2. Теория на реалните числа

Елементарна представа за реалните числа се дава в средното училище, но тази представа не е достатъчна за последователното изучаване на понятието граница.

В основната част на тази глава се излагат посочените въпроси от теорията на реалните числа, необходими за построяване на строга теория на границите. В края на главата се изучават допълнителни въпроси от теорията на реалните числа, които не са свързани с теорията на границите и въобще с курса по математически анализ (пълнотата на множеството на реалните числа в смисъл на Хилберт, аксиоматичното построяване на теорията на реалните числа, връзката между различните начини за въвеждане на реалните числа).

В последния параграф са дадени някои въпроси от теорията на множествата, близки до съответните въпроси от теорията на реалните числа.

2.1. Множеството на числата, представими с безкрайни десетични дроби, и неговата наредба

2.1.1. Свойства на рационалните числа. В тази точка ще систематизираме добре известната теория на рационалните числа.

Рационално *се нарича число, което може да се представи (поне по един начин) като отношение на две цели числа, т. е. във вид на дроб m/n, където m и n са цели числа и $n \neq 0$.*

Рационалните числа притежават следните шестнадесет основни свойства.* (При формулирането на тези свойства вместо термина „рационално число" ще употребяваме за краткост „число".)

* Всички приведени свойства на рационалните числа могат да се получат от свойствата на целите числа.

1°. Всеки две числа a и b са свързани с един и само един от трите знака $>$, $<$ или $=$, при това, ако $a>b$, то $b<a$. С други думи, съществува правило, позволяващо да се установи кой от посочените три знака свързва дадените две числа. Това правило се нарича ***правило за наредба*** и се формулира така: 1) *две неотрицателни числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$, за които $n_1>0$, $n_2>0$, са свързани със същия знак, както двете цели числа m_1n_2 и m_2n_1;* 2) *две неположителни числа a и b са свързани със същия знак, както неотрицателните числа $|b|$ и $|a|$;* 3) *ако a е неотрицателно, а b е отрицателно, то $a>b$.*

2°. Съществува правило, чрез което на всеки две числа a и b се съпоставя трето число c, наричано тяхна ***сума*** и означавано със символа $c=a+b$. *Сумата на две рационални числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$ се определя от равенството*

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}.$$

Операцията намиране на сума се нарича ***събиране.***

3°. Съществува правило, посредством което на всеки две числа a и b се съпоставя трето число c, наричано тяхно ***произведение*** и означавано със символа $c=a.b$. *Произведението на две рационални числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$ се определя от равенството*

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}.$$

Операцията намиране на произведение се нарича ***умножение.***

4°. От $a>b$ и $b>c$ следва, че $a>c$ (транзитивно свойство на знака $>$); от $a=b$ и $b=c$ следва, че $a=c$ (транзитивно свойство на знака $=$).

Операцията събиране притежава следните четири свойства:

5°. $a+b=b+a$ (комутативност).

6°. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (асоциативност).

7°. Съществува такова число 0, че $a+0=a$ за всяко a (особена роля на нулата).

8°. За всяко число a съществува такова противоположно на него число a', че $a+a'=0$.

Аналогични четири свойства има и операцията умножение.

9°. $a.b=b.a$ (комутативност).

10°. $(a.b).c=a.(b.c)$ (асоциативност).

11°. Съществува число 1, такова, че $a.1=a$ за всяко число a (особена роля на единицата).

12°. За всяко число $a \neq 0$ съществува такова обратно число a', че $a.a'=1$.

Операциите събиране и умножение са свързани със следното свойство:

13⁰. $(a+b).c=a.c+b.c$ (дистрибутивност или разпределително свойство на умножението относно събирането).

Следващите две свойства свързват операцията наредба съответно с операциите събиране и умножение:

14⁰. От $a>b$ следва, че $a+c>b+c$.

15⁰. От $a>b$ и $c>0$ следва, че $a.c>b.c$.

Особена роля има свойството

16⁰. Каквото и да е числото a, то числото 1 може да се прибави към себе си толкова пъти, че получената сума да е по-голяма от a.*

Изброените шестнадесет свойства се наричат *основни*, тъй като всички други алгебрични свойства, отнасящи се до операциите събиране и умножение и връзката им с равенства и неравенства, могат да бъдат получени като логически следствия от тях.

Така например от основните свойства произтича следното често използвано свойство, позволяващо да събираме почленно еднопосочни неравенства:

ако $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Наистина от неравенствата $a>b$ и $c>d$ и от свойства 14⁰ и 5⁰ следва, че $a+c>b+c$ и $b+c>b+d$, а от последните две неравенства и от свойство 4⁰ следва, че $a+c>b+d$.

2.1.2. Недостатъчност на рационалните числа за измерване на отсечки от числовата ос. Числова ос ще наричаме права, на която са избрани определена точка O (начало за отчитане), мащабна отсечка OE, дължината на която приемаме равна на единица, и положително направление (обикновено от O към E). *На всяко рационално число съответствува определена точка от числовата ос.* Действително известно е как се построява отсечка с дължина $1/n$-та част от дължината на мащабната отсечка OE (n — произволно цяло положително число). Естествено можем да построим и отсечка с дължина m/n-та част от дължината на мащабната отсечка, където m и n са произволни цели положителни числа. Като нанесем такава отсечка надясно (наляво) от точката O, ще получим точка M_1 (M_2), съответствуваща на рационалното число $+m/n$ ($-m/n$) (фиг. 2.1).

Ще видим сега, че *че не всяка точка M от числовата ос съответствува на рационално число.* Например нека точката M е избрана така, че дължината на отсечката OM да е равна на диагонала на квадрат със страна отсечката OE. Тъй като дължината на мащабната отсечка OE е равна на единица, то по питагоровата теорема дължината x на отсечката OM ще бъде корен

* Това свойство се нарича *аксиома на Архимед*.

Фиг. 2.1

на уравнението $x^2=2$ и не е рационално число. Но това означава, че на посочената точка M не съответствува рационално число.

Естествено възниква потребността от разширяване на рационалните числа и въвеждане на по-широко множество от числа така, че всяка точка от числовата ос да съответствува на някое число от това по-широко множество (или с помощта на това по-широко множество от числа да може да се изрази дължината на всяка отсечка OM от числовата ос).

Ще покажем, че посредством измерване на отсечката OM на всяка точка M от числовата ос може да се постави в съответствие напълно определена безкрайна десетична дроб.

Нека M е произволна точка от числовата ос. За определеност ще предполагаме, че точката M лежи надясно от O. Ще опишем процеса на измерване на отсечката OM с помощта на мащабната отсечка OE.

Най-напред определяме колко пъти мащабната отсечка се нанася изцяло върху отсечката OM*. Възможни са два случая:

1) Отсечката OE се нанася в отсечката OM цяло число a_0 пъти с някакъв остатък NM, по-малък от OE (вж. фиг. 2.2). В този случай цялото число a_0 представлява резултат от измерването на OM с точност до 1 и недостиг.

2) Отсечката OE се нанася в отсечката OM цяло число a_0 пъти без остатък. В този случай процесът на измерване е завършен и цялото число a_0 е дължината на отсечката OM. На точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,000\ldots$, която се отъждествява с рационалното число a_0.

В първия случай процесът на измерване продължава, за да се види колко пъти $\frac{1}{10}$ част от мащабната отсечка OE се нанася в отсечката NM (която е остатък от измерването с помощта на цялата отсечка OE). Отново са възможни два случая:

1) $\frac{1}{10}$ част от OE се нанася a_1 пъти в отсечката NM с някакъв остатък PM, по-малък от $\frac{1}{10}$ част от OE (вж. фиг. 2.2). В този

* От аксиомата на Архимед за отсечки следва, че каквито и да са две отсечки a и b, ако съберем едната от двете сама със себе си достатъчен брой пъти, ще получим отсечка с по-голяма дължина от другата.

Фиг. 2.2

случай рационалното число a_0,a_1 е резултатът от измерването на OM с недостиг, с точност до числото $\frac{1}{10}$.

2) $\frac{1}{10}$ част от OE се нанася в отсечката NM цяло число пъти a_1 без остатък. В този случай процесът на измерване е завършен и рационалното число a_0,a_1 е дължината на отсечката OM. На точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,a_1000\ldots$, която отъждествяваме с рационалното число a_0,a_1.

Като продължим тези разсъждения, ще стигнем до двете възможности: 1) или описаният процес на измерване ще прекъсне на n-тата стъпка поради това, че на точката M съответствува рационалното число $a_0,a_1a_2\ldots a_n$ (в този случай на точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, която отъждествяваме с рационалното число $a_0,a_1a_2\ldots a_n$); 2) или описаният процес на измерване няма да прекъсне никога и ще получим безкрайна редица от рационални числа

(2.1) $$a_0;\ a_0,a_1;\ a_0,a_1a_2;\ \ldots;a_0,a_1a_2\ldots a_n;\ \ldots,$$

представляващи резултатите от измерването на отсечката OM с недостиг, с точност съответно до $1,\ 1/10,\ 1/10^2,\ \ldots,\ 1/10^n,\ \ldots$

Всяко от числата в редицата (2.1) може да бъде получено чрез прекъсване до съответния знак на безкрайната десетична дроб

(2.2) $$a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

По такъв начин в случай 2) на точката M от числовата ос съответствува безкрайната десетична дроб (2.2). Може да се каже, че и в случай 1) на точката M отговаря безкрайна десетична дроб (2.2), но от известно място нататък всички десетични знаци на тази дроб са нули.

Направените разсъждения имат място и в случая, когато точката M лежи наляво от точката 0, само че в този случай естествено е да смятаме, че всички елементи на редицата (2.1) и безкрайната десетична дроб имат отрицателен знак.

И така чрез описания процес за измерване на всяка точка от числовата ос съпоставихме напълно определена безкрайна десетична дроб. Това обстоятелство естествено води до идеята да се разглеждат числа, представими като безкрайни десетични дроби.

Забележка. Разбира се, описаният процес за измерване на отсечката OM може да се видоизмени така, че да води не до безкрайни десетични дроби, а например до безкрайни ***двоични*** или ***троични*** дроби. Желанието да се разглеждат безкрайни десетични дроби идва само от особената роля, която традиционно играе десетичната бройна система.

2.1.3. Наредба на множеството на безкрайните десетични дроби. В уводната глава вече отбелязахме, че понятието число се отнася към т. нар. ***основни понятия***. Ние ще въведем понятието реално число, като тръгнем от множеството на безкрайните десетични дроби.

Да разгледаме множеството на всички възможни безкрайни десетични дроби (както положителни, т. е. взети със знак $+$, така и отрицателни, т. е. взети със знак $-$).

Числата, представими с такива дроби, ще се условим да наричаме ***реални***.

Веднага ще подчертаем, че това условяне има предварителен характер и се нуждае от уточняване. Ние сме длъжни да въведем за числата, представими с безкрайни десетични дроби, трите операции (наредба, събиране и умножение). След като тези операции бъдат въведени, можем да дадем по-точно описание на понятието реално число, а именно, че реални наричаме числата, представими с безкрайни десетични дроби при условие, че за тези числа е установен определен начин за въвеждане на операциите наредба, събиране и умножение.

След всичко това ще се убедим, че при избрания начин за въвеждане на операциите наредба, събиране и умножение реалните числа притежават същите шестнадесет свойства, които формулирахме в т. 1 за рационалните числа.

Да пристъпим към реализация на посочената програма.

В тази точка ще въведем за числата, представими с безкрайни десетични дроби, операцията наредба и ще установим, че тази операция притежава свойство 4^0, формулирано в 2.1.1 за рационалните числа (т. е. свойството транзитивност на знаците $>$ и $=$).

Ще напомним още веднъж, че се уговорихме числата, представими с безкрайни десетични дроби, за краткост да наричаме реални (тази договореност няма да бъде в противоречие с даденото по-нататък по-точно описание на реалните числа).

Да разгледаме реално число, представимо с безкрайна десетична дроб, различна от $0,000\ldots$ Това число ще наричаме *положително*, ако представящата го дроб е взета със знак „+", и *отрицателно*, ако представящата го дроб е взета със знак „—".

Реалните числа, които не са положителни, ще наричаме ***неположителни***, *а тези, които не са отрицателни —* ***неотрицателни***.

В множеството на реалните числа влизат, разбира се, всички рационални числа, тъй като те са представими с безкрайни десетични дроби. Представянето на дадено рационално число с безкрайна десетична дроб може да се получи по два начина:

1) взимаме точка M, съответствуваща на даденото рационално число, на числовата ос и измерваме отсечката OM с помощта на мащабната отсечка по начина, посочен в т. 2;

2) взимаме обикновената дроб m/n, представяща даденото рационално число, и делим числителя m на знаменателя n.*

Предоставяме на читателя да се убеди, че тези два начина са еквивалентни. Така при всеки от посочените начини на рационалното число $1/2$ се съпоставя безкрайната десетична дроб $0{,}5000\ldots$, на рационалното число $1/3$ — безкрайната десетична дроб $1{,}333\ldots$

Преди да преминем към формулиране на правилото за наредба на реалните числа, ще разгледаме въпроса за представяне с безкрайни десетични дроби на онези рационални числа, които се представят и с крайни десетични дроби.

Ще отбележим, че такива рационални числа допускат **две представяния** с безкрайни десетични дроби. Например рационалното число $1/2 = 0{,}5$ може да се представи и с двете безкрайни десетични дроби: $1/2 = 0{,}5000\ldots$ и $1/2 = 0{,}4999\ldots$

Въобще рационалното число $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$, където $a_n \neq 0$, може да се запише във вид на две безкрайни десетични дроби:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots \text{ и}$$
$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n - 1)999\ldots$$

Естествено ние трябва да отъждествяваме тези две безкрайни десетични дроби (т. е. да считаме, че те представляват едно и също реално число).

Нека сега разгледаме две произволни реални числа a и b и да предположим, че те са представени с безкрайните десетични дроби

(2.3) $\quad a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \quad b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots,$

като във всяко представяне е взет кой да е от знаците + или —.

Ще изключим разгледания вече случай, когато двете безкрайни десетични дроби са с еднакви знаци и са две различни представяния на едно и също рационално число, представимо и с крайна десетична дроб. След това ще се уговорим да наричаме две числа a и b равни, ако техните представяния с безкрайни десетични дроби (2.3) имат еднакви знаци и ако са изпълнени безкрайната редица равенства

(2.4) $\quad a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \ldots, \; a_n = b_n, \ldots$

* При такова деление се получава обязателно **периодична** безкрайна десетична дроб.

И така *ще казваме, че две числа a и b са равни, ако представящите ги безкрайни десетични дроби са с еднакви знаци и ако те или удовлетворяват редицата равенства (2.4), или са два представителя на едно и също рационално число, представимо с крайна десетична дроб.*

Нека са дадени две неравни реални числа a и b. Ще установим правило, позволяващо да заключим кой от двата знака $>$ или $<$ ги свързва.

Ще наричаме ***модул*** или ***абсолютна стойност*** на реалното число a онова реално число, означавано със символа $|a|$, което се представя със същата безкрайна десетична дроб, както и числото a, но винаги взета със знак +. Така $|a|$ е винаги неотрицателно реално число.

Ще разгледаме поотделно трите възможни случая:

1) Нека a и b са **неотрицателни** и имат представянията $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$; $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ Тъй като числата a и не са равни, то ще бъде нарушено поне едно от равенствата (2.4). Да означим с k най-малкия номер n, при който се нарушава равенството $a_n = b_n$, т. е.

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, \text{ но } a_k \neq b_k.$$

Тогава ще считаме, че $a > b$, ако $a_k > b_k$, и че $a < b$, ако $a_k < b_k$.

2) Нека сега двете числа a и b са **отрицателни**. Тогава ще считаме, че $a > b$, ако $|b| > |a|$ и $a < b$, ако $|b| < |a|$.

3) Нека накрая едното число (например a) е неотрицателно, а другото (b) — отрицателно. Тогава естествено ще считаме, че $a > b$.

И така правилото за наредба на реалните числа е формулирано.

За да направим това правило безупречно от логическа гледна точка (или, както се казва в математиката, коректно), ще докажем следната лема:

Лема. *Ако $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ е произволно неотрицателно реално число, а $b' = b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n 000 \ldots$ и $b'' = b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1}(b_n - 1)999\ldots$ при $b_n > 0$ са две различни представяния на едно и също рационално число $b_0, b_1 b_2 \ldots b_n$, то условието $a < b'$ е еквивалентно на условието $a < b''$, а условието $a > b'$ е еквивалентно на $a > b''$.*

Тази лема позволява при наредба на две неравни реални числа да не се грижим за това, кое от двете възможни представяния с безкрайна десетична дроб е взето за числата, представими с крайни десетични дроби.

Доказателство на лемата. За пълното доказателство на лемата трябва да се докажат следните четири твърдения:

1) от $a<b'$ следва $a<b''$; 2) от $a<b''$ следва $a<b'$;
3) от $a>b'$ следва $a>b''$; 4) от $a>b''$ следва $a>b'$.

Ще се ограничим с доказателствата на твърдения 1) и 2), тъй като твърденията 3) и 4) се доказват аналогично.

Нека $a<b'$. Тогава според правилото за наредба ще се намери такъв номер k, че

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k<b_k \tag{2.5}$$

(в тези съотношения трябва да считаме всички $b_{n+1}, b_{n+2}, \cdot\cdot\cdot$ равни на нула).

Веднага ще отбележим, че $k\leqq n$, тъй като при $k>n$ неравенството $a_k<b_k$ е невъзможно, понеже $0\leqq a_k\leqq 9$, а $b_k=0$.

Тъй като при $k<n$ всички десетични знакове до ред k в числата b' и b'' съвпадат, условията $a<b'$ и $a<b''$ са очевидно еквивалентни.

Остава да разгледаме случая $k=n$. В този случай съотношенията (2.5) имат вида $a_0=b_0, a_1=b_1, \cdot\cdot\cdot, a_{n-1}=b_{n-1}, a_n<b_n$. Последното неравенство е еквивалентно на $a_n\leqq b_n-1$. Ако при това $a_n<b_n-1$, то по правилото за наредба $a<b''$.

Ако в посоченото неравенство $a_n=b_n-1$, то всички десетични знакове на числата a и b'' до ред n съвпадат. Понеже в числото b'' всички десетични знакове с ред, по-голям от n, са равни на девет, то и в този случай $a<b''$, тъй като в числото a не всички десетични знакове с ред, по-голям от n, могат да бъдат равни на девет (поради това, че a не е равно на b').

И така твърдение 1) е доказано.

2) Нека $a<b''$.

Безкрайните десетични дроби, представящи числата b' и b'', означаваме с $b'=b'_0, b'_1 b'_2 \cdot\cdot\cdot b'_n \cdot\cdot\cdot$ и $b''=b''_0, b''_1 b''_2 \cdot\cdot\cdot b''_n \cdot\cdot\cdot$

При тези означения

$$b'_0=b''_0=b_0,\ b'_1=b''_1=b_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ b'_{n-1}=b''_{n-1}=b_{n-1},$$
$$b'_n=b_n,\ b''_n=b_n-1.$$

С други думи, изпълнени са съотношенията

$$b'_0=b''_0,\ b'_1=b''_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ b'_{n-1}=b''_{n-1},\ b''_n<b'_n.$$

От друга страна, тъй като $a<b''$, ще се намери такъв номер k, че да са изпълнени съотношенията

$$a_0=b''_0,\ a_1=b''_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_{k-1}=b''_{k-1},\ a_k<b''_k.$$

Да означим с m по-малкото от двете числа n и k и да съпоставим двете последни редици от съотношения. Като използваме свойството транзитивност на $>$ и $=$ за целите числа, ще получим следните съотношения:

$$a_0=b'_0,\ a_1=b'_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_{m-1}=b'_{m-1},\ a_m<b'_m.$$

Съгласно правилото за наредба на реални числа от тези съотношения следва $a<b'$. □

Лесно можем да се убедим в това, че формулираното правило за наредба на реални числа, приложено за две рационални числа, води до същия резултат, както и правилото за наредба на рационални числа, представени във вид на отношение на две цели числа.

Наистина достатъчно е да разгледаме случая на две неотрицателни рационални числа a и b. Нека $a>b$ съгласно предишното правило за наредба на рационални числа и нека $a=a_0, a_1 a_2 \cdot\cdot\cdot a_n \cdot\cdot\cdot$, $b=b_0, b_1 b_2 \cdot\cdot\cdot b_n \cdot\cdot\cdot$ Като нанесем рационалните числа a и b върху числовата ос, ще получим съответстващите им точки M_1 и M_2, при което, понеже $a>b$, отсечката OM_1 е по-голяма от OM_2. От описания в т. 2 процес за измерване на отсечки върху числовата ос следва, че цялото число $a_0 a_1 a_2 \cdot\cdot\cdot a_k$ показва колко пъти 10^{-k}-та част от мащабната отсечка OE се нанася в отсечката OM_1, а цялото число $b_0 b_1 b_2 \cdot\cdot\cdot b_k$ показва колко пъти 10^{-k}-та част от OE се нанася в OM_2. Тъй като отсечката OM_1 е по-голяма от OM_2, то ще се намери такъв номер k, че $a_0 a_1 a_2 \cdot\cdot\cdot a_{k-1}=b_0, b_1 b_2 \cdot\cdot\cdot b_{k-1}$, но $a_0, a_1 a_2 \cdot\cdot\cdot a_k>b_0, b_1 b_2 \cdot\cdot\cdot b_k$, което означава, че $a>b$ съгласно правилото за наредба на реални числа.

Сега ще докажем, че за формулираното правило за наредба на реални числа е в сила свойство 4°, приведено в т. 1 за рационалните числа, т. е. ще докажем, че *за произволни реални числа a, b и c от неравенствата $a>b$ и $b>c$ следва неравенството $a>c$ (транзитивно свойство на знака „>"), а от равенствата $a=b$ и $b=c$ следва равенството $a=c$ (транзитивно свойство на знака „=")*. Транзитивното свойство на знака = следва непосредствено от съответното свойство за целите числа. Ще докажем транзитивността на знака >. Нека $a>b$, $b>c$. Трябва да се докаже, че $a>c$. Ще разгледаме трите възможни случая: 1) c е неотрицателно; 2) c е отрицателно, a е неотрицателно; 3) c е отрицателно и a отрицателно.

1) Нека c е неотрицателно. Тогава b е също неотрицателно, тъй като в противен случай съгласно правилото за наредба ще имаме $c>b$, а това противоречи на условието $b>c$. По-нататък чрез същите разсъждения заключаваме, че a е неотрицателно

(понеже в противен случай $b>a$, а това противоречи на условието $a>b$).

И така в разглеждания случай и трите числа a, b и c са неотрицателни. Записвайки ги като безкрайни десетични дроби

$$a=a_0,a_1a_2\ldots,\quad b=b_0,b_1b_2\ldots,\quad c=c_0,c_1c_2\ldots,$$

от условието $a>b$ ще следва, че съществува такъв номер k, че

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k>b_k. \tag{2.6}$$

Аналогично от $b>c$ следва, че има номер p, за който

$$b_0=c_0,\ b_1=c_1,\ b_2=c_2,\ \ldots,\ b_{p-1}=c_{p-1},\ b_p>c_p. \tag{2.7}$$

Означаваме с m по-малкия от двата номера k и p. Тогава очевидно от (2.6) и (2.7) и от транзитивността на $>$ и $=$ за целите числа получаваме

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1,\ \ldots,\ a_{m-1}=c_{m-1},\ a_m>c_m,$$

а това означава (по правилото за наредба), че $a>c$.

2) Нека сега c е отрицателно, а a е неотрицателно. Тогава (независимо от знака на числото b) неравенството $a>c$ е вярно съгласно правилото за наредба на реалните числа.

3) Да разгледаме накрая случая, когато двете числа c и a са отрицателни. Ще отбележим, че в този случай и b е отрицателно (в противен случай ще получим от правилото за наредба, че $b>a$, а това противоречи на условието $a>b$).

И така в разглеждания случай и трите числа a, b и c са отрицателни. Но тогава (поради правилото за наредба на реални числа) неравенствата $a>b$, $b>c$ са еквивалентни на неравенствата $|b|>|a|$ и $|c|>|b|$. От последните две неравенства (поради свойството транзитивност на знака $>$, вече доказано в случай 1) за неотрицателни числа) следва, че $|c|>|a|$, което означава (поради наредбата на отрицателните числа a и c), че $a>c$. С това доказателството на свойството транзитивност на знака $>$ е завършено.

2.2. Множества от реални числа, ограничени отгоре или отдолу. Съществуване на точни граници

2.2.1. Основни определения. В този параграф ще разгледаме произволни множества от реални числа. За означаване на произволно множество от реални числа ще използуваме символа $\{x\}$.

Отделните числа, участвуващи в множеството $\{x\}$, ще наричаме ***елементи*** на това множество.

Навсякъде в този параграф ще искаме множеството $\{x\}$ да съдържа поне един елемент. Такова множество се нарича ***непразно***.

Ще въведем важното понятие ограниченост на множество отгоре (съответно отдолу).

Определение 1. *Множеството от реални числа $\{x\}$ се нарича* ***ограничено отгоре*** *(съответно* ***ограничено отдолу****), ако съществува такова реално число M (реално число m), че всеки елемент x от множеството $\{x\}$ да удовлетворява неравенството*

$$x\leq M\ (\text{съответно } x\geq m). \tag{2.8}$$

Числото M (числото m) се нарича ***горна граница*** *(****долна граница****) на множеството $\{x\}$.*

Разбира се, всяко ограничено отгоре множество $\{x\}$ има безбройно много горни граници. Наистина, ако реалното число M е една горна граница на множеството $\{x\}$, то всяко реално число M', по-голямо от числото M, е също горна граница на това множество (тъй като от неравенството (2.8) следва, че $x\leq M'$). Аналогична забележка важи и за долните граници на ограничено отдолу множество $\{x\}$.

Така например множеството на всички отрицателни реални числа е ограничено отгоре. За горна граница може да се вземе всяко неотрицателно число. Множеството на всички цели положителни числа 1, 2, 3, ... е ограничено отдолу. За долна граница може да се вземе всяко реално число m, удовлетворяващо неравенството $m\leq 1$.

Естествено възниква въпросът за съществуване на най-малка горна граница за ограничените отгоре множества и най-голяма долна граница за ограничените отдолу множества.

Определение 2. *Най-малката от всички горни граници на ограничено отгоре множество $\{x\}$ се нарича* ***точна горна граница*** *на това множество и се означава със символа $\overline{x}=\sup\{x\}$*.*

Най-голямата от всички долни граници на ограничено отдолу множество $\{x\}$ се нарича ***точна долна граница*** *на това множество и се означава със символа $\underline{x}=\inf\{x\}$**.*

Определение 2 може да се формулира и по следния начин:

Числото $\overline{x}$ (числото $\underline{x}$) се нарича ***точна горна (точна долна) граница*** *на ограничено отгоре (отдолу) множество $\{x\}$, ако са изпълнени следните две условия: 1) всеки елемент x на множеството*

* sup — първите три букви от латинската дума supremum (супремум), която означава „най-висш".

** inf — първите три букви от латинската дума infimum (инфимум), която означава „най-низш".

$\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$ ($x \geq \underline{x}$); 2) каквото и да е реалното число x', по-малко от $\bar{x}$ (по-голямо от $\underline{x}$), съществува поне един елемент x на множеството $\{x\}$, за който $x > x'$ ($x < x'$).

В това определение условието 1) показва, че числото $\bar{x}$ (числото $\underline{x}$) е горна (долна) граница на множеството $\{x\}$, а условието 2) показва, че тази граница е най-малката (най-голямата) и не може да се намали (увеличи).

2.2.2. Съществуване на точни граници. Съществуването на точна горна (точна долна) граница за всяко ограничено отгоре (отдолу) множество не е очевидно.

Ще докажем следната основна теорема.

Основна теорема 2.1. *Всяко непразно, ограничено отгоре (отдолу) множество от реални числа има точна горна (точна долна) граница.*

Доказателство. Ще дадем доказателство само за съществуването на точна горна граница за всяко ограничено отгоре множество, тъй като съществуването на точна долна граница за всяко ограничено отдолу множество се доказва аналогично.

И така нека множеството $\{x\}$ е ограничено отгоре, т. е. съществува такова реално число M, че всеки елемент на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq M$.

Възможни са следните два случая: 1°. Сред елементите на множеството $\{x\}$ има поне едно неотрицателно реално число. 2°. Всички елементи на множеството $\{x\}$ са отрицателни реални числа. Ще разгледаме тези случаи поотделно.

1°. Да разгледаме само неотрицателните реални числа от множеството $\{x\}$. Всяко от тези числа е представимо с безкрайна десетична дроб. Да разгледаме целите части на тези десетични дроби. Поради неравенството $x \leq M$ всички цели части не надминават числото M и затова ще се намери най-голяма от целите части, която ще означим с $\bar{x}_0$. Да запазим измежду неотрицателните числа на множеството $\{x\}$ онези, чиято цяла част е равна на $\bar{x}_0$, и да пренебрегнем останалите. В запазените числа разглеждаме първия десетичен знак след запетаята. Най-големия от тези знакове означаваме с $\bar{x}_1$. Запазваме измежду неотрицателните числа на множеството $\{x\}$ онези, на които цялата част е равна на $\bar{x}_0$ и първият десетичен знак е равен на $\bar{x}_1$, а останалите пренебрегваме. В запазените числа разглеждаме втория десетичен знак след запетаята. Най-големия от тях означаваме с $\bar{x}_2$. Продължавайки аналогично тези разсъждения, ще определим някое реално число

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \tag{2.9}$$

Ще докажем, че това реално число $\bar{x}$ е точната горна граница на множеството $\{x\}$. За това е достатъчно да покажем верността на двете твърдения: 1) всеки елемент x на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$; 2) за всяко реално число x', по-малко от $\bar{x}$, съществува поне един елемент x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $x > x'$.

Ще докажем най-напред твърдението 1). Тъй като $\bar{x}$ по построение е неотрицателно реално число, то всеки отрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ очевидно удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$. Затова е достатъчно да се докаже, че всеки неотрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$.

Да допуснем, че някой неотрицателен елемент $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ не удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$. Тогава $x > \bar{x}$ и по правилото за наредбата ще се намери такъв номер k, че $x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}, x_k > \bar{x}_k$. Но последното съотношение противоречи на това, че $\bar{x}_k$ е най-големият от десетичните знакове x_k за тези елементи x, на които цялата част и първите $k-1$ знака след запетаята са съответно равни на $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}$. Полученото противоречие доказва твърдение 1).

Сега ще докажем твърдение 2). Нека x' е произволно реално число, за което $x' < \bar{x}$. Трябва да докажем, че съществува поне един елемент x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $x > x'$.

Ако числото x' е отрицателно, то неравенството $x > x'$ се удовлетворява очевидно от всеки неотрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ (по предположение поне един такъв елемент съществува).

Остава да разгледаме случая, когато числото x', удовлетворяващо условието $x' < \bar{x}$, е неотрицателно. Нека $x' = x'_0, x'_1 x'_2 \ldots x'_n \ldots$ От условието $x' < \bar{x}$ и от правилото за наредбата следва, че съществува такъв номер m, че

$$x'_0 = \bar{x}_0, x'_1 = \bar{x}_1, \ldots, x'_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, x'_m < \bar{x}_m. \tag{2.10}$$

От друга страна, от построението на числото (2.9) следва, че за всеки номер m съществува неотрицателен елемент $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ на множеството $\{x\}$, такъв, че цялата му част и първите му m знака след запетаята са същите, както в числото $\bar{x}$. С други думи, за номера m може да се намери такъв елемент x, че

$$x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, x_m = \bar{x}_m. \tag{2.11}$$

Съпоставяйки (2.10) и (2.11), получаваме

$$x_0=x_0',\ x_1=x_1',\ \ldots,\ x_{m-1}=x_{m-1}',\ x_m>x_m',$$

а това означава (поради правилото за наредба), че $x>x'$. Твърдение 2), а с това и теоремата за случая 1° са доказани.

2°. Аналогично се доказва съществуването на точна горна граница и във втория случай, когато всички елементи x на множеството $\{x\}$ са отрицателни реални числа. В този случай ще представим всички елементи x с отрицателни безкрайни десетични дроби и ще означим с $\bar{x}_0$ и най-малката от целите части на тези дроби, с $\bar{x}_1$ — най-малкия от първите десетични знакове на тези дроби, цялата част на които е равна на $\bar{x}_0$, с $\bar{x}_2$ — най-малкия от вторите десетични знакове на тези дроби, цялата част и първия десетичен знак на които са съответно равни на $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$, и т. н.

По този начин получаваме неположителното реално число

$$\bar{x}=-\bar{x}_0,\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n\ldots$$

Напълно аналогично на случай 1° се доказва, че това число е точна горна граница на множеството $\{x\}$, т. е. верността на твърдения 1) и 2), формулирани при разглеждането на случай 1°. Теоремата е доказана.

2.3. Приближаване на реалните числа с рационални

Ще докажем няколко важни леми за приближаване на реалните числа с рационални.

Отначало ще установим, че всяко реално число може да бъде приближено с отнапред зададена точност чрез рационални числа.

Да разгледаме произволно реално число a. За определеност ще предполагаме, че това число е неотрицателно, и ще го представим с десетичната дроб $a=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$

Отсичайки тази дроб до n-тия знак включително след запетаята, ще получим рационалното число $a_0,a_1a_2\ldots a_n$, при което от правилото за наредба на реалните числа непосредствено следва, че $a_0,a_1a_2\ldots a_n\leq a$.

Като увеличим това число с 10^{-n}, ще получим друго рационално число $a_0,a_1a_2\ldots a_n+10^{-n}$, което (поради правилото за наредба на реалните числа) ще удовлетворява неравенството

$$a\leq a_0,a_1a_2\ldots a_n+10^{-n}.$$

И така за всеки номер n намерихме такива две рационални числа $\alpha_1=a_0,a_1a_2\ldots a_n$ и $\alpha_2=a_0,a_1a_2\ldots a_n+10^{-n}$, че $\alpha_1\leq a\leq\alpha_2$ и $\alpha_2-\alpha_1=10^{-n}$.

Ще се убедим в това, че за всяко отнапред зададено положително рационално число ε от известно място нататък (т. е. от някое n нататък) е изпълнено неравенството $10^{-n}<\varepsilon$.

Действително според аксиомата на Архимед има само краен брой естествени числа, ненадминаващи числото $1/\varepsilon$. Следователно само за краен брой номера n е изпълнено неравенството $10^n\leq 1/\varepsilon$, или $10^{-n}\geq\varepsilon$. За всички останали номера n е изпълнено противоположното неравенство $10^{-n}<\varepsilon$, което и трябваше да докажем.

Стигнахме до следното твърдение:

Лема 1. *За произволно реално число a и за всяко отнапред избрано положително рационално число ε съществуват такива две рационални числа α_1 и α_2, че $\alpha_1\leq a\leq\alpha_2$ и $\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon$.*

Ще докажем още две леми, характеризиращи гъстотата на разпределение на рационалните числа в реалните числа.

Лема 2. *Каквито и да са двете реални числа a и b, за които $a>b$, съществува рационално число α, заключено между тях, т. е. такова, че $a>\alpha>b$ (а следователно съществуват и безбройно много различни рационални числа, заключени между a и b).*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая, когато числата a и b са неотрицателни, тъй като случаят, когато a и b са неположителни, се свежда към първия, като използваме модулите, а случаят, когато a е положително, а b — отрицателно, е тривиален (за α може да се вземе нулата).

И така нека $a>b\geq 0$. Да предположим, че $a=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, $b=b_0,b_1b_2\ldots b_n\ldots$, при това, ако a е рационално число, представимо с крайна десетична дроб, ще приемем за представител на a онази десетична дроб, която окончава на безкраен брой деветки.

Тъй като $a>b$, ще се намери такъв номер k, че $a_0=b_0, a_1=b_1, \ldots, a_{k-1}=b_{k-1}, a_k>b_k$.

Поради направената по-горе уговорка всички десетични знаци a_n при $n>k$ не могат да бъдат нули.

Означаваме с p най-малкото от числата n, по-големи от k, за които $a_n\neq 0$. Тогава числото a може да се запише във вида

$$a=a_0,a_1a_2\ldots a_k00\ldots 0a_p\ldots \qquad (a_p>0).$$

С помощта на правилото за наредба на реални числа лесно се проверява, че рационалното число

$$\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_k00\ldots 0(a_p-1)999$$

удовлетворява неравенствата $a>\alpha>b$. □

Лема 3. *Нека x_1 и x_2 са две реални числа. Нека за всяко положително рационално число ε да съществуват такива две рационални числа γ_1 и γ_2, че $\gamma_1 \leqq x_1 \leqq \gamma_2$, $\gamma_1 \leqq x_2 \leqq \gamma_2$, и $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon$.* Тогава *числата x_1 и x_2 са равни.*

Доказателство. Допускаме противното, т. е. че $x_1 \neq x_2$. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че $x_1<x_2$. Съгласно лема 2 съществуват такива две рационални числа α_1 и α_2, че

$$x_1<\alpha_1<\alpha_2<x_2.$$

Нека сега γ_1 и γ_2 са какви да е рационални числа, удовлетворяващи неравенствата

$$\gamma_1 \leqq x_1 \leqq \gamma_2, \quad \gamma_1 \leqq x_2 \leqq \gamma_2.$$

От горните неравенства и свойствата транзитивност на $>$ и $=$ получаваме $\gamma_1<\alpha_1<\alpha_2<\gamma_2$. Но тогава $\gamma_2-\gamma_1>\alpha_2-\alpha_1$, което противоречи на това, че разликата $\gamma_2-\gamma_1$ може да бъде направена по-малка от всяко отнапред избрано положително рационално число ε. □

2.4. Операции събиране и умножение на реални числа

Един от най-важните въпроси от теорията на реалните числа е въпросът за дефиниране на операциите събиране и умножение на реални числа и свойствата на тези операции.

2.4.1. Дефиниране на операциите. Точно описание на понятието реално число. За да се съберат две реални числа a и b, те се заменят с исканата точност с рационални числа и за приближена стойност на сумата им се взема сумата на посочените рационални числа.

Фактически посоченият практически начин за събиране на реални числа предполага, че колкото по-точно рационалните числа α и β приближават съответно реалните числа a и b, толкова по-точно сумата $\alpha+\beta$ приближава реалното число, което би трябвало да бъде сумата на реалните числа a и b.

Желанието да се оправдае посоченият практически начин за събиране на две реални числа води до следното определение на сума на две реални числа.

Определение 1. ***Сума на две реални числа*** *a и b наричаме такова реално число x, което за всеки четири рационални числа α_1, α_2, β_1, β_2, за които са изпълнени неравенствата $\alpha_1 \leqq a \leqq \alpha_2$, $\beta_1 \leqq b \leqq \beta_2$, удовлетворява неравенствата*

$$\alpha_1+\beta_1 \leqq x \leqq \alpha_2+\beta_2.$$

Това число x се означава със символа $a+b$. В 2.4.2 ще бъде доказано, че такова число x съществува и е само едно. Там ще бъде установено, че това число x е точната горна граница на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ от сумите на всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_1 \leqq a$, $\beta_1 \leqq b$, или точната долна граница на множеството $\{\alpha_2+\beta_2\}$ от сумите на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leqq \alpha_2$, $b \leqq \beta_2$.

В 2.4.2 ще бъде доказано също, че ако приложим даденото определение за две рационални числа, стигаме до същия резултат, както и при старото определение за сума на рационални числа.

Определение 2. ***Произведение*** *на две положителни реални числа a и b се нарича такова реално число x, което при всеки избор на рационалните числа α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяващи съотношенията $0<\alpha_1 \leqq a \leqq \alpha_2$, $0<\beta_1 \leqq b \leqq \beta_2$, удовлетворява неравенствата $\alpha_1\beta_1 \leqq x \leqq \alpha_2\beta_2$.*

Това число x се означава със символа $a.b$. В 2.4.2 ще бъде установено, че такова число x съществува и то е само едно. Това число x е точната горна граница на множеството $\{\alpha_1 . \beta_1\}$ от произведенията на всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $0<\alpha_1 \leqq a$, $0<\beta_1 \leqq b$, или точната долна граница на множеството $\{\alpha_2 . \beta_2\}$ от произведенията на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $0<a \leqq \alpha_2$, $0<b \leqq \beta_2$.

Произведение на реални числа с произволен *знак се определя по следното правило:*

1) *за всяко реално число a полагаме* $a.0=0=0.a$;

2) $a.b=\begin{cases} |a|.|b|, & \text{ако } a \text{ и } b \text{ имат еднакви знаци,} \\ -|a|.|b|, & \text{ако } a \text{ и } b \text{ са с различни знаци.} \end{cases}$

В 2.4.2 ще бъде установено, че приложено към две рационални числа, това правило води до същия резултат, както и старото определение за произведение на рационални числа.

Сега можем да уточним понятието реално число.

Определение 3. *Ще наричаме реални числата, представими във вид на безкрайни десетични дроби, при условие, че за тези числа са определени по посочения по-горе начин операциите наредба, събиране и умножение.*

2.4.2. Съществуване и единственост на сумата и произведението на реални числа.

Теорема за съществуване на сума на реални числа. *За всеки две реални числа a и b съществува реално число x, което е тяхна сума.*

Доказателство. Фиксираме две произволни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$, и разглеждаме всевъзможните рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_1 \leq a$, $\beta_1 \leq b$.

Ще се убедим, че множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ от всички суми $\alpha_1+\beta_1$ на посочените рационални числа е ограничено отгоре.

Съгласно свойството транзитивност на знаците $>$ и $=$ от неравенствата $a \leq \alpha_2$ и $\alpha_1 \leq a$ следва, че $\alpha_1 \leq \alpha_2$, а от неравенствата $b \leq \beta_2$ и $\beta_1 \leq b$ следва, че $\beta_1 \leq \beta_2$.

Но двете неравенства $\alpha_1 \leq \alpha_2$ и $\beta_1 \leq \beta_2$ са еднопосочни, свързват рационални числа и могат да бъдат почленно събрани (вж. края на 2.1.1). Тогава $\alpha_1+\beta_1 \leq \alpha_2+\beta_2$, което и доказва ограничеността на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ отгоре и това, че $\alpha_2+\beta_2$ е една горна граница на това множество.

Според основната теорема 2.1 (вж. 2.2.2) за множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ съществува точна горна граница, която ще означим с x. Остава да се убедим, че това реално число е сума на числата a и b, т. е. удовлетворява неравенствата

$$\alpha_1+\beta_1 \leq x \leq \alpha_2+\beta_2.$$

Верността на лявото неравенство $\alpha_1+\beta_1 \leq x$ следва от това, че x е горна граница на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а верността на дясното неравенство $x \leq \alpha_2+\beta_2$ следва от това, че числото $\alpha_2+\beta_2$ е горна граница за множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а x е точната горна граница, т. е. най-малката от горните граници на това множество. Теоремата е доказана.

Забележка. Съвсем аналогично се доказва, че сумата на числата a и b е точна долна граница на множеството $\{\alpha_2+\beta_2\}$ от сумите $\alpha_2+\beta_2$ на всички възможни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$.

Теорема за единственост на сумата на две реални числа. *Съществува само едно реално число x, което е сума на две дадени реални числа a и b.*

Доказателство. Да предположим, че съществуват две реални числа x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата

$$(2.12) \qquad \begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \leq x_1 \leq \alpha_2+\beta_2, \\ \alpha_1+\beta_1 \leq x_2 \leq \alpha_2+\beta_2 \end{cases}$$

за всички възможни рационални числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяващи неравенствата

$$(2.13) \qquad \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq b \leq \beta_2.$$

Да фиксираме едно произволно положително рационално число ε. Съгласно лема 1 от 2.3 за положителното рационално число $\varepsilon/2$ и за даденото реално число a съществуват такива рационални числа α_1 и α_2, че $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, при което $\alpha_2-\alpha_1 < \varepsilon/2$.

Аналогично за избраното $\varepsilon/2$ и за даденото реално число b съществуват такива рационални числа β_1 и β_2, че $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$ и $\beta_2-\beta_1 < \varepsilon/2$.

Ако вземем в неравенствата (2.13) посочените α_1, α_2, β_1 и β_2, ще получим, че двете числа x_1 и x_2 удовлетворяват неравенствата 2.12), които могат да се препишат във вида

$$\gamma_1 \leq x_1 \leq \gamma_2, \quad \gamma_1 \leq x_2 \leq \gamma_2,$$

където $\gamma_1=\alpha_1+\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2+\beta_2$.

Тъй като $\gamma_2-\gamma_1=(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1)=(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1) < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$, ще получим, че двете числа x_1 и x_2 са заключени между рационалните числа γ_1 и γ_2, разликата между които е по-малка от отнапред избраното положително рационално число ε.

Поради лема 3 от 2.3 имаме $x_1=x_2$. □

Следствие. Ако приложим даденото определение за сума на реални числа за две рационални числа a и b, ще получим същия резултат, както и с определението за сума на рационални числа.

Наистина нека a и b са две рационални числа, $a+b$ е сумата им съгласно старото определение, α_1, α_2, β_1 и β_2 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата (2.13). Тогава очевидно са верни неравенствата*

$$(2.14) \qquad \alpha_1+\beta_1 \leq a+b \leq \alpha_2+\beta_2,$$

при това съгласно теоремата за единственост числото $a+b$ е единственото реално число, удовлетворяващо неравенствата (2.14).

Съвсем аналогично се доказва съществуването и единствеността на произведението на две реални числа.

Ясно е, че е достатъчно да се докаже съществуването и единствеността на произведението на две положителни числа a и b.

За да докажем съществуването на произведението, фиксираме произволни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$, и разглеждаме всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $0 < \alpha_1 \leq a$, $0 < \beta_1 \leq b$. Лесно е да се убедим, че множеството $\{\alpha_1 . \beta_1\}$ от всички произведения $\alpha_1 . \beta_1$ е

* Тъй като за рационалните числа еднопосочните неравенства могат да бъдат събирани почленно.

ограничено отгоре и числото $\alpha_2 . \beta_2$ е една горна граница на това множество.

Съгласно основната теорема 2.1 съществува точна горна граница x на това множество, която, както лесно се проверява, удовлетворява неравенствата $\alpha_1\beta_1 \leq x \leq \alpha_2\beta_2$, т. е. е произведение на числата a и b.

Аналогично може да се докаже, че произведението на положителните числа a и b е точна долна граница на множеството $\{\alpha_2 . \beta_2\}$ от произведенията $\alpha_2 . \beta_2$ на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$.

За да докажем единствеността на произведението на две реални числа a и b, ще предположим, че съществуват две такива реални числа x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата

$$\alpha_1 . \beta_1 \leq x_1 \leq \alpha_2 . \beta_2, \quad \alpha_1 . \beta_1 \leq x_2 \leq \alpha_2 . \beta_2 \tag{2.15}$$

за всички рационални числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2, че*

$$0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \leq M, \quad 0 < \beta_1 \leq b \leq \beta_2 \leq M. \tag{2.16}$$

Фиксираме произволно положително рационално число ε, с помощта на лема 1 намираме за дадените реални числа a и b такива рационални числа α_1, α_2, β_1 и β_2, удовлетворяващи неравенствата (2.16), за които $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/2M$ и $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/2M$.

Но тогава поради (2.15) числата x_1 и x_2 ще бъдат заключени между рационалните числа $\alpha_1 . \beta_1$ и $\alpha_2 . \beta_2$, чиято разлика е

$$\alpha_2 . \beta_2 - \alpha_1 . \beta_1 = \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) < 2M . \varepsilon/2M = \varepsilon.$$

Съгласно лема 3 от 2.3 $x_1 = x_2$.

С помощта на теоремата за единственост, както и при сума, се доказва, че за рационални числа това определение е еквивалентно на определението за произведение на рационални числа, дадено по-рано.

2.5. Свойства на реалните числа

2.5.1. Основни свойства на реалните числа. В тази точка ще установим, че за реалните числа са валидни всички основни свойства на рационалните числа, изброени в 2.1.1. Вече бе установено, че реалните числа притежават свойствата 1^0—4^0, така че остава да се изясни само въпросът за свойствата 5^0—16^0. Лесно се убеждаваме, че за реалните числа са налице свойствата 5^0—8^0 и 14^0 свързани с понятието сума. Валидността на свойствата 5^0—8^0

* За M може да се вземе например числото $2(a+b)$.

произтича непосредствено от определението за сума на реални числа и от валидността на тези свойства за рационални числа.

Ще се спрем на доказателството на свойство 14^0, т. е. ще докажем, че ако a, b и c са три произволни реални числа и $a > b$, то $a + c > b + c$.

Тъй като $a > b$, то съгласно лема 2 от 2.3 съществуват такива рационални числа α_1 и β_2, че $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$. За реалното число c и за положителното рационално число $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ съществуват такива рационални числа γ_1 и γ_2, че $\gamma_1 \leq c \leq \gamma_2$, при което $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ (вж. лема 1, 2.3). Нека сега α_2 и β_1 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_2 \geq a$, $b \geq \beta_1$. Тогава по определението за сума на реални числа

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq a + c \geq \alpha_1 + \gamma_1, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq b + c \geq \beta_1 + \gamma_1.$$

За доказване на $a + c > b + c$ поради транзитивността на знака $>$ е достатъчно да покажем, че $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$, но това непосредствено следва от неравенството $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_2$.

Ще отбележим, че въпросът за изваждане на реални числа като действие, обратно на събирането, се изчерпва напълно въз основа на свойства 5^0—8^0. ***Разлика на две реални числа** a и b ще наричаме реалното число c, за което* $c + b = a$.

Ще се убедим, че тази разлика е числото $c = a + b'$, където b' е противоположното число на b.

Наистина от свойства 5^0—8^0 следва $c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$.

Ще се убедим също, че съществува само едно реално число, което е разлика на две дадени реални числа. Да предположим, че освен посоченото число $c = a + b'$ съществува още едно такова число d, че $d + b = a$. Тогава, от една страна, $(d + b) + b' = a + b' = c$, а, от друга, $(d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$, т. е. $c = d$.

От определението на разлика и от свойство 8^0 следва, че числото a', противоположно на a, е равно на разликата $0 - a$. Това число се записва $-a$.

Не представлява трудност да се пренесат за реалните числа свойствата 9^0—13^0 и 15^0, свързани с понятието произведение. Ще отбележим само, че по отношение на свойство 12^0, ако a е реално положително число, а α_1 и α_2 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата $0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, то числото a', обратно на a, се определя като единственото реално число, удовлетворяващо неравенствата $1/\alpha_2 \leq a' \leq 1/\alpha_1$.*

* За a' може да бъде взета точната горна граница на множеството на всички рационални числа $\{1/\alpha_2\}$, където $\alpha_2 \geq a$.

От свойствата 9^0—12^0 заключаваме, че *за всеки две реални числа a и b ($b \neq 0$) съществува и при това само едно число c, удовлетворяващо $c \cdot b = a$. Това число с се нарича* ***частно на числата*** a и b. От определението за частно и от свойство 12^0 следва, че числото a', обратно на числото a, е равно на числото $1/a$.

Ще отбележим накрая, че за реалните числа е в сила и последното 16^0-то свойство, а именно: Каквото и да е реалното число a, то числото 1 може да се прибави към себе си толкова пъти, че получената сума да надвишава a.

Да докажем това свойство. В случая $a<0$ то е вярно, тъй като $1>a$. Нека $a \geqq 0$, $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ Достатъчно е да се докаже, че за числото a съществува цяло число n, за което $n>a$, тъй като чрез сумиране на числото 1 n пъти ще получим цялото число n. Но това е очевидно: достатъчно е да вземем $n = a_0 + 2$. □

По такъв начин за реалните числа са валидни всички основни свойства на рационалните числа, формулирани в 2.1.1.

Следователно за реалните числа са в сила всички алгебрични правила, отнасящи се за аритметичните действия и съчетаването им с равенства и неравенства.

2.5.2. Две важни съотношения. При работа с рационални числа често се използват съотношенията:

(2.17) $$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

(2.18) $$|a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Равенството (2.17) следва непосредствено от определението за произведение на две реални числа. Ще докажем неравенството (2.18). От определението за модул и правилото за наредба следва, че за произволни реални числа a и b са изпълнени неравенствата

$$-|a| \leqq a \leqq |a|, \quad -|b| \leqq b \leqq |b|.$$

Съгласно основните свойства еднопосочните неравенства могат да се събират почленно. Затова

$$-(|a|+|b|) \leqq a+b \leqq (|a|+|b|).$$

Използвайки в случая $a+b>0$ дясното, а в случая $a+b \leqq 0$ лявото от последните неравенства, ще получим неравенството (2.18).

2.5.3. Някои конкретни множества от реални числа. По-нататък често ще срещаме различни множества от реални числа. Както вече се условихме, произволно множество от реални числа ще означаваме с символа $\{x\}$, а числата от него ще наричаме елементи или точки на това множество. Ще казваме, че точката x_1 от множеството $\{x\}$ ($x_1 \in \{x\}$) е различна от точката x_2 на това множество, ако реалните числа x_1 и x_2 не са равни помежду си. Ако при това е вярно неравенството $x_1 > x_2$ ($x_1 < x_2$), ще казваме, че точката x_1 лежи надясно (наляво) от точката x_2.

Да разгледаме някои често употребявани множества от реални числа.

1^0. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a \leqq x \leqq b$, ще наричаме* ***сегмент*** *или* ***затворен интервал*** *и ще го означаваме със символа* $[a, b]$.

2^0. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a<x<b$, ще наричаме* ***интервал*** *или* ***отворен интервал*** *и ще го означаваме със символа* (a, b).

3^0. *Интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, където $\varepsilon>0$, ще наричаме* ***ε-околност на точката*** a.

4^0. *Всеки интервал (отворен интервал), съдържащ точката a, ще наричаме* ***околност на точката*** a.

5^0. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a \leqq x < b$ (или $a < x \leqq b$), ще наричаме* ***полусегмент*** *или* ***полузатворен отдолу (отгоре) интервал,*** *или* ***полузатворен отляво (отдясно) интервал*** *и ще го означаваме със символа* $[a, b)$ (*или* $(a, b]$).

6^0. *Множеството на всички реални числа ще наричаме* ***числова (безкрайна) права*** *и ще го означаваме със символа* $(-\infty, +\infty)$.

7^0. *Множеството на реалните числа x, удовлетворяващи неравенството $x \geqq a$ (или $x \leqq b$), ще наричаме* ***полуправа*** *и ще го означаваме със символа* $[a, +\infty)$ (*или* $(-\infty, b]$).

8^0. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенството $x>a$ (или $x<b$), ще наричаме* ***отворена полуправа*** *и ще го означаваме със символа* $(a, +\infty)$ (*или* $(-\infty, b)$).

Забележка 1. Най-общо под понятието *„интервал"* се разбира множество от вида 1^0, 2^0, 5^0, 6^0, 7^0 и 8^0. В първите три случая имаме *„крайни интервали"*, а в последните три — *„безкрайни интервали"*. Ако в текста се среща понятието „интервал" без прилагателно (отворен, затворен, краен, безкраен и т. н.), то видът му или е отнапред посочен, или се изяснява от символа, с който е означен. Когато липсва каквато и да било информация за вида на интервала, ще смятаме, че е „краен отворен интервал".

Забележка 2. В случаите 1^0, 2^0 и 5^0 точките a и b се наричат ***гранични точки, контурни точки*** или ***краища*** на интервала. В случая 1^0 те принадлежат на интервала, в 2^0 не принадлежат на интервала, а в 5^0 едната принадлежи, а другата не принадлежи на интервала. И в трите случая всяка точка, която удовлетворява неравенствата $a<x<b$, се нарича ***вътрешна точка на интервала.***

Произволно множество $\{x\}$ *ще наричаме* ***плътно (навсякъде гъсто) в себе си,*** *ако всяка околност на всяка точка* x *от това множество съдържа поне една точка от множеството* $\{x\}$, *различна от* x. Пример за плътно (навсякъде гъсто) в себе си множество е всяко от определените по-горе множества 1^0—8^0. Други примери за плътни (навсякъде гъсти) в себе си множества са множествата на рационалните числа, принадлежащи на кое да е от множествата 1^0—8^0.

2.6. Допълнителни въпроси от теорията на реалните числа

За въвеждане на реалните числа използвахме безкрайните десетични дроби. За множеството на безкрайните десетични дроби бяха определени правила за наредба, събиране и умножение и беше установено, че тези правила удовлетворяват шестнадесет основни свойства (изброени в 2.1.1 за рационалните числа). Използваният метод за въвеждане на реалните числа не е единствено възможният. Реалните числа могат да се въведат с помощта на безкрайни двоични дроби, с помощта на т. нар. дедекиндови сечения в областта на рационалните числа, с помощта на редици от рационални числа и по други начини. За да изясним връзката между различните методи за въвеждане на реалните числа, ще въведем някои нови понятия и ще установим още едно важно свойство на множеството на реалните числа.

2.6.1. ***Пълнота на множеството от реалните числа.*** Нека A и B са две произволни множества. *Ще казваме, че между множествата* A *и* B *е установено* ***взаимно еднозначно съответствие (1,1-значно съответствие),*** *ако на всеки елемент на множеството* A *отговаря единствен елемент от множеството* B, *така че на всеки елемент на множеството* B *е съпоставен някой елемент от множеството* A *и на различни елементи на множеството* A *съответствуват различни елементи на множеството* B.

Две множества, за елементите на всяко от които са определени правила за наредба, събиране и умножение, ще наричаме ***изоморфни едно на друго*** (*или за краткост* ***изоморфни***) *относно тези правила, ако между елементите на тези множества може да се установи такова взаимно еднозначно съответствие, че ако на елементите* a *и* b *от първото множество съответствуват елементите* a' *и* b' *от второто множество, то:* 1) *елементите* a' *и* b' *са свързани със същия знак* ($>$, $<$ *или* $=$), *както и елементите* a *и* b; 2) *на елемента* $a+b$ *съответствува елементът* $a'+b'$; 3) *на елемента* $a \cdot b$ *съответствува елементът* $a' \cdot b'$.

Аналогично може да се въведе понятието изоморфни множества въз основа и на други правила, характеризиращи някакви съотношения между елементите на множествата, различни от правилата за наредба, събиране и умножение.

Пример на две изоморфни множества относно правилата наредба, събиране и умножение са множеството на рационалните числа, въведени като отношение на цели числа със съответните (вж. 2.1.1) правила за наредба, събиране и умножение, и множеството на рационалните числа, записани във вид на безкрайни десетични дроби с обикновените правила за наредба, събиране и умножение на реални числа.

Ще разгледаме по-внимателно две множества: множеството на рационалните числа и множеството на реалните числа. За всяко от тези множества са определени правила за наредба, събиране и умножение и са изпълнени шестнадесетте основни свойства. Ясно е, че множеството на реалните числа е „по-широко" от множеството на рационалните числа, тъй като множеството на реалните числа не е изоморфно на множеството на рационалните числа относно правилата за наредба, събиране и умножение,* но в множеството на реалните числа може да се отдели част, изоморфна на множеството на рационалните числа относно посочените правила.

Естествено възниква въпросът: възможно ли е и за множеството на реалните числа да се построи „по-широко" множество от обекти със следните свойства: 1) в това „по-широко" множество да са определени правила за наредба, събиране и умножение и да са изпълнени останалите от 16-те основни свойства; 2) това „по-широко" множество да не е изоморфно на множеството на реалните числа относно посочените правила; 3) в „по-широкото" множество да може да се отдели част, изоморфна на множеството на реалните числа относно посочените правила.

Ще докажем, че такова „по-широко" множество не съществува, т. е. множеството на реалните числа е пълно относно правилата наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства.

Въобще *произволно множество от обекти, за които са определени някои правила и са изпълнени някои свойства, се нарича пълно относно тези правила и свойства, ако не може да се построи такова „по-широко" множество от обекти, че:*

* В 2.7.3 ще бъде доказано, че не може да се установи взаимно еднозначно съответствие между рационалните и реалните числа от сегмента $[0, 1]$, откъдето следва твърдението.

1) в това „по-широко" множество да са определени същите правила и да има същите свойства; 2) това „по-широко" множество да не е изоморфно на даденото относно посочените правила; 3) в това „по-широко" множество да съществува част, изоморфна на даденото множество относно посочените правила.

Можем да твърдим, че множеството на рационалните числа не е пълно относно правилата наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства, тъй като съществува „по-широко" множество (множеството на реалните числа), удовлетворяващо изискванията 1), 2), 3) от току-що формулираното определение.

Сега ще докажем, че множеството на реалните числа е **пълно** относно правилата за наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства.

Да предположим противното, т. е. че съществува такова „по-широко" множество от обекти $\{x'\}$, че да са изпълнени 1), 2) и 3) от формулираното по-горе определение, и да означим с $\{\bar{x}'\}$ тази част от множеството $\{x'\}$, която е изоморфна на множеството $\{x\}$ от реалните числа относно правилата за наредба, събиране и умножение.

Ще отбележим най-напред, че в множеството $\{x'\}$ съществува единствена двойка елементи $0'$ и $1'$, играещи особената роля на нула и единица.* Можем да твърдим, че елементите $0'$ и $1'$ принадлежат на множеството $\{\bar{x}'\}$ и са във взаимно еднозначно съответствие с реалните числа 0 и 1.**

Нека α' е кой да е елемент на множеството $\{x'\}$, непринадлежащ на множеството $\{\bar{x}'\}$. Като използваме правилото за наредба, можем да разделим елементите $\bar{x}'$ на множеството $\{\bar{x}'\}$ на два класа — горен и долен, отнасяйки към горния клас всички елементи $\bar{x}'$, удовлетворяващи неравенството $\bar{x}'>\alpha'$, а към долния клас — всички елементи $\bar{x}'$, удовлетворяващи неравенството $\bar{x}'<\alpha'$. Тези два класа не са празни. Наистина ще докажем например, че горният клас не е празен. Събирайки елемента $1'$ сам със себе си достатъчен брой пъти, поради свойство 16° ще получим елемент n' от множеството $\{\bar{x}'\}$, удовлетворяващ неравенството $n'>\alpha'$, т. е. принадлежащ на горния клас. От свойство 4° следва, че всеки елемент от долния клас е по-малък от произволен елемент от горния клас.

Поради изоморфизма между множеството $\{\bar{x}'\}$ и множеството $\{x\}$ на реалните числа можем да твърдим, че множеството на реалните числа се разделя на два класа, при това всяко число от долния клас е по-малко от всяко число от горния клас. Но това означава, че долният клас от реални числа е ограничен отгоре и има (според теорема 2.1) точна горна граница m, а горният клас има точна долна граница M. От определенията за точни граници следва, че двете граници m и M са заключени между произволно близки реални числа и затова $m=M$. Тъй като числото $m=M$ е реално число, то принадлежи на един от двата класа, т. е. или съществува най-малък елемент в горния клас, или най-голям елемент в долния клас. Ще докажем, че и двете твърдения са абсурдни. Нека например съществува най-малък елемент в горния клас от реални числа. Тогава съществува най-малък елемент m' и в горния клас при съответното разделяне на множеството $\{\bar{x}'\}$. Според определението на горния клас $m'>\alpha'$. Съгласно свойствата на сума съществува разликата $m'-\alpha'$ и $m'-\alpha'>0'$. Но тогава от 11° за елемента $m'-\alpha'$ съществува обратен, който съгласно свойствата на произведение е равен на частното $1'/(m'-\alpha')$. Поради свойство 16° от елемента $1'$ може да се получи „цял" елемент n', който принадлежи на $\{\bar{x}'\}$ и удовлетворява неравенството $n'>1'/(m'-\alpha')$. От това неравенство и свойствата на произведение и сума получаваме*

$$m'-1'/n'>\alpha'. \tag{2.19}$$

Тъй като елементите m', $1'$ и n' принадлежат на множеството $\{\bar{x}'\}$, то и елементът $(m'-1'/n')$ също така принадлежи на това множество и очевидно удовлетворява неравенството $m'-1'/n'<m'$. Но тогава неравенството (2.19) означава, че горният клас има елемент, по-малък от m', т. е. m' не е най-малкият елемент. Полученото противоречие доказва пълнотата на множеството на реалните числа.**

---

* Ако имаше два елемента $0_1'$ и $0_2'$, играещи особената роля на нулата, то от свойствата на сумата ще получим $0_1'=0_1'+0_2'=0_2'+0_1'=0_2'$, т. е. $0_1'=0_2'$. Аналогично се доказва единствеността на елемента $1'$, играещ особената роля на единица.

** Ще докажем например, че елементът $0'$ принадлежи на множеството $\{\bar{x}'\}$ и се намира във взаимно еднозначно съответствие с реалното число 0. Да предположим, че на реалното число 0 съответствува някой елемент θ' от множеството $\{\bar{x}'\}$. Тъй като $0+0=0$, то $\theta'+\theta'=\theta'$. В множеството $\{x'\}$ съществува такъв елемент θ'', че $\theta''+\theta'=0'$. Прибавяйки към двете страни на равенството $\theta'+\theta'=\theta'$ елемента θ'', получаваме $(\theta''+\theta')+\theta'=\theta''+\theta'$, т. е. $0'+\theta'=0'$, или $\theta'=0'$. Аналогично се провеждат и разсъжденията за единичния елемент.

* Тези свойства осигуряват приложимостта на всички правила на алгебрата.

** При доказателството на тази теорема се наложи идеята на така нареченото дедекиндово сечение. Дедекиндово сечение в областта на рационалните числа се нарича разделянето на множеството на рационалните числа на две непразни подмножества A и B, такива, че всеки елемент на A да е по-малък от всеки елемент на B.

2.6.2. Аксиоматично въвеждане на множеството на реалните числа. За въвеждане на реалните числа използвахме множеството на безкрайните десетични дроби. Определяйки за множеството на тези дроби правила за наредба, събиране и умножение, установихме, че елементите на това множество притежават 16-те основни свойства и освен това свойството пълнота относно тези правила.

Описаният начин за въвеждане на реални числа, въпреки че притежава, както вече отбелязахме, несъмнени евристични и методични достойнства, не е единствено възможният и целесъобразният от научна гледна точка. За окончателното оформяне и пълната логическа завършеност на нашите представи за реалните числа е добре да се разгледа и аксиоматичният метод за въвеждане на тези числа.

Този метод се заключава в следното: Множеството от реални числа се въвежда като съвкупност от обекти,* удовлетворяващи 17 аксиоми. Това са 16-те основни свойства и аксиомата за пълнотата относно тях. Тези 17 аксиоми ще наричаме ***аксиоми на реалните числа.*** Конкретна реализация на съвкупност от обекти, удовлетворяващи 17-те аксиоми на реалните числа, е изученото вече множество на безкрайните десетични дроби. Възможни са и други реализации.

В сила е следното забележително твърдение:

Теорема за изоморфизъм. *Всяка реализация на съвкупност от обекти, удовлетворяващи 17-те аксиоми на реалните числа, е изоморфна на изученото множество на безкрайните десетични дроби.*

Доказателството на тази теорема е приведено в 2.6.3.

В геометрията множество от точки върху права се въвежда като съвкупност от обекти, удовлетворяващи известен брой аксиоми, между които основна роля играе аксиомата за пълнотата на тази съвкупност относно останалите аксиоми. Споменатите аксиоми позволяват да се установи взаимно еднозначно съответствие между множеството на точките върху правата и множеството на всички реални числа. Това съответствие позволява реалните числа да се изобразяват като точки на права линия (числовата ос), което ние широко ще използваме с илюстративни цели.

2.6.3. Доказателство на теоремата за изоморфизъм. За удобство ще разделим доказателството на отделни пунктове.

1°. Нека $\{x'\}$ е множество от обекти, удовлетворяващо 17-те аксиоми на реалните числа. Преди всичко ще отбележим, че аксиомите гарантират съществуването на елементите $0'$ и $1'$ в множеството $\{x'\}$, играещи особена роля на нула и единица. От аксиомата на Архимед 16° имаме $1'>0'$.* В множеството $\{x'\}$ отделяме съвкупността от „рационални обекти". Във връзка с това ще отбележим, че всяко рационално число може да се получи от числата 0 и 1 чрез операциите събиране, изваждане и деление. Действително, сумирайки 1 достатъчен брой пъти, можем да получим всяко цяло положително число n; изваждайки от 0 достатъчен брой 1, ще получим всяко цяло отрицателно число; с деление на две цели числа получаваме всяко рационално число. Тъй като съгласно аксиомите в множеството $\{x'\}$ са определени операциите събиране, изваждане и деление, то с помощта на първите две операции от $0'$ и $1'$ ще получим всички (положителни и отрицателни) „цели обекти", а с деление на два „цели обекта" — и всички (положителни и отрицателни) „рационални обекти". Тези обекти ще означаваме, както целите и рационалните числа, но с „'".

Ще докажем, че построената съвкупност от рационални обекти на множеството $\{x'\}$ е изоморфна на съвкупността на рационалните числа на множеството $\{x\}$. Поставяме в съответствие на рационалното число m/n „рационалния обект" m'/n'. От начина на построяване на „рационалните обекти" следва, че на сумата и произведението на рационалните числа m/n и p/q съответствуват сумата и произведението на „рационалните обекти" m'/n' и p'/q'. Остава да се убедим, че m'/n' и p'/q' са свързани със същия знак за равенство или неравенство, както m/n и p/q. Тъй като за построените „рационални обекти" правилото за наредба посредством умножаване на „цели обекти" може да се сведе до наредба на „цели обекти", то е достатъчно да се убедим, че за всеки два „цели обекта" m' и n' имаме $m'>n'$ при $m>n$. За това е достатъчно да докажем, че $(n+1)'>n'$. Последното следва от това, че $1'>0'$, и оттук $(n+1)'=n'+1'>n'+0'=n'$.

2°. Нека a' е произволен обект от множеството $\{x'\}$. Ще покажем, че на този обект може да се съпостави напълно определена „безкрайна десетична дроб". За определеност ще предположим, че $a'>0'$. Според аксиома 16° сред „целите обекти", строго по-малки от a', има най-голям обект, който ще означим с a_0'; сред „рационалните обекти" $a_0', 0'; a_0', 1'; \dots; a_0', 9'$, строго по-малки от a', има най-голям, който означаваме с a_0', a_1', и т. н.

По такъв начин ние съпоставихме на всеки обект $a'>0'$ безкрайна съвкупност от „рационални обекти"

$$a_0'; \; a_0', a_1'; \; a_0', a_1' a_2'; \; \dots; \; a_0', a_1' a_2' \dots a_n'; \dots, \tag{2.20}$$

* При това нищо не се предполага за естеството на тези обекти.

* Наистина, ако допуснем противното: $1' \leq 0'$, ще получим $1'+1'+\dots+1' \leq 0'+0'+\dots+0'=0'$ (колкото и единици да съберем), което противоречи на аксиома 16°.

или „безкрайната десетична дроб"

(2.21) $$a_0', a_1' a_2' \cdots a_n' \cdots$$

Същите разсъждения са валидни и за $a'<0'$, но в този случай както обектите (2.20), така и „безкрайната десетична дроб" (2.21) ще имат знак „—". От построението на съвкупността обекти (2.20) е очевидно, че за всеки номер n са изпълнени неравенствата

(2.22) $$a_0', a_1' a_2' \cdots a_n' < a' \leq a_0', a_1' a_2' \cdots a_n' + 1'/(10^n)',$$

т. е. всеки обект a' е заключен между два „рационални обекта", разликата между които $1'/(10^n)'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект.*

3°. Ще докажем сега, че ако два обекта a' и b' могат да се заключат между два „рационални обекта" α' и β' ($\beta'>\alpha'$), разликата между които $\beta'-\alpha'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен обект", то $a'=b'$. Да допуснем, че $a'\neq b'$. Нека например $a'<b'$. Тогава $\alpha'\leq a'<b'\leq\beta'$. От тези неравенства и от аксиомите получаваме

(2.23) $$0'<b'-a'\leq\beta'-\alpha'.$$

Но тогава за обекта $b'-a'$ ще се намери обратен $1'/(b'-a')$, а за него „цял обект" n', за който $n'>1'/(b'-a')$, така че $1'/n'<b'-a'$. Съпоставяйки последното неравенство с (2.23), получаваме $1'/n'<\beta'-\alpha'$, което противоречи на това, че разликата $\beta'-\alpha'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект.

4°. Ще се убедим, че на два различни обекта от множеството $\{x'\}$ се съпоставят различни „безкрайни десетични дроби". Действително да предположим, че на два обекта от $\{x'\}$ съответствува една и съща „безкрайна десетична дроб" (например (2.21)). Тогава поради неравенствата (2.22) тези два обекта могат да бъдат заключени между „рационални обекти", разликата между които може да бъде направена по-малка от всеки отнапред зададен „положителен" обект. Въз основа на 3° разглежданите обекти са равни. Доказаното твърдение оправдава представянето на всеки обект от множеството $\{x'\}$ с „безкрайна десетична дроб".

5°. Съгласно първите три аксиоми за обектите от множеството $\{x'\}$ са определени правила за наредба и операциите събиране и умножение. Ще докажем, че ако всички обекти на множеството $\{x'\}$ се представят с „безкрайни десетични дроби", то

* Действително за всеки обект $\varepsilon'>0'$ вследствие на аксиомите съществува обратен елемент $1'/\varepsilon'$, а за него — „цял обект" n', за който $n'>1'/\varepsilon'$, така че $1'/(10^n)'<1'/n'<\varepsilon'$.

за тези „дроби" правилото за наредба и определенията на сума и произведение се формулират точно така, както за обикновените безкрайни десетични дроби, изучени по-горе.

Нека a' и b' са произволни обекти от множеството $\{x'\}$ и нека на тези обекти съответствуват „безкрайните десетични дроби"*

(2.24) $$a_0', a_1' a_2' \cdots \quad \text{и} \quad b_0', b_1' b_2' \cdots$$

Най-напред ще установим правилото за наредба на обектите a' и b', представени с „безкрайните десетични дроби" (2.24). Трябва да се докажат следните две твърдения: 1) ако дробите (2.24) съвпадат, т. е. ако $a_0'=b_0', a_1'=b_1', \ldots, a_n'=b_n', \ldots$, то обектите a' и b' са равни; 2) ако се намери такъв номер n, че да са изпълнени съотношенията

(2.25) $$a_0'=b_0', a_1'=b_1', \ldots, a_{n-1}'=b_{n-1}', a_n'<b_n',$$

то обектите a' и b' са свързани с неравенството $a'<b'$. Твърдението 1) е вече доказано в 4°. Ще докажем твърдението 2). Последното от съотношенията (2.25) може да се напише във вида $a_n'+1'\leq b_n'$. Като използваме това съотношение и останалите съотношения от (2.25) и запишем за a' дясното неравенство (2.22), а за b' — лявото неравенство (2.22), ще получим

$$a'<a_0',a_1'a_2'\cdots a_{n-1}'a_n'+1'/(10^n)'=a_0',a_1'a_2'\cdots a_{n-1}'(a_n'+1')$$
$$\leq a_0',a_1'a_2'\cdots a_{n-1}'\, b_n'\leq b', \text{ т. е. } a'<b'.$$

За обектите a' и b' са валидни същите определения за сума и произведение с използването на „рационални обекти", както при обикновените реални числа. Ще се ограничим с доказателство за случай на сума. Нека α_1', α_2', β_1' и β_2' са произволни „рационални обекти", удовлетворяващи неравенствата

(2.26) $$\alpha_1'\leq a'\leq\alpha_2', \quad \beta_1'\leq b'\leq\beta_2'.$$

Тогава сумата $a'+b'$ на обектите a' и b' е единственият обект, удовлетворяващ неравенствата

(2.27) $$\alpha_1'+\beta_1'\leq a'+b'\leq\alpha_2'+\beta_2'.$$

Действително от аксиомите следва възможността за почленно събиране на неравенствата, а оттук, че сумата $a'+b'$ удовлетворява неравенствата (2.27). Освен това тази сума е единственият обект, удовлетворяващ неравенствата (2.27), тъй като всяка от

* При установяването на правилото за наредба можем да се ограничим със случая на „положителни" обекти a' и b', тъй като общият случай се свежда към този с помощта на правилото за знаците.

разликите $\alpha_2'-\alpha_1'$ и $\beta_2'-\beta_1'$, а оттук и разликата $(\alpha_2'+\beta_2')-(\alpha_1'+\beta_1')$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект (съгласно 2⁰). Аналогично се разглежда случаят за произведение.

6⁰. Ще докажем, че множеството $\{x'\}$ е изоморфно на множеството на реалните числа, представими с безкрайни десетични дроби. На обекта a', представен с „безкрайната десетична дроб" $a_0', a_1' a_2' \cdot \cdot \cdot a_n' \cdot \cdot \cdot$, ще съпоставим реалното число $a=a_0,a_1a_2 \cdots a_n \cdots$ Нека на обектите a' и b' съответствуват реалните числа a и b. От резултатите в 5⁰ следва, че 1) a' и b' са свързани със същия знак за равенство или неравенство, както и числата a и b; 2) сумата $a'+b'$ съответствува на сумата $a+b$; 3) произведението $a'.b'$ съответствува на произведението $a.b$.*

Остава да се докаже, че при установеното съответствие на всяко реално число съответствува обект от множеството $\{x'\}$. Ако това не е така, то множеството $\{x'\}$ може да се допълни с недостигащите му „безкрайни десетични дроби", запазвайки валидността на 16-те аксиоми. Така стигаме до противоречие с това, че множеството $\{x'\}$ е пълно относно тези аксиоми. □

2.7. Елементи на теорията на множествата

2.7.1. Изброими и неизброими множества. Неизброимост на сегмента [0, 1]. Мощност на множество. Важен въпрос при изучаването на множествата е въпросът за тяхното сравняване по отношение на „количеството" на съдържащите се в тях елементи. Ако имаме две множества с краен брой елементи, то елементите на тези множества могат да се номерират. При това може да се окаже, че двете множества съдържат по еднакъв брой елементи. Такива две множества, съдържащи краен и еднакъв брой елементи, ще наричаме еквивалентни. Ако в едното множество елементите са повече, ще казваме, че то има по-голяма мощност от другото.

Да разгледаме сега множества, състоящи се, общо казано, от безбройно много елементи. Примери за такива множества са множеството на рационалните числа или множеството на реалните числа в сегмента [0, 1].

* Тъй като правилата за наредба, сума и произведение на обектите a' и b' и реалните числа a и b се определят по един и същ начин.

Две множества A и B ще наричаме ***еквивалентни,*** *ако съществува между тях взаимно еднозначно съответствие, т. е. на всеки елемент $a \in A$ отговаря единствен елемент $b \in B$, всеки елемент $b \in B$ е съпоставен на някой елемент $a \in A$ и на различни елементи от множеството A отговарят различни елементи от множеството B.* Взаимно еднозначното съответствие се нарича още ***биекция*** *или* ***биективно съответствие.***

В частност множества, съдържащи краен брой елементи, са еквивалентни тогава и само тогава, когато съдържат еднакъв брой елементи. Еквивалентността на две множества означаваме така: $A \sim B$.

Ще покажем например, че множеството $R=\{r\}$ на рационалните числа и множеството $N=\{n\}$ на естествените числа са еквивалентни. Да отбележим най-напред, че при всяко цяло $k\neq 0$ двете рационални числа m/n и km/kn са равни $(n\neq 0)$. Тогава всяко рационално число r може да се запише във вида $r=p/q$, $q>0$ (p и q — цели) и дробта е несъкратима. Числото 0 ще смятаме, че е записано по единствения начин: $0=0/1$.

Числото $h=|p|+q$ ще наричаме ***височина*** на рационалното число. Ясно е, че рационалните числа с дадена височина са краен брой. Да номерираме рационалните числа по нарастваща височина с помощта на естествените числа: първо ще номерираме всички рационални числа с височина $h=1$. Такова число е само едно: 0, и на него ще поставим индекс 1. След това ще номерираме рационалните числа с височина $h=2$. Такива числа са две: $1=1/1$ и $-1=-1/1$. На първото от тях ще съпоставим естественото число 2 (т. е. поставяме му индекс 2), а на второто — числото 3. След това ще номерираме рационалните числа с височина 3 и т. н. Ясно е, че по този начин ще установим взаимно еднозначно съответствие между рационалните и естествените числа, т. е. $R \sim N$.

Даваме следното определение:

Определение 1. *Едно множество се нарича* ***изброимо,*** *ако е еквивалентно на множеството на естествените числа.*

От проведените по-горе разсъждения се вижда, че множеството на рационалните числа е изброимо множество съгласно това определение.

Ще докажем следните две прости леми, отнасящи се за изброими множества:

Лема 1. *Всяко непразно подмножество на изброимо множество е или множество с краен брой елементи, или изброимо множество.*

Доказателство. Нека A е изброимо множество, т. е. $A \sim N$ е множеството на естествените числа. Това означава, че елементите на A могат да се номерират по някакъв начин. Да разположим елементите на A във вид на редица: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Нека $\varnothing \neq B \subset A$. Разглеждаме редицата от елементи $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Ако $a_1 \in B$, то този елемент означаваме с b_1, ако $a_1 \bar{\in} B$, минаваме към следващия елемент a_2. При разглеждане на елемента a_2 има две възможности: а) елементът $a_2 \in B$; ако при това сме имали, че и $a_1 \in B$, то a_2 означаваме с b_2, а ако $a_1 \bar{\in} B$, то елементът a_2 се означава с b_1; б) елементът $a_2 \bar{\in} B$, тогава минаваме към елемента a_3 и т. н. Ясно е, че може да се случи елементите на множеството B да се разположат във вид на крайна редица: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_M$, $M < +\infty$. В този случай множеството B се състои от краен брой елементи. Ако това не се случи, то ние ще запишем всички елементи от множеството B във вид на безкрайна редица $b_1, b_2, b_3, \ldots$, откъдето следва, че множеството B е изброимо, тъй като очевидно $B \sim N$. □

Лема 2. *Обединението на краен брой или изброима съвкупност изброими множества е изброимо множество.*

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато имаме изброима съвкупност изброими множества. Нека $A_1, A_2, A_3, \ldots$ е съвкупност от множества, всяко от които е изброимо. Да разположим елементите на множествата $A_1, A_2, A_3, \ldots$ във вид на редици:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\},\\
A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\},\\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Нека $A = \bigcup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ще номерираме елементите a на множеството $A = \{a\}$ по следния начин:

$$a_1 = a_{11},\ a_2 = a_{21},\ a_3 = a_{12},\ a_4 = a_{31},\ a_5 = a_{22},\ a_6 = a_{13} \text{ и т. н.}$$

В някои от множествата A_i и A_j могат да се окажат общи елементи $(i \neq j)$. В този случай отчитаме тези елементи само веднъж.

По този начин елементите на множеството A могат да се номерират, т. е. да се установи взаимно еднозначно съответствие с множеството на естествените числа N, и следователно $A = \bigcup_n A_n \sim N$. □

Възниква въпросът: Съществуват ли безкрайни неизброими множества, т. е. безкрайни множества, на които не може да се съпостави във взаимно еднозначно съответствие множеството на естествените числа? Отговорът се дава от следното твърдение:

Теорема 22. *Множеството от всички точки на сегмента* $[0, 1]$ *е неизброимо.*

Доказателство. Да разгледаме интервала $(0, 1)$. Очевидно, ако докажем, че интервалът $(0, 1)$ е неизброим, то и сегментът $[0, 1]$ ще бъде неизброим, тъй като множеството от точките на сегмента $[0, 1]$ се отличава от множеството от точките на интервала $(0, 1)$ само с двете точки: 0 и 1. И така ще докажем, че множеството от точките на интервала $(0, 1)$ е неизброимо. Ще допуснем противното, т. е. ще предположим, че всички реални числа от интервала $(0, 1)$ могат да се номерират.

Записваме всички числа на интервала $(0, 1)$ като безкрайни десетични дроби:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots,\\
x_2 &= 0{,}a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= 0{,}a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Да разгледаме реалното число $x = 0{,}b_1b_2\cdots b_n\cdots$, където b_1 е коя да е цифра, различна от a_{11}, 0 и 9, и т. н., b_n е коя да е цифра, различна от a_{nn}, 0 и 9. Числото x не съдържа след запетаята нули и деветки, т. е. то не принадлежи към класа на рационалните числа, представими по два начина като безкрайни десетични дроби. В такъв случай числото x има единствено представяне и то е различно от всички числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, тъй като от съвпадането на x с някое число x_n би следвало съвпадане на b_n и a_{nn}. По такъв начин интервалът $(0, 1)$, а заедно с него и сегментът $[0, 1]$ е неизброим.

Определение 2. *Множество, еквивалентно на сегмента* $[0, 1]$, *наричаме* ***множество с мощност на континуум.***

От доказаната теорема 2.2 следва, че множество с мощност на континуум и изброимо множество не са еквивалентни. По-специално от теорема 2.2 следва, че съществуват ирационални числа, тъй като в сегмента $[0, 1]$ не всички числа са рационални: в противен случай бихме могли да ги номерираме. От теорема 2.2 също така следва, че ирационалните числа са неизброимо множество, тъй като, ако бяха изброимо или крайно множество, то по лема 2 и всичките числа — рационални и ирационални, биха били изброимо множество.

Ще преминем сега към по-подробно изучаване на понятието мощност на множество. На всяко множество A ще съпоставим един обект $m(A)$, наречен *мощност* или *кардинално число* на A. При това на две множества A и B се съпоставя едно и също кардинално число тогава и само тогава, когато $A \sim B$. Ще казваме, че *две множества A и B са* ***равномощни*** *или имат еднаква мощност, ако са еквивалентни, т. е. между елементите им може да се установи взаимно еднозначно съответствие.* Ако множеството A се състои от краен брой елементи, мощността му е равна на броя на елементите.

Нека сега A и B са две произволни множества, а $m(A)$ и $m(B)$ са мощностите им. Ние вече казахме, че ако $A \sim B$, то $m(A)=m(B)$. Ако A е еквивалентно на някое подмножество на B и при това A не съдържа подмножество, еквивалентно на B, ще приемем, че мощността на A е по-малка от мощността на B: $m(A) < m(B)$. Например от определението за множество с мощност на континуума, теорема 1 и лема 1 за изброимите множества следва, че мощността на изброимо множество е по-малка от мощността на сегмента $[0, 1]$, т. е. от мощността на континуума.

И така въведохме сравняване на мощностите на две множества. Логически са възможни още два случая:

а) множеството A **съдържа** подмножество, еквивалентно на множеството B, а множеството B **съдържа** подмножество, еквивалентно на множеството A;

б) множествата A и B не са еквивалентни и нито едно от тях не съдържа подмножество, еквивалентно на другото.

Може да се покаже, че в случая а) множествата A и B са еквивалентни. Що се отнася до случая б), той е невъзможен.

Ще отбележим, че особено труден проблем се оказа съществуването на междинна мощност — между мощността на изброимите множества и мощността на континуума. Доказано е, че твърдението „няма междинна мощност" не противоречи на аксиомите на теорията на множествата и не може да бъде изведено от тях. Така че са възможни две различни системи от аксиоми на теорията на множествата. В едната система се приема като аксиома наличието, а в другата — липсата на междинна мощност.

2.7.2. Наредба. Частична наредба. Лема на Цорн. Нека за някои двойки елементи $a, b, c, \ldots$ на множеството A е въведена наредба, означена със символа $\prec$. Записването $a \prec b$ означава, че елементът a „предхожда" елемента b. Ще предположим, че това съотношение удовлетворява следните условия:

а) от $a \prec b$ и $b \prec c$ следва $a \prec c$;

б) винаги $a \prec a$;

в) от $a \prec b$ и $b \prec a$ следва $a=b$.

Когато са изпълнени тези предположения, множеството A се нарича *частично наредено*; елементи a и b, свързани със съотношение $a \prec b$ или $b \prec a$, се наричат сравними.

Множеството A се нарича ***наредено,*** *ако за всеки два различни елемента a и b е изпълнено едно от двете съотношения $a \prec b$ или $b \prec a$.*

Пример на наредено множество е множеството на реалните числа, ако за съотношение на наредба се приема съотношението „$\leq$", което беше въведено по-рано. Леко се проверява, че условията а) — в) са изпълнени. Пример за частично наредено множество е множеството на всички възможни триъгълници, лежащи в равнината, ако за съотношение на наредба „$\prec$" приемем условието: триъгълникът T_1 „предхожда" триъгълника T_2, ако триъгълникът T_1 се съдържа в триъгълника T_2, т. е. всяка точка на триъгълника T_1 е точка на триъгълника T_2. Очевидно е, че не всеки два триъгълника в равнината са сравними при тази наредба.

Подмножеството B на частично нареденото множество A се нарича ограничено отгоре, ако съществува такъв елемент $a \in A$, че за всеки елемент $b \in B$ е изпълнено $b \prec a$. Елементът a се нарича горна граница на множеството B. Най-малката горна граница, т. е. такава, която „предхожда" всички останали, се нарича точна горна граница. Аналогично се определят долна граница и точна долна граница.

Елементът $z_0 \in A$ се нарича ***максимален,*** *ако в A не съществува $a \neq z_0$, удовлетворяващ съотношението $z_0 \prec a$.*

В сила е следната лема:

Лема на Цорн. *Ако в частично наредено множество A всяко наредено подмножество B притежава горна граница, то в A съществува максимален елемент.*

Едно наредено множество се нарича ***напълно наредено,*** *ако всяко негово непразно подмножество има най-малък елемент, т. е. елемент, предхождащ всички елементи на подмножеството.*

Теорема на Цермело. *Всяко непразно множество може да се направи напълно наредено чрез въвеждане на подходящо съотношение на наредба.*

Доказателството на теоремата на Цермело се опира на т. нар. аксиома за произволния избор, според която, ако е дадена произволна система от непразни, две по две непресичащи се множества, то съществува ново множество, имащо с всяко от множествата на системата по един и само един общ елемент.

В аксиомата за избора не се посочва начин, по който да се прави този избор, и затова тя води до неконструктивни доказателства. Някои от теоремите, доказани с помощта на тази аксиома, противоречат на нагледността.

Може да се докаже, че лемата на Цорн, теоремата на Цермело и аксиомата за произволния избор са еквивалентни твърдения. Те са обобщение на принципа на математическата индукция в случая на неизброими множества.

Накрая ще докажем, че сегментът $[0, 1]$ и интервалът $(0, 1)$ са еквивалентни (равномощни) множества. За това ще установим взаимно еднозначно съответствие между елементите им. Избираме в сегмента $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$ редица от точки

$$\{1/2, 1/3, 1/4, \cdots, 1/n, \cdots\}.$$

Точката 0 от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на точката $1/2$ от интервала $(0, 1)$, точката 1 от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на точката $1/3$ от интервала $(0, 1)$, по-нататък точката $1/2$ от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на точката $1/4$ от интервала $(0, 1)$ и т. н., точката $1/n$ от сегмента $[0, 1]$ съпоставяме на $1/(n+2)$ от интервала $(0, 1)$ $(n \geqq 2)$. Всички останали точки от сегмента (т. е. точките, различни от 0, 1 и непринадлежащи на избраната редица) съпоставяме на същите точки от интервала. По такъв начин е установено взаимно еднозначно съответствие между сегмента $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$.

3. Теория на границите

В глава 1 бе казано, че една от основните операции в математическия анализ е граничният преход и че тази операция се среща в различни форми.

В тази глава се изучават различните форми на операцията граничен преход, като се започва с най-простата от тях, основана на понятието граница на числова редица.

Понятието граница на числова редица ще ни улесни при въвеждането на друга, доста по-важна форма на операцията граничен преход, основана на понятието гранична стойност (или кратко граница) на функция.

В края на главата се дава най-общо определение на граница на функция по база.

3.1. Редица. Граница на редица

3.1.1. Редица. Аритметични операции с редици. Примери на числови редици са: 1) редицата от всички елементи на аритметичната или геометричната прогресия; 2) редицата от периметрите на правилните n-ъгълници, вписани в дадена окръжност; 3) редицата от рационалните числа $x_1=0{,}3$, $x_2=0{,}33$, $x_3=0{,}333, \cdots$, приближаващи числото $1/3$.

Ако на всяко число n от естествения ред на числата $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ се съпостави по определен закон някое реално число x_n, то множеството на номерираните реални числа

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots \tag{3.1}$$

ще наричаме ***числова редица*** *или само* ***редица.***

Числата x_n ще наричаме ***елементи*** или ***членове на редицата*** (3.1). За краткост редицата (3.1) ще означаваме със символа $\{x_n\}$ или $\{x_n\}_1^\infty$.

Така например символът $\{1/n^2\}$ означава редицата $1, 1/2^2, 1/3^2, \dots, 1/n^2, \dots$, а символът $\{1+(-1)^n\}$ — редицата $0, 2, 0, 2, \dots$

Да разгледаме наред с редицата (3.1) още една редица

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots \tag{3.2}$$

Редицата $x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \dots, x_n+y_n, \dots$ *ще наричаме* ***сума*** *на редиците* (3.1) и (3.2), *редицата* $x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3, \dots, x_n-y_n, \dots$ — ***разлика*** *на редиците* (3.1) *и* (3.2), *редицата* $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$ —***произведение*** *на редиците* (3.1) и (3.2) *и накрая редицата* $x_1/y_1, x_2/y_2, x_3/y_3, \dots, x_n/y_n, \dots$ — ***частно*** *на редиците* (3.1) и (3.2).

Разбира се, при определението за частно на редиците (3.1) и (3.2) е необходимо да се изисква всички елементи на редицата (3.2) да бъдат различни от нула. Ще отбележим обаче, че ако в редицата $\{y_n\}$ само краен брой елементи са нули, то частното $\{x_n/y_n\}$ може да се определи от този номер нататък, след който всички елементи y_n са различни от нула.

3.1.2. Ограничени, неограничени, безкрайно малки и безкрайно големи редици. Съвкупността от всички елементи на произволна редица $\{x_n\}$ образува числово множество. Тръгвайки от понятията ограничено отгоре, отдолу или от двете страни множество, идваме до следните определения:

Определение 1. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ограничена отгоре (отдолу),*** *ако съществува такова реално число M (реално число m), че всеки елемент* x_n *на редицата да удовлетворява неравенството*

$$x_n \leq M \qquad (x_n \geq m).$$

При това числото M (числото m) се нарича ***горна (долна) граница на редицата*** $\{x_n\}$, *а неравенството* $x_n \leq M\ (x_n \geq m)$ — ***условие за ограниченост*** *на тази редица отгоре (отдолу).*

Всяка ограничена отгоре редица има безбройно много горни граници и в условието за ограниченост на редицата отгоре, т. е. в $x_n \leq M$, за M може да се вземе всяка от горните граници. Аналогична забележка се отнася за долната граница и ограничените отдолу редици.

Определение 2. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ограничена от двете страни*** *(или просто* ***ограничена****), ако е ограничена отгоре и отдолу, т. е. ако съществуват такива две реални числа M и m, че всеки елемент* x_n *на редицата да удовлетворява неравенствата*

$$m \leq x_n \leq M. \tag{3.3}$$

Числата m и M се наричат съответно ***долна*** *и* ***горна граница*** *на редицата* $\{x_n\}$, *а неравенствата* (3.3) — ***условия за ограниченост*** *на редицата* $\{x_n\}$.

Условието за ограниченост на редица може да се запише и в друга еквивалентна форма: Редицата $\{x_n\}$ е ограничена тогава и само тогава, когато съществува такова положително реално число A, че всеки елемент x_n на редицата да удовлетворява неравенството

$$|x_n| \leq A. \tag{3.4}$$

Наистина, ако всеки елемент x_n удовлетворява неравенството (3.4), то при $m=-A$, $M=+A$ ще получим, че x_n удовлетворява неравенствата (3.3). Ако, обратно, всеки елемент x_n удовлетворява неравенствата (3.3), то като означим с A по-голямото от двете числа $|m|$ и $|M|$, ще получим, че x_n удовлетворява и неравенството (3.4).

В съответствие с определение 2 за ограничена редица и условието за ограниченост, взето във формата (3.4), може да се определи понятието неограничена редица.

Определение 3. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***неограничена,*** *ако за всяко положително реално число A, колкото и голямо да е то, съществува поне един елемент* x_n *от редицата, удовлетворяващ неравенството*

$$|x_n| > A. \tag{3.5}$$

Съгласно това определение всяка редица, която е ограничена само отгоре или само отдолу, е неограничена.

Така например редицата $1, 2, 1, 4, \dots, 1, 2n, \dots$, която е ограничена само отдолу, е неограничена: каквото и положително реално число A да вземем, ще се намери елемент на тази редица с четен номер, удовлетворяващ неравенството (3.5).

Редицата $\{1/n\}$ очевидно е ограничена: всеки елемент на тази редица удовлетворява неравенствата (3.3) за всяко $m \leq 0$ и $M \geq 1$.

Определение 4. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***безкрайно голяма,*** *ако за всяко положително реално число A, колкото и голямо да е то, съществува такъв номер* $N=N(A)$, *че при всяко* $n \geq N$ *елементите* x_n *на тази редица да удовлетворяват неравенството* (3.5).

Очевидно е, че всяка безкрайно голяма редица е неограничена, тъй като в определението за безкрайно голяма редица се иска за всяко $A>0$ неравенството (3.5) да се удовлетворява от всички елементи на редицата от известен номер N нататък, а в определението за неограничена редица се иска за всяко $A>0$ неравенството (3.5) да се удовлетворява поне за един елемент на редицата.

От друга страна, не всяка неограничена редица е безкрайно голяма. Така например разгледаната редица $1, 2, 1, 4, \dots, 1,$

$2n, \dots$ е неограничена, но не е безкрайно голяма, тъй като за всяко $A>1$ неравенството (3.5) не е изпълнено за елементите x_n с произволно голям нечетен номер n.

Определение 5. *Редицата $\{\alpha_n\}$ се нарича* ***безкрайно малка****, ако за всяко положително число ε, колкото и малко да е то, съществува такъв номер $N=N(\varepsilon)$, че при всички $n \geqq N$ елементите α_n на тази редица да удовлетворяват неравенството*

$$|\alpha_n|<\varepsilon. \tag{3.6}$$

Ще докажем, че редицата $q, q^2, q^3, \dots, q^n$ е безкрайно голяма при $|q|>1$ и безкрайно малка при $|q|<1$.

Нека най-напред $|q|>1$. Тогава $|q|=1+\delta$, където $\delta>0$. Като използваме формулата за бинома на Нютон, получаваме $|q|^N=(1+\delta)^N=1+N\delta+$ положителни членове. Оттук следва неравенството

$$|q|^N>\delta N. \tag{3.7}$$

Фиксираме произволно положително число A и избираме такъв номер N, че да е изпълнено неравенството

$$\delta N>A. \tag{3.8}$$

Ще покажем, че това е възможно. Ще се условим да означаваме със символа $[x]$ цялата част на положителното реално число x. Тъй като неравенството (3.8) е еквивалентно на неравенството $N>A/\delta$, то това неравенство очевидно ще се удовлетворява от номер N, за който $N=[A/\delta]+1=[A/(|q|-1)]+1$.

Понеже $|q|>1$, при всички $n \geqq N$ имаме

$$|q|^n \geqq |q|^N. \tag{3.9}$$

От неравенствата (3.7), (3.8) и (3.9) получаваме, че за всяко $A>0$ съществува такъв номер $N=[A/(|q|-1)]+1$, че при всички $n \geqq N$ —

$$|q^n|=|q|^n>A.$$

С това е доказано, че при $|q|>1$ редицата $\{q^n\}$ е безкрайно голяма.

Ще разгледаме сега случая $|q|<1$. Трябва да докажем, че $\{q^n\}$ е безкрайно малка редица. Изключваме тривиалния случай $q=0$ и полагаме $1/|q|=1+\delta$, където $\delta>0$. Използвайки, както по-горе, бинома на Нютон, вместо (3.7) ще получим неравенството

$$1/|q|^N>\delta N, \text{ или } |q|^N>1/\delta N. \tag{3.7'}$$

Фиксираме произволно положително число ε и избираме номера N така, че да е изпълнено неравенството

$$1/\delta N<\varepsilon. \tag{3.8'}$$

Тъй като неравенството (3.8′) е еквивалентно на неравенството $N>1/\varepsilon\delta$, то за N можем да изберем

$$N=[1/\varepsilon\delta]+1=[|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1.$$

За всички $n \geqq N$ при $|q|<1$ е изпълнено неравенството

$$|q|^n \leqq |q|^N. \tag{3.9'}$$

От неравенствата (3.7′), (3.8′) и (3.9′) получаваме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв номер $N=[|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1$, че за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|q^n|=|q|^n<\varepsilon.$$

С това е доказано, че при $|q|<1$ редицата $\{q^n\}$ е безкрайно малка.

3.1.3. Основни свойства на безкрайно малките редици.

Теорема 3.1. *Сумата $\{\alpha_n+\beta_n\}$ на две безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица.*

Доказателство. Фиксираме произволно положително число ε. Тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N_1, че при $n \geqq N_1$ да е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n|<\varepsilon/2. \tag{3.10}$$

Аналогично, тъй като редицата $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N_2, че при $n \geqq N_2$ да е изпълнено неравенството

$$|\beta_n|<\varepsilon/2. \tag{3.11}$$

Да означим с N по-големия от двата номера N_1 и N_2. Тогава при $n \geqq N$ ще са изпълнени и двете неравенства (3.10) и (3.11). Тъй като модулът на сума на две числа не надминава сумата от модулите им, то за всички номера n имаме

$$|\alpha_n+\beta_n| \leqq |\alpha_n|+|\beta_n|. \tag{3.12}$$

От (3.12), (3.10) и (3.11) следва, че при $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon.$$

Това показва, че редицата е безкрайно малка. □

Теорема 3.2. *Разликата $\{\alpha_n-\beta_n\}$ на две безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица.*

Доказателството на тази теорема се различава от доказателството на теорема 3.1 само по това, че вместо неравенството (3.12) трябва да се вземе неравенството

$$|\alpha_n-\beta_n| \leqq |\alpha_n|+|\beta_n|.$$

Следствие. *Алгебричната сума на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.3. *Произведението на ограничена редица и безкрайно малка редица е безкрайно малка редица.*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е ограничена редица и $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. Съгласно определението на ограничена редица съществува такова реално число $A>0$, че за всички елементи x_n е изпълнено неравенството

$$|x_n| \leq A. \tag{3.13}$$

Да фиксираме произволно положително число ε. Тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число ε/A съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n| < \varepsilon/A. \tag{3.14}$$

Тъй като модулът на произведението на две числа е равен на произведението от модулите на тези числа, от неравенствата (3.13) и (3.14) получаваме, че за всички $n \geq N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \varepsilon/A = \varepsilon.$$

Това означава, че редицата $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ е безкрайно малка. □

Теорема 3.4. *Всяка безкрайно малка редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. Да фиксираме произволно положителното число ε. Съгласно определението на безкрайно малка редица съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < \varepsilon$ за всички $n \geq N$. Ако означим с A най-голямото от следните N числа: $\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|$, то очевидно $|\alpha_n| < A$ за всички номера n. Това означава, че редицата $\{\alpha_n\}$ е ограничена. □

Следствие от теореми 3.3 и 3.4. *Произведението на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.5. *Ако всичките елементи на безкрайно малката редица $\{\alpha_n\}$ са равни на едно и също число c, то $c=0$.*

Доказателство. Да допуснем, че $c \neq 0$. Означаваме с ε положителното число $\varepsilon = |c|$. Според определението на безкрайно малка редица за избраното $\varepsilon = |c|$ съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < |c|$ при всички $n \geq N$. Но неравенството $|\alpha_n| < |c|$ (поради това, че $\alpha_n = c$ за всяко n) води до абсурда $|c| < |c|$. □

Теорема 3.6. *Ако $\{x_n\}$ е безкрайно голяма редица, то от известен номер n нататък е определено частното $1/x_n$ и $\{1/x_n\}$ е безкрайно малка редица. Ако всички елементи на безкрайно малката редица $\{\alpha_n\}$ са различни от нула, то частното $\{1/\alpha_n\}$ е безкрайно голяма редица.*

Доказателство. Ще докажем най-напред първата част на теоремата. Очевидно е, че в безкрайно голяма редица само краен брой елементи могат да бъдат равни на нула. Наистина съгласно определението на безкрайно голяма редица за числото $A=1$ съществува такъв номер N^*, че $|x_n| > A = 1$ за всички $n \geq N^*$. Следователно при $n \geq N^*$ всички елементи x_n са различни от нула и можем да разглеждаме частното $1/x_n$. Ще докажем, че тези частни образуват безкрайно малка редица. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението на безкрайно голяма редица за положителното число $1/\varepsilon$ съществува такъв номер N (този номер ще изберем по-голям от N^*), че $|x_n| > 1/\varepsilon$ при $n \geq N$ или че $|1/x_n| = 1/|x_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Това показва, че редицата $\{1/x_n\}$ е безкрайно малка.

За да докажем втората част, фиксираме произволно положително число A. Тъй като $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица, то за положителното число $1/A$ съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < 1/A$ при $n \geq N$ или $|1/\alpha_n| = 1/|\alpha_n| > A$ при $n \geq N$. Това показва, че редицата $\{1/\alpha_n\}$ е безкрайно голяма. □

3.1.4. Сходящи редици. Свойства. Ще въведем важните понятия сходяща редица и граница на сходяща редица.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща,*** *ако съществува такова реално число a, че редицата $\{x_n - a\}$ да е безкрайно малка. Числото a се нарича* ***граница*** *на редицата $\{x_n\}$.*

Това, че редицата $\{x_n\}$ е сходяща и има за граница числото a, се записва така:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Според горното определение всяка безкрайно малка редица е сходяща и има за граница числото $a=0$.

Като се използва определението за безкрайно малка редица, може да се даде друго определение на понятието сходяща редица, еквивалентно на определение 1.

Определение 2. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща,*** *ако съществува такова реално число a, че за всяко положително число ε съществува такъв номер $N=N(\varepsilon)$, че за всяко $n \geq N$ членовете на тази редица да удовлетворяват неравенството*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3.15}$$

Числото a се нарича ***граница*** *на редицата $\{x_n\}$.*

Неравенството (3.15) може да се запише в еквивалентната форма

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

или още така

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{3.15'}$$

Неравенствата (3.15′) означават, че елементите x_n при $n \geqq N$ лежат в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, който се условихме да наричаме ε-околност на точката a.

Това ни дава право да формулираме още едно определение на сходяща редица, еквивалентно на определенията 1 и 2.

Определение 3. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща,*** *ако съществува такова число a, че във всяка ε-околност на точката a да се съдържат всички членове на редицата $\{x_n\}$ от някакъв номер (зависещ, разбира се, от ε) нататък.*

Ще намерим едно специално представяне за членовете на всяка сходяща редица $\{x_n\}$. Съгласно определение 1 разликата $x_n - a = \alpha_n$ е елемент на безкрайно малка редица. Следователно елементът x_n на сходящата редица с граница a може да бъде представен в следния специален вид:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{3.16}$$

където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица.

Забележка 1. От определението за сходяща редица и граница на сходяща редица непосредствено следва, че отстраняването на краен брой елементи от дадена редица не оказва влияние върху сходимостта на редицата и стойността на границата ѝ.

Забележка 2. Редица, която не е сходяща, се нарича ***разходяща.***

Забележка 3. Понякога ще разглеждаме безкрайно големите редици като сходящи редици с граница безкрайност (∞). Такава формализация за безкрайно голяма редица $\{x_n\}$ е следното означение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Ако при това елементите на безкрайно голямата редица от известно място нататък имат положителен (отрицателен) знак, записваме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

За пример ще докажем, че редицата $\{x_n\}$ с елементи

$$x_n = \underbrace{0,33\cdots3}_{n \text{ пъти}}$$

клони към границата $a=1/3$. Ще фиксираме произволно положително число ε и ще покажем възможността да се намери такъв номер N, че $|x_n - 1/3| < \varepsilon$ при всички $n \geqq N$. Тъй като числото 1/3 се представя с безкрайната десетична дроб $0,333\cdots$, то от правилото за наредба на реални числа следват неравенствата

$$\underbrace{0,33\cdots3}_{n \text{ пъти}} \leqq 1/3 \leqq \underbrace{0,33\cdots3}_{n \text{ пъти}} + 1/10^n,$$

изпълнени за всеки номер n.

От последните неравенства за числото $x_n = \underbrace{0,333\cdots3}_{n \text{ пъти}}$ получаваме съотношението

$$|x_n - 1/3| \leqq 1/10^n.$$

Тъй като $1/10^n \leqq 1/10^N$ за всички $n \geqq N$, то за да намерим при избраното $\varepsilon > 0$ такъв номер N, че $|x_n - 1/3| < \varepsilon$ за всички $n \geqq N$, достатъчно е да изберем N, така че $1/10^N < \varepsilon$.

В 3.1.2 установихме възможността да се избере номер N, за който $|q|^N < \varepsilon$ за всяко $|q| < 1$. Там показахме, че номерът N може да се вземе $N = [|q|/\varepsilon(1-|q|)] + 1$. В този случай $|q| = 0,1$, така че $N = [1/9\varepsilon] + 1$.

Ще преминем към установяване на някои свойства на сходящите редици.

Теорема 3.7. *Всяка сходяща редица има само една граница.*

Доказателство. Да предположим, че двете реални числа a и b са граници на сходящата редица $\{x_n\}$. Тогава според специалното представяне (3.16) на елементите на сходяща редица ще имаме $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, където $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ са безкрайно малки редици. Оттук получаваме $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Съгласно теорема 3.2 редицата $\{\alpha_n - \beta_n\}$ е безкрайно малка, а от равенството $\alpha_n - \beta_n = b - a$ следва, че всички елементи на тази безкрайно малка редица са равни на едно и също реално число $b-a$. Съгласно теорема 3.5 това число $b-a$ е равно на нула, т. е. $b = a$. □

Теорема 3.8. *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е сходяща редица с граница a. Съгласно (3.16) $x_n = a + \alpha_n$, където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. От теорема 3.4 следва, че $\{\alpha_n\}$ е ограничена и следователно съществува такова число A, че $|\alpha_n| \leqq A$ за всяко натурално n. Тогава $|x_n| \leqq |a| + A$ за всички номера n. □

Забележка 4. Не всяка ограничена редица е сходяща. Така например редицата $0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1, \cdots$ е ограничена, но не е сходяща. Действително да означим n-тия член на тази редица с x_n и да предположим, че тази редица е сходяща и има граница a. Но тогава всяка от редиците $\{x_{n+1} - a\}$ и $\{x_n - a\}$ трябва да бъде безкрайно малка. Очевидно и разликата на тези редици $\{x_{n+1} - x_n\}$ ще бъде безкрайно малка, а това е невъзможно, тъй като $|x_{n+1} - x_n| = 1$ за всички n.

Следващите четири теореми показват, че четирите аритметични действия над елементите на сходящи редици водят към аналогични действия и с техните граници.

Теорема 3.9. *Сумата на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на сумата от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателство. Нека редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са сходящи и имат съответно граници a и b. Съгласно специалното представяне (3.16) ще имаме

$$x_n=a+\alpha_n, \quad y_n=b+\beta_n, \tag{3.17}$$

където $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ са безкрайно малки редици. От (3.17) следва, че

$$(x_n+y_n)-(a+b)=\alpha_n+\beta_n. \tag{3.18}$$

Тъй като сумата $\{\alpha_n+\beta_n\}$ на двете безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица (теорема 3.1), то от (3.18) и определение 1 следва, че редицата $\{x_n+y_n\}$ е сходяща и има за граница числото $a+b$. □

Теорема 3.10. *Разликата на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на разликата от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателството на тази теорема е аналогично на доказателството на теорема 3.9. Вместо (3.18) ще имаме съотношението $(x_n-y_n)-(a-b)=\alpha_n-\beta_n$.

Теорема 3.11. *Произведението на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на произведението от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателство. Нека редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ клонят съответно към границите a и b. Тогава за елементите на тези редици имаме специалните представяния (3.17), които след умножение дават

$$x_n \cdot y_n=a \cdot b+a \cdot \beta_n+b \cdot \alpha_n+\alpha_n \cdot \beta_n,$$

или

$$x_n \cdot y_n-a \cdot b=a \cdot \beta_n+b \cdot \alpha_n+\alpha_n \cdot \beta_n. \tag{3.19}$$

За да докажем теоремата, трябва да се убедим, че дясната страна на (3.19) е елемент на безкрайно малка редица. Това веднага следва от теорема 3.3 (съгласно тази теорема редиците $\{a \cdot \beta_n\}$ и $\{b \cdot \alpha_n\}$ са безкрайно малки), от следствието на теоремите 3.3 и 3.4 (според това следствие редицата $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ е безкрайно малка) и от теорема 3.1 (според тази теорема сумата на трите безкрайно малки редици $\{a \cdot \beta_n\}$, $\{b \cdot \alpha_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ е безкрайно малка редица). □

Преди теоремата за частно на две сходящи редици ще докажем следната лема:

Лема 1. *Ако редицата $\{y_n\}$ клони към различното от нула число b, то от известно място нататък е определено частното $1/y_n$ и редицата $\{1/y_n\}$ е ограничена.*

Доказателство. Понеже $b\neq 0$, означаваме с ε положителното число $\varepsilon=|b|/2$. За това ε съществува такъв номер N, че при $n\geqq N$ да е изпълнено неравенството $|y_n-b|<\varepsilon$, т. е.

$$|y_n-b|<|b|/2. \tag{3.20}$$

И така за всички номера n от известен номер N нататък е изпълнено неравенството (3.20). Ще покажем, че от неравенството (3.20) следва неравенството

$$|y_n|>|b|/2, \tag{3.21}$$

което също така ще бъде изпълнено за всички номера n от известен номер N нататък. Действително, тъй като модулът на сумата на две числа не надминава сумата от модулите на тези числа, то от тъждеството $b=(b-y_n)+y_n$ и неравенството (3.20) получаваме

$$|b|\leqq|b-y_n|+|y_n|<|b|/2+|y_n|.$$

От последното неравенство непосредствено следва неравенство (3.21).

Неравенството (3.21) ни дава право да твърдим, че при $n\geqq N$ елементите y_n са различни от нула и следователно можем да разглеждаме частните $1/y_n$ за $n\geqq N$.

От (3.21) на свой ред следва, че за всички $n\geqq N$ е изпълнено неравенството $|1/y_n|<2/|b|$. Оттук следва, че редицата $\{1/y_n\}$ е ограничена. □

Теорема 3.12. *Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две сходящи редици със съответни граници a и b, при което $b\neq 0$. Тогава частното x_n/y_n е определено от известен номер нататък; редицата $\{x_n/y_n\}$, взета от този номер нататък, е сходяща и нейната граница е a/b.*

Доказателство. Според лема 1 съществува такъв номер N, че при $n\geqq N$ елементите y_n са различни от нула; определена е редицата $\{1/y_n\}$ и тази редица е ограничена. Ние ще разглеждаме частните $\{x_n/y_n\}$ от този номер нататък. Съгласно определение 1 достатъчно е да докажем, че редицата $\{x_n/y_n-a/b\}$ е безкрайно малка. Ще използваме тъждеството

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{x_n \cdot b-y_n \cdot a}{y_n \cdot b}. \tag{3.22}$$

Тъй като за x_n и y_n е в сила специалното представяне (3.17), то

$$x_n \cdot b-y_n \cdot a=(a+\alpha_n)\,b-(b+\beta_n)\,a=\alpha_n \cdot b-\beta_n \cdot a. \tag{3.23}$$

Като заместим (3.23) в (3.22), получаваме

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right). \tag{3.24}$$

Остава да докажем, че в дясната страна на (3.24) стои елемент на безкрайно малка редица. Но това веднага следва от теорема 3.3 и от факта, че редицата $\{1/y_n\}$ (поради лема 1) е ограничена, а редицата $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ (като разлика на две безкрайно малки редици) е безкрайно малка. □

Ще се убедим сега, че ако елементите на сходящи редици удовлетворяват някакви неравенства, то подобни неравенства удовлетворяват и границите им.

Теорема 3.13. *Ако всички елементи на сходящата редица $\{x_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенството $x_n \geqq b$ ($x_n \leqq b$), то и границата x на тази редица удовлетворява неравенството $x \geqq b$ ($x \leqq b$).*

Доказателство. Ще предположим, че всички елементи x_n от известен номер N^* нататък удовлетворяват неравенството $x_n \geqq b$. Ще докажем, че границата x на тази редица удовлетворява неравенството $x \geqq b$. Да допуснем противното, т. е. че $x<b$. Тогава по определението на сходяща редица за положителното число $\varepsilon = b-x$ съществува такъв номер N (избираме го така, че да бъде по-голям от N^*), че при $n \geqq N$ да са изпълнени неравенствата $|x_n - x| < \varepsilon$ или $|x_n - x| < b-x$. Последното неравенство е еквивалентно с неравенствата $-(b-x) < x_n - x < b-x$, дясното от които означава, че $x_n < b$ при всички $n \geqq N$. Но това противоречи на условието на теоремата.

Случаят $x_n \leqq b$ се разглежда аналогично.

Забележка 5. Ако всички елементи на сходящата редица $\{x_n\}$ удовлетворяват строгото неравенство $x_n > b$, оттук не следва, че границата x ще удовлетворява строгото неравенство $x>b$. Можем да твърдим само, че $x \geqq b$.

Например, ако $x_n = 1/n$, то всички $x_n > 0$, но границата $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = x = 0$ не удовлетворява неравенството $x>0$.

Следствие 1. *Ако всички елементи на две сходящи редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенството $x_n \leqq y_n$, то и границите на тези редици удовлетворяват същото неравенство*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3.25}$$

Действително от известно място нататък всички елементи на редицата $\{y_n - x_n\}$ ще бъдат неотрицателни. Съгласно теорема 3.13 и границата на тази редица $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)$ ще бъде неотрицателна. От теорема 3.10 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, откъдето получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqq 0$. От последното неравенство следва (3.25).

Следствие 2. *Ако всички членове на сходящата редица $\{x_n\}$ принадлежат на сегмента $[a, b]$, то и границата x на тази редица принадлежи на същия сегмент.*

Наистина, тъй като $a \leqq x_n \leqq b$ за всички n, то (съгласно теорема 3.13) $a \leqq x \leqq b$.

Следващата теорема се нарича принцип на двустранното ограничение.

Теорема 3.14. *Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две сходящи редици с една и съща граница a и нека всички елементи на редицата $\{z_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенствата*

$$x_n \leqq z_n \leqq y_n. \tag{3.26}$$

Тогава редицата z_n е сходяща и има същата граница a.

Доказателство. Да предположим, че неравенствата (3.26) са изпълнени от номер N^* нататък. Тогава за $n \geqq N^*$

$$x_n - a \leqq z_n - a \leqq y_n - a. \tag{3.27}$$

От неравенствата (3.27) следва, че за всеки номер n, по-голям от N^*, имаме

$$|z_n - a| \leqq \max\{|x_n - a|, |y_n - a|\} \tag{3.28}$$

(това записване означава, че $|z_n - a|$ не надминава по-голямото от двете числа $|x_n - a|$ и $|y_n - a|$).

Избираме произволно положително число ε. Тогава от сходимостта на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ към границата a следва, че съществуват такива номера N_1 и N_2, че

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon & \text{при } n \geqq N_1, \\ |y_n - a| < \varepsilon & \text{при } n \geqq N_2. \end{cases} \tag{3.29}$$

Ако сега означим с N най-голямото от трите числа N^*, N_1 и N_2, то при $n \geqq N$ ще бъдат изпълнени двете неравенства (3.29) и съгласно (3.28) ще получим, че при $n \geqq N$ е изпълнено $|z_n - a| < \varepsilon$. Това доказва сходимостта на редицата $\{z_n\}$ към границата a. □

3.2. Монотонни редици

3.2.1. Понятието монотонна редица.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***ненамаляваща (нерастяща)****, ако всеки член на тази редица от втория нататък не е по-малък (не е по-голям) от предхождащия го член, т. е. ако за всички номера n ($n = 1, 2, 3, \dots$) е изпълнено неравенството*

$$x_n \leqq x_{n+1} \qquad (x_n \geqq x_{n+1}). \tag{3.30}$$

Определение 2. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***монотонна,*** *ако тя е или ненамаляваща, или нерастяща.*

Ако елементите на ненамаляваща редица удовлетворяват строгото неравенство $x_n < x_{n+1}$ за всички номера n, то тази редица се нарича ***растяща.***

Аналогично, ако елементите на нерастяща редица удовлетворяват строгото неравенство $x_n > x_{n+1}$ за всички номера n, то тази редица се нарича ***намаляваща.***

Ще отбележим, че всяка монотонна редица е очевидно ограничена от едната страна (или отгоре, или отдолу). Действително всяка ненамаляваща редица е ограничена отдолу (за долна граница може да се вземе първият ѝ член), а всяка нерастяща редица е ограничена отгоре (за горна граница може да се вземе също първият ѝ член).

Оттук следва, че ненамаляващите редици са ограничени от двете страни или просто ограничени тогава и само тогава, когато са ограничени отгоре, а нерастящите редици са ограничени тогава и само тогава, когато са ограничени отдолу.

Примери:

1. Редицата 1, 1, 2, 2, . . . , n, n, . . . е ненамаляваща. Тя е ограничена отдолу от стойността на първия си член и е неограничена отгоре.

2. Редицата 2/1, 3/2, 4/3, . . . , $(n+1)/n$, . . . е намаляваща. Тя е ограничена от двете страни: отгоре от стойността на първия си член 2, а отдолу например от числото 1.

3.2.2. Теорема за сходимост на монотонна ограничена редица.

В сила е следното основно твърдение:

Основна теорема 3.15. *Всяка ненамаляваща (нерастяща) и ограничена отгоре (отдолу) редица $\{x_n\}$ е сходяща.*

Доказателство. Ще разгледаме случая на ненамаляваща и ограничена отгоре редица $\{x_n\}$. Множеството от всички членове на такава редица е ограничено отгоре и затова според основната теорема 2.1 това множество има точна горна граница, която ще означим с $\bar{x}$. Ще докажем, че числото $\bar{x}$ е граница на редицата $\{x_n\}$. Първо ще отбележим, че съгласно определението за горна граница всеки член на редицата $\{x_n\}$ удовлетворява неравенството

(3.31) $$x_n \leqq \bar{x}.$$

Избираме произволно положително число ε и съгласно определението за точна горна граница ще съществува поне един член x_N на редицата, удовлетворяващ неравенството

(3.32) $$\bar{x}-\varepsilon < x_N.$$

Но редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща, поради което $x_N \leqq x_n$ за всяко $n \geqq N$. От неравенството $x_N \leqq x_n$ и (3.32) получаваме, че за всяко $n \geqq N$ имаме

(3.33) $$\bar{x}-\varepsilon < x_n.$$

Като обединим неравенствата (3.31) и (3.33), получаваме, че за всички $n \geqq N$ са изпълнени неравенствата $\bar{x}-\varepsilon < x_n \leqq \bar{x}$.

Тогава за всички $n \geqq N$ е в сила неравенството $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, откъдето следва, че редицата $\{x_n\}$ клони към границата $\bar{x} = \sup\{x_n\}$.

Ако редицата $\{x_n\}$ е нерастяща и ограничена отдолу, то съвсем аналогично се доказва, че тя клони към границата $x = \inf\{x_n\}$. □

Забележка 1. Съгласно казаното в 3.2.1 редицата $\{x_n\}$, удовлетворяваща условието на теорема 3.15, е ограничена от двете страни или просто ограничена. Затова теорема 3.15 може да се изкаже така: *За да бъде монотонната редица $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде ограничена* (необходимостта следва от теорема 3.8).

Забележка 2. Разбира се, не всяка сходяща редица е монотонна. Например клонящата към нула редица 1/2, −1/2, 1/3, −1/3, . . . , $1/n$, $-1/n$, . . . не е монотонна, тъй като знаците на членовете ѝ се сменят алтернативно.

Забележка 3. От приведеното доказателство следва, че всички членове на една ненамаляваща, ограничена отгоре редица $\{x_n\}$ не надминават границата ѝ $\bar{x}$ $(x_n \leqq \bar{x})$. Аналогично лесно се вижда, че всички членове на една нерастяща, ограничена отдолу редица не са по-малки от границата ѝ $\underline{x}$.

Ще извлечем едно важно следствие от теорема 3.15.

Ще се условим да наричаме безкрайната редица от сегменти $[a_1, b_1]$, $[a_2, a_2]$, . . . , $[a_n, b_n]$, . . . ***свиваща се система*** *от сегменти, ако:*

1) *всеки следващ сегмент се съдържа в предидущия, т. е. $a_n \leqq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqq b_n$ за всяко $n=1, 2, 3, \ldots$*

2) *дължината на n-тия сегмент $[a_n, b_n]$, т. е. разликата $b_n - a_n$, клони към нула при $n \to \infty$.*

Следствие от теорема 3.15. *За всяка свиваща се система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$ съществува, и то само една точка c, която принадлежи на всеки сегмент от тази система.*

Доказателство. Най-напред ще покажем, че точката c, която принадлежи на всички сегменти, може да бъде само една. Действително да допуснем, че има още една точка d, различна от c, която принадлежи на всички сегменти, като за определеност нека $d>c$. Това означава, че сегментът $[c, d]$ принадлежи на всички сегменти $[a_n, b_n]$. Но тогава за всеки номер n ще бъдат изпълнени неравенствата $b_n-a_n \geqq d-c>0$, което е невъзможно, тъй като $b_n-a_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Ще докажем сега, че съществува точка c, която принадлежи на всички сегменти. Понеже системата от сегменти е свиваща се, то редицата от левите им краища $\{a_n\}$ е ненамаляваща, а редицата от десните им краища $\{b_n\}$ — нерастяща. Тъй като и двете редици са ограничени (всичките им членове принадлежат на сегмента $[a_1, b_1]$), то те са сходящи (според теорема 3.15). От това, че разликата $\{b_n-a_n\}$ е безкрайно малка редица, следва, че двете редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към една и съща граница, която ще означим с c. Според забележка 3 за всяко n са изпълнени неравенствата $a_n \leqq c \leqq b_n$, т. е. c принадлежи на всички сегменти $[a_n, b_n]$. □

3.2.3. Числото e. Ще приложим теорема 3.15, за да докажем сходимостта на редицата $\{x_n\}$, членовете x_n на която се определят от равенството

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Съгласно теорема 3.15 достатъчно е да докажем, че тази редица е: 1) растяща; 2) ограничена отгоре.

От формулата за бинома на Нютон за x_n получаваме следния израз:

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Този израз преобразуваме във вида

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (3.34)$$

За следващия член на редицата аналогично на (3.34) се получава изразът

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \quad (3.35)$$

За да се убедим, че редицата $\{x_n\}$ е растяща, ще сравним изразите (3.34) и (3.35). Най-напред ще отбележим, че дясната страна на (3.34) се състои от n събираеми, а дясната страна на (3.35) — от $n+1$ събираеми, като $(n+1)$-вото събираемо в дясната страна на (3.35) е строго положително.

Ще съпоставим сега помежду им всяко от останалите събираеми в дясната страна на (3.35) със съответните им събираеми в дясната страна на (3.34). Лесно се вижда, че за всеки номер k ($k=2, 3, \ldots, n$) е изпълнено неравенството

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Това неравенство означава, че k-тото събираемо в (3.34) е по-малко от съответното k-то събираемо в (3.35).

И така доказахме, че $x_n<x_{n+1}$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е растяща.

Ще докажем сега, че тази редица е ограничена отгоре. Ако изразите в кръглите скоби в дясната страна на (3.34) заменим с единица, ще получим нещо по-голямо. Затова

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \quad (3.36)$$

От друга страна, за всяко $k\geqq 2$ е изпълнено неравенството $k!=2.3.4\ldots k\geqq 2^{k-1}$. Затова неравенството (3.36) ни дава право да твърдим, че

$$x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}=3-\frac{1}{2^{k-1}}<3 \quad (3.37)$$

(използвахме формулата за сума на геометрична прогресия). От неравенството (3.37) следва ограничеността на редицата $\{x_n\}$.

Според основната теорема 3.15 редицата $\{x_n\}$ е сходяща и нейната граница, следвайки Л. Ойлер*, ще означаваме с e.

Ще покажем, че числото e удовлетворява неравенствата $2\leqq e\leqq 3$. Затова (поради следствие 2 от теорема 3.13) е достатъчно да се докаже, че всеки член x_n на редицата $\{x_n\}$ удовлетворява неравенството $2\leqq x_n\leqq 3$.

Неравенството $x_n\leqq 3$ следва от (3.37), а неравенството $2\leqq x_n$ се получава от (3.34), като премахнем в дясната страна на (3.34) всички членове освен първия.

Числото e играе важна роля в математиката и по-нататък ще бъде даден начин за пресмятането на това число с произволна точност.

* Леонард Ойлер, швейцарски математик, член на Петербургската академия на науките, работил през по-голямата част от живота си в Русия (1707—1783).

3.2.4. Други примери на сходящи, монотонни редици. Ще започнем с разглеждането на редица, която се използва за приближено намиране на квадратен корен от реално положително число a. Тази редица се определя от следната рекурентна формула*:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), \quad n=1, 2, 3, \cdots, \tag{3.38}$$

където за първо приближение x_1 може да се вземе произволно положително число.

Най-напред ще докажем, че тази редица е сходяща. За това е достатъчно (съгласно теорема 3.15) да покажем, че тя е ограничена отдолу и от втория си член нататък е нерастяща.

Ще започнем с доказателството на ограничеността отдолу. По условие $x_1>0$. Но тогава от рекурентната формула (3.38) при $n=1$ следва, че $x_2>0$, по-нататък от същата формула (3.38) при $n=2$ следва, че $x_3>0, \cdots$ Така установяваме, че за всяко n имаме $x_n>0$, т. е. разглежданата редица е ограничена отдолу.

Ще докажем сега, че при $n\geqq 2$ всички членове x_n удовлетворяват неравенството $x_n\geqq\sqrt{a}$. Записваме формула (3.38) във вида

$$x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \tag{3.39}$$

и използваме тривиалното неравенство $t+\frac{1}{t}\geqq 2$, вярно за всяко $t>0$.

Като поставим в това неравенство $t=x_n/\sqrt{a}>0$, ще получим, че $x_n/\sqrt{a}+\sqrt{a}/x_n\geqq 2$, и затова съотношението (3.39) ни дава $x_{n+1}\geqq\sqrt{a}$ при $n=1, 2, \cdots$ Това означава, че $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n=2, 3, \cdots$

Ще докажем накрая, че редицата $\{x_n\}$ от втория член нататък е нерастяща.

От рекурентната формула (3.38) следва, че

$$x_{n+1}/x_n=\frac{1}{2}\left(1+a/x_n^2\right).$$

От това равенство, понеже $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n\geqq 2$, получаваме, че $x_{n+1}/x_n\leqq 1$ при $n\geqq 2$ или $x_{n+1}\leqq x_n$ при $n\geqq 2$. И така при $n\geqq 2$ редицата $\{x_n\}$ е нерастяща.

Според теорема 3.15 редицата $\{x_n\}$ е сходяща към някаква граница x. Остава да намерим тази граница. Тъй като $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n\geqq 2$, получаваме (според теорема 3.13), че $x\geqq\sqrt{a}>0$.

* Рекурентната формула (от латинската дума recurrens — възвръщащ се) е формула, изразяваща $(n+1)$-вия член на една редица чрез предидущите n члена на тази редица.

Вземаме под внимание, че $x>0$, и правим граничен преход в равенството (3.38) при $n\to\infty$. След граничния преход при $n\to\infty$ от (3.38) ще получим следното равенство:

$$x=(x+a/x)/2.$$

Единственият положителен корен на това уравнение е $x=\sqrt{a}$.

И така окончателно доказахме, че редицата $\{x_n\}$, определена с рекурентната формула (3.38) при всеки избор на $x_1>0$, е сходяща и границата ѝ е $\sqrt{a}$.

Като друго приложение на теорема 3.15 ще намерим границата на редицата $\{x_n\}$, чиито членове имат вида

$$x_n=t^n/n!, \tag{3.40}$$

където t е фиксирано реално число. За всяко фиксирано t съществува такъв номер N, че $|t|<n+1$ при всички $n\geqq N$. Но тогава, тъй като $x_{n+1}/x_n=t/(n+1)$, ще получим, че $|x_{n+1}|<|x_n|$ при всички $n\geqq N$, т. е. от номера N нататък редицата $\{|x_n|\}$ е намаляваща. Тъй като освен това тази редица е ограничена отдолу (например от числото нула), то съгласно теорема 3.15 тя е сходяща към някаква граница x. За да намерим границата x, ще запишем съотношението (3.40) за номера $n+1$:

$$x_{n+1}=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{t}{n+1}=x_n\cdot\frac{t}{n+1},$$

т. е. $|x_{n+1}|=|x_n|\cdot|t|/(n+1)$. Като минем в това равенство към граница при $n\to\infty$, ще получим

$$x=x\cdot\lim_{n\to\infty}|t|/(n+1)=0.$$

И така редицата $\{|x_n|\}$ е сходяща, а заедно с нея и редицата (3.40) е сходяща с граница $x=0$.

И в двата случая използвахме един често употребяван прийом: най-напред доказваме съществуването на граница на редицата с помощта на теорема 3.15, а след това намираме тази граница от уравнението, което се получава след граничен преход в рекурентното съотношение, изразяващо $(n+1)$-вия член на редицата чрез n-тия ѝ член.

3.3. Произволни редици

3.3.1. Точка на сгъстяване. Горна и долна точка на сгъстяване на редица. Да разгледаме редицата $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ и произволна растяща редица от цели положителни числа $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ Да изберем от редицата $\{x_n\}$ членовете с номера $k_1, k_2,$

$\ldots, k_n, \ldots$ и да ги разположим по реда на нарастване на тези номера. Ще получим нова редица $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$, която е прието да се нарича ***подредица*** на изходната редица $\{x_n\}$. По-специално и самата редица $\{x_n\}$ може да се разглежда като подредица с номера $k_n=n$.

Ще отбележим, че винаги $k_n \geqq n$, тъй като всяка подредица, несъвпадаща с цялата редица, се получава чрез някакво разреждане на елементите на редицата.

Верни са следните две твърдения.

1°. *Ако редицата $\{x_n\}$ е сходяща с граница a, то всяка нейна подредица е сходяща и има същата граница.*

2°. *Ако всички подредици на дадената редица $\{x_n\}$ са сходящи, то всички те имат една и съща граница (същата граница има и дадената редица).*

Ще докажем най-напред твърдението 1°. Избираме произволно положително число ε и намираме такъв номер N, че $|x_n-a|<\varepsilon$ при всички $n \geqq N$. Нека $\{x_{k_n}\}$ е произволна подредица на редицата $\{x_n\}$. Тъй като $k_N \geqq N$, то от номера k_N нататък членовете на подредицата $\{x_{k_n}\}$ ще удовлетворяват неравенството $|x_{k_n}-a|<\varepsilon$, а това означава, че подредицата $\{x_{k_n}\}$ е сходяща и има за граница a.

За да се докаже твърдение 2°, е достатъчно да се вземе пред вид, че и редицата $\{x_n\}$ (като частен случай на подредица) клони към някаква граница a. От 1° следва, че и всяка нейна подредица клони към същата граница a.

Напълно аналогично на 1° се доказва, че всяка подредица на безкрайно голяма редица е също безкрайно голяма редица.

Ще въведем основното понятие точка на сгъстяване на редица.

Определение 1. *Точката x се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на редицата $\{x_n\}$, ако всяка ε-околност на точката x съдържа безбройно много членове на тази редица.*

Определение 2. *Точката x се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на редицата $\{x_n\}$, ако от тази редица може да се избере сходяща подредица с граница x.*

Ще покажем, че определенията 1 и 2 са еквивалентни.

1. Нека всяка ε-околност на x съдържа безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$. Ще разгледаме съвкупността от ε-околностите на точката x, за които ε е равно на $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$

В първата от тези околности избираме член x_{k_1} от редицата с някакъв номер k_1, във втората от тези околности избираме член x_{k_2} на редицата с номер $k_2>k_1$, в третата от посочените околности избираме член x_{k_3} от редицата с номер $k_3>k_2, \ldots$ Този процес може да се продължи неограничено, тъй като във всяка ε-околност на точката x има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$. В резултат ще получим подредицата $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ на редицата $\{x_n\}$, която клони към x, тъй като $|x_{k_n}-x|<1/n$.

2. Да предположим, че от редицата $\{x_n\}$ може да се избере подредица, клоняща към x. Тогава във всяка ε-околност на точката x се съдържат безбройно много членове на подредицата (всичките от известно място нататък). Тъй като всеки член на подредицата е член и на редицата, то във всяка ε-околност на точката x ще се съдържат безбройно много членове и от тази редица. □

Ще изясним въпроса за съществуване на точки на сгъстяване на сходящите редици.

Лема 1. *Всяка сходяща редица има само една точка на сгъстяване и тя съвпада с границата на редицата.*

Доказателство. Нека редицата $\{x_n\}$ клони към граница a. Тогава във всяка ε-околност на a се съдържат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$ (всичките от известно място нататък) и затова a е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Остава да докажем, че нито едно число a', различно от a, не е точка на сгъстяване за редицата $\{x_n\}$. Но това следва непосредствено от доказаното твърдение 1°, според което от сходимостта на една редица с граница a следва сходимостта на всяка нейна подредица към същата граница a. □

Ще приведем пример на ограничена редица $\{x_n\}$ с две точки на сгъстяване. Ще докажем, че редицата $1/2, 1-1/2, 1/3, 1-1/3, \ldots, 1/n, 1-1/n, \ldots$ има само две точки на сгъстяване $x=0$ и $x=1$. Това, че точките $x=0$ и $x=1$ са точките на сгъстяване, следва от факта, че подредицата от членовете с нечетни номера е сходяща с граница $x=0$, а подредицата от членовете с четни номера е сходяща с граница $x=1$. Остава да се докаже, че нито едно число x_0, различно от 0 и 1, не е точка на сгъстяване на тази редица. Тъй като $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то очевидно може да се избере толкова малко положително число ε, че ε-околностите на трите точки 0, 1 и x_0 да нямат общи точки (вж. фиг. 3.1).

Но всички членове на редицата с нечетни номера от известно място нататък се съдържат в ε-околността на точката 0, а всички членове на редицата с четни номера от известно място нататък се съдържат в ε-околността на точката 1. Поради това извън ε-околностите на точките 0 и 1 (по-специално в ε-околността на точката x_0) има най-много краен брой членове на редицата. Това означава, че x_0 не е точка на сгъстяване за редицата.

Ще приведем сега пример за редица $\{x_n\}$, която има безбройно много точки на сгъстяване. По-рано (2.7.3) установихме, че множеството на всички рационални числа в сегмента $[0, 1]$ може да се нареди във вид на редица $\{x_n\}$. Ще докажем, че *всяко реално*

Фиг. 3.1

число x от сегмента $[0, 1]$ *е точка на сгъстяване за тази редица* $\{x_n\}$. Отбелязваме, че каквото и да е числото x от сегмента $[0,1]$, за всяко $0<\varepsilon<1/2$ поне едно от двете числа $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$ принадлежи на сегмента $[0, 1]$.

Да предположим за определеност, че числото $x+\varepsilon$ принадлежи на сегмента $[0,1]$. Между двете различни помежду си числа x и $x+\varepsilon$ според лема 2 от глава 2 се съдържат безбройно много различни рационални числа. Това означава, че за всяко $0<\varepsilon<1/2$ в ε-околностите на точката x се съдържат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$, т. е. x е точка на сгъстяване за тази редица.

Естествено възниква въпросът за най-голямата и най-малката точка на сгъстяване на дадена редица.

Определение 3. *Най-голямата точка на сгъстяване на редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***горна точка на сгъстяване*** *(лимес супериор*) на тази редица и се означава със символа* $\overline{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Определение 4. *Най-малката точка на сгъстяване на редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***долна точка на сгъстяване*** *(лимес инфериор**) на тази редица и се означава със символа* $\underline{x}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

В сила е следната забележителна теорема.

Основна теорема 3.16. *Всяка ограничена редица има горна и долна точка на сгъстяване и по-специално има поне една точка на сгъстяване.*

Доказателство. Ще се спрем на доказателството за съществуване на поне една точка на сгъстяване и на горна точка на сгъстяване (лимес супериор) за всяка ограничена редица (съществуването на долна точка на сгъстяването се доказва аналогично).

Нека $\{x_n\}$ е произволна ограничена редица. От условието за ограниченост следва, че съществуват такива две реални числа m и M, че всеки член x_n на редицата $\{x_n\}$ да удовлетворява неравенствата $m\leq x_n\leq M$.

Ще разгледаме множеството $\{x\}$ на всички реални числа x, надясно от които или няма членове на редицата $\{x_n\}$, или има само краен брой такива членове.

С други думи, реалното число x принадлежи на множеството $\{x\}$, ако надясно от x лежат не повече от краен брой членове на

* От латинското limes superior, което означава „най-голяма граница".
** От латинското limes inferior, което означава „най-малка граница"

редицата $\{x_n\}$, и не принадлежи на множеството $\{x\}$, ако надясно от това число x има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$.

Ще отбележим, че множеството $\{x\}$ очевидно не е празно: към него принадлежи всяко реално число x, удовлетворяващо неравенство $x\geq M$ (тъй като надясно от такова x няма членове на редицата $\{x_n\}$). Освен това е очевидно, че множеството $\{x\}$ е ограничено отдолу и за негова долна граница може да се вземе всяко число, по-малко от m (надясно от такова число лежат всички членове на редицата $\{x_n\}$, а те са безбройно много).

Според теорема 2.1 за множеството $\{x\}$ съществува точна долна граница, която ще означим с $\overline{x}$. Ще докажем, че това число $\overline{x}=\inf\{x\}$ е горна точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Достатъчно е да се докажат двете твърдения:

1°. Числото $\overline{x}$ е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ (т. е. във всяка ε-околност на $\overline{x}$ има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$).

2°. Нито едно число x, по-голямо от $\overline{x}$, не е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ (това означава, че $\overline{x}$ е най-голямата точка на сгъстяване, т. е. горната точка на сгъстяване на $\{x_n\}$).

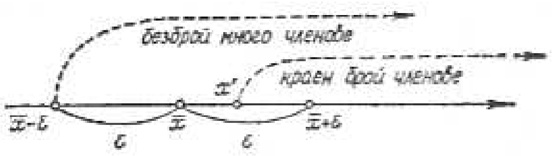
За да докажем твърдението 1°, фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението за долна граница числото $\overline{x}-\varepsilon$ не принадлежи на определеното по-горе множество $\{x\}$. Тогава надясно от $\overline{x}-\varepsilon$ ще лежат безбройно много членове от редицата $\{x_n\}$.

Тъй като числото $\overline{x}$ е точна долна граница на множеството $\{x\}$, от неравенството $\overline{x}<\overline{x}+\varepsilon$ следва, че съществува поне един елемент x' от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $\overline{x}\leq x'<\overline{x}+\varepsilon$, т. е. лежащ наляво от $\overline{x}+\varepsilon$ (вж. фиг. 3.2). Според определението на множеството $\{x\}$ надясно от това число x' ще лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

На фиг. 3.2 е посочено условно, че надясно от числото $\overline{x}-\varepsilon$ лежат безбройно много членове от редицата $\{x_n\}$, а надясно от числото x' лежат не повече от краен брой членове на тази редица.

Тъй като надясно от $\overline{x}-\varepsilon$ лежат безбройно много, а надясно от x' — само краен брой членове на редицата $\{x_n\}$, то стигаме до извода, че в полусегмента $(\overline{x}-\varepsilon, x']$ (а очевидно и в интервала $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$) лежат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$.

И така доказахме, че за всяко $\varepsilon>0$ в ε-околността на точката $\overline{x}$ лежат безбройно много членове на редицата $\{\overline{x}\}$. Това означава, че $\overline{x}$ е точка на сгъстяване за тази редица. □



Фиг. 3.2

Фиг. 3.3

Същевременно доказахме, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от числото $\overline{x}+\varepsilon$ има не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

Този факт ще използваме при доказателството на твърдение 2°, а именно че $\overline{x}$ е най-голямата точка на сгъстяване.

Нека $\bar{\bar{x}}$ е произволно число, по-голямо от $\overline{x}$. Да означим с ε положителното число $\varepsilon=(\bar{\bar{x}}-\overline{x})/2$. При този избор на ε интервалите $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$ и $(\bar{\bar{x}}-\varepsilon, \bar{\bar{x}}+\varepsilon)$, т. е. ε-околностите на точките $\overline{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, няма да имат общи точки, а по-точно ε-околността на точката $\bar{\bar{x}}$ изцяло ще лежи надясно от числото $\overline{x}+\varepsilon$, което е дясна граница на ε-околността на точката $\overline{x}$ (вж. фиг. 3.3).

По-горе установихме, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от $\overline{x}+\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

Очевидно в разглежданата ε-околност на точката $\bar{\bar{x}}$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$, а това означава че $\bar{\bar{x}}$ не е точка на сгъстяване на тази редица. □

Доказахме, че всяка ограничена редица $\{x_n\}$ има горна точка на сгъстяване (т. е. най-голяма точка на сгъстяване). Съвършено аналогично се доказва съществуването на долна точка на сгъстяване, която е точната горна граница на множеството от реалните числа $\{x\}$, наляво от които лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. □

Следствие 1. *Ако $\{x_n\}$ е ограничена редица, $\underline{x}$ и $\overline{x}$ са съответно нейната долна и горна точка на сгъстяване, ε е произволно положително число, то в интервала $(\underline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$ се съдържат всички членове на тази редица от известен номер нататък (който зависи, разбира се, от ε).*

Достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ вън от интервала $(\underline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Разбира се, за това е достатъчно да се докаже например, че надясно от $\overline{x}+\varepsilon$ и наляво от $\underline{x}-\varepsilon$ лежат най-много краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Фактът, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от $\overline{x}+\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на $\{x_n\}$, беше установен при доказването на теорема 3.16. Съвсем аналогично се доказва, че за всяко $\varepsilon>0$ наляво от $\underline{x}-\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. □

Следствие 2. *Нека $\{x_n\}$ е ограничена редица с долна и горна точка на сгъстяване съответно $\underline{x}$ и $\overline{x}$, (a, b) е интервал, вън от който лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Тогава интервалът $(\underline{x}, \overline{x})$ се съдържа в интервала (a, b) и по-специално $\overline{x}-\underline{x}\leq b-a$.*

Доказателство. Достатъчно е да се докажат двете неравенства $\overline{x}\leq b$ и $\underline{x}\geq a$. Първото от тях следва от това, че точката b, надясно от която лежат само краен брой членове от редицата $\{x_n\}$, принадлежи на множеството $\{x\}$, разгледано при доказателството на теорема 3.16, а $\overline{x}$ е точна долна граница на това множество. Второто неравенство $a\leq \underline{x}$ се установява аналогично. □

Следствие 3 (теорема на Болцано — Вайерщрас*). *От всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица.*

Тази теорема е непосредствено следствие от теорема 3.16 и определение 2 за точка на сгъстяване.

Теорема 3.16 хвърля светлина върху структурата на множеството от всички точки на сгъстяване на произволна ограничена редица. Ако както и по-горе, означим с $\underline{x}$ и $\overline{x}$ съответно долната и горната точка на сгъстяване на такава редица, то всички точки на сгъстяване се съдържат в сегмента $[\underline{x}, \overline{x}]$, при което, ако редицата не е сходяща, тя има поне две точки на сгъстяване $\underline{x}$ и $\overline{x}$. Разгледаната по-рано редица $1/2,\ 1-1/2,\ 1/3,\ 1-1/3, \ldots, 1/n, 1-1/n, \ldots$ е пример за редица със само две точки на сгъстяване $\underline{x}=0$ и $\overline{x}=1$.

Другата разгледана редица $\{x_n\}$ от всички рационални числ на сегмента $[0, 1]$ е пример за редица, чиито точки на сгъстяван покриват целия сегмент $[0, 1]$.

* Бернхард Болцано — чешки философ и математик (1781—1848). Карл Вайерщрас — немски математик (1815—1897).

Лесно е да се построи пример за редица $\{x_n\}$, която има за точки на сгъстяване: 1) отнапред зададено крайно множество от точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$; 2) отнапред избрана безкрайна редица от точки $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$* (във втория случай всяка точка на сгъстяване на редицата от точките на сгъстяване $\{a_n\}$ ще бъде точка на сгъстяване и за изходната редица $\{x_n\}$).

3.3.2. Разширяване на понятието точка на сгъстяване. Аналог на теоремата на Болцано — Вайерщрас за неограничени редици е следното твърдение:

Лема 2. *От всяка неограничена редица може да се избере безкрайно голяма подредица (и по-специално безкрайно голяма подредица, всички членове на която имат еднакъв знак).*

Доказателство. Най-напред ще отбележим, че ако в неограничена редица премахнем произволен брой от първите членове, то редицата от останалите членове е също неограничена. Нека $\{x_n\}$ е произволна неограничена редица. Тогава съществува член x_{k_1} от тази редица, удовлетворяващ неравенството $|x_{k_1}|>1$. Като вземем пред вид, че редицата $\{x_n\}$, разглеждана от номера k_1+1 нататък, е също неограничена, то ще съществува член x_{k_2}, който удовлетворява неравенството $|x_{k_2}|>2$, а $k_2>k_1$. Продължавайки тези разсъждения, ще получим, че за всеки номер n съществува член x_{k_n}, за който е изпълнено неравенството $|x_{k_n}|>n$ и $k_n>k_{n-1}$.

Очевидно е, че построената по този начин подредица $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ е безкрайно голяма. Тъй като тази редица съдържа безбройно много или положителни, или отрицателни членове, ние можем да изберем от нея безкрайно голяма подредица, членовете на която имат един и същ знак. □

От лема 2 и теоремата на Болцано — Вайерщрас следва твърдението:

Лема 3. *От произволна редица може да се избере или сходяща подредица, или безкрайно голяма подредица, всички членове на която имат един и същ знак.*

Лема 3 естествено води до идеята за разширяване на понятието точка на сгъстяване на редица. Ще се уговорим формално да допълним въведените по-рано крайни точки на сгъстяване на редица с още две възможни точки на сгъстяване $+\infty$ и $-\infty$.

Ще казваме, че $+\infty$ $(-\infty)$ е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$, ако от тази редица може да се избере безкрайно голяма подредица, всички членове на която са положителни (отрицателни).

При такова разширение на понятието точка на сгъстяване от лема 3 следва твърдението: *Всяка редица има поне една точка на сгъстяване* (или крайна, или равна на $+\infty$ или $-\infty$).

* Такава е редицата $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, \ldots$

Естествено е да считаме, че $+\infty$ и $-\infty$ са свързани с всяко крайно реално число x с неравенствата $-\infty<x<+\infty$. Ще покажем, че всяка редица $\{x_n\}$ има горна и долна точка на сгъстяване.

За определеност ще се спрем на доказателството за съществуване на горна точка на сгъстяване.

Съгласно теорема 3.16 е достатъчно да разгледаме само случая, когато редицата $\{x_n\}$ е неограничена.

Ако при това редицата $\{x_n\}$ е неограничена отгоре, то от нея може да се избере безкрайно голяма подредица, всичките членове на която са положителни и затова $+\infty$ ще бъде точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Остава да се разгледа случаят, в който неограничената редица $\{x_n\}$ е ограничена отгоре, т. е. когато съществува такова реално число M, че всички членове x_n на редицата удовлетворяват неравенството $x_n\leq M$. Понеже при това редицата $\{x_n\}$ е неограничена отдолу, то от нея може да се избере безкрайно голяма подредица, всички членове на която са отрицателни, т. е. $-\infty$ е точка на сгъстяване на тази редица.

Ако при това редицата $\{x_n\}$ няма нито една крайна точка на сгъстяване, то единствената точка на сгъстяване $-\infty$ е и горна точка на сгъстяване на тази редица.

Ако редицата има поне една крайна точка на сгъстяване x_0, то като фиксираме някое $\varepsilon>0$, можем да изберем от тази редица подредицата от всички членове, които удовлетворяват неравенствата

$$x_0-\varepsilon\leq x_n\leq M.$$

Избраната подредица е ограничена и според теорема 3.16 за нея съществува най-голяма точка на сгъстяване, която е най-голямата точка на сгъстяване и на редицата $\{x_n\}$. Съществуването на горна точка на сгъстяване за всяка редица е доказано. Аналогично се доказва, че за всяка редица съществува долна точка на сгъстяване.

В заключение ще отбележим, че почти всички понятия и твърдения, установени в тази и в предишните точки, се пренасят и за произволно числово множество $\{x\}$ с безкраен брой елементи.

Точката α от безкрайната права $(-\infty, +\infty)$ ще наричаме точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$, ако във всяка ε-околност на точката α се съдържат безкрайно много елементи от това множество.

Най-голямата и най-малката точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$ ще наречем съответно *горна* и *долна точка на сгъстяване* на това множество.

Като повторим разсъжденията в теорема 3.16 и заменим термина „редицата $\{x_n\}$" с термина „множеството $\{x\}$, съдържащо безкраен брой елементи", ще дойдем до следното твърдение: *Всяко ограничено числово множество $\{x\}$, съдържащо безкраен брой елементи, има горна и долна точка на сгъстяване (и по-специално има поне една точка на сгъстяване).*

От това твърдение следва едно обобщение на теоремата на Болцано — Вайерщрас: *От елементите на всяко ограничено безкрайно множество $\{x\}$ може да се избере сходяща подредица, всички членове на която са различни помежду си.*

Както и в случая на редица, удобно е да разширим понятието точка на сгъстяване и да приемем, че $+\infty$ $(-\infty)$ *е точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$, ако от елементите на това множество може да се избере безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) числа.*

Тази формализация ни позволява да твърдим, че *безкрайно числово множество $\{x\}$ има поне една точка на сгъстяване, а така също горна и долна точка на сгъстяване.*

3.3.3. Критерий на Коши* за сходимост на редица. При изучаване на сходимостта на една редица $\{x_n\}$ се оценява обикновено разликата $x_n - a$ между членовете на редицата и предполагаемата ѝ граница a. С други думи, трябва да предугаждаме стойността на границата a на тази редица.

Сега ще дадем „вътрешен" критерий за сходимост на редица, позволяващ да определяме нейната сходимост, без да познаваме предполагаемата граница на тази редица.

Определение 5. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***фундаментална*****, ако за всяко положително число ε съществува такъв номер N, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n \geqq N$, и за всяко естествено число p $(p=1, 2, \dots)$ да е изпълнено неравенството*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Ще докажем две важни свойства на фундаменталните редици.

Свойство 1. Нека е дадена фундаменталната редица $\{x_n\}$. За всяко положително число ε съществува такъв член x_N, че в ε-околността на този член x_N се съдържат всички членове x_n на редицата с номера $n \geqq N$.

С други думи, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува член от фундаменталната редица, вън от ε-околността на който има най-много краен брой членове на тази редица.

* Огюстен Луи Коши — френски математик (1789 — 1857).

** Използува се още наименованието *редица на Коши.*

Доказателство. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението за фундаментална редица съществува такъв номер N, че за всяко естествено число p $(p=1, 2, 3, \dots)$ членовете на фундаменталната редица удовлетворяват неравенството

$$|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon,$$

или

$$x_N - \varepsilon < x_{N+p} < x_N + \varepsilon.$$

Тъй като p е произволно естествено число, то от последните неравенства следва, че всички членове на фундаменталната редица с номера, по-големи от N, се съдържат в интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$, т. е. в ε-околността на x_N. □

Свойство 2. Всяка фундаментална редица е ограничена.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е фундаментална редица. Избираме произволно числото $\varepsilon > 0$. Съгласно свойство 1 за това ε съществува такъв член x_N, че всички членове x_n с номера $n \geqq N$ удовлетворяват неравенството

$$x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon.$$

Да означим с A най-голямото от следните $N+1$ числа: $|x_1|$, $|x_2|, \dots, |x_{N-1}|$, $|x_N - \varepsilon|$, $|x_N + \varepsilon|$. Тогава очевидно за всички номера n ще бъде изпълнено неравенството $|x_n| \leqq A$, откъдето следва ограничеността на редицата $\{x_n\}$. □

Ще докажем сега следната помощна теорема.

Теорема 3.17. *За да бъде редицата $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да е ограничена и горната ѝ точка на сгъстяване $\overline{x}$ да съвпадне с долната ѝ точка на сгъстяване $\underline{x}$.*

Доказателство. 1) *Необходимост.* Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща. Тогава тя е ограничена (съгласно теорема 3.8) и има само една точка на сгъстяване (съгласно лема 1). Това означава, че горната ѝ и долната ѝ точка на сгъстяване $\overline{x}$ и $\underline{x}$ съвпадат.

2) *Достатъчност.* Нека редицата $\{x_n\}$ е ограничена (съгласно теорема 3.16 тя има горна точка на сгъстяване $\overline{x}$ и долна точка на сгъстяване $\underline{x}$) и нека $\overline{x} = \underline{x}$. Да положим $x = \overline{x} = \underline{x}$. Съгласно следствие 1 на теорема 3.16 за всяко $\varepsilon > 0$ интервалът $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ съдържа всички членове на редицата $\{x_n\}$ от даден номер нататък. Според определение 3 за сходяща редица (вж. 3.1.4) това означава, че редицата $\{x_n\}$ клони към границата x. Теорема 3.17 е доказана.

Ще докажем следната важна теорема:

Основна теорема 3.18 (критерий на Коши за сходимост на

редица). *За да бъде редицата $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде фундаментална.*

Доказателство. 1. *Необходимост.* Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща с граница x. Ще докажем, че тази редица е фундаментална. Фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като x е граница на редицата $\{x_n\}$, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$

$$|x_n - x| < \varepsilon/2. \tag{3.41}$$

Ако p е произволно естествено число, то за всички $n \geq N$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2, \tag{3.42}$$

тъй като $n+p \geq N$.

От неравенствата (3.41) и (3.42) получаваме, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x) + (x - x_n)| \leq |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon,$$

а това означава, че редицата $\{x_n\}$ е фундаментална.

2. *Достатъчност.* Нека редицата $\{x_n\}$ е фундаментална. Трябва да се докаже, че тя е сходяща. Съгласно теорема 3.17 е достатъчно да докажем, че редицата $\{x_n\}$ е ограничена и че горната и долната ѝ точка на сгъстяване $\overline{x}$ и $\underline{x}$ съвпадат.

По-горе установихме, че всяка фундаментална редица е ограничена (вж. свойство 2). Остава да докажем, че горната точка на сгъстяване $\overline{x}$ и долната точка на сгъстяване $\underline{x}$ на редицата $\{x_n\}$ съвпадат. Фиксираме произволно положителното число ε. Съгласно свойство 1 на фундаменталните редици съществува такъв член x_N от редицата $\{x_n\}$, че вън от ε-околността на този член, т. е. вън от интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$, лежат най-много краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Но тогава съгласно следствие 2 на теорема 3.16 интервалът $(\underline{x}, \overline{x})$ се съдържа в интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ и по-специално е изпълнено неравенството $\overline{x} - \underline{x} \leq (x_N + \varepsilon) - (x_N - \varepsilon) = 2\varepsilon$. Тъй като освен това $\overline{x} \geq \underline{x}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ са изпълнени неравенствата $0 \leq \overline{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$. От произволния избор на ε и от тези неравенства следва, че $\overline{x} - \underline{x} = 0$, т. е. $\overline{x} = \underline{x}$. Критерият на Коши е доказан.

Примери:

1. Ще приложим критерия на Коши, за да установим разходимостта на редицата $\{x_n\}$ с членове $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Ще отбележим, че ако за всяко n изберем естественото число p, равно на n, ще получим, че за всяко n

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По този начин за положителното число $\varepsilon = 1/2$ не съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p да е изпълнено неравенството $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Следователно разглежданата редица не е фундаментална и (по критерия на Коши) е разходяща.

2. Ще приложим критерия на Коши, за да установим сходимостта на редицата $\{x_n\}$ с членове $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, където q е произволно число от интервала $0 < q < 1$.

За всеки номер n и всяко естествено число p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ е изпълнено неравенството

$$|x_{n+p} - x_n| = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+p}) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} = \frac{q^{n+1} - q^{n+p+1}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}. \tag{3.43}$$

Фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като редицата $\{q^n\}$ поради $0 < q < 1$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon(1-q)$ съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството

$$q^n < \varepsilon(1-q). \tag{3.44}$$

От неравенствата (3.43) и (3.44) следва, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p имаме

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon(1-q)}{1-q} = \varepsilon,$$

а това означава, че разглежданата редица е фундаментална и следователно (по критерия на Коши) сходяща.

3.4. Граница на функция

Ще преминем към изучаването на друга, по-сложна форма на граничен преход, основана на понятието граница (или гранична стойност) на функция. Но преди това ще се спрем на понятията променлива величина и функция.

3.4.1. Понятие за променлива величина и функция. Разглеждането на реални физически променливи величини показва, че те не всякога могат да приемат произволни стойности. Така например скоростта на материална точка не може да бъде по-голяма от 3.10^{10} m/s (т. е. скоростта на светлината във вакуум), температурата на тяло не може да бъде по-малка от $-273°C$, отместването на материална точка, извършваща хармонични трептения по закона $y = A\cos(\omega t + \delta)$, може да приема стойности само от сегмента $[-A, A]$.

Като се абстрахираме от конкретните физически свойства на наблюдаваните в природата променливи величини, стигаме до понятието ***математическа променлива величина***, характеризираща се само с числените стойности, които тя приема.

Множеството $\{x\}$ от всички стойности, които дадена променлива величина x може да приема, се нарича ***област на изменение*** *на тази променлива величина. Променливата величина е зададена, ако е дадена нейната област на изменение.*

По-нататък обикновено ще означаваме променливите величини с малките латински букви $x, y, t, \ldots$, а областите на изменение на тези величини — съответно със символите $\{x\}, \{y\}, \{t\}, \ldots$

Ще преминем сега към уточняване на понятието функция.

Нека е зададена променливата величина x, която има област на изменение някое множество $\{x\}$.

Ако на всяка стойност на променливата x от множеството $\{x\}$ е съпоставено някое число y от множеството $\{y\}$, казваме, че върху множеството $\{x\}$ е ***зададена (дефинирана) функцията*** $y = f(x)$ *или* $f: \{x\} \to \{y\}$.

Променливата x се нарича ***аргумент*** *или* ***независима променлива***, *множеството $\{x\}$ се нарича* ***дефиниционна област*** *на функцията, а числото $f(x)$, което съответствува на дадена стойност на x, се нарича* ***стойност на функцията f в точката x.*** *Съвкупността $\{y\}$ от всички възможни стойности на функцията f се нарича* ***област на изменение на тази функция.***

В означението $y = f(x)$ буквата f често се нарича ***характеристика*** на функцията.

Ако f и g са две функции с една и съща дефиниционна област $\{x\}$, тогава сума $f+g$ на функциите f и g се нарича функцията h, която е дефинирана за всяко $x \in \{x\}$ с равенството $h(x) = f(x) + g(x)$. Аналогично се дефинира разлика $f-g$, произведение $f.g$ и частно f/g на две функции. Разбира се, частното f/g е дефинирано само за онези стойности $x \in \{x\}$ на аргумента, за които $g(x) \neq 0$.

Примери:

1. $y = \sqrt{4-x^2}$. Тази функция е дефинирана върху сегмента $-2 \leq x \leq 2$ (при тези стойности на x изразът под знака на корена е неотрицателен), а множеството от всичките ѝ стойности е сегментът $0 \leq y \leq 2$ (вж. фиг. 3.4).

2. Функцията на Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално число,} \\ 1, & \text{ако } x \text{ е рационално число.} \end{cases}$$

Функцията D е дефинирана върху безкрайната права $-\infty < x < \infty$ а множеството от всичките ѝ стойности съдържа само точките 0 и 1.

3.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{ако } x > 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0, \\ -1, & \text{ако } x < 0 \end{cases}$$

(sgn от латинската дума signum — знак). Чете се „сигнум x“. Тази функция е дефинирана върху безкрайната права $-\infty < x < \infty$ а множеството от всичките ѝ стойности съдържа трите точки $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ (вж. фиг. 3.5).

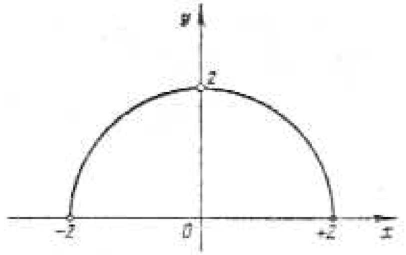
4. Символът $[x]$ означава цялата част на числото x, или по-точно най-голямото цяло число, ненадминаващо x. Чете се „скобки от x“. Функцията $f(x) = [x]$ е дефинирана върху цялата безкрайна права $-\infty < x < \infty$, а множеството от всичките ѝ стойности е множеството от всичките цели числа (вж. фиг. 3.6).

5. $f(n) = n!$. Тази функция** е дефинирана върху множеството на всички естествени числа $n = 1, 2, 3, \ldots$ Множеството от всичките ѝ стойности е множеството от естествените числа от вида $n! = 1.2.3 \ldots n$, където $n = 1, 2, 3, \ldots$ (вж. фиг. 3.7).

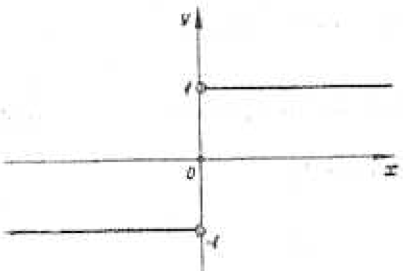
Често съответствието между множеството от стойности на аргумента и множеството от стойности на функцията се задава с формула. Този начин на задаване на функцията се нарича аналитичен.

Ще отбележим, че функцията може да се задава с различни

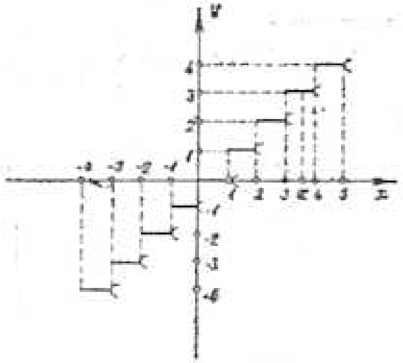
* Петер Густав Льожон-Дирихле — немски математик (1805 — 1859).
** Символът „$n!$“ се чете „n факториел“.



Фиг. 3.4



Фиг. 3.5



Фиг. 3.6

формули върху различните участъци от дефиниционната си област. Например функцията

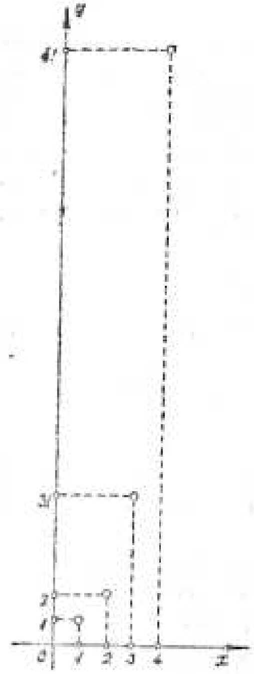
$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } x<0,\\ x^2 & \text{при } x\geqq 0\end{cases}$$

е зададена аналитично върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$ (вж. фиг. 3.8).

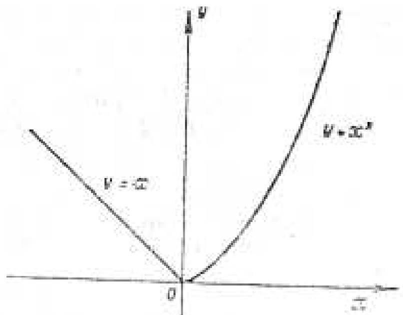
Възможно е стойностите на аргумента и съответните стойности на функцията да са дадени във вид на таблица.

Като пример за таблично зададена функция може да служи разписанието за движение на влак, което определя местоположението на влака в отделни моменти от времето. Чрез интерполация, при която функцията в интервала между две съседни таблични стойности се заменя с някаква функция от прост вид (например линейна или квадратна), може приближено да се определи местоположението на влака и във всеки междинен момент от времето.

В практиката на физическите измервания много разпространен е още един начин — графичният начин за задаване на функции, при



Фиг. 3.7



Фиг. 3.8

който съответствието между аргумент и функция се задава чрез графика.

3.4.2. Граница на функция по Хайне и по Коши. Нека функцията f е дефинирана върху някое безкрайно множество $\{x\}$ и нека a е точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$, която може и да не принадлежи на това множество.

Например нека множеството $\{x\}$ е интервалът (a, b); в този случай точката a не принадлежи на интервала, но всяка δ-околност на точката a съдържа точки от интервала.

Друг пример за множеството x е множеството на рационалните числа, принадлежащи на интевала $(a-\delta, a+\delta)$, без точката a.

Ще отбележим, че при всяко $\delta>0$ интервалът $(a-\delta, a+\delta)$, от който е изключена точката a, се нарича ***прободена δ-околност*** на точката a.

Определение 1 (граница на функция по Хайне*). *Числото b се нарича **граница** (или **гранична стойност**) на функцията f в точката a (или при $x\to a$), ако за всяка редица от стойности на*

* Хайнрих Едуард Хайне — немски математик (1821 — 1881).

аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, клоняща към a и състояща се от числа x_n, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ клони към числото b.

Определение 1′ (граница на функцията по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f в точката a (или при $x \to a$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0 < |x-a| < \delta$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x)-b| < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Граничната стойност на функцията $y = f(x)$ в точката a се означава с:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

Преди да докажем еквивалентността на определения 1 и 1′, ще направим няколко забележки, които поясняват смисъла на тези определения.

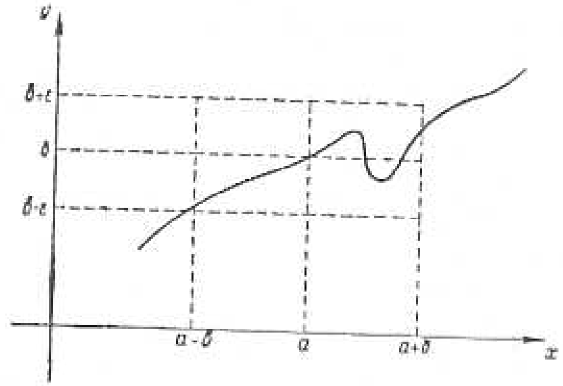
Забележка 1. Ще подчертаем важността на изискването в определение 1 членовете x_n на редицата да бъдат различни от a и аналогичното изискване в определение 1′, което налага за аргумента x условието $0 < |x-a|$, т. е. x да бъде различно от a. Това се налага от обстоятелството, че функцията f може да не е дефинирана в точката a. Без това изискване е невъзможно да се използва граница на функция за определяне на производна на функция. Действително, производната $f'(a)$ на функцията f в точката a е границата при $x \to a$ на следната функция:

$$F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Очевидно е, че функцията F не е дефинирана в точката a.

Забележка 2. Множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, не е необходимо изцяло да покрива някоя прободена δ-околност на точката a. Това множество $\{x\}$ трябва да има само поне един елемент във всяка прободена околност на точката a. Пример за такова множество $\{x\}$ е множеството на всички членове на редицата $\{1/n\}$, лежащи във фиксирана δ-околност на точката $a = 0$.

Забележка 3. Условието $0 < |x-a| < \delta$ в определение 1′ е еквивалентно на съотношенията $a-\delta < x < a+\delta$, $x \neq a$, т. е. x принадлежи на прободената δ-околност на точката a. Неравенството (3.58) е еквивалентно на неравенствата $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$, т. е. $f(x)$ принадлежи на ε-околност на b.



Фиг. 3.9

Забележка 4. Като използваме идеята за приближаване на функцията f в околност на точката a с отнапред зададена точност ε, можем да изкажем определението на граница на функция по Коши (определение 1′) така: Числото b се нарича гранична стойност на функцията f в точката a, ако при всяка отнапред зададена точност $\varepsilon > 0$ може да се намери такава δ-околност на точката a, че за всички стойности на аргумента x, различни от a и принадлежащи на тази δ-околност на точката a, числото b приближава стойността на функцията $f(x)$ с точност ε (фиг. 3.9).

Забележка 5. Функцията f може да има в точката a само една граница. Действително при определянето на граница на функция по Хайне това следва от единствеността на границата на редицата $\{f(x_n)\}$, а при определянето на граница на функция по Коши то следва от еквивалентността на двете определения, която сега ще докажем.

Теорема 3.19. *Определенията 1 и 1′ за граница на функция по Хайне и по Коши са еквивалентни.*

Доказателство. 1. Нека числото b е граница на функцията f в точката a по Коши. Ще докажем, че числото b е граница на функцията f в точката a и по Хайне. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, всичките членове на която са различни от a. Трябва да се докаже, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към b.

Фиксираме произволно положително число ε и избираме положителното число δ, което според определението за граница на функция по Коши осигурява верността на неравенства (3.45) за всички стойности на x, за които $0 < |x-a| < \delta$.

От сходимостта на редицата $\{x_n\}$ към a за посоченото положително число δ съществува такъв номер N, че при всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството $|x_n - a| < \delta$. Тъй като $x_n \neq a$ за всички номера n, то за всички $n \geqq N$ са изпълнени неравенствата $0 < |x_n - a| < \delta$ и съгласно определението за граница на функция по Коши за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Това означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ клони към b.

2. Нека сега числото b е граница на функцията f в точката a по Хайне. Ще докажем, че това число b е граница на функцията f в точката a и по Коши. Да допуснем противното. Тогава съществува положително число ε_0 такова, че за всяко положително число δ може да се намери поне една такава стойност на аргумента x, че $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - b| \geqq \varepsilon_0$.

По този начин, ако вземем редицата $\delta_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, можем да твърдим, че за всеки неин член $\delta_n = 1/n$ съществува поне една такава стойност на аргумента x_n, че

$$0 < |x_n - a| < 1/n, \text{ но } |f(x_n) - b| \geqq \varepsilon_0. \tag{3.46}$$

Лявото от неравенствата (3.46) означава, че редицата $\{x_n\}$ клони към a със стойности, различни от a. Но в такъв случай съгласно определението на граница по Хайне съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ трябва да клони към b, а това противоречи на дясното от неравенства (3.46), изпълнено за всички номера n. Полученото противоречие доказва теоремата.

Примери:

1. Функцията $f(x) = c = \text{const}$ има граница c във всяка точка a от безкрайната права. Наистина за всяка стойност на аргумента x разликата $f(x) - c$ е равна на нула и затова $|f(x) - c| < \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$ и за всички стойности на аргумента (в дадения случай, за всяко $\varepsilon > 0$ в определението за граница по Коши, за δ може да се избере всяко положително число).

2. Функцията $f(x) = x$ има граница a във всяка точка a на безкрайната права. Наистина за тази функция редицата от стойности на аргумента съвпада със съответната редица от стойности на функцията и ако редицата $\{x_n\}$ клони към a, то и редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към a.

3. Функцията на Дирихле D, стойностите на която в рационалните точки са единица, а в ирационалните точки — нула, няма граница в нито една точка на безкрайната права. Това следва от факта, че за клоняща към a редица от рационални стойности на аргумента границата на редицата от съответните стойности на функцията е единица, а за клоняща към a редица от ирационални стойности на аргумента границата на редицата от съответните стойности на функцията е равна на нула.

Ще въведем сега понятието едностранна (дясна или лява) граница на функция в дадена точка a. За целта най-напред ще уточним характера на множеството $\{x\}$, върху което е зададена функцията f. Ще поискаме от множеството $\{x\}$ за всяко $\delta > 0$ да има поне един елемент, принадлежащ на интервала $(a, a+\delta)$ (интервала $(a-\delta, a)$).

Определение 2 (дясна (лява) граница на функция по Хайне). *Числото b се нарича* ***дясна (лява) граница*** *на функцията f в точката a, ако за всяка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, клоняща към a и състояща се от числа, по-големи от a (по-малки от a), съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към b.*

Определение 2′ (дясна (лява) граница на функция по Коши). Числото b се нарича ***дясна (лява) граница на функцията*** f в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $a < x < a+\delta$ $(a-\delta < x < a)$, е изпълнено неравенството (3.45).

Дясната (лявата) граница на функцията f в точката a се означава с:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) = b\right),$$

или по-краткото

$$f(a+0) = b \quad (f(a-0) = b).$$

Напълно аналогично на теорема 3.19 се доказва еквивалентността на определенията 2 и 2′ — трябва само да се вземат стойности на аргумента x и членове на редицата $\{x_n\}$, по-големи от числото a (по малки от числото a).

За пример ще разгледаме функцията

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ако } x > 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0, \\ -1, & \text{ако } x < 0. \end{cases}$$

Тази функция има в точката $a=0$ както дясна, така и лява граница, при което $\operatorname{sgn}(0+0) = +1$, $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$. Наистина за всяка клоняща към $a=0$ редица $\{x_n\}$, състояща се от числа, по-големи от нула, съответната редица $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ клони към 1, за всяка клоняща към $a=0$ редица $\{x_n\}$ от числа, по малки от нула, съответната редица $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ клони към -1.

От тези разсъждения следва, че разглежданата функция, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ няма граница в точката $a=0$.

И така функцията sgn няма граница в точката $a=0$, но има в тази точка дясна граница, равна на 1, и лява граница, равна на -1.

Фактът, че дясната и лявата граница на тази функция не са равни, не е случаен, тъй като е в сила следното твърдение: *Ако функцията f има в точката a дясна и лява граница и тези едностранни граници са равни на едно и също число b, то тази функция има граница в точката a, равна на b.* Очевидно е вярно и обратното твърдение: Ако функцията f има в точката a граница, равна на b, то дясната и лявата граница на f в точката a съществуват и са равни на b.

За доказателството на това твърдение можем да се възползваме от определенията 1′ и 2′, като отчетем, че ако неравенството (3.45) е изпълнено за стойности на аргумента x, удовлетворяващи условията $a<x<a+\delta$ и $a-\delta<x<a$, то неравенството (3.45) е изпълнено и за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0<|x-a|<\delta$.

Ще формулираме сега понятието граница на функция при $x\to\infty$. За въвеждането на това понятие трябва да поискаме множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, да има поне един елемент, лежащ вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ за всяко $\delta>0$.

Определение 3 (граница на функция при $x\to\infty$ по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to\infty$, ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към числото b.*

Определение 3′ (граница на функция при $x\to\infty$ по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to\infty$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x|>\delta$, е изпълнено неравенството* (3.45).

Границата на функцията f при $x\to\infty$ се означава с: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Напълно аналогично на теорема 3.19 се доказва еквивалентността на определенията 3 и 3′. Трябва само да се замени „сходяща редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$" с „безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$", а неравенството $0<|x-a|<\delta$ да се замени с неравенството $|x|>\delta$.

Пример за функция, която има граница при $x\to\infty$, е функцията $f(x)=1/x$ $(x\neq 0)$. Наистина за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(x_n)=1/x_n$ (по теорема 3.6) е безкрайно малка, т. е. има за граница числото $b=0$. Съгласно определение 3 $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x=0$.

Ще формулираме накрая понятието граница на функция, когато x клони към безкрайност с определен знак. За да въведем това понятие, ще искаме функцията f да е дефинирана в такова множество $\{x\}$, което за всяко $\delta>0$ има поне един елемент, лежащ надясно от δ (наляво от $-\delta$).

Определение 4 (граница на функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, всички членове на която са положителни (отрицателни), съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към числото b.*

Определение 4′ (граница на функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $x>\delta$ $(x<-\delta)$, да е изпълнено неравенството* (3.45).

Въведените понятия се означават с: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b)$.

Еквивалентността на определенията 4 и 4′ се доказва по същата схема, както в теорема 3.19: трябва само да се замени „сходяща редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$" с „безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) стойности на аргумента $\{x_n\}$", а неравенството $0<|x-a|<\delta$ се заменя с неравенството $x>\delta$ $(x<-\delta)$.

Забележка 6. Понятието за граница на числова редица $\{x_n\}$ може да се разглежда като частен случай на граница на функция при $x\to+\infty$. Ако вземем за $\{x\}$ множеството от всички естествени числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, а за f функция, дефинирана върху това множество, която на всяка стойност на аргумента n съпоставя n-тия член на редицата $\{x_n\}$, то определение 4′ за граница на такава функция при $x\to+\infty$ съвпада с определението за граница на числовата редица $\{x_n\}$.

3.4.3. Критерий на Коши за съществуване на граница на функция. За определеност ще разгледаме подробно случая за граница на функция f в точката a, въведена с определенията 1 и 1′.

Определение 5. *Ще казваме, че функцията f* ***удовлетворява в точката a условието на Коши,*** *ако за всяко положително ε съществува такова положително число δ, че за всеки две стойности на аргумента x' и x'', удовлетворяващи условията*

$$0<|x'-a|<\delta,\quad 0<|x''-a|<\delta, \tag{3.47}$$

да е изпълнено неравенството

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{3.48}$$

Теорема 3.20 (критерий на Коши за съществуване на граница на функция в точка a). *За да има функцията f крайна гра-*

ница в точката а, е необходимо и достатъчно тя да удовлетворява в тази точка условието на Коши.

Доказателство. *1. Необходимост.* Нека да съществува крайна граница $\lim_{x\to a} f(x)=b$. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определение 1' за граница на функция по Коши за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такова положително число δ, че каквито и да са стойностите на аргумента x' и x'', удовлетворяващи условията $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, съответните стойности на функцията удовлетворяват неравенствата

$$|f(x')-b|<\varepsilon/2, \; |f(x'')-b|<\varepsilon/2. \tag{3.49}$$

От неравенствата (3.49) получаваме, че

$$|f(x')-f(x'')|=|(f(x')-b)+(b-f(x''))|$$
$$\leq |f(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon,$$

което означава, че функцията f удовлетворява в точката a условието на Коши.

2. Достатъчност. Нека функцията f удовлетворява в точката a условието на Коши. Трябва да се докаже, че f има граница в точката a. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a и състояща се от числа, различни от a. Според определение 1 за граница по Хайне е достатъчно да се докаже, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към някакво число b и че това число b е едно и също за всички клонящи към a редици $\{x_n\}$ от числа, различни от a.

Ще докажем най-напред, че за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към някаква граница. Фиксираме произволно положително число ε и избираме съгласно условието на Коши съответно положително число δ. От сходимостта на редицата $\{x_n\}$ към a и от условието $x_n\neq a$ следва, че за това $\delta>0$ съществува такъв номер N, че $0<|x_n-a|<\delta$ при $n\geqq N$. Ако сега p е произволно естествено число ($p=1, 2, 3, \dots$), то още повече $0<|x_{n+p}-a|<\delta$ при $n\geqq N$.

По такъв начин при $n\geqq N$ и за всяко естествено p са изпълнени неравенствата $0<|x_{n+p}-a|<\delta$, $0<|x_n-a|<\delta$. От тези неравенства и от условието на Коши следва, че при $n\geqq N$ и за всяко естествено p имаме

$$|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon,$$

а това означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ е фундаментална. Съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици (вж. теорема 3.18) редицата $\{f(x_n)\}$ клони към някое число b.

Остава да се докаже, че за две произволни клонящи към a редици от стойности на аргумента $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ с елементи, различни от a, съответните редици от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ са сходящи и имат една и съща граница. Да предположим, че редиците $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ клонят съответно към границите b и b'. Да разгледаме новата редица от стойности на аргумента x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', $\dots$, x_n, x_n', $\dots$, която също клони към a и се състои от числа, различни от a. От доказаното по-горе следва, че редицата от стойности на функцията $f(x_1)$, $f(x_1')$, $f(x_2)$, $f(x_2')$, $\dots$, $f(x_n)$, $f(x_n')$, $\dots$ е сходяща и има за граница някакво число b''. Но тогава от твърдението, доказано в 3.3.1, следва, че всяка подредица на тази редица е също сходяща и има граница b''. Очевидно подредицата от нечетните членове $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\dots$, $f(x_n)$, $\dots$ и подредицата от четните членове $f(x_1')$, $f(x_2')$, $\dots$, $f(x_n')$, $\dots$ са сходящи и имат граница b''. Оттук следва, че $b=b'=b''$. □

Аналогично се формулира условието на Коши и се доказва критерият на Коши за случаите на дясна (лява) граница в точката a, граница при $x\to\infty$ и граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

При формулировката на условието на Коши е достатъчно в приведеното по-горе определение да се замени условие (3.47) за случая на дясна (лява) граница в точката a с условията $a<x'<a+\delta$, $a<x''<a+\delta$ ($a-\delta<x'<a$, $a-\delta<x''<a$), за случая на граница при $x\to\infty$ — с условията $|x'|>\delta$, $|x''|>\delta$, и накрая за случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ — с условията $x'>\delta$, $x''>\delta$ ($x'<-\delta$, $x''<-\delta$).

Съответният критерий на Коши се доказва по схемата на доказателството на теорема 3.20: трябва само под „редици от стойности на аргумента $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$" в случай на дясна (лява) граница в точката a да се разбира „редица, клоняща към a и състояща се от числа, по-големи от a (по-малки от a)", в случая на граница при $x\to\infty$ — „безкрайно голяма редица" и накрая в случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ — „безкрайно големи редици от положителни (отрицателни) числа".

3.4.4. Аритметични действия с функции, имащи граница. В сила е следната основна теорема:

Основна теорема 3.21. *Нека двете функции f и g са дефинирани върху едно и също множество $\{x\}$ и имат в точката a граници, съответно равни на b и c. Тогава функциите $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и f/g имат в точката a граници, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c (в случая на частно трябва да предполагаме, че c е различно от нула).*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, различни от a. Съгласно определение 1 на граница по Хайне съответните редици от стойности на функциите $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ са сходящи и клонят съответно към b и c. Но тогава съгласно теореми 3.9—3.12 редиците $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)-g(x_n)\}$, $\{f(x_n).g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ клонят съответно към границите $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c. Поради това, че редицата $\{x_n\}$ е произволна, от определение 1 за граница по Хайне следва, че функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g имат в точката a граници, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c. □

Доказателствата на съответните теореми за случаите на дясна (лява) граница в точката a, граница при $x\to\infty$ и граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ се провеждат по същата схема. Разликата е само в това, че редицата $\{x_n\}$ в случая на дясна (лява) граница клони към точката a със стойности, по-големи от a (по-малки от a), в случая на граница при $x\to\infty$ тя е безкрайно голяма редица и накрая в случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ тя е безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) числа.

Примери:

1. В 3.4.2 се убедихме, че за всяка точка a от безкрайната права $\lim\limits_{x\to a} x=a$. Съгласно теорема 3.21 можем да твърдим, че

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a} x\,.\lim_{x\to a} x=a\,.\,a=a^2$$

и изобщо за всяко естествено число n

$$\lim_{x\to a} x^n=a^n.$$

2. Нека сега $P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$, където $b_0, b_1, b_2,\ldots,b_n\neq 0$ са дадени константи. *Такава функция P_n се нарича* ***полином от степен*** n. Съгласно теорема 3.21

$$\lim_{x\to a} P_n(x)=\lim_{x\to a}(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$$
$$=b_0+b_1a+b_2a^2+\cdots+b_na^n=P_n(a)$$

за всяка точка a от безкрайната права.

И така полиномът P_n има граница във всяка точка a от безкрайната права и тази граница е равна на стойността $P_n(a)$ на полинома в точката a.

3. Нека P_n и Q_m са два произволни полинома от степени съответно n и m. *Частното $R=P_n/Q_m$ се нарича* ***рационална дроб.*** От теорема 3.21 за случая на частно имаме

$$\lim_{x\to a} R(x)=\lim_{x\to a}(P_n(x)/Q_m(x))=\lim_{x\to a} P_n(x)/\lim_{x\to a} Q_m(x)$$
$$=P_n(a)/Q_m(a)=R(a)$$

във всяка точка a, която не е корен на полинома Q_m. Следователно рационалната дроб има граница във всяка точка a от безкрайната права, която не е корен на знаменателя ѝ, и тази граница е равна на стойността на рационалната дроб в точката a.

3.4.5. Безкрайно малки и безкрайно големи функции. За определеност ще разглеждаме граница на функция в точката a.

Определение 6. *Функцията α се нарича* ***безкрайно малка*** *в точката a, ако границата ѝ в тази точка е равна на нула.*

Като пример за функция, която е безкрайно малка в точката a, може да служи функцията $\alpha(x)=(x-a)^n$, където n е произволно естествено число.

Наистина в края на предишната точка установихме, че полиномът $(x-a)^n$ има граница в точката a и тази граница е равна на стойността му в точката a, т. е. равна е на нула.

Ще отбележим, че ако функцията f има граница в точката a, равна на числото b, то функцията $\alpha(x)=f(x)-b$ е безкрайно малка в точката a. Това следва от факта, че границите на всяка от функциите f и $g=b$ в точката a са равни на числото b, и от теорема 3.21, приложена за разликата $f-g$.

Формулираното твърдение ни води до следното специално представяне на функцията f, чиято граница в точката a е равна на числото b:

$$f(x)=b+\alpha(x), \tag{3.50}$$

където α е някоя безкрайно малка в точката a функция. Представянето (3.50) е много удобно в различните приложения на теорията на границите.

Ще въведем сега понятието функция, безкрайно голяма отдясно (отляво) в дадена точка a.

Функцията A се нарича ***безкрайно голяма отдясно (отляво) на точката*** *a, ако за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, всички членове на която са по-големи от a (по-малки от a), съответната редица от стойности на функцията $\{A(x_n)\}$ е безкрайно голяма редица, чиито членове от някой номер нататък са или само положителни, или само отрицателни.*

Безкрайно големите отдясно (отляво) на точката a функции се означават с:

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=+\infty \quad \Big(\lim_{x\to a-0} A(x)=+\infty\Big)$$

или

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=-\infty \quad \Big(\lim_{x\to a-0} A(x)=-\infty\Big).$$

Употребява се и по-лаконичната символика:

$$A(a+0)=+\infty \qquad (A(a-0)=+\infty)$$

или

$$A(a+0)=-\infty \qquad (A(a-0)=-\infty).$$

Ще се спрем на методиката за сравняване на две безкрайно малки функции в дадена точка a. Нека α и β са две безкрайно малки в точката a функции, дефинирани за едни и същи стойности на аргумента.

1°. Казва се, че α е ***безкрайно малка от по-висок ред*** от β в точката a, ако

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)/\beta(x) = 0. \tag{3.51}$$

2°. Казва се, че α и β са ***безкрайно малки от еднакъв ред*** в точката a, ако границата в лявата страна на (3.51) е равна на число, различно от нула.

3°. Казва се, че α и β са ***еквивалентно безкрайно малки*** в точката a, ако границата в лявата страна на (3.51) е равна на единица.

Това, че α е безкрайно малка от по-висок ред от β в дадена точка a, се записва така:

$$\alpha = o(\beta)$$

(чете се „α равно на o малко от β").

И така символът $o(\beta)$ означава безкрайно малка функция от по-висок ред от безкрайно малката функция β в дадена точка a. От това определение на символа „o малко" получаваме следните негови свойства:

1) $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$, $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

2) ако $\gamma=o(\beta)$, то $o(\beta)\pm o(\gamma)=o(\beta)$;

3) ако α и β са две безкрайно малки в дадена точка функции, то $\alpha.\beta=o(\alpha)$ и $\alpha.\beta=o(\beta)$.

Аналогично се сравняват две безкрайно големи отдясно (отляво) на дадена точка a функции.

Нека A и B са дефинирани за едни и същи стойности на аргумента и за определеност $\lim_{x\to a+0} A(x)=+\infty$, $\lim_{x\to a+0} B(x)=+\infty$.

1°. Казва се, че A *има отдясно на точката a* ***по-висок ред на нарастване*** *от B, ако функцията A/B е безкрайно голяма отдясно на точката a.*

2°. *Казва се, че A и B имат отдясно на точката a* ***еднакъв ред на нарастване,*** *ако границата на функцията A/B при $x\to a+0$ е число, различно от нула.*

Примери:

1. Функциите $\alpha(x)=x^3-x^5$ и $\beta(x)=5x^3+x^4$ са безкрайно малки от един и същ ред в точката $x=0$, тъй като

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^5}{5x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{5+x}=\frac{1}{5}.$$

2. Функциите $\alpha(x)=(x-2)^2.(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ са еквивалентно безкрайно малки в точката $x=2$, понеже

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

3. Функциите $A(x)=(2+x)/x$ и $B(x)=1/x$ са безкрайно големи от еднакъв ред както отдясно, така и отляво на точката $x=0$, тъй като

$$\lim_{x\to 0} A(x)/B(x)=\lim_{x\to 0}(2+x)=2.$$

Аналогично се определят и сравняват функции, безкрайно малки или безкрайно големи при $x\to\infty$, а също и при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

3.5. По-общо определение за граница на функция по база

Като анализираме определенията за различните видове граница на функция f по Коши, забелязваме че във всички тях се изисква за всяко $\varepsilon>0$ всички стойности на тази функция, отговарящи на стойности на аргумента x от някое множество C_δ, да удовлетворяват неравенството (3.45), т. е. да принадлежат на ε-околност на точката b.

При това множеството C_δ, определено за всяко $\delta>0$, има различен вид при определянето на различните видове граница. При определяне на граница в точка a множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a; при определяне на дясна (лява) граница в точка a множеството C_δ е интервалът $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$); при определяне на граница при $x\to\infty$ множеството C_δ е външната част на сегмента $[-\delta, \delta]$ и накрая при определяне на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ множеството C_δ е отворената полуправа $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, -\delta)$).

Ако функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, то във всички определения на граница по Коши се иска неравенството (3.45) да бъде изпълнено за тези елементи от множеството $\{x\}$, които принадлежат и на съответното множество C_δ. Ще означим с B_δ подмножеството от онези елементи на $\{x\}$, които принадлежат и на C_δ, т. е. полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$.

Анализът на условията, при които се формулират определенията 1'—4' за граница на функция по Коши, ни води до извода, че множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, съдържа винаги поне един елемент, т. е. множеството B_δ никога не е празно.

Лесно е да се убедим също така, че за всичките видове граници сечението на две произволни множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ е също множество от тази съвкупност.

Така например сечението на две множества B_δ и $B_{\delta'}$, първото от които се състои от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ-околност на точката a, а второто — от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ'-околност на точката a, е съвкупността от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ''-околност на точката a, където δ'' е по-малкото от двете положителни числа δ и δ', т. е. е множеството $B_{\delta''}$ от съвкупността $\{B_\delta\}$.

В по-общи случаи, които се срещат при изучаването на функции на няколко променливи, сечението на две произволни множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ може да не е елемент на тази съвкупност, но обезателно съдържа елемент на тази съвкупност.

Приведените разглеждания ни водят естествено до понятието база на множеството $\{x\}$.

Определение 1. *Ще казваме, че безкрайната съвкупност $B=\{B_\delta\}$ от подмножества B_δ на множеството $\{x\}$ образува* **база** (*или* **базис на филтър**) *в множеството $\{x\}$, ако елементите на тази съвкупност удовлетворяват двете изисквания: 1) всеки елемент B_δ е непразно подмножество на множеството $\{x\}$; 2) сечението на всеки два елемента на съвкупността $\{B_\delta\}$ съдържа елемент на тази съвкупност.*

Примери:

1. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент във всяка прободена δ-околност на точката a. Тази прободена δ-околност на точката a означаваме с C_δ и полагаме $B_\delta = \{x\} \cap C_\delta$. Очевидно съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от множества B_δ при всички $\delta>0$ образува база на множеството $\{x\}$, тъй като всяко множество B_δ при всяко $\delta>0$ не е празно и сечението на две множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ е също множество от тази съвкупност.

Разгледаната база $\{B_\delta\}$ се означава със символа $x \to a$.

2. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент, принадлежащ на интервала $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$) при всяко $\delta>0$. Означаваме този интервал със символа C_δ и полагаме $B_\delta = \{x\} \cap C_\delta$. Тривиално се проверява, че съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от множествата B_δ, отговарящи на всички $\delta>0$, образуват база на множеството $\{x\}$.

Разгледаната база е прието да се означава със символа $x \to a+0$ (съответно $x \to a-0$).

3. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ за всяко $\delta>0$. Полагаме $C_\delta = (-\infty, +\infty) \setminus [-\delta, \delta]$, $B_\delta = \{x\} \cap C_\delta$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ е база на множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $x \to \infty$.

4. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент от полуправата $(+\delta, +\infty)$ (съответно от $(-\infty, -\delta)$) при всяко $\delta>0$. Означаваме тази полуправа с C_δ и полагаме $B_\delta = \{x\} \cap C_\delta$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ образува база в множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $x \to +\infty$ (съответно $x \to -\infty$).

5. Нека $\{x\}$ е множеството от всички естествени числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Полагаме $B_\delta = \{x\} \cap (+\delta, +\infty)$ за всяко $\delta>0$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ е база на множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $n \to \infty$.

Ще формулираме сега определението за граница на функция f относно база B на дефиниционната ѝ област, което съдържа всички разгледани по-горе определения за граница на функция, а също така и определението за граница на числова редица.

Ще предполагаме, че функцията f е дефинирана върху множеството $\{x\}$ и съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от подмножества B_δ на множеството $\{x\}$ образува база в множеството $\{x\}$.

Множеството от всички стойности, които приема функцията f, когато аргументът ѝ x пробягва множеството B_δ, ще наричаме *образ* на множеството B_δ и ще означаваме със символа $f(B_\delta)$.

Определение 2. *Числото b се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$* ***по базата*** *B на дефиниционната ѝ област, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв елемент B_δ от базата B, образът на който $f(B_\delta)$ принадлежи на ε-околността на точката b, т. е. принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.*

Границата на функцията f по базата B на дефиниционната ѝ област ще означаваме с $\lim\limits_{B} f(x) = b$. Това по-общо определение за граница по база съдържа в себе си всички частни случаи за граници, изучени по-горе, отговарящи на бази

$$x \to a,\ x \to a+0,\ x \to a-0,\ x \to \infty,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty \text{ и } n \to \infty.$$

Лесно се проверява също така, че общото определение на граница по база притежава основните свойства на граница, отговарящи на най-простата база $B=(x \to a)$.

Ще докажем критерия на Коши за съществуване на граница на функция по база.

Теорема 3.22 *За съществуване на граница на функцията f по база $B=\{B_\delta\}$ на дефиниционната ѝ област е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува елемент B_δ от базата B, чийто образ $f(B_\delta)$ да се съдържа в някой интервал с дължина 2ε.*

Доказателство. 1. *Необходимостта* е очевидна: ако съществува граница b на функцията f по база B, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент от тази база B_δ, чийто образ $f(B_\delta)$ принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ с дължина 2ε.

2. *Достатъчност.* Нека за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент B_δ на базата B, чийто образ $f(B_\delta)$ принадлежи на интервал с дължина 2ε. Да разгледаме безкрайно малката редица от положителни числа $\varepsilon_n=1/n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ За всяко ε_n съществува елемент от базата B_{δ_n}, чийто образ $f(B_{\delta_n})$ принадлежи на интервал с дължина $2\varepsilon_n$.

По определението на база сечението на елементите B_{δ_1} и B_{δ_2} съдържа обязателно някой елемент на базата, който ще означим с $\hat{B}_{\delta_2}$. Образът на този елемент $f(\hat{B}_{\delta_2})$ се съдържа както в някакъв интервал I_1 с дължина $2\varepsilon_1$, така и в някакъв интервал I_2' с дължина $2\varepsilon_2$. Сечението на интервалите I_1 и I_2' е интервал I_2 с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_2$, съдържащ се в интервала I_1. По-нататък съгласно определението на база сечението на елементите $\hat{B}_{\delta_2}$ и B_{δ_3} обязателно съдържа някой елемент на базата, който ще означим със символа $\hat{B}_{\delta_3}$. Образът на този елемент $f(\hat{B}_{\delta_3})$ принадлежи както на интервала I_2 с дължина $2\varepsilon_2$, така и на някакъв интервал I_3' с дължина $2\varepsilon_3$. Сечението на интервалите I_2 и I_3' е интервал I_3 с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_3$, съдържащ се в интервала I_2.

Продължавайки тези разсъждения, ще построим редица от такива елементи на базата $\hat{B}_{\delta_2}, \hat{B}_{\delta_3}, \ldots, \hat{B}_{\delta_n}, \ldots$, че образът $f(\hat{B}_{\delta_n})$ на всеки елемент $\hat{B}_{\delta_n}$ се съдържа в някакъв интервал I_n с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_n$, при което в редицата от интервали $I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ всеки следващ интервал се съдържа в предидущия. Да означим със символа $\overline{I}_n$ сегмента, който се получава, като към интервала I_n прибавим неговите краища. Тъй като редицата $\overline{I}_2, \overline{I}_3, \ldots, \overline{I}_n, \ldots$ е свиваща се система от сегменти (вж. 3.2.2), то съгласно следствието от теорема 3.15 съществува, и то единствена точка b, принадлежаща на всички сегменти.

Остава да се докаже, че b е граница на функцията f по базата B, т. е. да се убедим в това, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент на базата B, образът на който се съдържа в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Тъй като системата от сегменти $\{\overline{I}_n\}$ е свиваща се и b е обща точка на всички сегменти, можем да твърдим, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува сегмент $\overline{I}_n$ с достатъчно голям номер n, който се съдържа в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Това означава, че за този номер n образът $f(\hat{B}_{\delta_n})$ на елемента на базата $\hat{B}_{\delta_n}$ принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. □

От доказаната теорема следват както критерият на Коши за сходимост на числова редица, така и критерият на Коши за съществуване на всички разгледани по-горе видове граница на функция.

Като възможни обобщения на изложената теория могат да се разглеждат функции, дефинирани върху подмножества на произволно метрично пространство (вж. глава 12).

Забележка. Базите B и D на множеството $\{x\}$ се наричат *еквивалентни*, ако за всеки елемент B_{δ_1} на базата B съществува такъв елемент D_{δ_2} на базата D, че $D_{\delta_2}\subset B_{\delta_1}$, и за всеки елемент D_{δ_1} на базата D съществува такъв елемент B_{δ_2} на базата B, че $B_{\delta_2}\subset D_{\delta_1}$.

Съвкупността на всички еквивалентни бази B на множеството $\{x\}$ се нарича ***филтър на множеството*** $\{x\}$.

Не е трудно да се убедим, че твърденията за граници на функции и редици по еквивалентни бази B и D са едновременно верни.