред, а (-1) е взето на степен, равна на сбора от номера на реда и стълба на съответния елемент. Например: a_{11} – I ред и I стълб, (-1) е на степен $1 + 1 = 2$. За a_{12} – първи ред и втори стълб, (-1) е на степен $1 + 2 = 3$ и т. н. Δ_{ij} са поддетерминантите на съответните елементи.

Всяка детерминанта може да се развие по елементите на който искаме ред или стълб и поддетерминантата получаваме, като зачертаем от детерминантата реда и стълба на елемента, по който развиваме. Например за a_{11} – зачертаваме I ред и I стълб и остава поддетерминантата: $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

По този начин при решаване на детерминантите се намалява реда на детерминантата.

Най-често обаче при пресмятане на детерминанти от по-висок

ред постъпваме като под главния диагонал се стремим да полу-
чим нули на триъгълник. Такава детерминанта е равна на про-
изведението на елементите от главния диагонал.

Например да пресметнем детерминантата:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

*Искаме под 1 в I стълб да получим нули. За целта I ред умножа-
ваме по (-2) и прибавяме към II ред, след това I ред умножаваме
по (-3) и прибавяме към трети ред, а след това умножаваме пак
I ред по (-4) и прибавяме към IV ред. Получаваме*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & -9 & -10 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -7 & -9 & 4 \\ -9 & -10 & 9 \end{vmatrix},$$

т.е. детерминанта от III ред, защото ако развием по елементите
на I стълб на последната детерминанта от IV ред остава само
първия елемент, тъй като останалите са нули. Ако желаем да
пресметнем детерминантата, се стремим да получим нули в ре-
довете или стълбовете и да развием по елементите на ред или
стълб, като с това се намалява реда на детерминантата. Ако в
последната получена детерминанта прибавим първия ред умно-
жен по (-1) към втория ред получаваме

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -6 & 0 \\ -9 & -10 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}.4 \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -9 & -10 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+3}.9 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 4.(20-54) + 9.(30-6) = 80.$$

До тук показахме едно възможно пресмятане на детерминан-
тата. На същата детерминанта ще покажем получаване на нули
на триъгълник под главния диагонал.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & -9 & -10 & 9 \end{vmatrix}.$$

За да получим нули под главния диагонал, желаем числото -5 от

*детерминантата да бъде $+1$ или -1 и да постъпим както преди
(втория ред умножен с подходяща константа да прибавяме към
следващите редове и да получим нули под главния диагонал.) Но
във втория, третия и четвъртия ред никъде няма единици, та
ако е възможно да сменим местата на два реда или два стъл-
ба и на мястото на (-5) да получим 1. Тъй като нямаме други
възможности ще разделим втория ред на (-5) и за да не се из-
мени стойността на Δ ще изнесем (-5) пред Δ като множител.
Получаваме*

$$\Delta = -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & -9 & -10 & 9 \end{vmatrix} \quad 7.9$$

*Умножаваме третия ред по 7 и 9 и го прибавяме съответно към
III и IV ред.*

$$-5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} - 9 & -\frac{28}{5} + 4 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} - 10 & -\frac{36}{5} + 9 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{10} & \frac{9}{5} \end{vmatrix}.$$

*Сега трябва на мястото на числото $-\frac{24}{5}$ желаем да получим 1.
За това изнасяме $-\frac{24}{5}$ като множител пред Δ и третия ред делим
на $-\frac{24}{5}$. Получаваме*

$$\Delta = -5.\left(-\frac{24}{5}\right) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{5} & \frac{9}{5} \end{vmatrix} .\frac{23}{5} =$$

$$= 24\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{vmatrix} = 24.1.1.1.\frac{10}{3} = 80.$$

За да избегнем действията с дробите, ще покажем и друг възможен начин за получаване на нули на триъгълник под главния диагонал на същата детерминанта.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} .2(-3)(-4) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & -9 & -10 & 9 \end{vmatrix} .(-1) =$$

втория ред умножен по (-1) прибавяме към третия ред

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & -10 & 9 \end{vmatrix} .(-1)$$

На мястото на -5 получихме -1 и втория ред, умножен по -2 прибавихме към третия ред. След това четвъртия стълб прибавяме към втория стълб и получаваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 9 \end{vmatrix} .(-2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -10 & 9 \end{vmatrix}$$

сменяме местата на последните два реда и получаваме

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -1.(-80) = 80.$$

Ранг на матрица и детерминанта

Ранга на матрица и детерминанта (Δ) се пресмята по един и същ начин. За краткост ранга на Δ ще означаваме с r.

Ако Δ се състои от 1 елемент, то $r = 1$.

Ако Δ е от втори ред и $\Delta \neq 0$, то $r = 2$.

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$

Ако Δ е от трети ред и $\Delta \neq 0$, то $r = 3$.

Ако Δ е от трети ред, но има поне една поддетерминанта от втори ред $\neq 0$, а останалите от II ред са нули, то $r = 2$.

Например в: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *един ред е нулев,* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0,\ r = 2.$

Ако при преобразувания на детерминантата получим следния вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad r = 3.$$

Ако получим детерминанта от вида

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad r = 3,$$

защото от нея можем да получим $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, *с* $r = 3$.

При детерминанти от по-висок ред се стремим да получим нули, и ако при преобразувания получим детерминанта от вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad r = 4.$$

Ако в последната детерминанта по главния диагонал вместо единици има други цифри, различни от нула, то $r = 4$ (С елементарни преобразувания винаги можем да получим единици).

Ранга на детерминанта от четвърти ред можем да определим по следния начин: Ако в детерминантата се съдържа поне една детерминанта от втори ред, различна от нула, пресмятаме детерминантите от трети ред, които я обхващат. Ако има поне една детерминанта от трети ред, $\neq 0$, то $r = 3$. Ако дадената детерминанта от четвърти ред е различна от нула, то $r = 4$.

Една детерминанта е от ранг r, когато има всички нейни поддетерминанти (минор) от ред $(r+1)$, равни на нула и една детерминанта от ред r да е различна от нула.

Зад. 1 Пресметнете ранга на матрицата

$$\left\|\begin{array}{rrrrr} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right\|.$$

Решение: Пресмятаме $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Пресмятаме

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} .(-2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & 4 \end{vmatrix} .5 =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 13 & 17 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 13 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= -117 + 34 - 39 = -122 \neq 0.$$

Разменяме местата на I и III стълб

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} .5(-2) \quad \to$$

Умножаваме I ред по 5 и -2 и го прибавяме съответно към II, III и IV редове.

$$\to \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -13 & -7 & -23 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 14 & 5 & 8 \end{vmatrix} \to - \begin{vmatrix} -13 & -7 & -23 \\ 3 & 0 & 9 \\ 14 & 5 & 8 \end{vmatrix} \neq 0,$$

където направихме елементарни преобразувания, следователно $r = 3$.

Елементарни преобразувания на матрица са:

1) смяна на местата на два реда (стълба);

2) умножение на ред (стълб) с произволно число, различно от 0;

3) прибавяне на един ред (стълб) към друг ред (стълб), умножен с някакво число.

Елементарните преобразувания не променят ранга на матрицата.

Например да определим ранга на матрицата:

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right\| \quad \text{последния ред делим на 2} \to$$

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right\| \quad \text{сменяме местата на I и II стълб} \to$$

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right\| .(-2)(-1)(-3)$$

Умножаваме I ред по -2 и го прибавяме към II ред, умножаваме I ред по -1 и го прибавяме към III ред, умножаваме I ред по -3 и го прибавяме към IV ред.

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -11 \end{array}\right\| .(-1)(+7)$$

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & -54 & -88 \end{array}\right\| \quad \text{последния стълб делим на 11} \to$$

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -54 & -8 \end{array}\right\| \quad \text{сменяме местата на III и IV стълб} \to$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{4}{11} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -54 \end{Vmatrix} .8 \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{4}{11} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{Vmatrix}.$$

Последния ред делим на -6 и получаваме

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & \frac{4}{11} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .(-2) \to$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & +\frac{26}{11} & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};$$ третия ред прибавяме към II ред $\to$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & +\frac{26}{11} & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$ последния ред прибавяме към II ред $\to$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & +\frac{26}{11} & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .(-6) \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & +\frac{26}{11} & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .(-17) =$$

Умножаваме последния ред по -17 и го прибавяме към I ред. Целта е да се получат нули.

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & +\frac{26}{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot\left(-\frac{26}{11}\right) \to$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$ следователно $r = 4$,

защото има четири цифри (единици) по главния диагонал, различни от нула и нули на триъгълник под и над главния диагонал.

Зад. 2 Определете ранга на матрицата:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{Vmatrix},$$ чрез елементарни преобразувания.

Решение: Умножаваме първия ред по $-2, 1, -1, -3$ и го прибавяме съответно към I, II, III и IV ред за да получим нули в I стълб.

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{Vmatrix} .(-2).1(-1)(-3) \to$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \to$$ сменяме местата на II и III ред.

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .(-3)(-6)4 \to$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 6 & -28 & -32 & -58 \\ 0 & 0 & 14 & 16 & 29 \end{Vmatrix} \to$$

Умножаваме втория стълб по $-3, -4, -7$ и го прибавяме съответно към III, IV и V стълб.

$$\begin{array}{c} \quad (-4)\ (-7) \\ \quad (-3) \end{array}$$

$$\rightarrow \left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 6 & -28 & -32 & -58 \\ 0 & 0 & 14 & 16 & 29 \end{array}\right\| \cdot(-2) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -32 & -58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \rightarrow \left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Следователно $r = 3$.

Системи линейни уравнения

Общия вид на линейна система от n алгебрични уравнения с n неизвестни е

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$D = \left| \begin{array}{l} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{array} \right|. \quad C\ D_1, D_2, \ldots D_n.$$

означаваме детерминантите, получени от D на системата, като съответно първи стълб, (втори и т.н.) заменим със стълба на свободните членове $b_1, b_2, \ldots b_n$.

Тогава решението на системата е

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \text{ където} D \neq 0.$$

Това са т.н. формули на Крамер. Ако $D = 0$ то системата е несъвместима и няма решение или неопределена и зависи от параметри.

Зад. 3 Решете системата:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{array} \right.$$

Решение:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 6 - 3 + 2 - 4 = 4;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 4 + 2 + 2 + 12 = 4;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 18 - 3 + 2 - 12 = 8;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 24 - 6 + 18 - 2 + 8 = -4;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{4} = 1; \ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2; \ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Когато системата е от по-висок ред, тя може да бъде решена също с формулите на Крамер, но това води до решаването на няколко детерминанти от по-висок ред. Това неудобство се избягва, като решим системата, като в разширената детерминанта (заедно със свободните членове) отделим нули на триъгълник, което ще покажем с решението на следващата система (по метода на Гаус).

Зад. 4 Решете системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{array} \right.$$

Решение: Образуваме съответната детерминанта

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right| (-2)(-3) \quad =$$

Умножаваме първия ред по (-2) и го прибавяме към втория ред, умножаваме първия ред по (-3) и го прибавяме към третия ред. Получаваме

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & 3 & 3 & -4 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ 2.5 \\ \\ \\ \end{array} \to$$

След смяна на местата на II и IV ред получаваме:

$$\to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -14 \end{array}\right| .(-1) \to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \end{array}\right| \to$$

Сменяме местата на III и IV ред.

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 \end{array}\right| .(3) \to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -20 \end{array}\right|,$$

от където $20x_4 = -20 \to x_4 = -1$; Заместваме в трети ред $\to$ $1x_3 + 6x_4 = -3 \to x_3 - 6 = -3; x_3 = 3$, което заместваме във втори ред: $x_2 - x_3 + x_4 = -2 \to x_2 - 4 = -2; x_2 = 2$. Получените стойности заместваме в първи ред: $x_1 + x_2 - x_4 = 4 \to x_1 = 4 - 2 + 1 = 3$; $x_1 = 3$. Решението е $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = -1$.

Когато в преобразуванията получим неопределена система, т.е. броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните, тогава за някои от неизвестните въвеждаме параметър.

Зад. 5 Решете системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{array}\right.$$

Решение: Ако разделим двете страни на второто уравнение на 2 получаваме пак първото уравнение, т.е. системата е с две равни уравнения. Тогава тя приема вида

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{array}\right.$$

Системата е неопределена тъй като съдържа две уравнения с три неизвестни. Тогава ще изберем едно от неизвестните за параметър. Нека $x_3 = t$, което заместваме в системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 6 + t \\ x_1 - x_2 = 4 - 3t \to x_1 = 4 - 3t + x_2 \end{array}\right.$$

$$2(4 - 3t + x_2) + 3x_2 = 6 + t;\ 5x_2 = 7t - 2;\ x_2 = \frac{7t-2}{5}$$

и

$$x_1 = 4 - 3t + \frac{7t-2}{5} = \frac{-8t+18}{5}.$$

Решението е $x_1 = \dfrac{-8t+18}{5}$, $x_2 = \dfrac{7t-2}{5}$ и $x_3 = t$.

Понякога може да се наложи за повече от едно неизвестно да се въведе параметър.

Зад. 6 Решете системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 10 \end{array}\right.$$

Решение: Забелязваме, че третото и четвъртото уравнение са получени от първото и второто, с умножение по 2. Тогава системата се свежда до решаване само на първите две уравнения, но с четири неизвестни. Тогава две от неизвестните въвеждаме за параметри.

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{array}\right.$$

Въвеждаме $x_1 = p, x_2 = r$ - (p, r – параметри). Заместваме в системата и получаваме:

$$\left|\begin{array}{l} -x_3 - x_4 = 3 - 2p - 3r|.2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 5 - p + r \end{array}\right.$$

$$+\left|\begin{array}{l} -2x_3 - 2x_4 = 6 - 4p - 6r \\ 2x_3 + 3x_4 = 5 - p + r \end{array}\right. \qquad x_4 = 11 - 5p - 5r$$

$$-x_3 = 3 - 2p - 3r + 11 - 5p - 5r = -7p - 8r + 14.$$

Решението е $x_1 = p;\ x_2 = r;\ x_3 = 7p + 8r - 14;\ x_4 = 11 - 5p - 5r$.

Хомогенни системи уравнения

Ако в системата свободните членове са нули, получаваме хомогенна система. Тя се решава по подобие на нехомогенните сис-

теми. Подреждаме нули под главния диагонал в детерминантата от коефициентите.

Зад. 7 Решете системата:

$$\left|\begin{array}{l} 7x_1-3x_2+2x_3=0\\ 3x_1+5x_2-3x_3=0\\ 7x_1-8x_2+5x_3=0 \end{array}\right.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2\\ 3 & 5 & -3\\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} .(-2)=\begin{vmatrix} 1 & -13 & 8\\ 3 & 5 & -3\\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} .(-3)(-7) =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -13 & 8\\ 0 & 44 & -27\\ 0 & 83 & -51 \end{vmatrix} .(-2)=\begin{vmatrix} 1 & -13 & 8\\ 0 & 44 & -27\\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} .9 = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{или}\quad \left|\begin{array}{l} x_1-13x_2+8x_3=0\\ -x_2=0\\ -5x_2+3x_3=0 \end{array}\right. ,\quad \text{откъдето}\quad x_2=0,$$

което заместваме в третото уравнение и получаваме $x_3=0$. Заместваме $x_2=0$ и $x_3=0$ в първото уравнение и получаваме $x_1=0$.

Зад. 8 Решете системата:

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4=0\\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4=0 \end{array}\right.$$

Образуваме детерминанта на системата и се стремим да получим нули под главния диагонал:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} .(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 9\\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} .(-2)(-3) =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} .(-3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогава $1x_4=0\to x_4=0$; $1x_3+3x_4=0$; $x_3=0$;

$1x_2+2x_3+3x_4=0\to x_2=0$;
$1x_1+1x_2+1x_3+1x_4=0\to x_1=0$.
Решението е $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$.

Зад. 9 Решете системите:

$$\text{а)}\ \left|\begin{array}{l} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4\\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6\\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6 \end{array}\right. \qquad \text{б)}\ \left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-4x_3+3x_4=0\\ x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2-x_3-x_4=0\\ 4x_1-3x_2+2x_3-4x_4=0 \end{array}\right.$$

Отг. а) $2,0,0,0$; б) $0,0,0,0$.

По аналогия на нехомогенни системи при някои случаи се въвеждат параметри (когато броя на неизвестните е по-голям от броя на уравненията).

Обратна матрица

Ако A е матрица, то обратната ѝ е A^{-1}. Нека E е единична матрица. Тогава

$$A\times A^{-1}=E\quad \text{или}\quad A^{-1}=E.\frac{1}{A};\quad A^{-1}=\frac{A^*}{\det A},$$

където A^* е детерминантата, която е получена от дадената, като елементите ѝ са заменени със съответните адюнгирани количества на дадената детерминанта.

Зад. 10 Намерете обратната матрица на A:

$$A=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Решение:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1+4-1-6=-2\neq 0.$$

Пресмятаме всички адюнгирани количества:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-6=-5;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3+2=-1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2;\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(Пред всяка детерминанта Δ_{ij} има коефициент $(-1)^{i+j}$).

Тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot A^* = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$A^* = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \left[A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \right].$$

II начин за намиране на обратната матрица – чрез елементарни преобразувания (**правят се само на редове или само на стълбове!**).

Зад. 11 Намерете обратната матрица на матрицата чрез елементарни преобразувания:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| .(-2)(-1)$$

Чрез елементарни преобразувания единичната матрица ще получим вляво. Получаваме

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\| .(-2) \rightarrow$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right\| =$$

Прибавяме третия ред към втория и третия ред умножен по $\left(-\frac{1}{2}\right)$

прибавяме към първия ред.

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right\| =$$

втория ред прибавяме към първия ред,

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right\| =$$

третия ред делим на -2 и получаваме

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right\|.$$

Следователно

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Решаване на матрични уравнения

$$AX = B; \quad X = A^{-1}B; \quad YA = C; \quad Y = CA^{-1}.$$

Зад. 12 Решете матричното уравнение:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Да определим A^{-1}.

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right\| .(-2) = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right\| .1 =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right\| .(-1) = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right\| .(-2) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right\|.$$

Следователно $A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|$. Тогава $X = A^{-1} \times B$.

$$X = \left\| \begin{matrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\| . \left\| \begin{matrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 3.4 - 5.2 & 3(-6) - 5.1 \\ -1.4 + 2.2 & -1.(-6) + 2.1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{matrix} \right\|.$$

Зад. 13 Решете матричното уравнение:

$$X. \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{matrix} \right\|.$$

$$\text{Отг. } X = \left\| \begin{matrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Изследване на функции

Намиране максимум и минимум на функция

1. Определяне дефиниционно множество на функцията (дефиниционната област).

2. Определяне интервалите на растене ($y' > 0$) и намаляване ($y' < 0$) на функцията.

3. Определяне вида на екстремума.

I начин: *При определяне интервалите на растене и намаляване на функцията, ако знакът се мени в два съседни интервала от (+) в (−), в граничната точка на интервалите функцията има максимум, а ако знакът се мени от (−) в (+), функцията има минимум.*

II начин: *а) Намираме корените на първата производна. б) Заместваме ги в израза на втората производна. Ако се получи положително число, то функцията в тази точка има минимум. Ако се получи отрицателно число, функцията има максимум. Ако се получи нула, функцията няма нито минимум, нито максимум в тази точка (т.е. инфлексна точка).*

4. Определяне стойността на екстремума – корена на първата производна заместваме в израза на дадената функция.

Определяне дефиниционното множество на функцията (дефиниционна област).

Ще го бележим със знака $D_1, D_2, \ldots, D_i$.

1. Ако функцията не съдържа аргумента в знаменателя, не съдържа логаритъм, корен, най-често дефиниционното множество D_1 е интервала $(-\infty; +\infty)$. Например линейната функция, квадратната, кубичната и т.н. тъй наречените многочленни функции имат най-често $D_1\ :\ x \in (-\infty; +\infty)$. Понякога функцията може да съдържа аргумента в знаменателя, но той да не се анулира за реални стойности на аргумента. Тогава вероятно е $D_1 : x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Ако функцията е дробна и знаменателят се анулира, то D_1 ще получим, като от цялата числова ос премахнем стойностите на аргумента, които анулират знаменателя (или от R-множеството на реалните числа извадим стойностите на аргумента, които анулират знаменателя).

Зад. 1 Определете дефиниционното множество (дефиниционна област) на функциите:

а) $y = \dfrac{2x+1}{3x-4}$, б) $y = \dfrac{5}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение: а) Намираме корена на знаменателя

$3x - 4 = 0, \quad x = \dfrac{4}{3}$. Следователно $D_1\ :\ x \in \left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

б) Намираме корените на знаменателя

$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Следователно $D_1\ :\ x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. Ако функцията съдържа четен корен в числителя, то подкоренната величина трябва да е неотрицателно число, т.е. $y = \sqrt[2n]{f(x)}$, то $f(x) \geq 0$. Ако четният корен е в знаменателя, то $f(x) > 0$. Ако коренът е нечетен – ограничения за подкоренната величина ще има само ако е в знаменателя – трябва $f(x)$ да е различна от нула.

Зад. 2 Намерете дефиниционното множество на функциите:

а) $y = \sqrt[3]{2x+1} - 4$, б) $y = \dfrac{12 - x}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

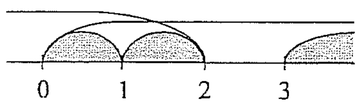
Решение: а) $D_1\ :\ x \in (-\infty; +\infty)$.

б) $2x+1 \neq 0, \quad x \neq -\dfrac{1}{2}, \quad D_1: \ x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right).$

4. Ако функцията съдържа логаритъм, т.е. $y = \log_a f(x)$, *тогава*
$f(x) > 0, \ a > 0$ *и* $a \neq 1$.

Зад. 3 Да се определи дефиниционното множество на функцията $y = \log_x(x^2 - 5x + 6)$.

Решение: $\left| \begin{array}{l} x^2-5x+6>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{array} \right.$ Решенията на системата са търсеното множество.



Решенията на първото неравенство са $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, а D_1 е $x \in (0; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Зад. 4 Да се намерят локалните екстремуми на функциите:

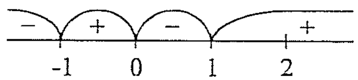
а) $y = x^4 - 2x^2$, б) $y = \sqrt{x^2-5x+6}$

в) $y = \dfrac{6x-1}{3x+2}$, г) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Решение: а) $D_1: \ x \in (-\infty; +\infty)$, функцията е непрекъсната, $y' = 4x^3 - 4x$.

Намираме корените ´и. $4x(x^2-1) = 0$. $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$.

Интервалите, в които $y' > 0$ са на растене на функцията, а където $y' < 0$, са на намаляване. Решаваме неравенството $4x^3 - 4x > 0$ по метода на интервалите, като нанесем корените на числовата ос и определим знаците на интервалите, на които те разделят числовата ос.



Вземаме произволно число например 2, което принадлежи на последния интервал и пресмятаме $y'(2) = 4.2^3 - 4.2 = 24 > 0$. Следователно знакът в последния интервал е $(+)$, а в съседните

имаме алтернативна смяна на знаците. Интервалите на растене са $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$, а на намаляване $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Следователно в т. $x = -1$ и $x = 1$ функцията има минимум, а в т. $x = 0$ има максимум. Големината на екстремума се определя, като корените на първата производна заместим в израза на дадената функция.

Пресмятаме $y(0) = 0^4 - 2.0^2 = 0, \quad y_{\max} = y(0) = 0$.
$y(1) = 1^4 - 2.1^2 = -1 = y_{\min}; \ y(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1 = y_{\min}$.
Определянето на вида на екстремума може да стане и по друг начин – чрез втората производна.

$$y'' = 12x^2 - 4; \quad y''(0) = 12.0^2 - 4 = -4 < 0$$

следователно функцията има максимум в т. $x = 0$;

$y''(1) = 12.1^2 - 4 = 8 > 0$, следователно функцията има минимум в т. $x = 1$

$y''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$ – минимум в т. $x = -1$.

б) За да определим дефиниционното множество, решаваме неравенството $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Решенията са $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. Определяме първата производна, приравняваме я на нула и намираме корените ´и.

$$y' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}, \quad 2x - 5 = 0, \quad x = \frac{5}{2},$$

но $x = \dfrac{5}{2} \notin D_1$. Следователно функцията няма екстремум.

в) $D_1: \ x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$

$$y' = \frac{6(3x+2) - (6x-1).3}{(3x+2)^2} = \frac{18x+12-18x+3}{(3x+2)^2} = \frac{15}{(3x+2)^2}.$$

y' е винаги положителна, т.е. функцията е винаги растяща и няма екстремум.

г) $D_1: \ x \in (-\infty; +\infty), \qquad y' = \dfrac{1(x^2+1) - x.2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$

Приравняваме числителя на първата производна на нула $1 - x^2 = 0$ и намираме $x_{1,2} = \pm 1$.

Втората производна ще намерим само на числителя на първата производна, тъй като знаменателят ´и е винаги положителен (когато е на четна степен и е под четен корен). $y'' = -2x, \ y''(1) = -2$. Следователно функцията има максимум в т. $x = 1$; $y''(-1) =$

2. Следователно функцията има минимум в т. $x = -1$. Стойностите на екстремумите са

$$y(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = y_{\max}; \qquad y(-1) = -\frac{1}{2} = y_{\min}.$$

Една функция може да има повече от един максимум или минимум. Тогава говорим за локални максимуми и минимуми или за локален екстремум. Най-големият от всички локални максимуми е абсолютен максимум, а най-малкият от всички локални минимуми – абсолютен минимум.

Изследване на функция

Правила за изследване на функция

1) Определяне на D_1 – дефиниционното множество.

2) Вид на функцията.

3) Интервали на растене и намаляване.

4) Определяне на максимум и минимум на функцията.

5) Забележителни точки (пресечни точки на графиката с координатните оси).

6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

7) Таблица.

8) Графика.

Понякога, когато не можем да съобразим каква е графиката на функцията в някакъв интервал, взимаме произволни точки от него.

Произволна точка от графиката на функция се намира, като на x дадем произволна стойност (това е абсцисата на точката), заместим в израза на дадената функция и намираме ординатата на точката.

Ако функцията е дробна, е необходимо да определим и асимптотите ѝ (това са допирателни към графиката).

I асимптота (вертикална) – намираме, като знаменателя на дадената функция приравним на нула (ако има корени).

II асимптота – хоризонтална $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

III асимптота – наклонена

$y = kx + n$, *където* $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *и* $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$.

Вид на функцията:

$f(x)$ е дробна функция, ако съдържа аргумента в знаменателя.

$f(x)$ е четна, ако D_1 е симетрично спрямо т. O и $f(-x) = f(x)$.

$f(x)$ е нечетна, ако D_1 е симетрична спрямо т. O и $f(-x) = -f(x)$.

Ако едно от горните условия не е изпълнено, то $f(x)$ е нито четна, нито нечетна.

Зад. 5 Да се изследва функцията и построи графиката ´и:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

$D_1 : x \in (-\infty; +\infty)$; $\quad y(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

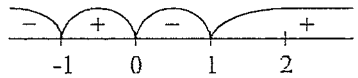
$y(-x) = y(x)$, следователно функцията е четна.

Да определим интервалите на растене и намаляване на функцията

$$y' = x^3 - x; \quad x^3 - x = 0; \quad x(x^2 - 1) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1;$$

$y'(2) = 2^3 - 2 = 6 > 0$ и в последния интервал поставяме знака $(+)$.



Интервалите на растене са със знак $(+)$, а на намаляване – със знак $(-)$. Следователно функцията има минимум в т.$x = 1$ и максимум в т.$x = 0$. Големината на максимума и минимум ще определим

$y(0) = 0 = y_{\max}$; $\quad$ т.$O(0,0)$ max

$y(1) = -\frac{1}{4}.1^4 - \frac{1}{2}.1^2 = -\frac{1}{4} = y_{\min}$; $\quad$ т.$A(1; -\frac{1}{4})$ min

$y(-1) = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^2 = -\frac{1}{4} = y_{\min}$; $\quad$ т.$B(-1; -\frac{1}{4})$ min

Функцията е цяла рационална и няма асимптоти. Да намерим пресечните точки на графиката с абсцисната ос. За целта приравняваме функцията на нула и намираме корените на полученото уравнение.

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0, \quad x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad x_1 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{т. } C(-\sqrt{2}; 0), \qquad \text{т. } D(\sqrt{2}; 0)$$

т. C и т. D са търсените точки.

Пресечните точки на графиката с ординатната ос намираме, като в дадената функция заместим x с нула.

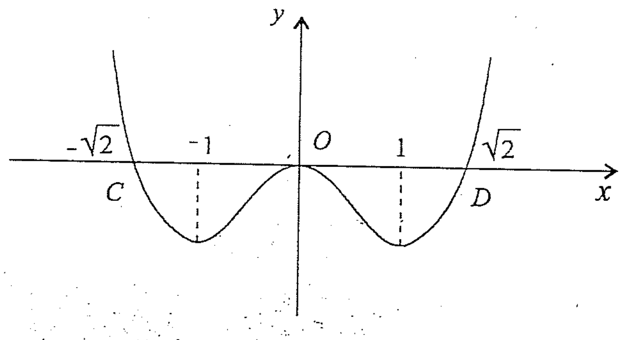
$$y(0)=0, \quad \text{т. } O(0;0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2x^2}\right)=+\infty.$$

Таблица.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



В последния хоризонтален ред поставяме стрелка надолу, когато във II хоризонтален ред над него, има знак $-$ и стрелка нагоре, когато знакът на y' е $+$. След това начертаваме графиката.

Зад. 6 Да се изследва функцията и построи графиката ´и:

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3.$$

Решение: $D_1:\ x\in(-\infty;+\infty)$

$$y(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-\frac{1}{3}(-x)^3=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3.$$

Следователно функцията е нито четна, нито нечетна.

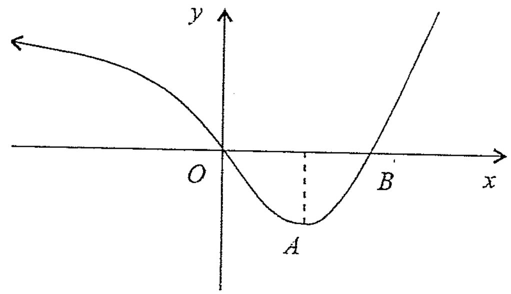
$$y'=x^3-x^2=x^2(x-1)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=1.$$

$$y''=3x^2-2x$$

$y''(0)=0$. Следователно в т. $x=0$ функцията няма екстремум. Т. $x=0$ е инфлексна точка. Т.O $(0,0)$.

$y''(1)=3.1^2-2.1=1$. Следователно в т. $x=1$ функцията има минимум.

$$y_{\min}=y(1)=\frac{1}{4}.1^4-\frac{1}{3}.1^3=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}, \quad \text{т. } A\left(1;-\frac{1}{12}\right)\text{ min.}$$



За да намерим пресечните точки на графиката с абсцисната ос дадената функция приравняваме на нула и намираме корените ´и, ако това е възможно.

$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3=0$. Корени

са $x=0$ и $x=\frac{4}{3}$;

т. $O(0,0)$, и т. $B\left(\frac{4}{3};0\right)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3x}\right)=+\infty$$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{12}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Зад. 7 Да се изследва функцията и построи графиката ´и:

$$y=\frac{x-1}{x-2}.$$

Решение: $D_1: \ x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

$$y(-x) = \frac{-x-1}{-x-2} = -\frac{x+1}{-x-2}, \quad y(-x) \neq \pm y(x).$$

Следователно функцията е нито четна, нито нечетна.

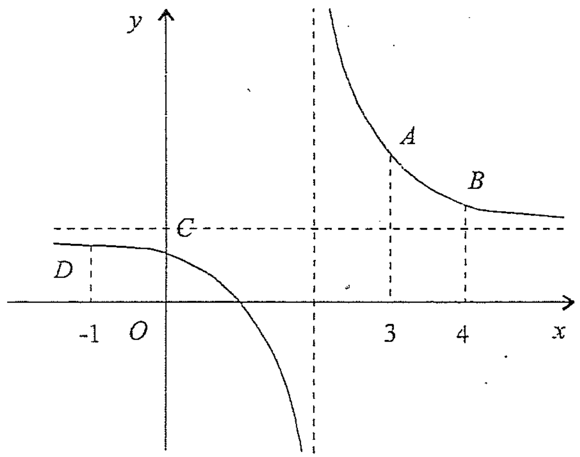
$$y' = \frac{1(x-2) - 1(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$y' < 0$. Следователно функцията е само намаляваща и няма нито максимум, нито минимум.

Асимптоти:

I: $x - 2 = 0, \qquad x = 2$

II: $y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(1-1/x)}{x(1-2/x)} = 1, \qquad y = 1$



Необходимо е да намерим по 2 точки надясно и наляво от вертикалната асимптота $x = 2$. Избираме $x = -1$; $x = 0$; $x = 3$; $x = 4$ (абсциси на точки). Ординати:

$$y(3) = \frac{3-1}{3-2} = \frac{2}{1} = 2, \text{т. } A(3;2); \; y(4) = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}, \ \text{т. } B\left(4; \frac{3}{2}\right);$$

$$y(0) = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}, \ \text{т. } C\left(0; \frac{1}{2}\right); \; y(-1) = \frac{2}{3}, \text{т. } D\left(-1; \frac{2}{3}\right).$$

Графиката в двата клона чертаем така, че да минава през дадените точки и да се приближава към асимптотите.

Графиката можем да начертаем и като вземем само една произволна точка и намерим симетричната ѝ спрямо пресечната точка на двете асимптоти и начертаем клоновете да се приближават към двете асимптоти.

Зад. 8 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y = \frac{x}{x^2+1}.$$

Решение: $D_1: \ x \in (-\infty; +\infty), \qquad y(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$ – функцията е нечетна. Следователно графиката на функцията ще е симетрична спрямо началото на координатната система, т.е. ще има централна симетрия спрямо т. $O\ (0,0)$.

$$y' = \frac{1(x^2+1) - x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = 0; \quad 1 - x^2 = 0; \quad x_{1/2} = \pm 1 : y'' = -2x$$

(y'' – намираме само на числителя, защото знаменателят на y' е положителен).

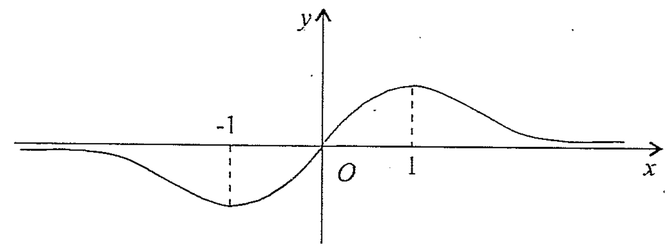
$y''(1) = -2 < 0$ максимум в т. $x = 1$

$y''(-1) = 2 > 0$ минимум в т. $x = -1$

$$y(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}, \quad \text{т. } A\left(1; \frac{1}{2}\right) \ \max$$

$$y(-1) = -\frac{1}{2}, \quad \text{т. } B\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \ \min.$$

Асимптоти: $x^2 + 1 = 0$ никъде не се анулира, следователно функцията няма вертикална асимптота.



$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2(1+1/x^2)} = 0$$

$y=0$ – хоризонтална асимптота – това е абсцисната ос. Наклонена асимптота: $y=kx+n$, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$,
$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x(x^2+1)}=0$.

Следователно функцията няма наклонена асимптота. Ако $x=0$, то $y(0)=0$; следователно функцията минава през т. $O\ (0;0)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Тъй като $f(x)$ е нечетна функция, графиката може да се начертае и като се използува централна симетрия спрямо т. $O\ (0,0)$.

Зад. 9 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y=\frac{x^2+1}{x}.$$

Решение: $D_1:\ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$y(-x)=\dfrac{x^2+1}{-x}$ – функцията е нечетна.

$y'=\frac{2x.x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

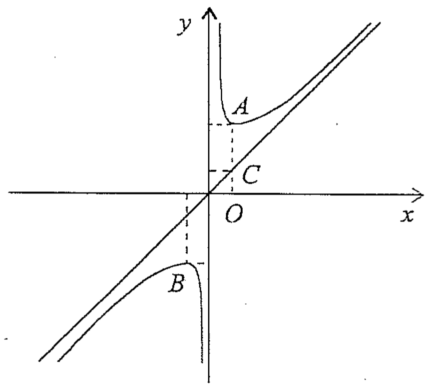
$y'=0;\quad x^2-1=0;\quad x_{1,2}=\pm1$

$y''=2x,\quad y''(1)=2>0$ минимум в т. $x=1$

$y''(-1)=-2<0$ максимум в т. $x=-1$

$y_{\min}=y(1)=2;\quad A(1;2)$ min

$y_{\max}=y(-1)=-2;\quad B(-1;-2)$ max.



Асимптоти: I – $x=0$ това е уравнение на ординатната ос.

II – $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=\pm\infty$ - няма хоризонтална асимптота.

III – Наклонена: $y=kx+n$; $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2}=1;\ k=1,\ n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{x^2+1}{x}-1.x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{x}=0,\quad n=0.$

Следователно наклонената асимптота е $y=x$ – права, ъглополовяща на първи квадрант. За да я начертаем вземаме 2 произволни точки от нея – т.$O(0;0)$, т. $C(1;1)$.

Зад. 10 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y=\frac{x}{(x-1)(x-2)}.$$

Решение: $D_1:\ x\in(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$

Функцията е нито четна, нито нечетна, защото D_1 е несиметрична спрямо т. $O(0;0)$.

$$y'=\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)'=\frac{x^2-3x+2-x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=$$

$$=\frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{2-x^2}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$2-x^2=0;\quad x=\pm\sqrt{2}$$

$y''=-2x$ (само на числителя)

$y''(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}<0$ максимум в т. $x=\sqrt{2}$

$y''(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}>0$ минимум в т. $x=-\sqrt{2}$

$y_{\max}=y(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}.\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{4\sqrt{2}+6}{16-18}=-(2\sqrt{2}+3)\approx-5,8,\quad$ т. $A(\sqrt{2};-5,8)$ max

$y_{\min}=y(-\sqrt{2})=\dfrac{-\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}+2}=\dfrac{-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}.\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}=$

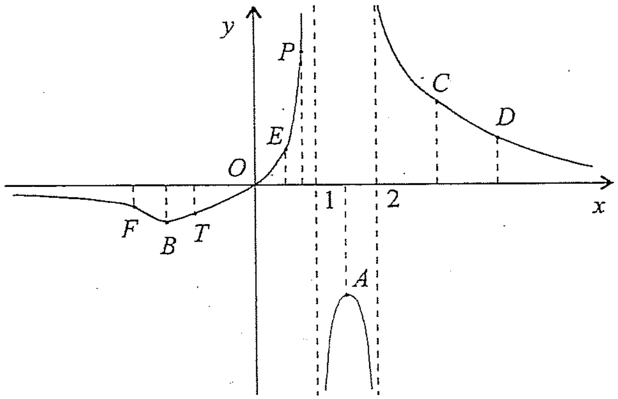
$=\dfrac{-4\sqrt{2}+6}{16-18}=2\sqrt{2}-3\approx-0,2,\quad$ т. $B(-\sqrt{2};-0,2)$ min

Асимптоти: вертикални – $x = 1$ и $x = 2$ – прави, успоредни на ординатната ос, хоризонтална

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim \frac{1}{x} = 0$$

$y = 0$ е абсцисна ос.

За да начертаем графиката, трябва да вземем поне по две точки надясно от $x = 2$ и две наляво от $x = 1$. Ще намерим подходящи точки от графиката



$x = -2$	$y(-2) = -\dfrac{1}{6}$	$F\left(-2; -\dfrac{1}{6}\right)$
$x = -1$	$y(-1) = -\dfrac{1}{6}$	$T\left(-1; -\dfrac{1}{6}\right)$
$x = 0$	$y(0) = 0$	$O(0; 0)$
$x = \frac{1}{2}$	$y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$	$E\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right)$
$x = 0,75$	$y(0,75) = 2,4$	$P(0,75; 2,4)$
$x = 3$	$y(3) = \dfrac{3}{2}$	$C\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$
$x = 4$	$y(4) = \dfrac{2}{3}$	$D\left(4; \dfrac{2}{3}\right)$

Зад. 11 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Решение: $D_1(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$y(-x) = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$ – функцията е нечетна. Следователно графиката

е симетрична спрямо началото на координатната система и за да начертаем графиката на дадената функция е достатъчно да вземем само точки наляво или надясно от ординатната ос, и намерим симетричните им спрямо началото на координатната система, което не сме показали в следващите функции. Предоставяме това на читателя.

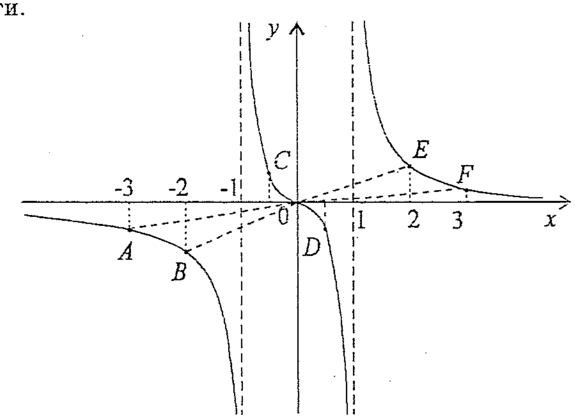
$$y' = \frac{1(x^2 - 1) - x(2x - 0)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-(1 + x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

Първата производна е винаги отрицателна, защото $1 + x^2 > 0$ винаги и знаменателят е винаги положителен (защото е четна степен). Следователно функцията е винаги намаляваща в D_1 и няма нито максимум нито минимум.

Асимптоти: $x^2 - 1 = 0$, $x = 1$ и $x = 1$ – има две вертикални асимптоти

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = 0$$

$y = 0$ – хоризонтална асимптота – това е абсцисната ос. Наклонена асимптота няма. За да начертаем графиката на функцията ще изберем подходящи точки наляво и надясно от вертикалните асимптоти.



$$x=-3 \quad y=-\frac{3}{8} \quad A\left(-3;-\frac{3}{8}\right)$$
$$x=-2 \quad y=-\frac{2}{3} \quad B\left(-2;-\frac{2}{3}\right)$$
$$x=-\frac{1}{2} \quad y=\frac{2}{3} \quad C\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$$
$$x=0 \quad y=0 \quad O(0;0)$$
$$x=\frac{1}{2} \quad y=-\frac{2}{3} \quad D\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)$$
$$x=2 \quad y=\frac{2}{3} \quad E\left(2;\frac{2}{3}\right)$$
$$x=3 \quad y=\frac{3}{8} \quad F\left(3;\frac{3}{8}\right)$$

Графиката чертаем така, че да се приближава към асимптотите. За де начертаем графиката е достатъчно да определим т. O, E и D и намерим симетричните им относно т. $O(0,0)$.

Зад. 12 Изследвайте функцията и начертайте графиката:
$$y=\frac{e^x}{x-1}$$

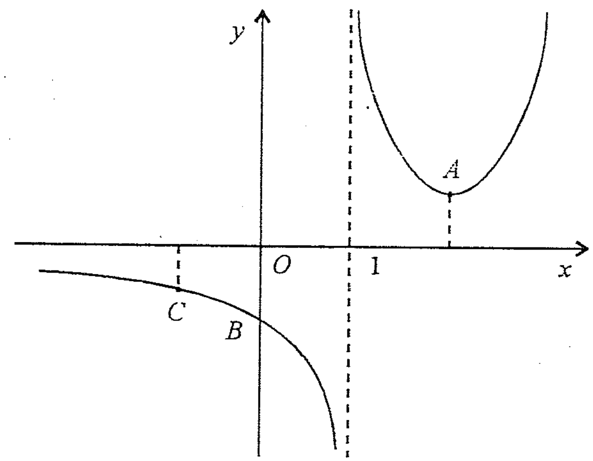
Решение: $x \neq 1, D: x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$
$$y'=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{xe^x-2e^x}{(x-1)^2}; \quad xe^x-2e^x=0, \text{ от където } x=2.$$
$$y''=e^x+xe^x-2e^x=xe^x-e^x.$$
(Намираме производната само на числителя, тъй като знаменателят е винаги положителен в D) $y''(2)=2e^2-e^2=e^2>0$. Следователно функцията има минимум в т. $x=2$ и $y_{\min}=y(2)=e^2$, т. $A(2;e^2)$ min.

Асимптоти: $x=1$ – вертикална, (от $x-1=0$);
$$y=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to\infty} e^x=\infty,$$
$$y=\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{(e^x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1}=0,$$
от $e^{-m}=\frac{1}{e^m} \to_{m\to\infty} 0$), следователно $y=0$ – хоризонтална

асимптота.

Наклонена асимптота:
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2-x)'}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{(e^x)'}{(2x-1)'}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{e^x}{2}=$$
$$=\begin{cases}\infty & \text{при } x\to+\infty\\ 0 & \text{при } x\to-\infty.\end{cases}$$
Следователно функцията няма наклонена асимптота.

Изпъкналост и вдлъбнатост:
$y''=xe^x-e^x$. В интервала $(1;+\infty)$, $y''=e^x(x-1)$ е положителна, защото $e^x>0$, $x-1>0$ и функцията е изпъкнала, а в $(-\infty;1)$, $y''<0$ защото $e^x>0$, но $x-1<0$. y'' не се анулира никъде ($x=1 \notin D$) и следователно функцията няма инфлексни точки.



За да начертаем графиката вземаме две произволни точки от $(-\infty;1)$.
$$x=0, y(0)=\frac{e^0}{0-1}=-1; B(0;-1).$$
$$x=-1, y(-1)=\frac{e^{-1}}{-2}=-\frac{2}{e}; C\left(-1;-\frac{2}{e}\right).$$

Зад. 13 Изследвайте функцията и начертайте графиката:
$$y=\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Решение: $D : x > 0;\ x \in (0; +\infty)$.

$$y' = \frac{2.\frac{1}{x}.\sqrt{x} - 2\ln x.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \ln x\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(2-\ln x)}{x} =$$

$$= \frac{(2-\ln x)}{x\sqrt{x}};\quad 2 - \ln x = 0,\quad \ln x = 2;\ x = e^2.$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}.x\sqrt{x} - (2-\ln x).\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^3}.$$

$$y''(e^2) = \frac{-e}{e^6} = -\frac{1}{e^5} < 0.$$

Следователно функцията има максимум в т. $x = e^2$ и

$$y_{\max} = y(e^2) = \frac{2.2}{e} = \frac{4}{e}\quad A\left(e^2, \frac{4}{e}\right)\max.$$

Асимптоти: $x = 0$ – вертикална;

$$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2.\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}.2.\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \to y = 0 \text{ – хоризонтална асимптота.}$$

Наклонена асимптота:

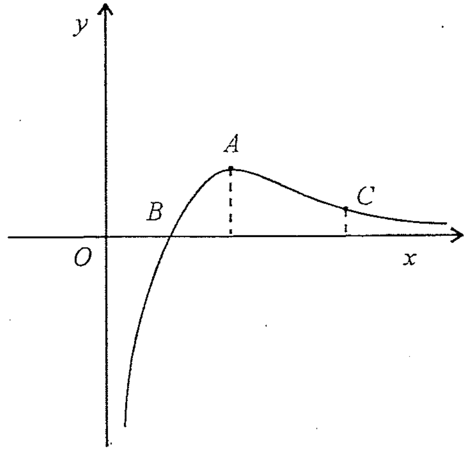
$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln x)'}{(x\sqrt{x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2.\frac{1}{x}}{\frac{3\sqrt{x}}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2.2}{3x\sqrt{x}} = 0,$$

няма наклонена асимптота.

$\ln x = 0,\quad x = 1$. Следователно графиката минава през т. $B(1; 0)$.

$$y'' = \frac{1}{x^3}\left[-\sqrt{x} - (2-\ln x)\frac{3}{2}\sqrt{x}\right] = -\frac{\sqrt{x}}{x^3}\left[1 + 3 - \ln x.\frac{3}{2}\right];$$

$$4 - \frac{3}{2}\ln x > 0;\quad -\frac{3}{2}\ln x > -4;\quad \ln x < \frac{8}{3};\quad x < e^{\frac{8}{3}}.$$



За $x < e^{\frac{8}{3}}$, $y'' < 0$ и функцията е вдлъбната, а за $x > e^{\frac{8}{3}}$, $y'' > 0$ и функцията е изпъкнала.

$$\text{За}\quad x = e^{\frac{8}{3}},\ y(e^{\frac{8}{3}}) = \frac{2\ln e^{\frac{8}{3}}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}} = \frac{2.\frac{8}{3}}{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{16}{3\sqrt[3]{e^4}},$$

т. $C\left(e^{\frac{8}{3}}; \frac{16}{\sqrt[3]{e^4}}\right)$ е инфлексна точка.

Зад. 14 Изследвайте функцията и начертайте графиката:

$$y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Решение: $D : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$y' = [(e^x - 1)^{-1}]' = -1(e^x - 1)^{-2}.e^x = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

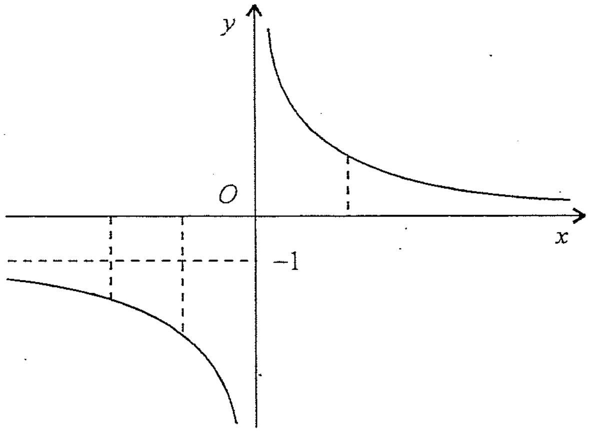
Числителят не се анулира никъде, следователно функцията няма екстремум. $y' < 0$ винаги, следователно функцията е намаляваща в D.

Асимптоти: $x = 0$ – вертикална (от $e^x - 1 = 0, x = 0$);

$$y = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x - 1} = 0,\quad y = 0 \text{ хоризонтална при } x \to +\infty$$

$$y = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x - 1} = -1,\quad y = -1 \text{ хоризонтална при } x \to -\infty,$$

където взехме на предвид, че $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \to 0$.



$y'' = -e^x$ (само на числителя) – отрицателна винаги, следователно функцията е вдлъбната и няма инфлексна точка, защото y'' не се анулира. Избираме точки от функцията, за да начертаем графиката.

$x = -1$ $y = \dfrac{1}{1/e - 1} = \dfrac{e}{1-e}$	$x = 1$ $y = e - 1$	$x = 2$ $y = \dfrac{1}{e^2 - 1}$

Зад. 15 Изследвайте функцията и начертайте графиката:

$$y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Решение: $D: x \neq 0; x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

$$y' = 1.e^{\frac{1}{x}} + x.e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0;$$

$e^{\frac{1}{x}} \neq 0$ и $1 - \dfrac{1}{x} = 0,\ x = 1$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}\left(-1 + \frac{1}{x} + 1\right) = e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^3},$$

$y''(1) = e > 0$ – минимум в т. $x = 1$; $y(1) = e$; т. $A(1; e)$ min.

Асимптоти: $x = 0$ – вертикална;

$y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$ няма хоризонтална асимптота

от $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и $e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$.

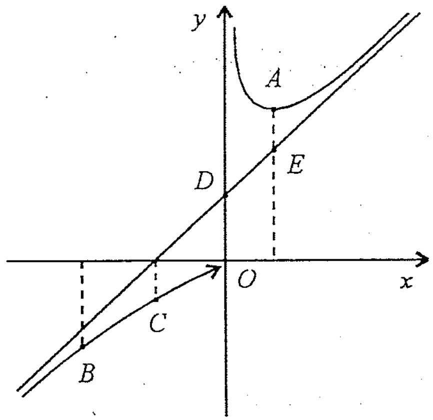
Наклонена асимптота:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [xe^{\frac{1}{x}} - x] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Следователно $y = x + 1$ – наклонена асимптота. y'' не се анулира никъде и следователно функцията няма инфлексна точка. $y'' = e^{\frac{1}{x}}.\dfrac{1}{x^3}$; $e^{\frac{1}{x}} > 0$ винаги, а знакът на y'' ще зависи от $\dfrac{1}{x^3}$. Ако $x \in (-\infty; 0)$ $y'' < 0$ и функцията е вдлъбната, а за $x \in (0; +\infty)$ $y'' > 0$ и функцията е изпъкнала. За да начертаем асимптотата $y = x + 1$ вземаме две точки $D(x = 0; y = 1)$ и $E(1; 2)$.



Вземаме произволни точки наляво от вертикалната асимптота (ординатната ос), за да начертаем другия клон на графиката на функцията:

$$x=-1\to y=-\frac{1}{e},\quad C\left(-1;-\frac{1}{e}\right).$$

$$x=-2,\ y=-\frac{2}{\sqrt{e}},\quad B\left(-2;-\frac{2}{\sqrt{e}}\right).$$

Зад. 16 Изследвайте функцията и начертайте графиката:

$$y=\sqrt[3]{3x^2-x^3}.$$

Решение: $D: x\in(-\infty;+\infty)$

$$y'=[(3x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}\frac{6x-3x^2}{\sqrt[3]{(3x^2-x^3)^2}};$$

$$6x-3x^2=0;\ 3x(2-x)=0;\ x_1=0,\ x_2=2.$$

$y''=6-6x$ (производната само на числителя на y', защото знаменателят е винаги положителен). $y''(0)=6>0$ – min в т. $x=0$; $y''(2)=-6<0$ – максимум в т. $x=2$.

$y(0)=0$; т. $O(0;0)$ min; $y(2)=\sqrt[3]{4}$, т. $A(2;\sqrt[3]{4})$ max.

Асимптоти: наклонена:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{3}{x}-1\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}\left(\frac{3}{x}-1\right)}=-1,\ (\text{където}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}=0\ \text{и}\ \sqrt[3]{-1}=-1).$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-k.x]=\lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt[3]{3x^2-x^3}+x]=$$

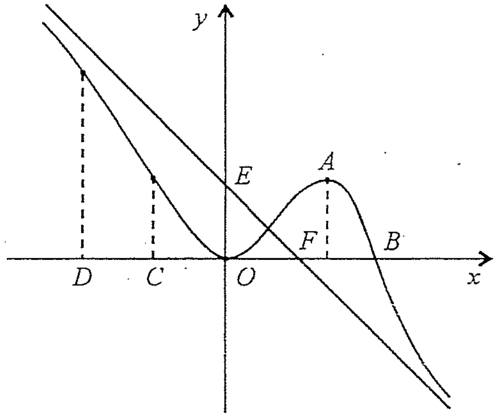
$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}-1}+1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}-1}+1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}=\frac{-\frac{3}{x^2}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x}-1\right)^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Следователно $y=-x+1$ е наклонена асимптота. От $3x^2-x^3=0$; $x^2(3-x)=0$, следва, че $x=3$ и $x=0$ са пресечни точки на графиката с абцисната ос, т.е. $B(3;0), O(0;0)$. За да начертаем по-точно графиката, ще вземем две точки наляво от т. $O(0;0)$: $x=-1$ и $x=-2$.

$$y(-1)=\sqrt[3]{4};\ \text{т.}C(-1;\sqrt[3]{4});$$

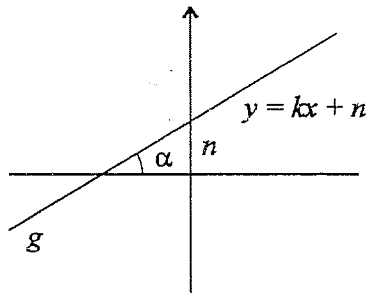
$$y(-2)=\sqrt[3]{20};\ \text{т.}D(-2;\sqrt[3]{20});$$



За да начертаем $y=-x+1$ вземаме т. $E(0;1)$ и $F(1;0)$.

Аналитична геометрия в равнината

Уравнение на права



Декартово, обикновено или уравнение на права с ъглов коефициент:

$$y=kx+n,\quad k=tg\alpha,$$

k – ъглов коефициент, n – отрез от ординатната ос.

Общо уравнение на права: $ax+by+c=0$.

Условие за успоредност на две прави:

$$k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Условие за перпендикулярност на две прави:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad \text{или} \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Уравнение на права през една точка: (Уравнение на сноп прави):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Уравнение на права през две точки:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Отрезово уравнение: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$

Нормално уравнение: $\dfrac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$

Разстояние от т. $M(x_1, y_1)$ *до правата* $g : ax + by + cz = 0$*:*

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}},$$

където знакът пред корена е обратен на този пред c.

Ъглополовяща на ъгъл между две прави:

$$\frac{a_1x + b_1y + c}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

Среда $M(x, y)$ *на отсечка* M_1M_2*:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ъгъл между две прави $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разстояние между две точки:

$$M_1M_2 = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пресечна точка на две прави — решението на системата, образувана от уравненията на двете прави.

В означенията ще ползваме „a :" – означава „правата a има уравнение", знака „ Z " – за принадлежност.

Зад. 1 Да се намери уравнение на права $b||a$, $a : 2x+3y-4 = 0$ и минаваща през т. $A(1; 2)$.

Решение: Правата има уравнение $b : y = k_2x+n_2; k_2||k_1$ (условие за успоредност на две прави). Определяме k_1 като определим y от уравнението на a. Коефициентът пред x в това уравнение е k_1.

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}; \quad k_1 = -\frac{2}{3} = k_2.$$

Но $A\,Z\,b$, следователно координатите на A, заместени в уравнението на b го удовлетворяват:

$$2 = -\frac{2}{3}.1 + n_2; \quad n_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Следователно $b : y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$ или $2x + 3y - 8 = 0$.

II начин: правата b има направляващ вектор $(2; 3)$, който е перпендикулярен на a и $b : 2x + 3y + r = 0$, но $A\,Z\,b$, следователно $2.1 + 3.2 + r = 0; r = -8$, $b : 2x + 3y - 8 = 0$.

Забележка: Ако правата a има уравнение $Ax + By + C = 0$, то векторът $\vec{v}(A; B)$ е нормален ($\perp$) на правата, а векторът $\vec{v}_1(-B; A)$ е колинеарен с правата (лежи върху нея или е успореден на нея).

III начин: b; $y - y_1 = k(x - x_1)$ или $b : \; y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 1)$, където $A(1; 2) = A(x_1, y_1)$ $\;k = \dfrac{2}{3}$.

Зад. 2 Да се намери уравнение на права $c\perp a$, $a : 2x+3y-4 = 0$ и минаваща през т. $A(2; 3)$.

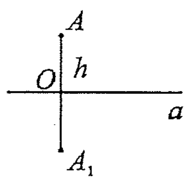
Решение: $c : y = k_2x + n_2$, където $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, $a : y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$; $k_1 = -\dfrac{2}{3}$; $k_2 = -\dfrac{1}{\frac{-2}{3}} = \dfrac{3}{2}$, $c : y = \dfrac{3}{2}x + n_2$. Т. $A\,Z\,C$, следователно $3 = \dfrac{3}{2}.2 + n_2$, от където $n_2 = 0$ и $c : y = \dfrac{3}{2}x$.

II начин: $c\perp a$. Следователно направляващ вектор на c е $\vec{p}(-b, a)$ (на правата $ax + by + c = 0$), т.е. $a : 2x + 3y - 4 = 0$, следователно $\vec{p}(-3; 2)$ и $c : -3x + 2y + r = 0$. Но $A\,Z\,c$, следователно $-3.2 + 2.3 + r = 0$; $r = 0$ и $c : -3x + 2y = 0$ или $y = \dfrac{3}{2}x$.

III начин: $\vec{p}(-3; 2)\perp\vec{r}(x - 2; y - 3)$. Следователно $c : -3(x - 2) + 2(y - 3) = 0$.

IV начин: $c: \ y - y_1 = k_2(x - x_1), \ \ A(2;3) = A(x_1;y_1)$,
$k_2 = -1 : \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} \ \ c : y - 3 = \dfrac{3}{2}(x-2)$ или $3x - 2y = 0$.

Зад. 3 Да се намери симетричната точка на т. $A(+2;1)$ относно правата $a : x + y - 1 = 0$.



Решение: 1) Построяваме права $h \begin{cases} \perp a \\ Z\, A \end{cases}$
2) $h \cap a = O$;
3) Определяме координатите на т. A_1 като т. O е среда на AA_1.

Пресмятания: 1) $h : y = k_2 x + n_2$, където $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, k_1 е ъглов коефициент на a. От уравнението на a определяме k_1:

$$y = -x + 1; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} = 1; \quad h : y = k_2 x + n_2.$$

Но т. $A(2;1)\, Z\, h$, следователно $1 = 1.2 + n_2$ (заместваме $x = 2$ и $y = 1$ в уравнението на h) и получаваме $n_2 = -1$. Тогава
$h : y = x - 1$.

II начин за намиране на h:
$\vec{p}(-1;1)$ и т. $A(2;1)$ определят h, т.е. $-1.2 + 1.1 + r = 0; r = 1$.
Следователно $h : -1x + 1y + 1 = 0$ или $h : x - y - 1 = 0$.

III начин за намиране на h:
$\vec{p}(-1;1) \perp \vec{r}(x-2; y-1)$, следователно
$h : -1(x-2) + 1(y-1) = 0$ (от условието за перпендикулярност на два вектора: $\vec{a} \perp \vec{b}$, ако $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$); $[\vec{a}(a_1;a_2)\vec{b}(b_1;b_2)]$.

IV начин за намиране на h:

$$y - y_1 = k_2(x - x_1); \quad A(2;1) = A(x_1, y_1); \quad k_2 = -\frac{1}{1} = 1;$$

$h : y - 1 = 1(x - 2)$, $h : x - y - 1 = 0$.

Решение на 2): Решаваме като система уравненията на h и a, т.е.

$$+\left| \begin{array}{l} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array} \right. \qquad 2x = 2; \ x = 1; \ y = 0.$$

Следователно $O(1;0)$. Но т. O е среда на AA_1 и следователно, ако $A_1(x_1;y_1)$, то $1 = \dfrac{2 + x_1}{2}$ и $0 = \dfrac{1 + y_1}{2}$, от където $x_1 = 0, y_1 = -1$,

т.е. $A_1(0;-1)$ е търсената точка.

Зад. 4 ΔABC има върхове $A(1;1), B(-3;1), C(4;5)$. Да се намерят:

а) уравненията на страните на ΔABC;
б) уравнение на медианата през върха A;
в) дължината на височината през върха B;
г) уравнение на ъглополовящата през върха C;
д) дължините на страните на триъгълника

Решение: Използваме уравнение на права през две точки:

$$(1) \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\left(\text{или } \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$, където определяме един връх за първи, а друг за втори (номерацията е без значение). Определяме x_1, x_2, y_1, y_2 и заместваме в 1). Нека $A(x_1;y_1) = A(1;1), B(x_2;y_2) = B(-3;1)$. Тогава

$$AB : y - 1 = \frac{1-1}{-3-1}(x-1) \ \text{ или } \ y - 1 = 0;$$

$AC \ \ A(x_1;y_1) = A(1;1); \ \ C(x_2;y_2) = C(4;5)$

$$AC : y - 1 = \frac{5-1}{4-1}(x-1) \ \text{ или } \ 4x - 3y - 1 = 0;$$

$$B(x_1;y_1) = B(-3;1); \qquad C(x_2;y_2) = C(4;5)$$

$$BC : y - 1 = \frac{5-1}{4+3}(x+3)$$

или $BC : 4x - 7y + 19 = 0$.

б) Нека т. $M(x;y)$ е среда на BC, където $B(-3;1)$ и $C(4;5)$. Тогава $x = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1+5}{2} = 3$; $M\left(\dfrac{1}{2};3\right)$; $A(x_1;y_1) = A(1;1); M(x_2;y_2) = M\left(\dfrac{1}{2};3\right)$. Тогава

$$AM : y - 1 = \frac{3-1}{\frac{1}{2} - 1}(x-1) \ \text{ или } \ AM : 4x + y - 5 = 0.$$

в) От а) намерихме $AC : 4x - 3y - 1 = 0$. Дължината на височината през върха B ще намерим по формулата за разстояние от точка до права

$$d=\frac{ax_0+by_0+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\quad \text{където}\quad B(x_0;y_0)\quad \text{т.е. } x_0=-3; y_0=1.$$

Тогава $h=\dfrac{4.(-3)-3.1-1}{\sqrt{4^2+3^2}}=-\dfrac{16}{5}.$

г) $AC: 4x-3y-1=0;\ BC: 4x-7y+19=0.$

Ще използваме формулата за ъглополовяща на ъгъл:

$$l_{1,2}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0$$

или

$$l_{1,2}=\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}}\pm\frac{4x-7y+19}{-\sqrt{4^2+7^2}}=0.$$

д) $A(x_1;y_1)=A(1;1);\ B(x_2;y_2)=B(-3;1)$. Прилагаме формулата за разстояние между две точки: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, като избираме една точка, без значение коя, за първа. Избираме A за първа точка. Тогава

$$AB=\sqrt{(-3-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{16}=4.$$

По аналогия намираме дължините и на другите две страни на триъгълника.

Зад. 5 Да се намери уравнение на права a, която сключва $\measuredangle 45^\circ$ с права $b: 3x-4y+2=0$ и минава през т. $A(1;2)$.

Решение: Ще използваме формулата за ъгъл между две прави.

$$(1)\qquad \mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2};\quad \varphi=45^\circ;\quad k_b=\frac{3}{4}=k_1.$$

Търсената права a има $k_a=k_2$, който ще намерим от (1):

$$\mathrm{tg}45^\circ=\frac{k_2-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}k_2}\quad \text{или}\quad 1=\frac{k_2-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}k_2},$$

от където $k_2=7$. Но $a\,Z\,A(1;2)$, следователно координатите на A удовлетворяват уравнението ´и или

$$a: y=k_2x+n_2;\ 2=7.1+n_2;\ n_2=-5 \text{ и } a: y=7x-5,$$

т.е. $7x-y-5=0$ или от $y-y_1=k_2(x-x_1)\to y-2=7(x-1)$.

Зад. 6 Да се намери уравнение на ъглополовящата на ъгъла, определен от правите $a: x-y+5=0$ и $b: 2x+y-6=0$.

Решение: Намираме нормалните уравнения на двете прави

$$a: \frac{x-y+5}{-\sqrt{1^2+1^2}}=0\ \text{ или }\ (x-y+5)\frac{1}{-\sqrt{2}}=0$$

и

$$b: \frac{2x+y-6}{\sqrt{2^2+1^2}}=0\ \text{ или }\ (2x+y-6)\frac{1}{\sqrt{5}}=0.$$

Тогава уравнението на двете ъглополовящи е

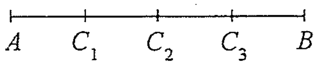
$$l_{1,2}: (x-y+5)\frac{1}{-\sqrt{2}}\pm\frac{2x+y-6}{\sqrt{5}}=0.$$

Зад. 7 Да се намери разстоянието от т. $A(3;-1)$ до правата $a: x-3y+4=0$.

Решение: Използваме формулата за разстояние от точка до права $d=\dfrac{ax_0+by_0+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, където $x_0=3, y_0=-1$. Тогава

$$d=\frac{1.3-(+3)(-1)+4}{-\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3+3+4}{-\sqrt{10}}=\frac{10}{-\sqrt{10}}=-\sqrt{10}.$$

Зад. 8 Отсечка AB с $A(1;-1)$ и $B(9;7)$ е разделена от три точки на четири равни части. Намерете координатите на точките на деление.



Решение: Използваме формулите:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

където x_1 и y_1 са координатите на т. A, а x_2 и y_2 са координатите на т. B. За C_1 - $\lambda=\frac{1}{3}$, за C_2 - $\lambda=1$, за C_3 - $\lambda=3$.

Тогава C_1ще има координати

$$x=\frac{1+\frac{1}{3}.9}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1+3}{\frac{4}{3}}=3; y=\frac{-1+\frac{1}{3}.7}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=1,\ \text{т.е. } C_1(3;1).$$

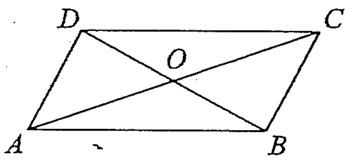
За C_2 $\lambda=1; x=\dfrac{1+9}{2}=5;\quad y=\dfrac{-1+7}{2}=3;\quad C_2(5;3).$

За C_3 $\lambda_1=3; x=\dfrac{1+3.9}{1+3}=\dfrac{28}{4}=7;\quad y=\dfrac{-1+3.7}{1+3}=5;\quad C_3(7;5).$

Зад. 9 Успоредник има върхове $A(2;4), B(6;2)$ и т. $O(0;1)$ – пресечна точка на диагоналите му. Намерете координатите на другите два върха на успоредника.

Решение: Точка O е среда на AC и BD. Ще използваме формулите за среда на отсечка $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}; y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Нека $C(x_1; y_1)$ и $D(x_2, y_2)$. Тогава координатите на т. O са среди и ще бъде изпълнено $0 = \dfrac{2 + x_1}{2}$, от където $x_1 = -2$ и $1 = \dfrac{4 + y_1}{2}$, от където $y_1 = -2$, т.е. $C(-2; -2)$. $0 = \dfrac{6 + x_2}{2}$, от където $x_2 = -6$ и $1 = \dfrac{2 + y_2}{2}$, от където $y_2 = 0$, т.е. $D(-6; 0)$.

Зад. 10 Намерете уравненията на страните BC и CD на успоредника $ABCD$, ако е дадено $AB : x+2y-3 = 0$, $AD : x+y-2 = 0$ и $C(10; 2)$.



Решение: $AB \cap AD = A$. Следователно координатата на т. A ще бъдат решенията на системата, образувана от уравненията на AB и AD.

$$-\left| \begin{array}{l} x + 2y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array} \right.$$

$y = 1$; $x = 1$; $A(1; 1)$.

През т. C прекарваме прави, съответно успоредни на AB и AD, което показахме в решението на зад. 1: или чрез ъгловите коефициенти, или чрез използване координати на вектор.

$k_{AB} = -\dfrac{1}{2} = k_{CD}$; $CD : y - y_1 = k(x - x_1)$; $C(10; 2) = C(x_1; y_1)$;

$$CD : y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 10) \text{ или } x + 2y - 14 = 0.$$

$CD : y = -\dfrac{1}{2}x + 7$; $k_{AD} = -1 = k_{BC}$ и $BC : y - y_1 = k_{BC}(x - x_1)$;

$$C(10; 2) = C(x_1; y_1); \quad y - 2 = -(x - 10); \quad BC : y = -1x + 12.$$

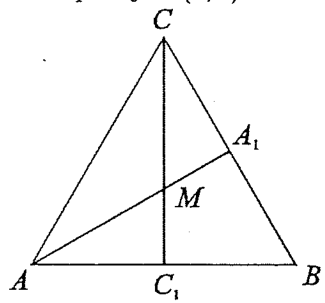
От $BC \cap AB = B$ определяме координатите на т. B (решение на системата от уравненията на BC и AB).

От $CD \cap AD = D$ определяме координатите на т. D (решение на системата от уравнения на CD и AD).

$$\left| \begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2}x + 7 \\ x + y - 2 = 0 \end{array} \right., \text{ намираме } x = -10; y = 12, D(-10, 12).$$

$$\left| \begin{array}{l} y = -x + 12 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{array} \right., \text{ намираме } x = 21, y = -9, B(-9, 21).$$

Зад. 11 Да се намерят координатите на върховете на равностранен триъгълник ABC, ако се знае, че $A(2, 2)$ и координатите на центъра му $M(3; 1)$.



Решение: За да определим координатите на т. A_1 използваме

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

където $\lambda = 2$. Тогава

$3 = \dfrac{2 + x.2}{1 + 2}$, от където $x = 3,5$.

$1 = \dfrac{2 + 2.y}{1 + 2}$, от където $y = \dfrac{1}{2}$, т.е. $A_1(3,5; 0,5)$. Нека $B(x_1; y_1)$ и $C(x_2, y_2)$. Тогава

$$3,5 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad 0,5 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

1) $BC : \left\{ \begin{array}{l} \perp AA_1 \\ \text{Z}\, A \end{array} \right. \qquad AA_1 : y - 2 = \dfrac{1 - 2}{3 - 2}(x - 2).$

$AA_1 : y - 2 = -(x - 2)$; $AA_1 : y - 2 = 2 - x$; $AA_1 : x + y - 4 = 0$.

$AA_1 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Z}\, A \\ \text{скл. } \sphericalangle 30^\circ \text{ с } AA_1 \end{array} \right. \qquad AB : k_1; \quad AA_1 \to k_2 = -1;$

$$\text{tg}30 = \frac{-1 - k_1}{1 + k_1(-1)}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1 - k_1}{1 - k_1}; \quad \sqrt{3}(-1 - k_1) = 1 - k_1;$$

$-\sqrt{3} - \sqrt{3}k_1 = 1 - k_1$; $k_1 - \sqrt{3}k_1 = 1 + \sqrt{3}$; $k_1(1 - \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$;

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{-2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2.$$

$AB : y - 2 = (\sqrt{3} - 2)(x - 2)$;

$BC : \left\{ \begin{array}{l} \perp AA_1 \\ \text{Z}\, A \end{array} \right. \qquad AA_1 \to k_1 = -1; \quad K_{BC} = \dfrac{-1}{-1} = 1;$

$BC : y - 0,5 = 1(x - 3,5)$; $y - 0,5 = x - 3,5$; $BC : x - y - 3 = 0$.

$$BC \cap AB = B \to \left| \begin{array}{l} x - y - 3 = 0 \to y = x - 3 \\ y - 2 = (\sqrt{3} - 2)(x - 2) \end{array} \right.$$

$$x-3-2=(\sqrt{3}-2)(x-2);\quad x-5=(\sqrt{3}-2)x-2\sqrt{3}+4;$$

$$x-(\sqrt{3}-2)x=9-2\sqrt{3};\quad x(1-\sqrt{3}+2)=9-2\sqrt{3};$$

$$x=\frac{9-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{27-6\sqrt{3}+9\sqrt{3}-6}{6}=$$

$$=\frac{21+3\sqrt{3}}{6}=\frac{3(7+\sqrt{3})}{6}=\frac{7+\sqrt{3}}{2};\quad x=\frac{7+\sqrt{3}}{2};$$

$$y=x-3=\frac{7+\sqrt{3}}{2}-3=\frac{7+\sqrt{3}-6}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2};$$

т.е. $B\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. Но т. A_1 е среда на BC, от където

$3,5=\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}+x_2\right)\frac{1}{2}$ и $0,5=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+y_2\right)\frac{1}{2}\to x_2.$

$$7=\frac{7+\sqrt{3}}{2}+x_2;\quad x_2=7-\frac{7+\sqrt{3}}{2}=\frac{14-7-\sqrt{3}}{3}=\frac{7-\sqrt{3}}{2}.$$

$$1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+y_2\to y_2=1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{2-1-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$C\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Зад. 12 Да се намери уравнение на права, която минава през пресечната точка на правите $g_1: 2x+3y-5=0$ и $g_2: 3x-y-2=0$ и отстои от т. $A(2;3)$ на разстояние $d=2$.

Решение: $g_1\cap g_2=P$. Решаваме като система уравненията на g_1 и g_2 и намираме $x_1=1, y_1=1$, т.е. $P(1;1)$. Тогава търсената права ще има уравнение $y-1=k(x-1)$, което в нормален вид (нормално уравнение на права) е

$$\frac{kx-y-k+1}{\sqrt{k^2+1^2}}=0.$$

Но т. $A(2;3)$ е на разстояние 2 от правата. Следователно от формулата за разстояние от точка до права $\left(d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ получаваме $\frac{k.2-3-k+1}{\sqrt{k^2+1}}=2$ или $2\sqrt{k^2+1}=k-2$; $4(k^2+1)=k^2-4k+4$; $3k^2+4k=0$; $k(3k+4)=0$; $k_1=0; k_2=-\frac{4}{3}$. Следо-

вателно през т. $P(1;1)$ минават две прави l_1 и l_2, на разстояние 2 от т. $A(2;3)$ с уравнения $l_1: y-1=0(x-1)$ или $y=1$ и $l_2: y-1=-\frac{4}{3}(x-1)$, т.е. $4x+3y-7=0$.

Зад. 13 Правата $a: 2x+y-3=0$ е едното рамо на ъгъл 2φ, на който ъглополовящата има уравнение $l: x-3y+2=0$. Да се намери другото рамо на ъгъла.

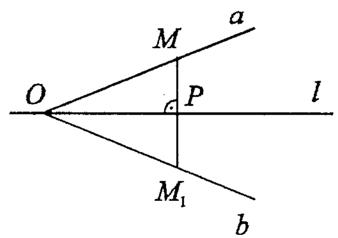
Решение: I начин: $a\cap l=O$. Решаваме като система уравненията на двете прави a и l и намираме координатите на върха на ъгъла $x=1; y=1$. Тогава търсената права $b: y-1=k(x-1)$ (уравнение на права през една точка или сноп прави). Търсим онази права от снопа, която сключва с l ъгъл, равен на ъгъла между l и a, като определим тангенсите на ъглите им.

$$a: y=-2x+3\to k_1=-2;\quad l: y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\to k_2=\frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2-\frac{1}{3}}{1+(-2).\frac{1}{3}}=\frac{-7}{3}:\frac{1}{3}=-7.$$

Тогава $-7=\frac{\frac{1}{3}-k}{1+\frac{1}{3}k}$ или $-7=\frac{1-3k}{3+k}$; $-21-7k=1-3k$;

$-4k=22$; $k=-\frac{11}{2}$ и $b: y-1=-\frac{11}{2}(x-1)$, т.е. $2y+11x-13=0$.



II начин: Избираме произволна т. M от правата a – например $M(0;3)$ (даваме произволна стойност $x=0$, заместваме в уравнението на a и намираме $y=3$). След това намираме симетричната точка M_1 на M относно l и $OM_1\equiv b$ – е търсената права.

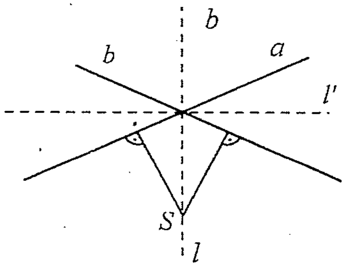
В зад. 3 са показани различни начини за определяне на симетричната точка и читателят може да избере най-подходящия за себе си.

$MM_1: y=kx+n$, но т. M Z MM_1, координатите ´и удовлетворяват уравнението на MM_1, т.е. $3 = k.0 + n$, от където $n = 3; k_l = \frac{1}{3}; k_b = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$. Тогава $MM_1 : y = -3x + 3$ или $y - y_1 = k_b(x - x_1)$; $M(0;3) = M(x_1, y_1) \to y - 3 = -3(x - 0)$; $y = -3x + 3$. Намираме пресечната точка на MM_1 и l, като решим като система уравненията им: $y = -3x + 3$ и $x - 3y + 2 = 0$. Получаваме последователно $x - 3(-3x+3) + 2 = 0$; $x = \frac{7}{10}; y = \frac{9}{10}$. Тогава $P\left(\frac{7}{10}; \frac{9}{10}\right)$. Но т. P е среда на MM_1 и $M_1(x_1; y_1)$. Тогава $\frac{7}{10} = \frac{x_1 + 0}{2}$, от където $x_1 = \frac{7}{5}$ и $\frac{9}{10} = \frac{y_1 + 3}{2}$, от където $y_1 = -\frac{6}{5}$ и $M_1\left(\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right)$. $OM_1 \equiv b; O(1;1)$, като използваме формулата за уравнение на права през две точки

$$l : y - 1 = \frac{-\frac{6}{5} - 1}{\frac{7}{5} - 1}(x - 1) \text{ или } 11x + 2y - 13 = 0.$$

За да проверим, дали сме избрали правилно уравнението на правата, избираме произволна точка от l и пресмятаме разстоянията ´и до правите a и b. Ако разстоянията имат различни знаци, сме пресметнали правилно. Избираме т. $S(4;2)$ от l и пресмятаме

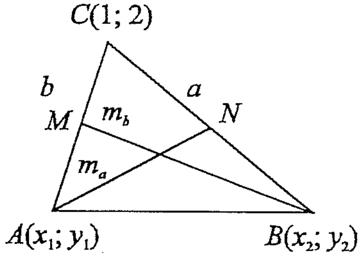
$$d_a = \frac{2.4 + 2 - 3}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}; \quad d_b = \frac{11.4 + 2.2 - 13}{\sqrt{11^2 + 2^2}} = \frac{35}{\sqrt{125}}.$$



Но разстоянията имат еднакви знаци, следователно разположението на правите е показано на чертежа. А търсената права ще бъде l', т.е. $l' \perp l$ и минаваща през т. $O(1;1)$;
$k_l = -\frac{11}{2}$; $k_{l'} = \frac{-1}{-\frac{11}{2}} = \frac{2}{11}$;

$$l' : y - 1 = \frac{2}{11}(x - 1) \text{ или } 2x - 11y + 9 = 0.$$

Зад. 14 Да се напишат уравненията на страните на триъгълник ABC, ако се знае един от върховете му $C(1;2)$ и уравненията на две от медианите му $m_a : 2x + 3y - 1 = 0$ и $m_b : x + y - 2 = 0$.



Решение:
$M\left(\frac{x_1 + 1}{2}; \frac{y_1 + 2}{2}\right)$, тъй като е среда на AC. Но $M Z m_b$, следователно координатите на т. M удовлетворяват уравнението на m_b, т.е.

(1) $$\frac{x_1 + 1}{2} + \frac{y_1 + 2}{2} - 2 = 0.$$

Но т. $A Z m_a$, следователно координатите ´и удовлетворяват уравнението на m_a т.е.

(2) $$2x_1 + 3y_1 - 1 = 0.$$

Решаваме като система 1) и 2) и намираме x_1 и y_1, което последователно е:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + y_1 - 1 = 0 \; |.(-2) \\ 2x_1 + 3y_1 - 1 = 0 \end{array} \right. \quad + \left| \begin{array}{l} -2x_1 - 2y_1 + 2 = 0 \\ 2x_1 + 3y_1 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$y_1 + 1 = 0; y_1 = -1; x_1 = 2$, т.е. $A(2; -1)$. По аналогия

$$N\left(\frac{1 + x_2}{2}; \frac{2 + y_2}{2}\right) \text{ и } N Z m_a, B Z m_b,$$

от където получаваме

(3) $$2\left(\frac{1 + x_2}{2}\right) + 3\left(\frac{2 + y_2}{2}\right) - 1 = 0$$

и

(4) $$x_2 + y_2 - 2 = 0.$$

Решаваме като система 3) и 4) и получаваме

$$\left| \begin{array}{l} 2x_2 + 3y_2 + 6 = 0 \\ x_2 + y_2 - 2 = 0 |.2 \end{array} \right. \quad - \left| \begin{array}{l} 2x_2 + 3y_2 + 6 = 0 \\ 2x_2 + 2y_2 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$y_2 = -10; x_2 = 12$ т.е. т. $B(12; -10)$. Уравненията на страните намираме като прилагаме формулата за уравнение на права през две точки: $A(2; -1)$, $B(12; -10)$, $C(1; 2)$.

$$AB : y + 1 = \frac{-10 + 1}{12 - 2}(x - 2) \text{ или } 9x + 10y - 8 = 0;$$

$$AC : y + 1 = \frac{2 + 1}{1 - 2}(x - 2) \text{ или } 3x + y - 5 = 0;$$

$$BC : y + 10 = \frac{2 + 10}{1 - 12}(x - 12) \text{ или } 12x + 11y - 34 = 0.$$

Зад. 15 ΔABC има $AC: x+y-2=0; BC: 2x+3y-5=0$, $AB: 4x-y-1=0$. Да се напише уравнение на височината към AB през връх C.

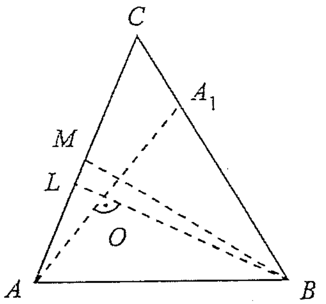
Решение: I начин: $BC\cap AC=C$. За да намерим координатите на т. C решаваме като система уравненията на AC и BC, т.е. $2x+3y-5=0$ и $x+y-2=0$, която има решение $x=1$ и $y=1$, $C(1;1)$. $k_{AB}=4; k_{h_c}=-\frac{1}{4}$ (от $k_2=-\frac{1}{k_1}$); $h_c: y-y_1=k(x-x_1)$, където $k=-\frac{1}{4}$, а x_1 и y_1 са координати на т. C, т.е. $x=1; y=1$ и $h_c: y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$ или $x+4y-5=0$.

II начин: h_c е от снопа прави през връх C и тогава h_c: $x+y-2+\lambda(2x+3y-5)=0$ или $(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y-2-5\lambda=0$, където $k=-\frac{1+2\lambda}{1+3\lambda}=-\frac{1}{4}$ (тъй като $k_{AB}=4$), от където $\lambda=-\frac{3}{5}$ и $h_c: x+4y-5=0$.

Зад. 16 Да се намерят уравненията на страните на ΔABC, ако се знае един негов връх $A(3;4)$ и

а) $m_b: x+y-2=0, l_b: 2x+y-3=0$;   б) $\begin{cases} m_b: x+y-2=0\\ l_c: 2x+y-3=0\end{cases}$

Решение: а) $m_b\cap l_b=B$. Решаваме като система уравненията на m_b и l_b и намираме $x=1$ и $y=1$, т.е. $B(1;1); MB=m_b; ML=l_b$.



Симетричната точка на т. A относно l_b точка A_1 лежи на BC. Следователно ако открием координатите на т. A_1, (а на т. B ги намерихме), като използваме формулата за уравнение на права през две точки, ще намерим уравнението на BC, т.е. уравнението на $BA_1\equiv$ уравнението на BC.

За да намерим уравнението на $AA_1\perp BL$ ще подходим по I начин от предишната задача.

$k_{l_b}=-2; k_{AA_1}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}; AA_1: y-4=\frac{1}{2}(x-3)$ (т. $A\,\mathrm{Z}\,AA_1$) или $x-2y+5=0$. $AA_1\cap l_b=O$. Координатите на т. O намираме,

като решим системата от уравненията на AA_1 и l_b, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} x-2y+5=0\\ 2x+y-3=0\,|.2\end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} x-2y+5=0\\ 4x+2y-6=0\end{array}\right.$$

$5x=1; x=\frac{1}{5}; y=\frac{13}{5}$; т. $O\left(\frac{1}{5};\frac{13}{5}\right)$. Но т. O е среда на AA_1 и нека $A_1(x_1;y_1)$. Тогава $\frac{1}{5}=\frac{3+x_1}{2}$, от където $x_1=-\frac{13}{5}$; $\frac{13}{5}=\frac{4+y_2}{2}$, от където $y_2=\frac{6}{5}$ и $A_1\left(-\frac{13}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Тогава $A_1B: y-1=\dfrac{\frac{6}{5}-1}{-\frac{13}{5}-1}(x-1)$ или $x+18y-19=0$.

$A_1\left(-\frac{13}{5};\frac{6}{5}\right)$ $B(1;1)$, т.е. $BC: x+18y-19=0$; $AB: y-1=\frac{4-1}{3-1}(x-1)$ или $3x-2y-1=0$.

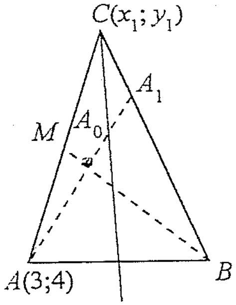
II начин за определяне уравнението на BC: Написваме уравнението на BC като уравнение на права през една точка B (сноп прави): $y-1=k(x-1)$. За да определим k_{BC} използваме, че $\mathrm{tg}_{(ABL)}=\mathrm{tg}_{(LBC)}$. Чрез формулата за ъгъл между две прави $\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$; $k_{AB}=\frac{3}{2}, k_{l_b}=-2; k_{BC}=k$. Тогава $\dfrac{\frac{3}{2}-(-2)}{1+\frac{3.(-2)}{2}}=\dfrac{-2-k}{1+(-2)k}$, от където $k=-\frac{1}{18}$ и $BC: y-1=-\frac{1}{18}(k-1)$ или $x+18y-19=0$.

б) $m_b: x+y-2=0,\ l_c: 2x+y-3=0;\ M\left(\frac{3+x_1}{2},\frac{4+y_1}{2}\right)$.

$M\,\mathrm{Z}\,m_b: \frac{3+x_1}{2}+\frac{4+y_1}{2}-2=0;\ C\,\mathrm{Z}\,l_c: 2x_1+y_1-3=0$

$$\left|\begin{array}{l} 3+x_1+4+y_1-4=0\\ 2x_1+y_1-3=0\end{array}\right. - \left|\begin{array}{l} x_1+y_1+3=0\\ 2x_1+y_1-3=0\end{array}\right.$$

$-x_1+6=0;\ x_1=6; y_1=-9; C(6;-9)$.



Намираме симетричната точка на A относно l_c, т.е. т. A_1, която лежи на BC. Тогава $A_1C \equiv BC$, $BC \cap m_b = B$ – така откриваме координатите на т. B. През т. A построяваме права $h\begin{cases} \perp l_c \\ Z\,A \end{cases}$

$$l_c \to k = -2;\ k_h = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2};$$

$$h : y - 4 = \frac{1}{2}(x-3)$$

или $x - 2y + 5 = 0$, $h \cap l_c = A_0$.

Затова решаваме като система уравненията на h и l_c и намираме координатите на т. A_0.

$$\left|\begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 |.(-2) \end{array}\right. \qquad + \left|\begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ -2x + 4y - 10 = 0 \end{array}\right.$$

$$+5y - 13 = 0;\ y = \frac{13}{5};\ x = \frac{1}{5};\quad A_0\left(\frac{1}{5}; \frac{13}{5}\right).$$

A_0 е среда на отсечката AA_1 и $A_1(x_3; y_3)$. Тогава $\frac{1}{5} = \frac{3+x_3}{2}$ и $\frac{13}{5} = \frac{4+y_3}{2}$, където $x_3 = -\frac{13}{5}$ и $y_3 = \frac{6}{5}$ и $A_1\left(-\frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Тогава $BC_0 \equiv A_1C$ ще има уравнение

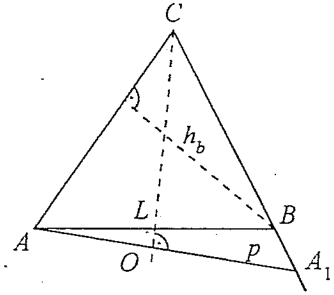
$$y + 9 = \frac{\frac{6}{5} + 9}{-\frac{13}{5} - 6}(x - 6) \text{ или } BC : 51x + 43y + 81 = 0.$$

Координатите на върха B ще намерим, като решим системата от две уравнения на BC и m_b, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 51x + 43y + 81 = 0 \\ x + y - 2 = 0, \end{array}\right.$$

от където $y = \frac{11}{8}$, $x = \frac{5}{8}$ и $B\left(\frac{5}{8}, \frac{11}{8}\right)$.

Зад. 17 Намерете уравненията на страните на ΔABC с връх $A(2;4)$, $h_b : x + y - 2 = 0$ и $l_c : 3x + y - 4 = 0$.



Решение: За намиране уравнение на BC:

I начин – чрез намиране координатите на т. A_1, симетрична на A относно l;

II начин: $\mathrm{tg}_{(ACL)} = \mathrm{tg}_{(LCB)}$.

За целта:

1) Построяваме права $p\begin{cases} \perp l_c \\ Z\,A \end{cases}$

2) $p \cap l_c = O$, от където определяме координатите на т. O (решаваме като система уравненията на p и l_c);

3) Координатите на т. A_1 намираме, като използваме, че O е среда на AA_1.

4) $AC\begin{cases} \perp h_b \\ Z\,A \end{cases}$

5) $AC \cap l_c = C$ (решаваме като система уравнения на AC и l_c и решението е – координатите на т. C);

6) Правата $A_1C \equiv$ правата BC (намираме като уравнение на права през две точки A_1 и C);

Пресмятания:

1) $k_{l_c} = -3; k_p = \frac{1}{3}$ $\left(\text{от } k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$; $p : y - 4 = k(x-2)$; $y - 4 = \frac{1}{3}(x-2)$ или $p : x - 3y + 10 = 0$;

2) $\left|\begin{array}{l} x - 3y + 10 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0, \end{array}\right.$ $x = 3y - 10; 3(3y-10) + y - 4 = 0$, от където $y = 3,4$ и $x = 0,2$, т.е. $O(0,2; 3,4)$;

3) Но т. O е среда на AA_1, от където следва, че $0,2 = \frac{2+x_1}{2}$ и $x_1 = -1,6$; $3,4 = \frac{4+y_1}{2}$; $y_1 = 2,8$, т.е. $A_1(-1,6; 2,8)$;

4) $k_{h_b} = -1; k_{AC} = 1$ $(AC \perp h_b)$; $AC : y - 4 = k(x-2)$ или $AC : y - 4 = x - 2$ или $x - y + 2 = 0$;

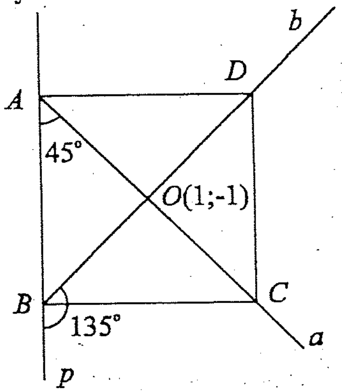
5) $\left|\begin{array}{l} x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0, \end{array}\right.$ от където $x = 1$, $y = 1$ и т. $C(1;1)$;

6) $A_1C[A_1(-1,6; 2,8)$ и $C(1;1)]$

$A_1C: y-2,8=\dfrac{1-2,8}{1+1,6}(x+1,6)$ или $9x+13y-22=0$.

II начин: Както е показано в I начин $AC: x-y+2=0$, $k_{AC}=1, k_{l_c}=-3$. От $\mathrm{tg}(ACL)=\mathrm{tg}(LCB)$ и $k_{BC}=k$ следва, че $\dfrac{1-(-3)}{1-1.(-3)}=\dfrac{-3-k}{1-(-3)k}$ или $\dfrac{4}{4}=\dfrac{-3-k}{1+3k}$, от където $k=-1$.

Зад. 18 Една от страните на квадрат лежи на права $p: x-2y+12=0$, а пресечната точка на диагоналите му е $O(1;-1)$. Намерете лицето на квадрата и уравнението на страните му.



Решение:

1) $a\{\ Z O$, сключва $\sphericalangle 45^\circ$ с p
2) $b\{\ Z O$, сключва $\sphericalangle 135^\circ$ с p
3) $a\cap p=A, b\cap p=B$;
4) O е среда на AC и BD и определяме координатите на т. C и D;
5) уравненията на страните BC, CD, AD с уравнение на права през две точки;
6) $S_{\text{КВ}}=?$ от $|AB|^2=S$.

От формулата за ъгъл между две прави $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, получаваме

$$\mathrm{tg}45^\circ=\frac{k_a-\frac{1}{2}}{1+k_a.\frac{1}{2}}, k_p=\frac{1}{2} \text{ или } 1=\frac{k_a-\frac{1}{2}}{1+k_a.\frac{1}{2}}\to k_a=3.$$

Следователно $a: y+1=3(x-1)$ или $a: 3x-y-4=0$. От т. $O\, Z\, a$ за

$$k_b\to\mathrm{tg}135^\circ=\frac{k_b-\frac{1}{2}}{1+k_b\frac{1}{2}};\quad -1=\frac{2k-1}{2+k};\ k_b=-\frac{1}{3}$$

$$b: y+1=-\frac{1}{3}(x-1); b: x+3y+2=0.$$

$$a\cap p=A\to\left|\begin{array}{l} x-2y+12=0\\ 3x-y-4=0\end{array}\right.\to\begin{array}{c} x=4, y=8\\ A(4;8)\end{array}$$

$$b\cap p=B\to\left|\begin{array}{l} x-2y+12=0\\ x+3y+2=0\end{array}\right.\to\begin{array}{c} x=-8, y=2\\ B(-8;2)\end{array}$$

Но т. O е среда на AC и BD, $C(x_1,y_1), D(x_2,y_2)$. Следователно

$$\left.\begin{array}{l} 1=\dfrac{4+x_1}{2}\to x_1=-2\\ -1=\dfrac{8+y_1}{2}\to y_1=-10\end{array}\right|\to C(-2;-10)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1=\dfrac{-8+x_2}{2}\to x_2=10\\ -1=\dfrac{2+y_2}{2}\to y_2=-4\end{array}\right|\to D(10;-4)$$

$$|AB|=\sqrt{(-8-4)^2+(2-8)^2}=\sqrt{180};\quad S=(\sqrt{180})^2=180.$$

$BC: y-2=\dfrac{-10-2}{-2+8}(x+8)$ или $2x+y+14=0$.

По аналогия намираме CD и AC с уравнение на права през две точки.

Вектори

$$\vec{a}(a_1,a_2,a_3), \vec{b}(b_1,b_2,b_3).$$

Да се намерят координатите на вектор $\vec{c}$, който е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2\end{array}$$

Тогава $\vec{c}(a_2b_3-b_2a_3; a_3b_1-b_3a_1; a_1b_2-a_2b_1)$ *или*

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(a_2b_3-b_2a_3)+\vec{j}(b_1a_3-a_1b_3)+\vec{k}(a_1b_2-a_2b_1).$$

Скаларно произведение на два вектора:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2$$

Векторно произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=a_1b_2-a_2b_1$$

Лице на триъгълник:

$$S=\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}),$$

за ΔABC в равнината

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix},\ \text{където}\ A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3).$$

Ако $\vec{a}\perp\vec{b}$, *то* $\vec{a}.\vec{b}=0$ *или* $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

$|\vec{a}|=\sqrt{a^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ – *формула за дължина на вектор.*

Векторът $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ *е перпендикулярен на равнината, определена от* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. $\vec{a},\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *образуват в този ред дясно ориентиран тетраедър.*

Смесено произведение на три вектора:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}.$$

Двойно векторно произведение:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b}).\vec{c}$$

Зад. 19 Пресметнете лицето на ΔABC, където $A(1,2,3)$, $B(2,1,3),C(0,3,-2)$.

Решение: $\vec{AB}(2-1,1-2,3-3)$ или $\vec{AB}(1,-1,0)$

$\vec{AC}(0-1,3-2,-2-3)$ или $\vec{AC}(-1,1,-5)$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}|[(-1)(-5)-1.0]i+j[0.(-1)-(-5).1]+k[1.1-(-1)(-1)]|=$$

$$=\frac{1}{2}|5i+5j+0k|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2+0^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25+25+0}=\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Зад. 20 Пресметнете координатите на вектор, перпендикулярен на векторите $\vec{a}(2,1,3)$ и $\vec{b}(1,2,-1)$.

Решение: Нека търсеният вектор означим с $\vec{c}$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=i[1.(-1)-2.3]+j[3.1-(-1).2]+k[2.2-1.1]=-7i+5j+3k.$$

Тогава $\vec{c}(-7,5,3)$.

Обем на тетраедър $V=\dfrac{B.h}{3}$, където B е лицето на основата му, а h е височината към нея.

Смесено произведение на три вектора $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

където $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3),\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$.

Обем на тетраедър $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}|(\vec{AB}\times\vec{AC}).\vec{AD}|$ или

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix},\ \text{където}\ \begin{array}{l}A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),\\ C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4).\end{array}$$

Най-често височината на тетраедър пресмятаме, като ползваме формулата за обем на тетраедър. Намираме B – лицето на основата на тетраедъра и заместваме във формулата $V=\dfrac{1}{3}.BH$, от където $H=\dfrac{3V}{B}$.

Зад. 21 Пресметнете дължината на височината през връх D на тетраедъра $ABCD$, ако

$$A(1,3,2),B(2,1,1),C(-1,2,0),D(2,2,1).$$

Решение: Определяме координатите на $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$.

$$\vec{AB}(1,-2,-1),\vec{AC}(-2,-1,-2),\vec{AD}(1,-1,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1\\ -2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=1+4-2-1-2+4=4\neq 0.$$

Следователно точките A,B,C и D не лежат в една равнина.

$$V_{ABCD}=\frac{B.h}{3},\quad B=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}|i[(-2)(-2)-(-1)(-1)]+j[(-1)(-2)-(-2).1]+$$

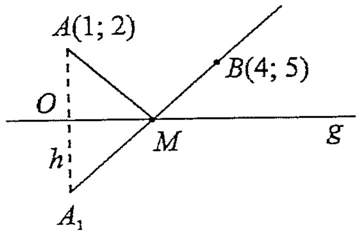
$$+k[1.(-1)-(-2)(-2)]=\frac{1}{2}|3i+4j-5k|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+5^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{50}=\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.4 = \frac{2}{3}.$$

Тогава $\frac{2}{3} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.\frac{h}{3}$, от където $h = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Зад. 22 От т. $A(1,2)$ към правата g с уравнение $x+y-1=0$ пада лъч, който след отрязването си от g попада в т. $B(2,5)$. Намерете уравненията на падащия и отразения лъч.



Решение: Точка A_1 е симетрична на A относно g.
1) $h\begin{cases} \perp g \\ \ni A \end{cases}$ 2) $h \cap g = 0$; 3) A_1 симетрична на A относно g; 4) A_1, B – отразения лъч; 5) $A_1B \cap g = M$; 6) AM – падащ лъч.

Пресмятания: 1) $h: y - y_1 = k(x - x_1)$; $g: y = -x + 1$, следователно $k_g = -1$. Тогава $k_h = \frac{-1}{-1} = 1$. Но т. $A(1,2)$ лежи на h и следователно $y - 2 = 1(x-1)$ или $h: x - y + 1 = 0$;

2) Решаваме системата уравнения на h и g и намираме координатите на т. O

$$+\left|\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right. \quad 2x = 0; x = 0; y = 1; O(0;1);$$

3) Т.O е среда на AA_1. Нека $A_1(x_1;y_1)$. Тогава $0 = \frac{1+x_1}{2}$ и $1 = \frac{2+y_1}{2}$, от където $x_1 = -1$ и $y_1 = 0$, т.е. $A_1(-1;0)$;

4) $A_1(-1;0) = A_1(x_1,y_1)$; $B(2;5) = B(x_2,y_2)$ заместваме в уравнението на права през две точки и получаваме

$$y - 0 = \frac{5-0}{2+1}(x+1) \quad \text{или} \quad 5x - 3y + 5 = 0$$

е уравнението на A_1B – отразения лъч;

5) $\left|\begin{array}{l} 5x - 3y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right.$, от където $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

6) $A(1,2), M\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ – заместваме координатите в уравнението на права през две точки и получаваме $3x - 5y + 7 = 0$.

Зад. 23 Намерете уравнението на ъглополовящата на ъгъла, образуван от правите $a: x+y-1=0$ и $b: 2x-y+4=0$, в който лежи т. $C(1;-2)$.

Решение: Намираме разстоянията от т. C до правите a и b. За целта във формулата за разстояние от точка до права $d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ заместваме за всяка права поотделно координатите на т. C и получаваме

$$d_a = \frac{1.1 + 1.(-2) - 1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$d_b = \frac{2.1 - 1.(-2) + 4}{-\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8}{-\sqrt{5}}.$$

И двете разстояния са с еднакви знаци и тогава ъглополовящата е

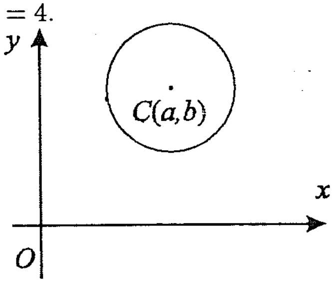
$$\frac{x+y-1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2x-y+4}{-\sqrt{2^2+1^2}}.$$

Криви от втора степен

Окръжността има уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, *където* $C(a,b)$ *е центърът ѝ и* r *е дължината на радиуса. Ако* $a = 0$ *и* $b = 0$ *получаваме централно уравнение на окръжност* $x^2 + y^2 = r^2$.

Параметрично уравнение на окръжност: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

Зад. 24 Намерете уравнение на окръжност с център $C(-3,4)$ и $r = 4$.



Решение: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4^2$, разкриваме скобите, извършваме приведение и получаваме $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$.

Зад. 25 Дадени са кривите с уравнения:
а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 10 = 0$.

Кои от тях са уравнения на окръжности и определете координатите на центровете и дължините на радиусите им.

Решение: Тъй като уравнението на окръжност е $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, то ще се опитаме да преобразуваме горните уравнения в този вид и ще определим a, b и r.

а) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$;

$x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4-4=0, (x-1)^2+(y-2)^2=9$.

Следователно $a=1, b=2, r^2=9, r=3$ или $C(1;2)$ и $r=3$.

б) $x^2+y^2-4x-6y=0$;

$x^2-4x+4-4+y^2-6y+9-9=0, (x-2)^2+(y-3)^2=13$,

от където $C(2;3)$ и $r=\sqrt{13}$.

в) $x^2+y^2-3x-2y+10=0$;

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2-2y+1-1+10=0,$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=-\frac{27}{4}.$$

Получаваме $r^2=-\dfrac{27}{4}$, т.е. горното уравнение не е на окръжност.

Зад. 26 Определете взаимното положение на точките $A(1,0)$ и $B(0;-2)$ и окръжността $x^2+y^2-2x-4y-1=0$.

Решение: Заместваме координатите на всяка от точките в уравнението на окръжността на мястото на x и y. Ако получим положително число, точката е вън от окръжността, ако е 0 – лежи на окръжността, ако е отрицателно число е вътре в окръжността.

За т. $A(1;0) \to 1^2+0^2-2.1-4.0-1=-2$ – следователно т. A е вътре в окръжността.

За т. $B(0;-2) \to 0^2+(-2)^2-2.0-4(-2)-1=4+8-1=11$ – следователно т. B е вън от окръжността.

Зад. 27 Намерете уравнение на окръжност, която минава през три дадени точки $A(1;1), B(0;2)$ и $C(0;4)$.

Решение: Заместваме координатите на точките в уравнението на окръжността на мястото на x и y, решаваме получената система и намираме a, b и r.

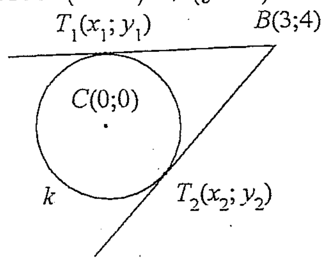
$$\left|\begin{array}{l}(1-a)^2+(1-b)^2=r^2\\(0-a)^2+(2-b)^2=r^2\\(0-a)^2+(4-b)^2=r^2\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}1-2a+a^2+1-2b+b^2=r^2\\a^2+4-4b+b^2=r^2\\a^2+16-8b+b^2=r^2\end{array}\right.$$

Изваждаме първото и второто уравнение, а след това второто и третото и получаваме

$$\left|\begin{array}{l}-2a+4b-2b-2=0\\4b-12=0 \to b=3,\end{array}\right.$$

което заместваме в първото уравнение на последната система и получаваме $-2a=-4, a=2$, т.е. $C(2;3)$. Заместваме стойностите на a и b и получаваме $r:(1-2)^2+(1-3)^2=r^2, 1+4=r^2; r=\sqrt{5}$. Следователно уравнението на окръжността е $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

Зад. 28 Намерете уравнение на допирателната към окръжността: $(x-1)^2+(y-3)^2=9$ в т. $A(2;0)$.



Решение: Координатите на т. $A(1,0)$ заместени в уравнението на окръжността го удовлетворяват, т.е. $9=9$. Следователно т. A лежи на окръжността. Уравнението на допирателната е $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$, където $M_1(x_1,y_1)\equiv A(2,0)$ или

$$t:(x-1)(2-1)+(y-3)(0-3)=9 \quad \text{или} \quad t:x-3y-1=0.$$

Зад. 29 Намерете уравнението на допирателната към окръжността $x^2+y^2=9$ през т. $B(3;4)$.

Решение: Заместваме координатите на т. B в уравнението на окръжността на мястото на x и y и получаваме

$$(3)^2+(4)^2-9=25-9>0.$$

Следователно т. B е вън от окръжността. Тогава има две допирателни t_1 и t_2 и две допирни точки $T_1(x_1,y_1)$ и $T_2(x_2,y_2)$.

$t_1: x_1x+y_1y=9$. Но т. $B\,Z\,t_1$ следователно координатите ´и заместени в уравнението на k, на мястото на x и y го удовлетворяват, т.е.

(1) $\quad 3x_1+4y_1=9$, Но $T_1\,Z\,k$ следователно

(2) $\quad x_1^2+y_1^2=9$.

Решаваме двете уравнения 1) и 2) като система и намираме x_1 и x_2, които заместваме в уравнението на t_1 и намираме уравнението на допирателната

$$y_1 = \frac{9-3x_1}{4}; \quad x_1^2 + \left(\frac{9-3x_1}{4}\right)^2 = 9.$$

$$16x_1^2 + 81 - 54x_1 + 9x_1^2 = 9.16, \quad 25x_1^2 - 54x_1 - 63 = 0,$$

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 = 3; & x_1' = -\dfrac{21}{25} \\ y_1 = 0; & y_1' = \dfrac{72}{25} \end{array} \right. \quad T_1(3;0), T_2\left(-\frac{21}{25}, \frac{72}{25}\right).$$

$t_1 : 3x + 4y = 9$ или $3x_1 + 4.0 = 9; 3x = 9; x = 3$ или $t : x - 3 = 0$.
По аналогия определяме уравнението на t_2.

Елипса	*хипербола*	*парабола*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	

Зад. 30 Намерете координатите на върховете и фокусите на:
а) елипсата $x^2 + 4y^2 = 4$; б) хиперболата $x^2 - 4y^2 = 4$;
в) $y^2 = 8x$.

Решение: а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1; a^2 = 4; a = 2; b^2 = 1; b = 1$,
$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3; c = \sqrt{3}$. Тогава

$$A_1(-2;0) A_2(2;0) B_1(0;-1) B_2(0;1) F_1(-\sqrt{3};0) F_2(\sqrt{3};0);$$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ($e$ – ексцентрицитет на елипсата).

б) $x^2 - 4y^2 = 4; \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1; a^2 = 4; a = 2, b^2 = 1, b = 1$.
$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5; c = \sqrt{5}$. Тогава

$$A_1(-2;0) A_2(2;0) B_1(0;-1) B_2(0;1) F_1(-\sqrt{5};0) F_2(\sqrt{5};0).$$

Асимптоти на хиперболата $y_{1,2} = \pm\dfrac{b}{a}x$ или $y_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}x$.

в) $y^2 = 8x$. Но $y^2 = 2px$, от където $2p = 8; p = 4$ – параметър на параболата; директрисата има уравнение $x + \dfrac{p}{2} = 0$ или $x + 2 = 0$; $F(2;0)$. Връх на параболата е т. $O(0;0)$.

Уравнения на допирателни към кривите, в точки от тях:

на елипса в т. $M_1(x_1, y_1) t : \dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1;$

на хипербола $\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1;$

на парабола $y_1 y = (x_1 + x)p$.

Уравнения на допирателни към кривите, през външна точка от тях:

Зад. 31 Намерете уравнението на допирателна към елипсата $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, минаваща през точката $M(3;0)$.

Решение: Т. M не лежи на елипсата, защото $\dfrac{3^2}{4} + 0^2 \neq 1$.
Нека допирната точка е $T(x_1; y_1)$. $t : \dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$ или

$$\frac{3x_1}{4} + 0y_1 = 1. \tag{1}$$

Но т. $T(x_1; y_1)$ лежи на елипсата и следователно

$$\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1. \tag{2}$$

Решаваме като система 1) и 2) и намираме координатите на допирните точки: $x_1 = \dfrac{4}{3}$, което заместваме в 2) и получаваме .

$$\frac{16}{9.4} + y_1^2 = 1; y_1^2 = 1 - \frac{4}{9}; \; y_1^2 = \frac{5}{9}, \; y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}.$$

Следователно $T_1\left(\dfrac{4}{3}; \sqrt{\dfrac{5}{9}}\right)$ и $T_2\left(\dfrac{4}{3}; -\sqrt{\dfrac{5}{9}}\right)$.

$$t : \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1; a = 2, b = 1, x_1 = \frac{4}{3}, y_1 = \sqrt{\frac{5}{9}};$$

$$t : \frac{4.x}{3.4} + \sqrt{\frac{5}{9}}y = 1; \quad t' : \frac{4.x}{3.4} - \sqrt{\frac{5}{9}}y = 1.$$

По аналогия определяме и t_2.

Зад. 32 Намерете уравненията на допирателните към кривите в точка от тях:
а) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ в т. $A(2;1)$; б) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ в т. $B(4;3)$.

Решение: а) Кривата е елипса и уравнението на допирателната има вида

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1, x_1 = 2, y_1 = 1 \text{ и } t : \frac{2x}{8} + \frac{y}{2} = 1;$$

б) $t : \frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{3} = 1; x_1 = 4, y_1 = 3;$

$$t : \frac{4x}{4} - \frac{3y}{3} = 1 \text{ или } x - y = 1.$$

Аналитична геометрия в пространството

Уравнение на равнина и права

Уравнение на равнина, минаваща през т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна на вектора $\vec{V}(A, B, C)$.

От скаларно произведение на два вектора знаем, че ако $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}.\vec{b} = 0$ или $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Равнина, която минава през дадена точка и е успоредна на две дадени посоки $[M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$.

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(Използваме, че три вектора са копланарни, т.е. лежат в една равнина, когато детерминантата от координатите им е равна на нула.) Или

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор $\vec{n}$, нормален на α, има уравнение

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

т.е. вектор с координати, равни на координатите на векторното произведение на два вектора от равнината.

Отрезово уравнение на равнина $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, където a, b и c са отрезите от координатните оси.

Нормално уравнение на равнина $\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$, където знакът пред корена в знаменателя е обратен на този пред d.

Уравнение на права в пространството – канонично уравнение:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

където правата минава през т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и векторът $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ е от правата или е успореден на нея.

В параметричен вид правата има уравнение

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{array} \right.$$

Ще покажем как от канонично уравнение получаваме параметрично и обратно. Нека

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} = t,$$

от където определяме

$$\left| \begin{array}{l} x - x_0 = a_1t \\ y - y_0 = a_2t \\ z - z_0 = a_3t \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t. \end{array} \right.$$

От параметричен вид получаваме каноничен, като определяме t и получените стойности приравним:

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Уравнение на права през две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Взаимни положения на права и равнина

$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Векторите $\vec{v}_1(a_1, b_1, c_1)$ са нормални на α. $\vec{v}_2(a_2, b_2, c_2) \perp \beta$.

$\alpha \perp \beta$, ако $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$\alpha || \beta$, ако $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

$\alpha \equiv \beta$, ако $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

$$g_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad (\vec{a}(a_1, a_2, a_3) || g_1)$$

$$g_2 : \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3} \quad (\vec{b}(b_1, b_2, b_3)||g_2)$$

$g_1 \perp g_2$, ако $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

$g_1||g_2$, ако $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$g_1 \cap g_2$, ако

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos(g_1, g_2) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Ъгъл между права и равнина:

$$g : \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}; \ \alpha : ax + by + cz + d = 0.$$

$$\sin\varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad g||\alpha \to al + bm + cn = 0.$$

$$g \perp \alpha \to \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}, \ al + bm + ln = 0.$$

Пробод на права с равнина:

Координатите на x, y, z на правата (от параметричното уравнение) заместваме в уравнението на равнината, получаваме само едно неизвестно – параметъра t на правата, определяме го и го заместваме в параметричното уравнение на правата, от където получаваме x, y, z – координатите на пробода на правата с равнината.

Зад. 33 Намерете координатите на пробода т. P на правата g с уравнение

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3},$$

с равнината $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Решение: Намираме параметричното уравнение на g от

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3} = t,$$

от където $x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 1 + 3t$, които заместваме в

уравнението на α. Получаваме

$$1 + 2t + 2(2 + t) - 3(1 + 3t) - 1 = 0, \quad -5t = -1; t = \frac{1}{5}.$$

Тогава пробода P има координати

$$x = 1 + 2.\frac{1}{5}; y = 2 + \frac{1}{5}; z = 1 + \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad P\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

Зад. 34 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през т. $A(1; 2; 3)$ и е перпендикулярна на $g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$.

Решение: Векторът $\vec{v}_1(2; 3; 1)||g$ и ще бъде нормален на α.

Векторът $\vec{v}_2(x - 1, y - 2, z - 3)||\alpha$, следователно $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ и $2(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z - 3) = 0$ или $\alpha : 2x + 3y + z - 11 = 0$.

II начин: $\vec{v}_1(2; 3; 1) \perp \alpha$ и ще бъде направляващ за α. Следователно $\alpha : 2x + 3y + z + r = 0$. Но т. $A(1; 2; 3)$ лежи на α и следователно координатите ´и, заместени в уравнението на на мястото на x, y, z ще го удовлетворяват. Тогава $2.1 + 3.2 + 3 + r = 0, r = -11$ и $\alpha : 2x + 3y + z - 11 = 0$.

Зад. 35 Намерете уравнение на права g, минаваща през т. $A(1; 2; 3)$ и перпендикулярна на равнината $\alpha : x - y + 2z + 4 = 0$.

Решение: $\vec{v}(1; -1; 2)$ е нормален на α и ще бъде $||g$, т.е направляващ на g и уравнението ´и ще бъде

$$g : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

Зад. 36 Намерете уравнение на равнината α, която е перпендикулярна на $\beta : x + y + 2z + 1 = 0$ и минава през пресечниците на равнините $\gamma : 2x + 3y - z + 2 = 0$ и $\delta : 3x - y + z + 3 = 0$.

Решение: $\alpha : 2x + 3y - z + 2 + \lambda(3x - y + z + 3) = 0$ или $\alpha : x(2 + 3\lambda) + y(3 - \lambda) + z(-1 + \lambda) + 2 + 3\lambda = 0$. Но $\alpha \perp \beta$ и следователно $1(2 + 3\lambda) + 1.(3 - \lambda) + 2(-1 + \lambda) = 0$, от където $4\lambda + 3 = 0; \lambda = -\frac{3}{4}$.

$$\alpha : 2x + 3y - z + 2 - \frac{3}{4}(3x - y + z + 3) = 0,$$

$$\alpha : x - 15y + 7z + 1 = 0.$$

Зад. 377 Да се намери уравнение на равнина α, която минава през т. $A(1; 2; -1)$ и е перпендикулярна на равнините $\beta : x + y - z + 1 = 0$ и $\gamma : 2x - y + 3z + 4 = 0$.

Решение: Направляващия вектор на α ще е колинеарен на векторното произведение на нормалните вектори на β и γ.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2i - 5j - 3k,$$

или $\vec{n}_2(2, -5, -3)$, т.е. $\alpha : 2x - 5y - 3z + r = 0$. Заместваме координатите на т. A в уравнението на α на мястото на x, y и z и получаваме $2.1 - 5.2 - 3(-1) + r = 0$, от където $r = 5$ и $\alpha : 2x - 5y - 3z + 5 = 0$.

Зад. 38 Намерете уравнение на равнината, минаваща през три дадени точки $A(1, 1, 2), B(2, 0, 1), C(3, 0, 5)$.

Решение: Нека т. $M(x, y, z)$ е от α. Тогава

$$\vec{v}(x-1, y-1, z-2)\, \mathrm{Z}\, \alpha . \vec{AB}(1, -1, -1), \vec{AC}(2, -1, 3)\, \mathrm{Z}\, \alpha$$

или

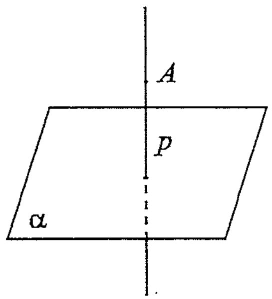
$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$\alpha : 4x + 5y - z - 7 = 0$.

II начин:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

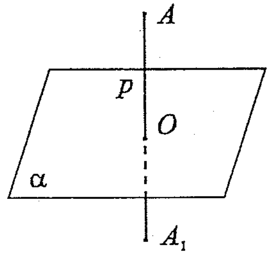
Зад. 39 Да се намери уравнение на права p, минаваща през т. $A(1, -1, 2)$ и е перпендикулярна на $\alpha : 2x + y + z - 1 = 0$.



Решение: Векторът $\vec{v}(2, 1, 1)$ е нормален на равнината и следователно може да бъде направляващ за правата p. Тогава параметричтното уравнение на правата е

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ или } p : \begin{vmatrix} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{vmatrix}$$

Зад. 40 Да се намерят координатите на проекцията на т. A, върху равнината α, т. A_1, симетрична на $A(2, 1, -1)$ относно равнината $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$.



Решение: Логично решение на задачата:

1) Построяваме права $p\begin{cases} \mathrm{Z}\, A \\ \perp \alpha \end{cases}$

2) $p \cap \alpha = O$ – намираме пробода т. O на правата p с равнината α – това е проекцията на т. A върху α.

3) т. O е среда на AA_1, от където определяме координатите на т. A_1.

Пресмятане: 1) Вектор $\vec{v}(1, 2, -1)$ (кофициентите пред x, y и z в α) е нормален на α и следователно е направляващ за правата p. Тогава

$$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}; \quad p : \begin{vmatrix} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{vmatrix}$$

2) Заместваме стойностите на x, y и z от p в уравнението на $\alpha : 2 + t + 2(1 + 2t) - (-1 - t) + 1 = 0$; $6 + 6t = 0, t = -1$, която стойност заместваме в параметричното уравнение на p и получаваме координатите на прободната точка на p с α, т.е.

$$O \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 + 2(-1) = -1 \\ z = -1 - (-1) = 0 \end{cases} \quad O(1; -1; 0).$$

Но т. $O(1; -1; 0)$ е среда на AA_1, където $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогава

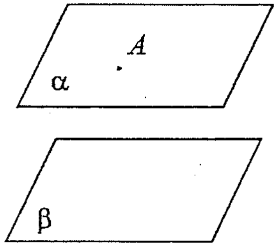
$$1 = \frac{x_1 + 2}{2} \to x_1 = 0, \quad -1 = \frac{y_1 + 1}{2} \to y_1 = -3; 0 = \frac{z_1 - 1}{2} \to z_1 = 1.$$

Следователно $A_1(0, -3, 1)$

Зад. 41 Намерете уравнение на равнината α, перпендикулярна на права $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{4}$ и минаваща през т. $A(-1, +2, 3)$.

Решение: Вектор $\vec{v}(2;3,4)$ е от $\vec{p}$ и ще бъде $\perp\alpha$. Следователно $\alpha : 2x+3y+4z+r=0$. Но т. $A\,Z\,\alpha$ и координатите ´и заместени в уравнението на α на мястото на x, y и z ще го удовлетворяват. Следователно $-1.2+3.2+4.3+r=0$; $\quad r=-16$ и
$\alpha : 2x+3y+4z-16=0$.

Зад. 42 Намерете уравнение на равнина α, успоредна на β : $x+2y-z+5=0$ и минаваща през т. $A(3;2;-1)$.



Решение: Векторът $\vec{v}(1;2,-1)$ е нормален на β, следователно е нормален и на α и $\alpha : x+2y-z+r=0$. Но т. $A\,Z\,\alpha$ и следователно $3.1+2.2-1(-1)+r=0, r=-8$ и $\alpha : x+2y-z-8=0$

Зад. 43 Намерете уравнение на равнината α, перпендикулярна на $\beta : x+2y-z+1=0$ и минаваща през т. $A(3;2,1)$ и $B(1;-1,2)$.

Решение: Търсената равнина α има уравнение $ax+by+cz+d=0$. От т. $A\,Z\,\alpha$ и т. $B\,Z\,\alpha$ следва, че координатите им, заместени в уравнението на α го удовлетворяват. Следователно

$$(1)\quad 3a+2b+c+d=0 \quad \text{и} \quad (2)\quad a-b+2c+d=0.$$

От $\alpha\perp\beta$ следва, че

(3) $\qquad a.1+b.2+c(-1)=0.$

Решаваме 1), 2) и 3) като система и получаваме

$$-\left|\begin{array}{l} 3a+2b+c+d=0 \\ a-b+2c+d=0 \end{array}\right. \to 2a+3b-c=0$$

$$-\left|\begin{array}{l} 2a+3b-c=0 \\ a+2b-c=0 \end{array}\right. \to a+b=0.$$

Нека $a=s$. Тогава $b=-s$; $c=a+2b=s-2s=-s$; $d=b-a-2c=-s-s+2s=0$. Следователно

$$\alpha : sx-sy-sz=0| : s\neq 0, \alpha : x-y-z=0.$$

$(\alpha\perp\beta$, защото $1.1-1.2+(-1)(-1)=0$ и т. A и т. $B\,Z\,\alpha)$

Зад. 44 Намерете векторното, параметрично и канонично уравнение на правата $p \to \left\{\begin{array}{l} x+y-z+1=0 \\ 2x+3y+z+3=0 \end{array}\right.$

Решение: Най-напред намираме координатите на произволна точка от p. За целта даваме произволни стойности на z. Например $z=0$. Решаваме системата и намираме x и y.

$$\left|\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ 2x+3y+3=0 \end{array}\right. \to \begin{array}{l} 2(-y-1)+3y+3=0 \to y=-1 \\ x=0 \to \text{ т. } A(0,-1,0) \end{array}$$

Направляващият вектор на правата p ще има координати на вектор, колинеарен на векторното произведение на нормалните вектори на двете дадени равнини:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

$$\vec{n}\{[1.1-(3).(-1)],[-1.2-1.1],[1.3-2.1]\}$$

или $\vec{n}(4,-3,1)$. Тогава

$$p : \frac{x-0}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-0}{1}$$

или

$$\left|\begin{array}{l} x=0+4t \\ y=-1-3t \\ z=0+t \end{array}\right. \quad \text{и} \quad r=i.0-j.1+k.0+(4i-3j+1k)t.$$

Зад. 45 Да се провери дали правите

$$g_1 : \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-3} \quad \text{и} \quad g_2 : \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

се пресичат и се намери уравнението на равнината, определена от тях, ако такава съществува.

Решение: Т. $A_1(1,2,3)$ и $\vec{p}_1(2,1,-3)\,Z\,g_1$, $A_2(2,1,1)$ и $\vec{p}_2(1,2,-1)\,Z\,g_2$

$$A_1\vec{A}_2(2-1,1-2,+1-3) \quad \text{или} \quad A_1\vec{A}_2(1,-1,-2).$$

Пресмятаме детерминантата от координатите на $A_1\vec{A}_2, \vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. Ако тя е 0, то правите се пресичат. В противен случай правите не се пресичат.

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right| = -1-8+3+2+6-2=0.$$

Следователно правите се пресичат.

Нормалният вектор на търсената равнина е векторното произведение на направляващите вектори на правите

$$\vec{n}(5,-1,3).\ \text{От}\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5i - j + 3k$$

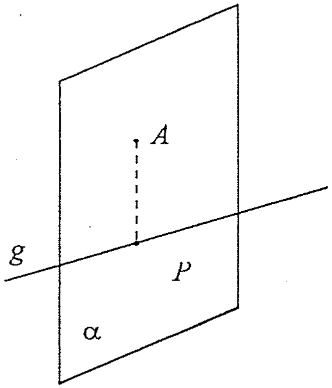
$$1(-1)+6=+5,\quad -3.1-(-1).2=-1,\quad 2.2-1.1=+3.$$

Т. $A(1;2;3)$ и $\vec{n}(5,-1,3)$ определят

$$\alpha : 5x - y + 3z + r = 0,\quad 5.1 - 2 + 3(+3) + r = 0,\quad r = -12;$$

$$\alpha : 5x - y + 3z - 12 = 0.$$

Зад. 46 Намерете разстоянието от т. $A(1,-1,2)$ до правата $g : 2i + 3j - k + (i + 2j + k)t$.



Решение: Ще запишем параметричното уравнение на правата

$$g : \left|\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{array}\right.$$

Логично решение:

1) Построяваме равнина $\alpha \left\{ \begin{array}{l} \text{Z}\, A \\ \perp g \end{array}\right.$

2) Намираме пробода P на правата g с равнината α;

3) AP е търсеното разстояние.

Пресмятания:

1) Векторът $\vec{v}(1,2,1)$ – направляващ на правата, е нормален на равнината.

$$\alpha : 1.x + 2y + 1z + r = 0.$$

Но т. $A\,\text{Z}\,\alpha$ и следователно

$$1.1 + 2(-1) + 1.2 + r = 0,\ r = -1\ \text{ и }\ \alpha : x + 2y + z - 1 = 0.$$

2) Стойностите на x, y и z от g заместваме в уравнението на α:

$$2 + t + 2(3 + 2t) - 1 + t - 1 = 0,\quad t = -1$$

$$\text{т. } P : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = -1 - 1 = -2 \end{array}\right. \qquad P(1,1,-2).$$

AP ще намерим по формулата за разстояние между две точки

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

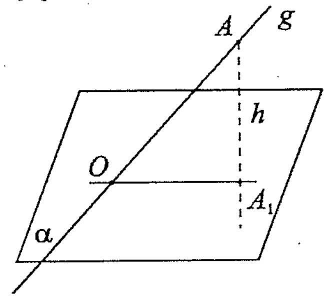
$$A(1,-1,2),\quad P(1,1,-2).$$

$$AP = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}.$$

Зад. 47 Да се намери проекцията на правата

$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$$

върху равнината $\alpha : x - y + z + 4 = 0$.



Решение: Логично решение:

1) $g \cap \alpha = O$ – пробод на правата с равнината;

2) т. $A(1,-2,1)\,\text{Z}\,g$; $h \left\{ \begin{array}{l} \text{Z}\, A \\ \perp \alpha \end{array}\right.$

3) $h \cap \alpha = A_1$, пробод на h с α;

4) OA_1 – търсената права.

Пресмятания:

1) $g : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right.$ $\to$ заместваме в уравнението на α и получаваме

$$1 + 2t - (-2 + t) + 1 + 3t + 4 = 0,\ 4t = -8, t = -2.$$

$$\text{Т. } O \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2(-2) = -3 \\ y = -2 - 2 = -4 \\ z = 1 + 3(-2) = -5 \end{array}\right. \qquad \text{т.} O(-3,-4,-5).$$

Векторът $\vec{v}(1,-1,1)$ е нормален на α и ще е направляващ на h, т. $A(1;-2;1)\,\text{Z}\,h$; Тогава

$$h : \frac{x-1}{1} = \frac{x+2}{-1} = \frac{x-1}{1}\ \text{ или }\ h : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t. \end{array}\right.$$

Намираме пробода на h с α като x, y и z от h заместваме в уравнението на α. Получаваме

$$1 + t - (-2 - t) + 1 + t + 4 = 0, \quad 3t = -8, \quad t = -\frac{8}{3}.$$

Следователно

$$A_1 : \begin{cases} x = 1 + \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{5}{3} \\ y = -2 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ z = 1 + \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{5}{3} \end{cases} \qquad A_1\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

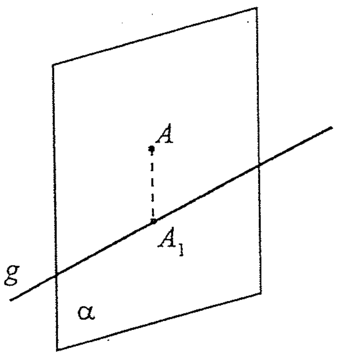
$$O(-3, -4, -5); \ \vec{OA_1}\left(-\frac{5}{3} + 3, \frac{2}{3} + 4, -\frac{5}{3} + 5\right) = \vec{OA_1}\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

OA_1 е определена от т. O и вектора $\vec{OA_1}$ и

$$OA_1 : \begin{cases} x = -3 + \frac{4}{3}t \\ y = -4 + \frac{14}{3}t \\ z = -5 + \frac{10}{3}t \end{cases} \quad \text{е търсената проекция.}$$

Зад. 48 Намерете ортогоналната проекция на т. $A(3, 1, 2)$ върху правата

$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}.$$



Решение: Логично решение:

1) Построяваме равнината $\alpha \begin{cases} \ni A \\ \perp g \end{cases}$

2) $g \cap \alpha = A_1$ – търсената точка.

Пресмятания:

1) Нормалният вектор $\vec{n}$ на равнината α е успореден на g. Следователно $\vec{v}(2, 1, 3)$ избираме за $\vec{n}$ и $\alpha : 2x + 1y + 3z + r = 0$. Но т. $A \in \alpha$, следователно $2.3 + 1.1 + 3.2 + r = 0$, $r = -13$ и α : $2x + y + 3z - 13 = 0$;

2) $g : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 0 + 3t \end{cases} \to$ заместваме в уравнението на α. Получаваме

$$2(1 + 2t) + 2 + t + 3(0 + 3t) - 13 = 0, \ 14t = 9, \ t = \frac{9}{14}.$$

$$A_1 \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{9}{14} = \frac{16}{7} \\ y = 2 + \frac{9}{14} = \frac{37}{14} \\ z = 3 \cdot \frac{9}{14} = \frac{27}{14} \end{cases} \qquad A_1\left(\frac{16}{7}, \frac{37}{14}, \frac{27}{14}\right).$$

Зад. 49 Намерете проекцията на т. $A(1, 2, -1)$ върху правата

$$g : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3t + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение: 1) Намираме произволна т. M от g като дадем стойност $z = 0$, заместим в двете равнини и определяме x и y:

$$\left| \begin{array}{l} x + y = -1 \\ 2x - y = -2 \end{array} \right. \to x = -1, \ y = 0, \quad \text{т. } M(-1, 0, 0);$$

2) $\vec{v}_1(1, 1, -1), \vec{v}_2(2, -1, 3)$. Намираме

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2i - 5j - 3k \to \vec{n}(2, -5, -3).$$

$$g : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 - 5t \\ z = 0 - 3t. \end{cases}$$

3) Построяваме равнина $\alpha \begin{cases} \perp g \\ \ni A \end{cases}$

$\alpha : 2x - 5y - 3z + r = 0.$

Заместваме координатите на т. A в уравнението на α и получаваме $2.1 - 5.2 - 3(-1) + r = 0$, $r = 5$ и $\alpha : 2x - 5y + 3z + 5 = 0$. Намираме пробода на g с α:

$$2(-1 + 2t) - 5(-5t) - 3(-3t) + 5 = 0, \quad 38t = -3; \quad t = -\frac{3}{38}.$$

$$A_1 \begin{cases} x = -1 + 2\left(-\dfrac{3}{38}\right) = -\dfrac{22}{19} \\ y = -5.\dfrac{(-3)}{38} = \dfrac{15}{38} \\ z = -3\left(-\dfrac{3}{38}\right) = \dfrac{9}{38} \end{cases} \qquad A_1\left(-\frac{22}{19}; \frac{15}{38}; \frac{9}{38}\right).$$

Зад. 50 Намерете разстоянието от т. $A(1, 2, -1)$ до равнината $\alpha : x + y - z + 2 = 0$.

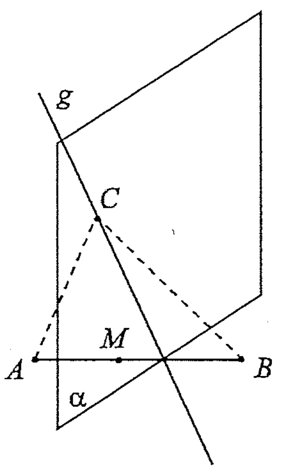
Решение: $d = \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ – формула за разстояние от т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до равнината $\alpha : ax+by+cz+d = 0$. Следователно

$$d = \frac{1.1 + 1.2 - 1(-1) + 2}{-\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{-\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}.$$

Зад. 51 Да се намери точка C от правата

$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3},$$

така, че ΔABC с върхове $A(2, -2, 4), B(-2, 4, 2)$ и C да е равнобедрен.



Решение: Логично решение:

1) Построяваме $\sigma \left\{ \begin{array}{l} Z\, M - \text{--среда на } AB \\ \perp AB \end{array} \right\}$ симетрална равнина;

2) $\sigma \cap g = C$.

Пресмятания:

1) $M\left(\dfrac{2-2}{2}, \dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right) =$

$= \quad M(0, 1, 3); \quad \vec{AB}(4, -6, 2);$

$AB : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z-4}{2}.$

2) Равнината σ ще има направляващ вектор $(4, -6, 2)$, защото е нормален на равнината.

$$\sigma : 4x - 6y + 2z + r = 0, \quad M\, Z\, \sigma$$

и тогава

$$4.0 - 6.1 + 2.3 + r = 0, \; r = 0; \quad \sigma : 4x - 6y + 2z = 0.$$

$AB : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -2 - 6t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ Координатите на AB заместваме в уравнението на σ и получаваме

$$4(2 + 4t) - 6(-2 - 6t) + 2(4 + 2t) = 0, \quad t = -\frac{1}{2}.$$

Тогава

$$\text{т. } C \begin{cases} x = 2 + 4.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0 \\ y = -2 - 6\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 \\ z = 4 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

$C(0; 1; 3)$ – търсената точка.

Трансверзала

Всяка права, която пресича две дадени прави се нарича тяхна трансверзала. Две прави имат безбройно трансверзали. Онази от тях, която е перпендикулярна едновременно и на двете прави, се нарича ос на двете прави, а отсечката между тях – ос-отсечка.

Зад. 52 Намерете уравнение на права, която минава през т. $A(2, 0, 1)$ и пресича правите

$$g_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$$
$$g_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

Решение:

1) $\alpha \begin{cases} Z\, A \\ Z\, g_1 \end{cases}$ 2) $g_2 \cap \alpha = B$; 3) $t_{\text{трансверзала}} : AB$.

Пресмятания:

Ще представим g_1 като пресечница на две равнини.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-1};$$
$$x - 1 = 2y - 4; \; -x + 1 = 2z - 6$$

$g_1 : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -x - 2z + 7 = 0 \end{cases}$ Тогава $\alpha : x-2y+3+\lambda(-x-2z+7) = 0.$

И т. $A\, Z\, \alpha$ и

$$1.2 - 2.0 + 3 + \lambda(-2 - 2.1 + 7) = 0,$$

$$5+3\lambda=0; \lambda=-\frac{5}{3}, \alpha: x-2y+3-\frac{5}{3}(-x-2z+7)=0,$$
или
$$\alpha: 8x-6y+10z-26=0 \text{ или } 4x-3y+5z-13=0.$$

2) Намираме пробода на g_2 с α. $g_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=4-t \end{cases}$

Заместваме координатите на g_2 в α
$$4(2+t)-3(3+2t)+5(4-t)-13=0, \; t=\frac{6}{7}.$$
Тогава
$$B\begin{cases} x=2+\frac{6}{7}=\frac{20}{7} \\ y=3+2.\frac{6}{7}=\frac{33}{7} \\ z=4-\frac{6}{7}=\frac{22}{7} \end{cases}$$

3) AB – уравнение на права $A(2,0,1), B\left(\frac{20}{7},\frac{33}{7},\frac{22}{7}\right)$.
$$\vec{AB}\left(\frac{20}{7}-2,\frac{33}{7}-0,\frac{22}{7}-1\right); \quad \vec{AB}\left(\frac{6}{7},\frac{33}{7},\frac{15}{7}\right).$$
$$AB: \frac{x-2}{\frac{6}{7}}=\frac{y-0}{\frac{33}{7}}=\frac{z-1}{\frac{15}{7}} \text{ или } AB: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{5}.$$

II начин за намиране на α. От уравнението на g_1 определяме т. G_1 от $g_1 \to G_1(1,2,3)$. $\vec{AG_1}$ ще лежи в α. $\vec{G_1A}(1,-2,-2)$. Тогава α е определена от т. A и вектор $\vec{v}(x-2,y-0,z-1)$, вектор $\vec{v}_1$ от $g_1, \vec{v}_1(2,1,-1)$ или
$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \alpha: 4x-3y+5z-13=0.$$
(от $(\vec{v}\times\vec{v}_1).\vec{AG_1}=0$), т.е. условието за пресичане на две прави.

Зад. 53 Намерете уравнение на равнина α, която минава през т. $A(-1,-2,3)$ и е успоредна на
$$l_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y-0}{-4}=\frac{z-5}{+6} \text{ и } l_2: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-8}.$$

Решение: Нека т. M е произволна точка от α.
Тогава $\vec{AM}(x+1,y+2,z-3)\, Z\, \alpha$. Тогава $\vec{v}_1(3,-4,6)$ и $\vec{v}_2(1,2,-8)$,

т.е. $(\vec{AM}\times v_1)\vec{l_2}=0$.
$$\alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}=0; \quad \alpha: 2x+3y+z+5=0.$$

Зад. 54 Намерете уравнение на права, която пресича
$$l_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1} \text{ и } l_2: \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z+0}{1}$$
и да е успоредна на
$$g: \frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{1}.$$

Решение: 1) $\alpha\begin{cases} Z\, l_1 \\ \| g \end{cases}$ 2) $l_2 \cap \alpha = S$; 3) $p\begin{cases} Z\, S \\ \| g \end{cases}$
$$\alpha: \begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \alpha: 2x-3y+5z+21=0,$$
$l_2: \begin{cases} x=10+5t \\ y=-7+4t \\ z=t. \end{cases}$ Заместваме координатите на l_2 в α и намираме пробода S на l_2 с α, т.е.
$$2(10+5t)-3(-7+4t)+5t+21=0, \quad t=-\frac{62}{3},$$
което заместено в параметричното уравнение на l_2 дава координатите на т. S,
$$S\left(-\frac{280}{3},-\frac{269}{3},-\frac{62}{3}\right).$$
Търсената права има уравнение:
$$\frac{x+\frac{280}{3}}{8}=\frac{y+\frac{269}{3}}{7}=\frac{z+\frac{62}{3}}{1}.$$

Зад. 55 Намерете уравнение на оста на двете кръстосани прави
$$l_1: \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1} \text{ и } l_2: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

Решение: 1) $\alpha\begin{cases} \perp l_1, l_2, \end{cases}$ където $\vec{g}_2=\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$

$= 8i + 4j + 16k = 4(2i + j + 4k); \vec{g}_2 = (2, 1, 4).$

$$\alpha : \begin{cases} \vec{g}_\alpha(2,1,4) \\ \vec{l}_1(1,2,-1) \\ \vec{v}(x-7, y-3, z-9) \end{cases} \to \alpha : \begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha : 3x - 2y - z - 6 = 0.$

2) $l_2 \cap \alpha = S;$ $\quad l_2 : \begin{cases} x = 3 - 7t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ заместваме в уравнението на α и получаваме

$$3(3-7t) - 2(1+2t) - (1+3t) - 6 = 0, \quad t = 0, \quad S = (3,1,1).$$

Тогава

$$g : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

Зад. 56 Да се намери трансверзала t на кръстосаните прави

$$l_1 \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 - s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = 2 \\ z = 3 + s \end{cases}$$

когато а) $t \ni A(2,-2,1);$ б) $t \| g \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

в) лежи в $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$

Решение: а) $t \ni A$, следователно $t : \begin{cases} x = 2 + as \\ y = -2 + bs \\ z = 1 + cs, \end{cases}$ където

$\vec{v}(a,b,c)$ е колинеарен с t.

От $t \cap l_1$ следва, че

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \quad -c + 2b + 2a - 2b = 0, \quad -6a + 3c = 0.$$

(т. $B(1;2,-1) \in l_1;$ $AB \subset t;$ $AB(2-1, -2-2, 1+1)$, $AB(1,-4,2)$).

От $t \cap l_2$ следва, че

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \quad -4a - 9b + 12c = 0.$$

(т. $P \in l_2$, $\quad P(-1;2,3)$ $\vec{AP}(2+1, -2-2, 1-3)$, $\quad \vec{AP}(3,-4,-2)$).

Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} -6a + 3c = 0 \\ -4a - 9b + 12c = 0 \end{array} \right. \quad c = 2a, \; -4a - 9b + 24a = 0, \; 20a = 9b.$$

Нека $a = t$, тогава $b = \dfrac{20}{9}t, c = 2t$ и при $t = 9$ получаваме $a = 9, b = 20, c = 18$. Тогава

$$t : \begin{cases} x = 2 + 9s \\ y = -2 + 20s \\ z = 1 + 18s \end{cases}$$

II начин: 1)$\alpha \begin{cases} \ni A(2;-2;1) \\ \ni B(1;2;-1), \text{ от } l_1 \\ \supset l_1 \end{cases}$ $\quad$ 2)$l_2 \cap \alpha = S;$

3) $t = AS$ е търсената трансверзала.

Указания:

$$\vec{AB}(1;-4;2) \quad \alpha : \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Намираме пробода т. S на l_2 с α като x, y и z от l_2 заместим в уравнението на α и определяме t, което заместено в параметричното уравнение на l_2 – дава координатите на т. S. AS – намираме като уравнение на права през 2 точки (виж формулите).

III начин:

$$\alpha \begin{cases} \ni A \\ \supset l_1 \text{ (като по втори начин)} \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} \ni A \\ \supset l_2 \end{cases}$$

Тогава търсената права t е пресечница на двете равнини α и β.

б) $g : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ Нека $t \| g$. Ще намерим уравнение на g, като полагаме $z = 0$ и намираме точка M от нея.

$$+\left| \begin{array}{l} x + y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{array} \right. \to 3x = 3, x = 1, y = -2, \text{ т. } M(1,-2,0) \in g.$$

Вектор $\vec{v}$ от g ще бъде $\vec{v} = (1,1,1) \times (2,-1,2)$ – векторно произведение или

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{array} \to \begin{array}{l} 1.2 - (-1).1 = 3 \\ 1.2 - 2.1 = 0 \\ 1.(-1) - 2.1 = -3 \end{array}$$

$$\vec{v}(3,0,-3) \text{ и } g : \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -2 + 0s \\ z = 0 - 3s \end{cases}$$

$$\alpha \begin{cases} Z\, l_1 \\ \| g \end{cases} \quad \alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \alpha : x+3y+z-6=0.$$

$$l_2 \cap \alpha = S \to (-1+3s) + 3.2 + 3 + s - 6 = 0 \to S = -\frac{1}{2};$$

$$S \begin{cases} x = -1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{5}{2} \\ y = 2 \\ z = 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad S\left(-\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right).$$

Тогава

$$t : \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} + 3s \\ y = 2 + 0s \\ z = \dfrac{5}{2} - 3s \end{cases}$$

в) $t\, Z\, \alpha$. Тогава $l_1 \cap \alpha = A, l_2 \cap \alpha = B$ и $t \equiv AB$ (уравнение на права през две точки), като т. A и т. B намираме като пробод на l_1 с α и l_2 с α, което предоставяме на читателя.

Канонизиране на уравнение на линия от втора степен

Линия от втори ред има общ вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ако линията има център, то координатите му намираме като решение на системата:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{vmatrix}$$

Въвеждаме следните означения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \delta = \Delta_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, J = a_{11} + a_{22}.$$

В сила е следната теорема: Ако линията от втори ред е зададена с общото си уравнение, то нейното канонично уравнение има вида:

$I \quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 J^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$

$II \quad J.x^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{\Delta}{J}}.J = 0$

$III \quad J.x^2 + \dfrac{L}{J} = 0$, където $\left(L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)$ в зависимост от това, дали линията принадлежи на първа, втора или трета група, където $a'_{11} = \lambda_1$, $a'_{22} = \lambda_2$ са корени на уравнението $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - J\lambda + \delta = 0$, което се нарича характеристично уравнение.

Теорема: Необходимите и достатъчни условия за определяне на всяка от деветте класи линии от II ред са:

1. *Елипса* – $\delta > 0, J.\Delta < 0$.
2. *Имагинерна елипса* – $\delta > 0, J.\Delta > 0$.
3. *Две имагинерни пресечни прави* – $\delta > 0, \Delta = 0$.
4. *Хипербола* – $\delta < 0, \Delta \neq 0$.
5. *Две пресечни прави* – $\delta < 0, \Delta = 0$.
6. *Парабола* – $\delta = 0, \Delta \neq 0$.
7. *Две успоредни прави* – $\delta = 0, \Delta = 0, L < 0$.
8. *Две имагинерни успоредни прави* – $\delta = 0, \Delta = 0, L > 0$.
9. *Две сливащи се прави* – $\delta = 0, \Delta = 0, L = 0$.

Зад. 57 Да се изследват уравненията на криви от втора степен:

а) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y = 0$;
б) $xy + 2x + 3y = 0$;
в) $x^2 + 4x - y + 5 = 0$;
г) $5x^2 + 2xy + 2y^2 + 14x + 4y + 10 = 0$.

Решение: а) Общия вид на линия от II степен е:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

$$a_{11} = 4, a_{22} = 9, a_{13} = 4, a_{23} = 18, a_{33} = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 18 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0; \quad \delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

$$J = a_{11} + a_{22} = 4 + 9 = 13 > 0.$$

Тогава $\delta > 0, J.\Delta > 0$ и линията е елипса.

Координатите на центъра ще намерим от решението на системата:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{vmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} 4x + 0y + 4 = 0 \\ 0x + 9y + 18 = 0 \end{vmatrix} \to \begin{matrix} x = -1, y = -2 \\ C(-1, -2). \end{matrix}$$

Характеристичното уравнение е $\lambda^2 - J\lambda + \delta = 0$ или $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0; \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4$.

Търсеното уравнение от I вид:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad \text{или} \quad 9X^2 + 4Y^2 + \frac{-144}{36} = 0,$$

$$9X^2 + 4Y^2 = 4 \quad \text{или} \quad \frac{X^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{Y^2}{1} = 1,$$

което е уравнение на търсената елипса и ако е необходимо, може и да се начертае – полуосите ´и са $\frac{2}{3}$ и 1, а центърът ´и е т. $(-1, -2)$.

б) $xy + 2x + 3y = 0$;

$a_{11} = 0, a_{22} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = 1, a_{23} = \frac{3}{2}, a_{33} = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

$J = a_{11} + a_{22} = 0 + 0 = 0$. От $\delta = 3 > 0$ и $\delta < 0$, следва че кривата е хипербола.

Образуваме система за координатите на центъра

$$\left| \begin{array}{l} 0x + 1y + 1 = 0 \\ 1x + 0y + \frac{3}{2} = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} y = -1, x = -\frac{3}{2} \\ C\left(-1; -\frac{3}{2}\right) \end{array}$$

Решаваме характеристичното уравнение $\lambda^2 - J\lambda + \delta = 0$ или $\lambda^2 - 0.\lambda - 1 = 0$, от където $\lambda^2 = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ и кривата е

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad \text{или} \quad 1.x^2 - 1.y^2 + \frac{3}{-1} = 0,$$

$$x^2 - y^2 = 3 \text{ или } \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1,$$

който вид позволява да се начертае хиперболата по дадени полуоси.

Нерешени задачи

1. Съставете уравнение на права, минаваща през т. $A(2; 3)$ и $B(0; 1)$.

Отг. $x - y + 1 = 0$.

2. Съставете уравнение на права, която минава през т. $A(-2; 3)$ и образува с абцисната ос ъгъл $135°$.

Отг. $y - 3 = -1(x + 2)$.

3. Триъгълник има върхове $A(2; 6), B(-6; 0)$ и $C(-3; -4)$. Намерете уравненията на страните, медианите и ъглополовящата през т. C.

Отг. $AB : 3x - 4y + 18 = 0, \ BC : 4x + 3y + 24 = 0,$
$AC : 2x - y + 2 = 0; \ m_{AB} = 7x - y + 17 = 0;$
$l_b : \dfrac{3x + 4y + 18}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} \pm \dfrac{4x + 3y + 24}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0$

4. В успоредника $ABCD$ страната AB има уравнение $AB : x - 4y + 1 = 0, \ AD : 3x + y - 2 = 0$ и т. $O(-1; -3)$ е средата на страната BC. Намерете уравненията на другите две страни на успоредника.

Отг. $BC : 3x + y = 0, \ CD : x - 4y - 27 = 0$.

5. Намерете острия ъгъл между правите $x - 3y + 5 = 0$ и $2x + 4y - 7 = 0$.

Отг. $\varphi = 45°$.

6. Намерете уравнение на права минаваща през т. $M(-1; 2)$ и сключваща ъгъл $45°$ с правата $x - 3y + 2 = 0$.

Отг. $2x - y + 4 = 0$ или $x + 2y - 3 = 0$.

7. Две страни на ромб имат уравнения $x + 2y - 7 = 0$ и $x + 2y - 13 = 0$, единия диагонал $x - y + 2 = 0$. Намерете координатите на върховете му и изчислете лицето на ромба.

Отг. $(1; 3), (-1; 7), (3; 5), (5; 1)$; 12 ед.^{2}.

8. Съставете уравнение на окръжност, минаваща през точки $A(3; -1)$ и $B(-4; -8)$ и с радиус $r = 13$.

Отг. $(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 169$.

9. Намерете координатите на върховете, фокусите и ексцентрицитета на елипсата $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

Отг. $a = 5, b = 3, c = 4, l = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}; A_1(-5; 0), A_2(5; 0),$
$B_1(0; -3), B_2(0; 3); F_1(-4, 0); F_2(4, 0)$

10. Намерете координатите на върховете, фокусите и асимптотите на хиперболата $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Отг. $a=6, b=2, c=\sqrt{40}; x_{1/2}=\pm\frac{1}{3}x; A_1(-6;0)$,
$A_2(6;0), B_1(0,-2), B_2(0;2); F_1(-\sqrt{40};0), F_2(\sqrt{40};0)$

11. Върхът на парабола се намира в т. $(-3;4)$, а правата $2y-9=0$ е директриса. Съставете уравнението на параболата.

Отг. $(x+3)^2=-2(y-4)$.

12. Намерете скаларното произведение на векторите с дължина $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, ако ъгълът между тях е $60°$.

Отг. 15.

13. Намерете перпендикулярния вектор на векторите $\vec{a}(3;3;1)$ и $\vec{b}(2;-2;-1)$.

Отг. $\vec{c}(-1;5;-12), |\vec{c}|=\sqrt{170}$.

14. Намерете лицето на ΔABC с върхове $A(2;2;2), B(1;3;3)$, $C(3;4;2)$.

Отг. $\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

15. Намерете обема на тетраедър с върхове: $A(-1;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(3;1;-1)$, $D(1;0;-2)$.

Отг. $V=\frac{25}{6}$.

16. Намерете обема на паралелепипед, построен с векторите $\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(1;0;-1), \vec{c}(1;-2;1)$.

Отг. 12 ед^3.

17. Съставете уравнение на равнина, минаваща през т. $A_1(1;-3;4)$, $A_2(0;-2;-1)$ и $A_3(1;1;-1)$.

Отг. $15x-5y-4z-14=0$.

18. Съставете уравнение на равнина, минаваща през т. $A(-4;3;-7)$, и успоредна на равнина $6x-5y+4z-15=0$.

Отг. $6x-5y+4z+67=0$.

19. Съставете уравнение на равнина, минаваща през т. $M(1;4;-5)$, и $M_2(4;2;-3)$ и перпендикулярна на равнината $3x+5y-6z-8=0$.

Отг. $2x+24y+21z+7=0$.

20. Съставете уравнение на равнина, минаваща през т. $A(-1;-1;2)$, и перпендикулярна на равнините $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

Отг. $2x+3y+4z-3=0$.

21. Съставете уравнение на равнина, минаваща през т. $A(-4;-8;6)$, успоредна на $\vec{a}(2;-4;-3)$ и перпендикулярна на равнината $3x-7y-5z-8=0$.

Отг. $x-y+2z-16=0$.

22. Приведете уравнението на правата $l:\begin{cases} x-2y+3z+15=0 \\ 2x+3y-4z-12=0 \end{cases}$ в каноничен вид.

Отг. $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-6}{10}=\frac{z}{7}$.

23. Съставете уравнение на права, минаваща през т. $A(-7;0;9)$, перпендикулярна на двете прави $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-2}{-5}$.

Отг. $\frac{x+7}{-13}=\frac{y}{2}=\frac{z-9}{-8}$.

24. Намерете координатите на пробода на правата $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ с равнината $3x-2y+z-3=0$.

Отг. $P(5;5;-2)$.

25. Намерете точка, симетрична на т. $A(-3;1;-9)$ относно равнината $4x-3y-z-7=0$.

Отг. $(1;-2;-10)$.

26. Намерете точка, симетрична на $A(2;-4;5)$, относно правата $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-4}$.

Отг. $\left(\frac{36}{13};-\frac{38}{13};\frac{61}{13}\right)$.

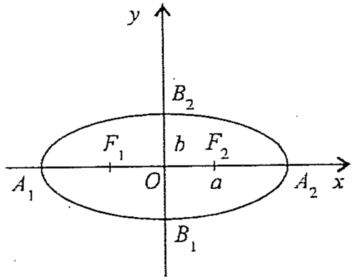
27. Намерете уравнение на права, минаваща през т. $M(-4;-5;3)$ и пресича правите $l_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $l_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

Отг. $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{-z-3}{-1}$.

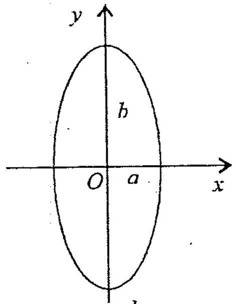
28. Намерете уравнението на оста на двете кръстосани прави $l_1:\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$, $l_2:\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Отг. $t:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{4}$.

Елипса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

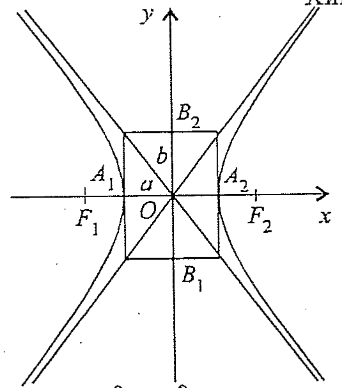


$a > b$

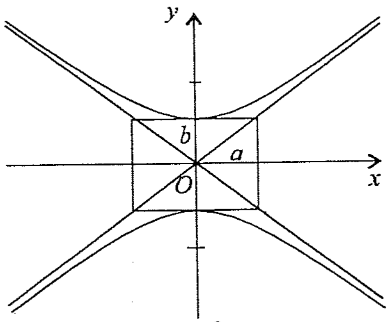


$a < b$

Хипербола

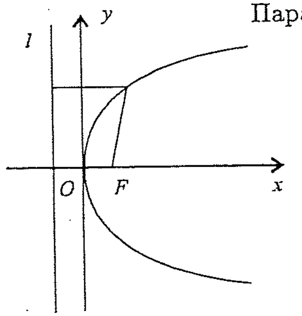


$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

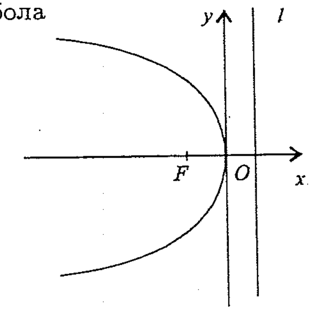


$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

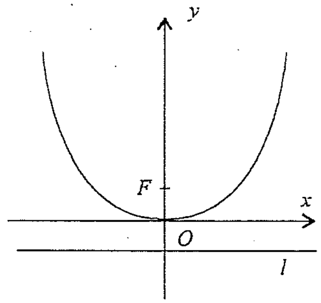
Парабола



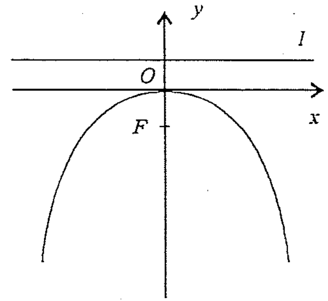
$y^2 = 2px$



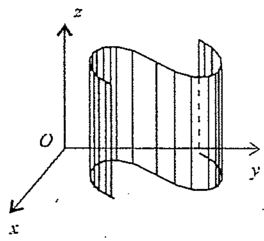
$y^2 = -2px$



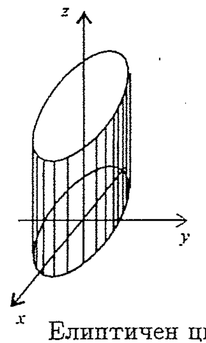
$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

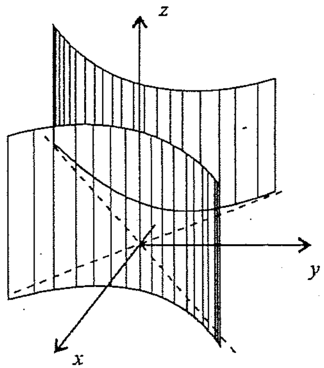


Цилиндрична повърхнина



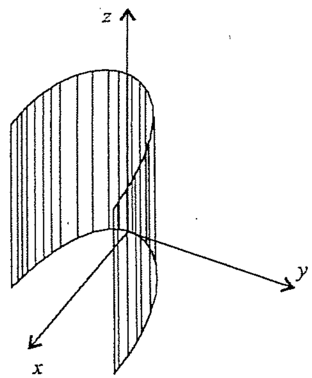
Елиптичен цилиндър

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



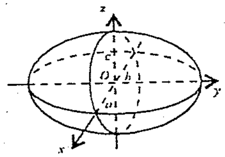
Хиперболичен цилиндър

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



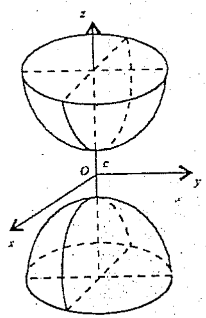
Параболичен цилиндър

$y^2 = 2px$



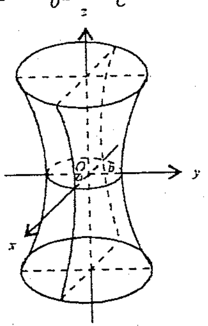
Елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



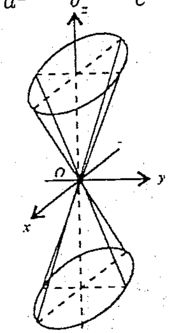
Двоен хиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



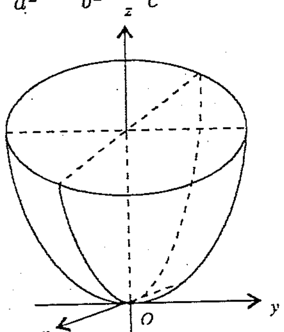
Прост хиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



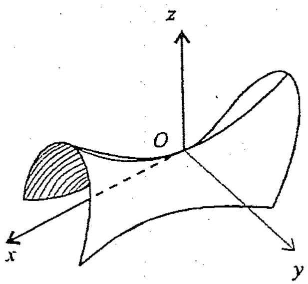
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Елиптичен параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Хиперболичен параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$