ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
МОДУЛ 2

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Любомир Петров **Донка Беева**

СОФИЯ • 2009

Предлаганият модул 2 **Диференциално смятане на функция на една променлива** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в деветнадесет глави, като във всяка от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е втора част от **Сборник задачи по висша математика**, разработен от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

От авторите

***

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ. НЮТОНОВ БИНОМ

I. МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ

Нека $T(n)$ е математическо твърдение, което може да се разглежда като функция, определена в множеството на естествените числа $\mathbb{N}$. *Принципът на математическата индукция* гласи: Ако твърдението $T(n)$ е вярно за $n = n_0$ (например $n = 1; 2$) и от предположението, че е вярно за $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$), следва, че е вярно и за $n = k + 1$, то твърдението $T(n)$ е вярно за всяко естествено число.

Методът на математическата индукция се прилага по следния начин:

1. *Проверява се* твърдението $T(n)$ в един частен случай при $n = n_0$ (например $n = 1$).

2. *Допуска се*, че твърдението е вярно за произволна стойност на n: $n = k$, $k \in \mathbb{N}$.

3. От допускането, че $T(n)$ е вярно за $n = k$, *се доказва*, че е вярно и за $n = k + 1$.

Следователно твърдението $T(n)$ е вярно за всяко $n \geq n_0$.

Пример 1.1. *Докажете* с метода на пълната математическа индукция следните тъждества:

а) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $\dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

в) $\cos\alpha\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\cdots\cos(2^n\alpha) = \dfrac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

Решение. а) $*$ Проверяваме равенството при $n = 1$ и получаваме $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} \iff 1 = 1$, което вярно числово равенство.

$*$ Допускаме, че равенството е вярно при някое $n = k$, т.е.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

$*$ Ще докажем, че равенството е вярно при $n = k + 1$, т.е. при следващото n:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Наистина

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} = \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Тъй като $n \in \mathbb{N}$ следва, че тъждеството е вярно при $\forall n$, т.е. тъждеството е вярно и при $(k+2)$, $(k+3), \dots$

б) $*$ При $n = 1$ имаме $\frac{1}{1.4} = \frac{1}{4} \iff \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, което е вярно числово равенство.

$*$ Допускаме, че равенството е вярно при някое $n = k$, т.е.

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{3k+1}.$$

$*$ Ще докажем, че равенството е вярно при $n = k + 1$, т.е.

$$\underbrace{\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}}_{\frac{k}{3k+1}} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$
$$= \frac{k+1}{3(k+1)+1} = \frac{k+1}{3k+4}.$$

Наистина

$$\frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2 + 4k + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3(k + \frac{1}{3})(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$
$$= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}.$$

Тъй като $n \in \mathbb{N}$ следва, че тъждеството е вярно $\forall n$, т.е. вярно е и при $(k+2), (k+3), \dots$

в) $*$ Проверяваме равенството при $n = 1$ и получаваме

$$\cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha} \Longleftrightarrow \cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{4\sin\alpha}$$
$$\Longleftrightarrow \cos\alpha\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos 2\alpha,$$

което е вярно числово равенство.

$*$ Допускаме, че равенството е варно при някое $n = k$, т.е.

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^k\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

$*$ Ще докажем, че равенството е вярно при $n = k+1$, т.е. при следващото n:

$$\underbrace{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^k\alpha}_{\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}}\cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

Наистина

$$\frac{2}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$$

и, тъй като $n \in \mathbb{N}$, следва, че равенството е вярно при $\forall n$, т.е. вярно е и при $(k+2), (k+3), \dots$

Пример 1.2. Да се докаже, че неравенството $2^n > n^2$ е изпълнено за всяко естествено число $n \geq 5$.

Решение. $*$ При $n = 5$ имаме: $2^5 > 5^2 \Longleftrightarrow 32 > 25$ - вярно числово неравенство.

$*$ Нека неравенството е вярно за $n = k$, $k \geq 5$, т.е. $2^k > k^2$.

$*$ Трябва да докажем, че $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Наистина $2^{k+1} = 2.2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k = k^2 + 2k + 3k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \Longrightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$, където $k \geq 5 \Longleftrightarrow k^2 \geq 5k$. Тогава неравенството е вярно и при $(k+2)$, $(k+3)$, $\dots$, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.3. Докажете неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2.$$

Доказателство. $*$ При $n = 2$, след като заместим в неравенството, получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Longleftrightarrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2},$$

което е вярно числово неравенство, тъй като $\sqrt{2} \approx 1,4$ $(1,7 > 1,4)$.

$*$ Допускаме, че неравенството е изпълнено при някое $n = k$, т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}.$$

$*$ Ще докажем, че неравенството е изпълнено при $n = k + 1$, т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Наистина, след като прибавим към двете страни на неравенството $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$, получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}$$
$$> \frac{\sqrt{k(k+0)}+1}{\sqrt{k+1}} = \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}.$$

Така по метода на пълната математическа индукция доказахме, че неравенството е изпълнено при $(k+2)$, $(k+3)$, ... , т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.4. Докажете неравенството

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Решение. 1°. Проверяваме верността на твърдението за $n = 1$: $\dfrac{1}{1+1} > \dfrac{13}{24} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{13}{24}$. Очевидно полученото числово неравенство не е вярно. Затова проверяваме за следващата стойност $n = 2$: $\dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2+2} > \dfrac{13}{24} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{13}{24} \Longleftrightarrow \dfrac{7}{12} > \dfrac{13}{24}$, което е вярно числово неравенство. Следователно за $n = 2$ твърдението е вярно.

2°. Допускаме, че неравенството е изпълнено за $n = k$, $k \geq 2$, т.е.

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

е вярно неравенство.

3°. Ще докажем, че неравенството е вярно за $n = k + 1$, т.е.

$$\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(k+1)+(k-1)} + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}.$$

Последното неравенство е еквивалентно на

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>\frac{13}{24}$$

(прибавяме и изваждаме събираемо $\frac{1}{k+1}$). Преобразуваме лявата страна:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}&+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{2k+2+2k+1-2(2k+1)}{(2k+1)(2k+2)}\\&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}\\&>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k},\end{aligned}$$

защото $\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}>0\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Тогава (вж. 2°) от

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}\\&\Longrightarrow\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}.\end{aligned}$$

И така, неравенството е вярно $\forall n\geq 2$.

Пример 1.5. Да се докаже, че за всяко положително $k\leq n$ е в сила

$$1+\frac{k}{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

Решение. Индукционната променлива тук е k.

$*$ За $k=1$ имаме $1+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$, което е вярно неравенство.

$*$ Нека за $k=p$ е изпълнено

$$1+\frac{p}{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^p<1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}.$$

$*$ Ще докажем, че за $k=p+1$ е изпълнено

$$1+\frac{p+1}{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}<1+\frac{p+1}{n}+\frac{(p+1)^2}{n^2}.$$

Умножаваме приетите за верни неравенства с $\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$:

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} < \left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{p+1}{n}+\frac{p}{n^2} > 1+\frac{p+1}{n} \quad (\text{тъй като } \frac{p}{n^2} > 0);$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 1+\frac{p+1}{n}+\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}\cdot\frac{p}{n^2}+\frac{2p+1}{n^2}-\frac{2p+1}{n^2}+\frac{p^2}{n^3}\\ &= 1+\frac{p+1}{n}+\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p^2-2pn-n}{n^3}\\ &< 1+\frac{p+1}{n}+\frac{(p+1)^2}{n^2},\end{aligned}$$

защото $\frac{p^2-2pn-n}{n^3} < 0\,\forall p \le n$. Следователно

$$1+\frac{p+1}{n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} < 1+\frac{p+1}{n}+\frac{(p+1)^2}{n^2}, \quad \forall k \le n.$$

При $k = n$ се получават неравенствата

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Пример 1.6. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са n положителни числа, за които $x_1x_2\cdots x_n = 1$. Докажете, че $x_1+x_2+\cdots+x_n \ge n$, като равенството се достига само за $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Решение. $*$ Ако $n = 1$, от условието следва $x_1 = 1$ и твърдението е вярно.

$*$ Допускаме, че твърдението е вярно за кои да са k числа, удовлетворяващи условието, или

$$x_1x_2\cdots x_k = 1 \quad \text{и} \quad x_1+x_2+\cdots+x_k \ge k.$$

$*$ Нека $n = k+1$, т.е. имаме $(k+1)$ положителни числа, за които $x_1x_2\cdots x_kx_{k+1} = 1$.

Първи случай. Нека $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1} = 1$. Тогава $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1} = k+1$ и твърдението е доказано.

Втори случай. Нека поне едно от числата е по-голямо от 1. Без ограничение на общността можем да приемем $x_1 > 1$. Тогава съществува число, примерно $x_2 < 1$. Следователно

$$(x_1-1)(1-x_2) > 0 \Longleftrightarrow x_1+x_2-x_1x_2-1 > 0 \Longleftrightarrow x_1+x_2 > 1+x_1x_2,$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} > 1+x_1x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{k+1}.$$

Означаваме $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_4, \dots, y_k = x_{k+1}$. Очевидно $y_1 > 0$, $y_2 > 0, \dots, y_k > 0$. Образуваме произведението

$$y_1y_2\cdots y_k = x_1x_2\cdots x_{k+1} = 1.$$

Съгласно допускането ($y_i > 0, i = \overline{1,k}$ и $\prod\limits_{i=1}^{k} y_i = 1$) следва $y_1+y_2+\cdots+y_k \geq k$. $\Longrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} > 1+y_1+y_2+\cdots+y_k \geq 1+k \Longleftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} > k+1$, с което твърдението е доказано.

Пример 1.7. Нека a_1, $a_2, \dots, a_n$ са n неотрицателни числа. Докажете неравенството:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad \text{(неравенство на Коши).}$$

Решение. Първи случай. Ако едно от числата е нула, то $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 0 \leq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ (неравенството е вярно). Равенство се достига при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Втори случай. Всички числа $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Означаваме

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}, \quad \dots, x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

От $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ следва $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

$$x_1x_2\cdots x_n = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} = 1.$$

Съгласно доказаното в Пример 1.6 имаме $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ или

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} \geq n \Longleftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Равенството се достига при $x_1 = x_2 = \cdots = x_n \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Забележка: Числото $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ се нарича *средно аритметично*, а числото $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ – *средно геометрично* на числата $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Предоставяме на читателя да докаже неравенството

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Числото $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$ се нарича *средно хармонично* на числата a_1, $a_2, \dots, a_n$.

Пример 1.8. Докажете, че $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Решение. $*$ За $n = 2$ получаваме вярно числово неравенство

$$\frac{16}{3} < \frac{1.2.3.4}{(1.2)^2} \iff \frac{16}{3} < 6.$$

$*$ Допускаме, че неравенството е изпълнено за произволно естествено число $n = k$, т.е. $\dfrac{4^k}{k+1} < \dfrac{(2k)!}{(k!)^2}$ е вярно неравенство.

$*$ Ще докажем, че неравенството е вярно за $n = k + 1$ или

$$\frac{4^{k+1}}{(k+1)+1} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} \iff \frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}.$$

Умножаваме с $\dfrac{4(k+1)}{k+2} > 0$ вярното (по допускане) неравенство

$$\frac{4^k.4(k+1)}{(k+1)(k+2)} < \frac{(2k)!.4(k+1)}{(k!)^2(k+2)} = \frac{(2k)!(2k+1)2(k+1)}{(k!)^2(k+1)^2} \cdot \frac{2(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} \cdot \frac{2(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}.$$

Последното неравенство е очевидно, защото

$$\frac{2(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)} = \frac{2k^2+4k+2}{2k^2+5k+2} < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тогава $\dfrac{4^{k+1}}{k+2} < \dfrac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}$, с което неравенството е доказано, защото $n \in \mathbb{N}$ и след като неравенството е вярно за $n = k + 1$, ще е вярно и за $n = k + 2$, $n = k + 3$, т.е. $\forall n$.

Пример 1.9. *Докажете*, че сборът от кубовете на три последователни естествени числа се дели на 9.

Доказателство. Нека $n \in \mathbb{N}$ и тогава според условието имаме да докажем *равенството*

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{N}.$$

$*$ Проверяваме равенството при $n = 1$ и получаваме: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 9.4 \Longrightarrow \lambda = 4 \in \mathbb{N}$, т.е. сборът от кубовете на числата се дели на 9.

$*$ Допускаме, че равенството е вярно при някое $n = k$, т.е. $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9\lambda$.

$*$ Ще докажем, че равенството е вярно при $n = k + 1$, т.е.

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9\mu.$$

Наистина

$$\underbrace{(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3}_{9\lambda} + 9k^2 + 27k + 27 = 9\lambda + 9(\underbrace{k^2 + 3k + 3}_{q})$$

$$= 9\lambda + 9q = 9(\underbrace{\lambda + q}_{\mu}) = 9\mu.$$

Така по метода на пълната математическа индукция доказахме, че *равенството* е вярно и при $(k+2)$, $(k+3), \ldots$, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.10. Докажете, че $25^n + 23$ се дели на 24.

Решение. $*$ Проверяваме верността на твърдението при $n = 1$: $25 + 23 = 28 = 2.24$, т.е. твърдението е вярно.

$*$ Допускаме, че за произволно $n = k$ е изпълнено $25^k + 23 = p.24$, $p \in \mathbb{N}$ (т.е. сумата се дели без остатък на 24).

$*$ Ще докажем верността на твърдението за $n = k + 1$, т.е. при следващата стойност на n: $25^{k+1} + 23 = q.24$, $q \in \mathbb{N}$.

$$25.25^k + 23 = \underbrace{25^k + 23}_{p.24} + 24.25^k = p.24 + 24.25^k = (p + 25^k)24.$$

От $p \in \mathbb{N}$, $25 \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow p + 25^k \in \mathbb{N}$, т.е. $q = p + 25^k$. Тъй като $n \in \mathbb{N}$ следва, че равенството е изпълнено $\forall n$, т.е. при $n = k + 2, k + 3, \ldots$

II. НЮТОНОВ БИНОМ

Равенството

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \qquad (1.1)$$

където

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad 1 \le k \le n,$$

се нарича *развитие на Нютонов бином*. Коефициентите C_n^k, $0 \le k \le n$, са биномни коефициенти в развитието. Друг запис за пресмятане на биномните коефициенти е

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.2)$$

Пример 1.11. Докажете свойствата на биномните коефициенти:

а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^k = 2^n$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$; г) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Доказателство. а) От формула (1.2) имаме

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
$$\Longrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

б) Във формула (1.1) полагаме $a = b = 1$:

$$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k = 2^n;$$

в) Означаваме

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots \text{ и } B = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{2k+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdot$$

Очевидно $A = B$ и $A + B = 2^n$. Тогава

$$2A = 2B = 2^n \Longrightarrow A = B = 2^{n-1}.$$

г) От формула (1.2) имаме:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Преобразуваме лявата страна на равенството

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!(k+1+n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)(k+1)}$$
$$= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Равенството е доказано.

Пример 1.12. Докажете, че, ако $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ и $x > 0$, то $(1+x)^n > 1 + nx$.

Доказателство. По формула (1.1) за лявата страна на неравенството получаваме

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n.$$

От $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ и $x > 0$ следва $\frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n > 0$

$$\Longrightarrow 1 + nx < 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n = (1+x)^n.$$

Пример 1.13. Даден е биномът $\left(x\sqrt[5]{\frac{x}{3}} - \frac{y}{\sqrt[7]{x^3}}\right)^n$. Намерете онзи член в развитието му, който съдържа x^3, ако сумата от коефициентите, стоящи на нечетни места е 2048.

Решение. $*$ От

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} = 2048 \Longleftrightarrow 2^{n-1} = 2^{11} \Longrightarrow n = 12.$$

$*$ Формулата за кой да е член на бинома (k-ия) е: $T_k = \binom{n}{k-1}x^{n-(k-1)}y^{k-1}$.

Като използваме тази формула при $n = 12$, получаваме:

$$T_k = \binom{12}{k-1}(x^{\frac{6}{5}}3^{-\frac{1}{5}})^{12-k+1}(yx^{-\frac{3}{7}})^{k-1} = \binom{12}{k-1}(x^{\frac{6}{5}})^{13-k}(x^{-\frac{3}{7}})^{k-1}3^{\frac{k-13}{5}}y^{k-1}.$$

По условие $x^{\frac{6(13-k)}{5}}x^{-\frac{3(k-1)}{7}} = x^3 \Longleftrightarrow \frac{6(13-k)}{5} - \frac{3(k-1)}{7} = 3 \Longrightarrow k = 8.$

Търсеният член е

$$T_8 = \binom{12}{7}\frac{x^3y^7}{3} = 792x^3y^7.$$

Пример 1.14. В разложението на бинома $(x+y)^n$ вторият член е равен на 240, третият - на 720, а четвъртият - на 1080. Намерете x, y и n.

Решение. От $T_k = \binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}$ имаме:

$$T_2 = \binom{n}{1}x^{n-1}y, \quad T_3 = \binom{n}{2}x^{n-2}y^2, \quad T_4 = \binom{n}{3}x^{n-3}y^3,$$

$$\left| \begin{array}{l} nx^{n-1}y = 240 \\ \dfrac{n(n-1)}{2.1}x^{n-2}y^2 = 720 \\ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1}x^{n-3}y^3 = 1080 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} nx^{n-1}y = 240 \\ \dfrac{nx^{n-1}y}{n(n-1)x^{n-2}y^2} = \dfrac{240}{1440} \\ \dfrac{n(n-1)x^{n-2}y^2}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}y^3} = \dfrac{720.2}{1080.2.3} \end{array} \right.$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} nx^{n-1}y = 240 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{n-1}{6} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3(n-2)}{4} \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} n = 5 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{array}\right. .$$

Пример 1.15. В развитието на бинома $\left(2x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$ да се намери членът, който не съдържа x.

Решение. От $T_k = \dbinom{6}{k-1}(2x^2)^{7-k}(x^{-1})^{k-1}$ имаме:

$$x^{2(7-k)}x^{-(k-1)} = x^0 \iff 2(7-k) - (k-1) = 0 \Longrightarrow k = 5.$$

Търсеният член е $T_5 = \dbinom{6}{4}2^2 = 60.$

Пример 1.16. Даден е биномът $\left(\sqrt{2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$. Намерете n и x, ако сумата от коефициентите на последните три члена е равна на 22 и сумата на третия и петия член в развитието на бинома е равна на 135.

Решение. От свойствата на биномните коефициенти $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ имаме:

$$\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

Прилагаме формула (1.2):

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 22 \iff n^2 + n - 42 = 0.$$

Корените на уравнението са $n_1 = -7$ и $n_2 = 6$, но $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n = 6$.

От формулите за k-ия член на бинома имаме

$$T_3 = \binom{6}{2}(\sqrt{2^x})^4\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2 = 15.2^{x+1}$$
$$T_5 = \binom{6}{4}(\sqrt{2^x})^2\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4 = 15.2^{2-x}.$$

Тогава $15.2^{x+1} + 15.2^{2-x} = 135 \iff 2.2^x - 9.2^x + 4 = 0$. Полагаме $2^x = t > 0$. Квадратното уравнение $2t^2 - 9t + 4 = 0$ има корени $t_1 = 4 > 0$ и $t_2 = \frac{1}{2} > 0$. Тогава от $2^x = 4 = 2^2 \Longrightarrow x = 2$, а от $2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Longrightarrow x = -1$.

ЗАДАЧИ

1. Докажете тъждествата:

а) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$;

б) $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

в) $\dfrac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

г) $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

д) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=\dfrac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$.

2. Докажете равенствата:

а) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2^n}-2\operatorname{cotg}2x$;

в) $\dfrac{1}{\cos x\cos 2x}+\dfrac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\cdots+\dfrac{1}{\cos nx\cos(n+1)x}=\dfrac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}x}{\sin x}$.

3. Докажете, че $k!\geq 2^{k-1}$, $k\geq 2$, $k\in\mathbb{N}$.

4. Докажете, че $2^{n+1}>2n+1$, $n\in\mathbb{N}$.

5. Да се докаже, че $11^{n+2}+12^{2n+1}$ се дели на 133, $n\in\mathbb{N}$.

6. Да се докаже, че $7^{2n}-6^{2n}$ се дели на 13, $n\in\mathbb{N}$.

7. Да се докаже, че за произволни n и k, такива че $0\leq k\leq n$, е в сила:

а) $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$;

б) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n.2^{n-1}$;

в) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}=\binom{m+n+1}{n+1}$;

г) $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+\cdots+3^n\binom{n}{n}=4^n$;

Упътване: положете във формула (1.1) $a=1$, $b=3$.

8. Третият член в развитието на бинома $(x^{\lg x}+x)^5$ е равен на 100. намерете x.

Отг. $x_1=\dfrac{1}{10}$, $x_2=\sqrt[3]{10}$

9. Сборът от коефициентите на втория и третия член в развитието на бинома $\left(a^{\frac{4}{3}}+\dfrac{1}{a\sqrt[15]{a^{13}}}\right)^n$ е равен на 78. Намерете члена, който не съдържа a.

Отг. $n=12$, $T_6=792$

10. Третият член в развитието на бинома $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^5$ е равен на десетия член в развитието на бинома $\left[\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{x-1}{9}}\right]^{10}$. Намерете x.

Отг. $x=-3/2$

ГЛАВА 2

ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ. ГРАНИЦА НА РЕДИЦА

I. ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ. СХОДИМОСТ

Нека A е множество, чиито елементи $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ са реални числа ($A \subset \mathbb{R}$). Ако на всеки елемент на множеството от естествените числа $\mathbb{N} : 1, 2, \dots, n, \dots$ съпоставим *съответно* елементите на множетвото A, получаваме безкрайна числова редица (така е установено изображение $f : \mathbb{N} \to A$).

Дефиниция 1 *Символ от вида*

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \tag{2.1}$$

*където $a_n \in \mathbb{R}$, се нарича **безкрайна числова редица** .*

Така дефинираната редица определя функция от вида $a_n = f(n)$. Ще наричаме a_n *общ член* на редицата (2.1). Ако $a_n = 2n$, то $A \equiv 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ Може едно и също число a_i да е образ на повече от едно естествено число (f не е инекция).

Дефиниция 2 *За дадена точка x_0 интервалът $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, където $\varepsilon > 0$ – произволно число, се нарича **ε-околност** на точката x_0.*

Дефиниция 3 *Точката x_0 се нарича **точка на сгъстяване** на редицата (2.1), ако всяка нейна околност съдържа поне един член на (2.1), а следователно и безброй членове на (2.1).*

Пример. Точката $x = 0$ е точка на сгъстяване на редицата $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$; редицата $1, 0, 1, 0, \dots$ има две точки на сгъстяване; редицата $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ няма точки на сгъстяване.

Дефиниция 4 *Редицата (2.1) е **ограничена отгоре** (отдясно), ако $\exists M \in \mathbb{R} \to a_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и **ограничена отдолу** (отляво), ако $\exists m \in \mathbb{R} \to m \le a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Дефиниция 5 *Редицата (2.1) се нарича **ограничена**, ако $\exists K > 0$ така, че $|a_n| \le K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1 (***Болцано–Ваерщрас***) *Ако редицата (2.1) е ограничена, тя притежава **поне** една точка на сгъстяване.*

Дефиниция 6 *Ако редицата (2.1) е* ***ограничена*** *и притежава* ***точно една*** *точка на сгъстяване* a_0*, редицата се нарича* ***сходяща***, *точката* a_0 *е нейна граница и бележим* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Дефиниция 7 *Редицата (2.1) е* ***сходяща*** *и* a_0 *е нейна граница, ако* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ *така, че при* $n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a_0| < \varepsilon$.

Дефинициите 6 и 7 са еквивалентни.

Теорема 2 (***Общ критерий на Коши***) *Необходимо и достатъчно условие редицата (2.1) да бъде сходяща е* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ *така, че при* $n > N(\varepsilon)$ *да бъде изпълнено* $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Аритметични операции със сходящи редици

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$, то:

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a_0 \pm b_0$;

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a_0 b_0$;

3°. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_0}{b_0}$, $b_n \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Основни свойства на сходящите редици

Дефиниция 8 *Редицата* $\{a_{n_k}\}$ *се нарича* ***подредица*** *на редицата (2.1):* $\{a_n\}$, *ако нейните членове са членове на (2.1) и* $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, *където* $n_k \in \mathbb{Z}^+$ *(множеството на целите положителни числа).*

Пример. Редицата $a_5, a_6, a_7, \ldots$, или $a_2, a_4, a_6, \ldots$, или $a_1, a_5, a_9, a_{13}, \ldots$ е подредица на (2.1).

Свойство 1 *Всяка подредица на сходяща редица е сходяща и има същата граница.*

Свойство 2 *Ако* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$, *то:*

а) ако $a_0 < b_0$, *то* $\exists N$ *така, че при* $n > N \Longrightarrow a_n < b_n$;

б) ако $a_n \le b_n \le c_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Теорема 3 (***принцип за компактност***) *От всяка ограничена редица може да се избере поне една сходяща подредица.*

Теорема 4 *Всяка сходяща редица има единствена граница.*

Теорема 5 *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Следствие 1 *Всяка неограничена редица е разходяща.*

II. МОНОТОННИ РЕДИЦИ. НЕПЕРОВО ЧИСЛО

Дефиниция 9 *Ако за редицата (2.1): $\{a_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ е изпълнено:*

а) $a_n < a_{n+1}$, *редицата се нарича (строго)* ***растяща****;*

б) $a_n \leq a_{n+1}$, *редицата се нарича (ненамаляваща)* ***монотонно растяща****;*

в) $a_n > a_{n+1}$, *редицата се нарича (строго)* ***намаляваща****;*

г) $a_n \geq a_{n+1}$, *редицата се нарича (нерастяща)* ***монотонно намаляваща****.*

Теорема 6 *Всяка монотонно растяща (намаляваща) и ограничена отгоре (отдолу) редица $\{a_n\}$ е сходяща, при това:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = \sup\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *– най-дясна точка на сгъстяване на редицата (точна горна граница);*

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = \inf\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *– най-лява точка на сгъстяване на редицата (точна долна граница).*

Следствие 2 *Всяка ограничена монотонна редицаа е сходяща.*

Пример 2.1. За числовата редица $\{a_n\}$ с общ член $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}^+$, докажете $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Доказателство. Образуваме $a_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n+1} \cdot \dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a}{n+1} a_n$ (получена е връзка между a_n и a_{n+1}). Тогава $\exists N$ такова, че при $n > N$ е изпълнено $\dfrac{a}{n+1} \leq 1$. Следователно $a_{n+1} \leq a_n$ или $\{a_n\}$ е *монотонно намаляваща*.

От $a \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a_n > 0$ или $\{a_n\}$ е *ограничена отдолу*. Според Т6 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \geq 0$ (редицата е сходяща и има граница l). Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$.

И така при $n \to \infty$ имаме:

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & \dfrac{a}{n+1} & \cdot & a_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & = & 0 & \cdot & l \end{array}$$

или $l = 0$, което трябваше да докажем.

Разглеждаме редица с общ член $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Първите членове на тази редица са: $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$, $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$, $a_3 = \frac{64}{27}$ и т.н.

Може да се докаже, че редицата е *растяща* и *ограничена отгоре* (отдясно) и тогава според Т6 тя е *сходяща*.

Дефиниция 10 *Границата* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, *където* $e = 2,71828\ldots$ *и се нарича* ***Неперово число.***

Числото e е ирационално и се нарича *натурално* (естествено) *число*, защото се среща при описването на процеси в естествените науки.

III. НАТУРАЛЕН ЛОГАРИТЪМ. ЕКСПОНЕНЦИАЛНА ФУНКЦИЯ

Дефиниция 11 *Логаритмите на числата* $N > 0$, *изчислени при основа числото* e, *се наричат* ***натурални логаритми*** *и бележим* $\log_e N \equiv \ln N$.

Дефиниция 12 *Функцията* $y = e^x$ *се нарича* ***експоненциална функция.***

Експоненциалната функция притежава всички свойства на показателната функция $y = a^x$ при основа $a > 1$ ($e > 1$):

1°. При $x = 0 \Longrightarrow y = e^0 = 1$, т.е. графиката на $y = e^x$ минава през точката (0,1) и е разположена над Ox.

2°. $y = e^x$ е строго растяща функция.

3°. При $x \to +\infty \Longrightarrow y = e^x \to +\infty$; при $x \to -\infty \Longrightarrow y = e^x \to 0$.

Пример 2.2. На базата на дефиниции 6 и 7 докажете, че числовата редица с общ член $a_n = \frac{1}{n}$ има граница 0.

Решение. * При $n = 1, 2, 3, \ldots$ получаваме съответно членовете на редицата $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Всички членове са разположени вдясно от 0 и тогава във всяка околност на точката 0 има поне един член на редицата, т.е. 0 *е точка на сгъстяване на редицата.* Тогава според дефиниция 6 имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

* Избираме $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon)$ така, че при $n > N(\varepsilon)$ или от известно място (известен номер) нататък да е изпълнено неравенството $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ (вж. деф. 7). Тогава от $n > 0 \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ или $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

а) нека $\varepsilon = \dfrac{1}{1000} \Longrightarrow N = 1000$, т.е. от 1001-ия член в редицата нататък е изпълнено $|a_n - 0| < \varepsilon$, защото $|a_{1001} - 0| = \dfrac{1}{1001} < \dfrac{1}{1000} = \varepsilon$;

б) нека $\varepsilon = \dfrac{3}{50} \Longrightarrow N = \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$, т.е. от 17-ия член нататък е изпълнено горното неравенство;

в) нека $\varepsilon = 30 \Longrightarrow N = \dfrac{1}{30}$, т.е. горното неравенство е изпълнено от първия индекс нататък и т.н.

Пример 2.3. Докажете, че границата на редицата с общ член $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ е нула.

Решение. $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ така, че при $n > N(\varepsilon)$ е изпълнено: $|\sqrt{n} - \sqrt{n-1} - 0| < \varepsilon$. От $n > n-1 \Longrightarrow \sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ и $|\sqrt{n} - \sqrt{n-1}| = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. Тогава

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{n-n+1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < \frac{1}{2\sqrt{n-1}},$$

защото $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$. Следователно

$$\frac{1}{2\sqrt{n-1}} < \varepsilon \Longleftrightarrow 2\sqrt{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow n > 1 + \frac{1}{4\varepsilon^2}.$$

Тогава $N(\varepsilon) = \left[1 + \dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$ (Най-голямото цяло цяло число, съдържащо се в $\left(1 + \dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right)$). Например, ако $\varepsilon = 0,01$, то $N(\varepsilon) = 2501$, т.е. от 2501-ия член нататък е изпълнено $|\sqrt{n} - \sqrt{n-1}| < \varepsilon$.

Пример 2.4. Покажете, че редицата с общ член $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ има граница.

Решение. От

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = 2$$

следва, че $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ така , че при $n > N(\varepsilon)$ е изпълнено

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < n+1 \Longleftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1 \Longrightarrow N = \frac{3}{\varepsilon} - 1.$$

Тогава при $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$ (например) $\Longrightarrow N = 2999$, т.е. от 3000-ия член нататък е изпълнено $|a_n - 2| < \varepsilon$.

Пример 2.5. Изследвайте относно сходимост редиците:

$$\text{а) } a_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0; \qquad \text{б) } a_n = \frac{\ln n}{n}; \qquad \text{в) } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Решение. а) Нека $a > 1$. Тогава $\sqrt[n]{a} > 1 \iff \sqrt[n]{a} = 1 + \lambda,\ \lambda > 0 \iff a = (1+\lambda)^n$. Прилагаме неравенството на Бернули (вж. Пример 1.12) и получаваме $a = (1+\lambda)^n > 1 + n\lambda$ или $\lambda < \dfrac{a-1}{n}$.

Тъй като $\sqrt[n]{a} - 1 = |\sqrt[n]{a} - 1| = \lambda < \dfrac{a-1}{n}$, достатъчно е да решим неравенството $\dfrac{a-1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{a-1}{\varepsilon}$. Следователно $\exists N(\varepsilon) = \left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$ така, че за $n \geq N(\varepsilon)$ е изпълнено $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Тогава $\lim a_n = 1$ при $a > 1$ и редицата е сходяща според дефиниция 7.

Ако $a < 1$ полагаме $a = \dfrac{1}{b}$, тогава $b > 1$ и доказателството е аналогично $\left(\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}\right.$, но $\sqrt[n]{b} = 1 \Longrightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1)$;

б) От $a_n > 0$, $\forall n > e$, т.е за $n > 3$, $a_n > 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln(n+1)^n - \ln n^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{\ln \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}{n(n+1)}$$

$$= \frac{\ln \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}{n(n+1)} < \frac{\ln \dfrac{3}{n}}{n(n+1)} \leq 0$$

(използваме неравнството $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$, вж. Пример 1.5).

Редицата е монотонно намаляваща и ограничена. Следователно е сходяща;

в) Друг запис на общия член на редицата е

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

и очевидно с нарастването на n членовете на сумата намаляват, но броят им расте.

$*$ При $1 < k < n$ имаме $\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+n} < \dfrac{1}{n+k} < \dfrac{1}{n+1}$. Тогава:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

и $$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

или $\frac{1}{2} < a_n < 1$, т.е. редицата е *ограничена.*

$*$ Образуваме разликата $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1+1}+\frac{1}{n+1+2}+\cdots+\frac{1}{n+1+n+1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+n}$$
$$= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0.$$

Следователно редицата е *монотонно растяща.*

След като редицата е монотонно растяща и ограничена, тя е сходяща.

Пример 2.6. Дадена е редицата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ или $a_n \to 2$, $a_k \neq \pm 2$. Намерете границата на редицата с общ член $b_n = \dfrac{a_n^2 - 5a_n + 6}{a_n^2 - 4}$.

Решение. Търсим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2 - 5a_n + 6}{a_n^2 - 4}$, но при $a_n \to 2$ знаменателят на дробта клони към нула и тогава не можем да приложим теоремата за частно при граница на редица. Тогава от

$$a_n^2 - 5n + 6 = 0 \Longrightarrow a_n = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Longrightarrow a_n = 3,\ a_n = 2$$
$$\Longrightarrow a_n^2 - 5a_n + 6 = (a_n - 3)(a_n - 2) \Longrightarrow b_n = \frac{(a_n-3)(a_n-2)}{(a_n+2)(a_n-2)} = \frac{a_n-3}{a_n+2}$$

(сега при $a_n \to 2$ знаменателят не клони към 0). Като приложим последователно теоремите за частно, сума и разлика при граница на редица, получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{a_n\to 2}\frac{a_n-3}{a_n+2} = \frac{\lim\limits_{a_n\to2}(a_n-3)}{\lim\limits_{a_n\to2}(a_n+2)} = \frac{\lim\limits_{a_n\to2} a_n - \lim\limits_{a_n\to2} 3}{\lim\limits_{a_n\to2} a_n + \lim\limits_{a_n\to2} 2} = \frac{2-3}{2+2} = \frac{-1}{4}.$$

Пример 2.7. Пресметнете границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Решение. При $n \to \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) знаменателят на дробта клони към ∞, а числителят - към $(\infty - \infty)$, т.е. дробта трябва да се преобразува (като рационализираме числителя). За целта умножаваме дробта със спрегнатото на числителя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

защото редицата с общ член $b_n = n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ е неограничена, а тогава редицата с общ член $\frac{1}{b_n}$ е нулева.

Пример 2.8. Пресметнете границата

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right].$$

Решение. Ще дадем друг вид на общия член a_n на редицата, като разложим $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ в сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \Longleftrightarrow 1 = A(2n+1) + B(2n-1)$$

$*$ Полагаме $n = \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 = A(1+1) \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$.

$*$ Полагаме $n = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 1 = B(-1-1) \Longrightarrow B = -\frac{1}{2}$.

Тогава $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \Longrightarrow$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

И така $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$.

Пример 2.9. Намерете границата на рекурентната редица $\{a_n\}$, ако $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$.

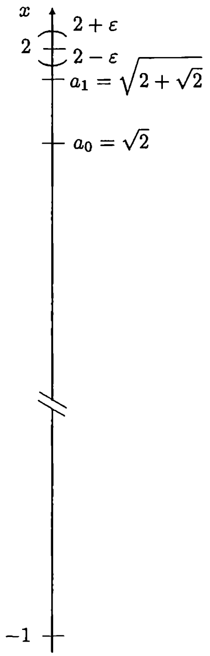
Решение. $*$ *Нека съществува* границата a на редицата $\{a_n\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$, т.е. $a = \sqrt{2+a} \Longleftrightarrow a^2 = 2 + a \Longleftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Longrightarrow a_1 = 2$, $a_2 = -1$ (възможни граници).

$*$ *Монотонност*: ще докажем, че $\{a_n\}$ е монотонно растяща.

$$\text{при } n = 1 \longrightarrow a_1 = \sqrt{2 + a_0} = \sqrt{2}$$
$$\text{при } n = 2 \longrightarrow a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$
$$\text{при } n = 3 \longrightarrow a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Longrightarrow a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

(монотонно растяща).

∗ *Ограниченост*: ще докажем, че $\{a_n\}$ е ограничена.



Редицата $\{a_n\}$ е ограничена и във всяка околност $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ на точката $x = 2$ има поне един член на редицата, т.е. $x = 2$ е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}$.

Според Т6 имаме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Пример 2.10. Намерете границите на редиците

а) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt[3]{n^2+1}}$; б) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+1}+n}$;

в) $a_n = \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$;

г) $a_n = \sqrt{3n^2+2n} - \sqrt{3n^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

Решение. а)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt[3]{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{n}{\sqrt{n}}}{n+n\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}} = 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0\right);$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = 1, \qquad (1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n-3n^2-(\frac{1}{2})^n}{\sqrt{3n^2+2n}+\sqrt{3n^2+(\frac{1}{2})^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-(\frac{1}{2})^n}{n\left(\sqrt{3+\frac{2}{n}}+\sqrt{3+\frac{1}{2^n n}}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{2^n n}}{\sqrt{3+\frac{2}{n}}+\sqrt{3+\frac{1}{2^n n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\right).$$

Пример 2.11. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$, намерете $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$:

$$\text{а)}\quad b_n = \frac{\sqrt[3]{1+a_n}-1}{a_n}; \qquad \text{б)}\quad b_n = \frac{\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_n^2}}{\sqrt{1+a_n}-1}.$$

Решение.

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a_n-1}{a_n\left(\sqrt{(1+a_n)^2}+\sqrt{1+a_n}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+a_n)^2}+\sqrt{1+a_n}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2}+\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n}+1} = \frac{1}{3};$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n-1-a_n^2)(\sqrt{1+a_n}+1)}{(1+a_n-1)(\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_n^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(1-a_n)(\sqrt{1+a_n}+1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_n^2})}$$

$$= \frac{(1-\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n}+1)}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n}+\sqrt{1+(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2}} = 1.$$

Пример 2.12. Намерете границата на редицата $a_n = \dfrac{n^k}{a^n}$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $a = 1+\alpha$, $\alpha > 0$, $n > k+1$. Тогава от развитието на Нютоновия бином имаме:

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\alpha^{k+1}+\cdots+\alpha^n > \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\alpha^{k+1}.$$

Тогава $a_n = \dfrac{n^k}{(1+\alpha)^n} < \dfrac{(k+1)!\alpha^{k+1}n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)} \to 0.$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример 1.13. Намерете границата на редицата

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n}.$$

Решение. $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le a_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$. Тогава

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Пример 2.14. Докажете теоремите Щолц:

I. Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две редици от числа, като $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ и $y_{n+1} > y_n$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.

II. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $\{y_n\}$ е монотонна редица, като $y_{n+1} \ne y_n$, $y_n \ne 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.

Доказателство. I. нека $\varepsilon > 0$. Съществува $k \in \mathbb{N}$ такова, че при $n \ge k$

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - l\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - l < \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow (l-\varepsilon)(y_{n+1}-y_n) < x_{n+1}-x_n < (l+\varepsilon)(y_{n+1}-y_n).$$

Тук сме взели предвид, че $y_{n+1} > y_n$, т.е. $y_{n+1}-y_n > 0$. Прилагаме последното неравенство за $n = k, k+1, \dots, n-1$:

$$\left.\begin{array}{l}(l-\varepsilon)(y_{k+1}-y_k) < x_{k+1}-x_k < (l+\varepsilon)(y_{k+1}-y_k)\\ (l-\varepsilon)(y_{k+2}-y_{k+1}) < x_{k+2}-x_{k+1} < (l+\varepsilon)(y_{k+2}-y_{k+1})\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (l-\varepsilon)(y_n-y_{n-1}) < x_n-x_{n-1} < (l+\varepsilon)(y_n-y_{n-1})\end{array}\right| +$$

$$\Longleftrightarrow (l-\varepsilon)(y_n-y_k) < x_n-x_k < (l+\varepsilon)(y_n-y_k) \Longleftrightarrow \left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k} - l\right| < \varepsilon.$$

Тук x_k и y_k са фиксирани и не зависят от n.

За да намерим границата $\dfrac{x_n}{y_n}$, правим следните преобразования:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n-x_k+x_k}{y_n} = \frac{x_n-x_k}{y_n} + \frac{x_k}{y_n}$$
$$= \frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}\cdot\frac{y_n-y_k}{y_n} + \frac{x_k}{y_n} = \frac{x_n-x_k}{y_n-y_k} - \frac{y_k(x_n-x_k)}{(y_n-y_k)y_n} + \frac{x_k}{y_n}.$$

Тогава

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| \le \left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k} - l\right| + \frac{|y_k|}{|y_n|}\cdot\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}\right| + \frac{|x_k|}{|y_n|}$$
$$< \varepsilon + \frac{1}{|y_n|}\big(|y_k|(l+\varepsilon) + |x_k|\big).$$

Тук $|y_n| \to \infty$, а числото $(|y_k|(l+\varepsilon) + |x_k|)$ не зависи от n и за достатъчно големи стойности на n имаме:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| < 2\varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

II. Да предположим (без да ограничаваме верността на твърдението), че $\{y_n\}$ е растяща редица. Тогава $y_{n+1} > y_n$. Нека за $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ такова, че за $n > N(\varepsilon)$ имаме

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека $k > N(\varepsilon)$ и $n > k$. Както в доказателството на теорема I имаме:

$$\left.\begin{array}{l} (l - \frac{\varepsilon}{2})(y_{k+1} - y_k) < x_{k+1} - x_k < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_{k+1} - y_k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (l - \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n-1}) \end{array}\right| + \Longleftrightarrow \left|\frac{x_n - x_k}{y_n - y_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_n - x_k}{y_n - y_k}\right| = \frac{x_k}{y_k}$. При граничен преход по n в последното неравенство получаваме:

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - l\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Пример 2.15. Нека $\{a_n\}$ е сходяща редица с граница a. Покажете, че редицата $\{b_n\}$ с общ член $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Решение. Съгласно теорема 2 трябва да докажем, че $|b_n - a| < \varepsilon$ за $n > N_0(\varepsilon)$.

Нека $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N(\varepsilon)$. Избираме $k \in \mathbb{N}$, $k > N(\varepsilon)$ и нека $n > k$. Тогава

$$\begin{aligned} |b_n - a| &= \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na}{n}\right| \\ &\le \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &< \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{k-1} - a|}{n} + \frac{n - k + 1}{2n}\varepsilon. \end{aligned}$$

Сумата $A = |a_1 - a| + \cdots + |a_{k-1} - a|$ не зависи от ε. При $n > \dfrac{2A}{\varepsilon}$ имаме $\dfrac{A}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ако означим $N_0 = \max\left(\dfrac{2A}{\varepsilon}, k\right)$, то $\forall n > N_0$ е изпълнено

$$|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Забележка. Една редица се нарича *сходяща в смисъл на Чезаро*, ако редицата $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ е сходяща. От пример 2.15 се вижда, че, ако тя е сходяща в обичайния смисъл, ще бъде сходяща и в смисъл на Чезаро и има същата граница.

Пример 2.16. Намерете границата на редицата $a_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

Решение. Общия член на редицата можем да запишем така:

$$a_n = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}, \qquad b_n = \sqrt[n]{n}.$$

Тогава е достатъчно да намерим границата на редицата с общ член $b_n = \sqrt[n]{n}$ и съгласно с пример 2.15 границата на редицата $\{a_n\}$ ще бъде същата, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Тъй като $\sqrt[n]{n} > 1$ при $n > 1$, то $\sqrt[n]{n} = 1 + \lambda$, $\lambda > 0$

$$\Longrightarrow n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots + \lambda^n.$$

При $\lambda > 0$ можем да приемем, че $n > \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^2$, $1 > \dfrac{n-1}{2}\lambda^2$, $\lambda^2 < \dfrac{2}{n-1}$.

При $n-1 > \dfrac{n}{2}$ или за $n > 2$ имаме $\dfrac{2}{n-1} < \dfrac{4}{n} \Longleftrightarrow \lambda^2 < \dfrac{4}{n} \Longrightarrow 0 < \lambda < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, но $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1 \Longrightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$, следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

ЗАДАЧИ

I. Намерете границата a на редицата $\{a_n\}$ и определете номер $N(\varepsilon)$ такъв, че $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n > N(\varepsilon)$:

1. $a_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $\varepsilon = 0,001$ — Отг. $a = \dfrac{1}{3}$, $N = 3$
2. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon = 0,005$ — Отг. $a = 1$, $N = 10$
3. $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$, $\varepsilon = 0,001$ — Отг. $a = 0$, $N = 999$

4. $a_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\varepsilon = 0,005$ Отг. $a = \dfrac{5}{7}$, $N = 3$

II. Намерете границата на редицата $\{a_n\}$:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$ Отг. 1

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{n\pi}{2}$ Отг. 0

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ Отг. $\dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$ Отг. 0

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$, $|q| < 1$ Отг. $\dfrac{1}{q-1}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ Отг. 0

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+1}+n}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$ Отг. $-\dfrac{1}{4}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n-1}$ Отг. 0

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{25} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{5^n}\right)$ Отг. $\dfrac{1}{6}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$ Отг. $\ln 2$

III. Намерете границата на рекурентната редица $\{a_n\}$, ако:

1. $a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ Отг. 0

2. $a_{n+1} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $a_1 = 1$ Отг. 1

3. $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ Отг. 0

4. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $a_1 = \sqrt{2}$ Отг. 2

5. $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+1}{2}$, $a_1 = \alpha$ Отг. $\begin{cases} 1, & |\alpha| \le 1 \\ \infty, & |\alpha| > 1 \end{cases}$

6. $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$, $a_1 = 1$ Отг. $\sqrt{2}$

7. $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ Отг. $\dfrac{a+2b}{3}$

IV. Намерете границата на редицата $\{a_n\}$:

1. $a_n = \dfrac{a + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} + \cdots + \sqrt[n]{a}}{n}$, $a > 0$ Отг. 1

2. $b_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$, $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ Отг. a

V. Докажете, че редиците $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$ и $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ са сходящи и имат обща граница: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$ ($C = 0,577...$ - константа на Ойлер).

VI. Намерете $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n+k} + \dfrac{1}{n+k+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} - \ln 2}{\dfrac{1}{n1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} - \ln 2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Отг. $4k - 3$

ГЛАВА 3

ФУНКЦИЯ. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ. ОБРАТНА ФУНКЦИЯ

I. ИЗОБРАЖЕНИЕ МЕЖДУ ДВЕ МНОЖЕСТВА (ФУНКЦИЯ)

Дадени са две произволни множества D и V, чиито елементи са от различно естество.

Дефиниция 1 *Ако на $\forall x \in D$ по някакво правило f (съответствие) наречем съответен точно един елемент $y \in V$, казваме, че сме установили изображение $f : D \to V$ или е дадена функция $y = f(x)$ с дефиниционна област D и област от стойности V.*

Елементът x се нарича *независима променлива* на функцията (оригинал, първообраз), а y - *функция* (образ на x при f). Съответствието f може да е действие: степенуване, кореннуване, логаритмуване и т.н.

а) *Графика на изображението* f: $\Gamma_f = \underset{(x,y)}{M}\{(x,y) \in D \times V,\ y = f(x)\}$, т.е. множество от *наредени двойки* (множество от точки) и тогава $\Gamma_f \subset D \times V$ (декартово произведение на две множества).

б) *Композиция на изображения* (произведение, съставна функция). Ако $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, то $f \circ g : X \to Z$. Изображението $f \circ g$ се нарича *композиция* на изображенията f и g, т.е. $x \in X \xrightarrow{f} y \in Y \xrightarrow{g} z \in Z$ или $z = g[f(x)]$ - *съставна функция.*

в) *Видове* (класове) *изображения*:

1°. *Идентитет* - $I : X \to X$ или $x = I(x)$, т.е. тъждествено преобразуване, изображение на X в себе си.

2°. *Сюрекция* - изображение, при което *всеки* елемент на V е образ на *поне* един елемент на D.

3°. *Инекция* - изображение, при което *всеки* елемент на V е образ на *не повече* от един елемент на D.

4°. *Биекция* - изображение, при което *всеки* елемент на V е образ на *точно един* елемент на D.

II. ОБРАТНО ИЗОБРАЖЕНИЕ (ОБРАТНА ФУНКЦИЯ)

Разглеждаме еднозначно обратимо изображение (биекция) $f : D \to V$ или $y = f(x)$. Въвеждаме *ново* изображение f^{-1} с дефиниционна област $D^{-1} \equiv V$ и област от стойности $V^{-1} \equiv D$.

Дефиниция 2 *Изображението f^{-1} се нарича* ***обратно изображение*** *(обратна функция) на f, ако за съответен елемент на $\xi \in D^{-1}$ вземем онзи елемент $\eta \in V^{-1}$, който е бил оригинал на ξ при изображението f. Или $f : D \to V$, $f^{-1} : D^{-1} \equiv V \to V^{-1} \equiv D$, т.е. $f^{-1}(y) = x$. Тогава*

$$f^{-1}[f(x)] = x,\ \forall x \in D, \qquad f[f^{-1}(y)] = y,\ \forall y \in V. \tag{3.1}$$

Теорема 1 *Ако $y = f(x)$ е числова функция на числов аргумент ($f : D \to V$, $D \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$) с графика Γ_f, която има обратна функция f^{-1}, то нейната графика $\Gamma_{f^{-1}}$ и Γ_f са* ***ортогонално симетрични*** *спрямо ъглополовящата $l : y = x$ на първи трети квадрант.*

III. ОБРАТНИ КРЪГОВИ (ТРИГОНОМЕТРИЧНИ) ИЗОБРАЖЕНИЯ

1°. Разглеждаме тригонометричната функция $y = \sin x$, чиято графика Γ_f е известната синусоида, т.е.

$$y = \sin x : \begin{cases} D: & x \in (-\infty, +\infty) \\ V: & y \in [-1, 1] \end{cases}.$$

Функцията $y = \sin x$ е *сюрекция* (D се изобразява *върху* V, нещо повече, всеки елемент на V е образ на безброй елементи от D).

Ако искаме чрез съответствието $y = \sin x$ да дефинираме еднозначно обратимо съответствие (биекция), достатъчно е да редуцираме интервала $(-\infty, +\infty)$ в $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, т.е, ако $y \in V$ и $\bar{x} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то $\bar{x}$ е единственият оригинал, а всички оригинали се получават така:

$$\begin{cases} \bar{x} + 2k\pi \\ -\bar{x} + (2k+1)\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} : 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Така получаваме *ново изображение* на $D : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ във $V : -1 \le y \le 1$. Това биективно изображение притежава обратно изображение (обратна функция), което се нарича *аркуссинус* и съответствието при тази функция означаваме:

$$\eta = \arcsin \xi : \begin{cases} D^{-1} \equiv V: & \xi \in [-1, 1] \\ V^{-1} \equiv D: & \eta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Примери: $\eta = \arcsin \xi$ е нечетна функция при $\xi \in [-1, 1]$, т.е. $\arcsin(-\xi) = -\arcsin \xi$, графиката Γ_f е симетрична относно O; $\arcsin(\sin x) \equiv x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\sin(\arcsin y) \equiv y$, $y \in [-1, 1]$; $\arcsin(\sin 0°) = 0°$, $0° \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\arcsin(\sin \pi) \neq \pi$, $\pi \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и т.н.

Аналогично получаваме останалите *три* обратни тригонометрични функции:

$$2^\circ.\, y = \cos x : \begin{cases} D : x \in [0, \pi] \\ V : y \in [-1, 1] \end{cases} \rightarrow \eta = \arccos \xi : \begin{cases} D^{-1} \equiv V : \xi \in [-1, 1] \\ V^{-1} \equiv D : \eta \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$3^\circ.\, y = \operatorname{tg} x : \begin{cases} D : x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ V : y \in (-\infty, \infty) \end{cases} \rightarrow \eta = \operatorname{arctg} \xi : \begin{cases} D^{-1} \equiv V : \xi \in (-\infty, \infty) \\ V^{-1} \equiv D : \eta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$4^\circ.\, y = \operatorname{cotg} x : \begin{cases} D : x \in (0, \pi) \\ V : y \in (-\infty, \infty) \end{cases} \rightarrow \eta = \operatorname{arccotg} \xi : \begin{cases} D^{-1} \equiv V : \xi \in (-\infty, \infty) \\ V^{-1} \equiv D : \eta \in (0, \pi) \end{cases}$$

IV. ХИПЕРБОЛИЧНИ И ОБРАТНИ ХИПЕРБОЛИЧНИ ФУНКЦИИ

А. Дефиниция на хиперболични функции

Хиперболичните функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ се дефинират чрез експоненциалната функция $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ така:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3.2}$$

Тогава

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Свойствата на хиперболичните функции следват непосредствено от свойствата на e^x.

Функциите $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ се дефинират чрез равнораменна хипербола $x^2 - y^2 = 1$ по *същите правила*, по които функциите $\sin x$ и $\cos x$ се дефинират чрез единичната окръжност $x^2 + y^2 = 1$.

Тогава

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{4}{4} = 1. \tag{3.3}$$

Б. Обратни хиперболични функции

Допускаме, че функцията $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ има обратна функция. Решаваме полученото уравнение спрямо x и в крайния резултат заместваме "формално" x и y съответно с y и x. Получената функция $y = \operatorname{Argsh} x$ е обратната на $\operatorname{sh} x$ и се чете "аргумент $\operatorname{sh} x$":

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \Longleftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

но $e^x > 0 \Longrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Longrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

Тогава $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{Argsh} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Аналогично получаваме:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Argch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}),\ \forall x \in [1, +\infty]\\
&\operatorname{Argth} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ |x| < 1\\
&\operatorname{Argcth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\ |x| > 1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Пример 3.1. Определете дефиниционната област на функцията:

а) $y = \lg(x+3)$;

б) $y = \sqrt{-px}$, $p \neq 0$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$;

г) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$;

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;

е) $y = \arccos\dfrac{1-2x}{4}$;

ж) $y = \sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$;

з) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

и) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Решение. а) Логаритмичната функция е дефинирана за положителни стойности на аргумента. Тогава от $x + 3 > 0$ определяме $DM : x \in (-3, +\infty)$;

б) Четен корен е дефиниран за неотрицателни стойности на подкоренната величина, т.е.

$$-px \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ при } p < 0 \\ x \leq 0 \text{ при } p > 0 \end{cases} \Longrightarrow DM : \begin{cases} x \in [0, +\infty],\ p < 0 \\ x \in (-\infty, 0],\ p > 0 \end{cases};$$

в) Знаменателят на функцията трябва да е различен от нула

$$\Longrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 1 \quad \text{или} \quad DM : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty);$$

г) Аналогично на в) имаме $x^2 + 1 \neq 0$, което е изпълнено $\forall x \Longrightarrow DM : x \in (-\infty, \infty)$;

д) От казаното в б) и в) следва

$$x^2 - 4x > 0 \Longleftrightarrow x(x-4) > 0 \Longrightarrow DM : x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty);$$

е) Функцията $\arccos x$ е обратна функция на $y = \cos x$. Функционалното множество на $y = \cos x$ е дефиниционно множество за обратната ѝ функция.

От $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \dfrac{1-2x}{4} \leq 1 \Longleftrightarrow -4 \leq 1-2x \leq 4 \Longleftrightarrow$ $-5 \leq -2x \leq 3 \Longleftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$. Тогава $DM : x \in [-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}]$.

ж) От а) и б) имаме:

$$\left| \begin{array}{l} \lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right) \geq 0 \\ \dfrac{5x-x^2}{4} > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 1 \\ \dfrac{5x-x^2}{4} > 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Longrightarrow DM : x \in [1,4];$$

з) Нека $y = \varphi(x) + \psi(x)$, $\varphi(x) = \sqrt{3-x}$ и $\psi(x) = \arcsin\dfrac{3-2x}{5}$. Дефиниционната област на y е сечение от дефиниционните области на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. От б) за $\varphi(x)$ имаме $3 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longrightarrow DM_\varphi : x \in (-\infty, 3]$. Аналогично на е) ($\arcsin x$ е обратна функция на $\sin x$) за $\psi(x)$ получаваме: $-1 \leq \dfrac{3-2x}{5} \leq 1 \Longleftrightarrow$ $-5 \leq 3-2x \leq 5 \Longleftrightarrow -8 \leq -2x \leq 2 \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 4 \Longrightarrow DM_\psi : x \in [-1,4]$. Тогава $DM : x \in [-1,3]$;

и) Нека $y = \varphi(x) + \psi(x)$, $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ и $\psi = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

За $\varphi(x)$ (вж. б) и в)) имаме:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow DM_\varphi : x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty).$$

За $\psi(x)$ след аналогични разсъждения получаваме $DM_\psi : x \in (-1, 1]$.

Сечението на двете множества определя дефиниционното множество DM : $x \in \emptyset$.

Пример 3.2. Определете периода на следните функции:

а) $f(x) = \cos^2 x$; б) $f(x) = \sin 2\pi x$; в) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2)$.

Решение. Една функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ се нарича периодична, ако $\exists T > 0$ така, че $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. T се нарича *период* на функцията.

а) Преобразуваме функцията $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$. Ако функцията е периодична с период $T \Longrightarrow f(x+T) = f(x) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x+2T) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x \Longleftrightarrow \cos(2x+2T) = \cos 2x$, но $\cos 2x = \cos(2x+2\pi) \Longrightarrow 2x+2T = 2x + 2\pi \Longrightarrow T = \pi$ (използваме периодичността на функцията $\cos x$);

б) От $f(x+T) = f(x) \Longrightarrow \sin[2\pi(x+T)] = \sin 2\pi x$, но $\sin 2\pi x = \sin(2\pi x + 2\pi) \Longrightarrow 2\pi x + 2\pi T = 2\pi x + 2\pi \Longrightarrow T = 1$ (използваме периодичността на функцията $\sin x$).

в) Сега $\operatorname{tg}[(x+T)^2] = \operatorname{tg}(x^2)$, но $\operatorname{tg}(x^2) = \operatorname{tg}(x^2+\pi) \Longrightarrow x^2 + 2Tx + T^2 = x^2 + \pi \Longleftrightarrow T^2 + 2Tx + \pi = 0$.

Полученото уравнение за T зависи от x, следователно не може да се определи $T = \mathrm{const}$, която да удовлетворява уравнението за всяко x. Функцията *не е периодична*.

Пример 3.3. Определете интервалите на монотонност на функциите

$$\text{а)}\quad y = x - 2 - |x|; \qquad \text{б)}\quad y = e^{-x^2}; \qquad \text{в)}\quad y = \operatorname{ch} x$$

и намерете най-голямата или най-малката им стойност.

Решение. Ако една функция $y = f(x)$ е непрекъсната в даден интервал $[a, b]$ и за които и да са две стойности $x_2 > x_1$ от интервала е изпълнено $f(x_2) \geq f(x_2)$, казваме, че $y = f(x)$ е *монотонно растяща (ненамаляваща)*. Ако за $x_2 > x_1$ е изпълнено $f(x_2) \leq f(x_1)$, казваме, че $f(x)$ е *монотонно намаляваща (нерастяща)*.

а) $y = x - 2 - |x| = \begin{cases} 2x - 2, & x < 0 \\ -2, & x \geq 0. \end{cases}$

Нека $x < 0$ и $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_2 > x_1 \Longleftrightarrow x_2 - x_1 > 0$. $f(x_1) = 2x_1 - 2$, $f(x_2) = 2x_2 - 2$. Тогава $f(x_2) - f(x_1) = 2x_2 - 2 - 2x_1 + 2 = 2(x_2 - x_1) > 0$ или $f(x)$ е*строго растяща* за $x \in (-\infty, 0)$.

Нека $x \geq 0$ и $x_1, x_2 > 0$, $x_2 > x_1 \Longleftrightarrow x_2 - x_1 > 0$. От $y = -2, \forall x \in [0, +\infty)$ следва, че $f(x_2) = f(x_1)$, т.е. функцията не намалява.

Следователно при $\begin{cases} x \in (-\infty, 0) & \text{- функцията е } \textit{строго растяща}, \\ x \in [0, +\infty) & \text{- функцията е } \textit{ненамаляваща}, \\ f_{\text{нгс}}(x) = -2; & \end{cases}$

б) Тъй като експоненциалната функция $y = e^x$ е непрекъсната и растяща в дефиниционния си интервал, монотонността на функцията $y = e^{\varphi(x)}$ съвпада с монотонността на степенния показател $\varphi(x)$. В случая $\varphi(x) = -x^2$ е квадратна функция, която расте за $x \in (-\infty, 0)$ и намалява за $x \in (0, +\infty)$, т.е. $y = e^{-x^2}$ *расте* при $x \in (-\infty, 0)$ и *намалява* при $x \in (0, +\infty)$. Функцията e^{-x^2} достига най-голяма стойност, когато $\varphi(x) = -x^2$ достига най-голяма стойност. От $\varphi_{\text{нгс}}(x) = \varphi(0) = 0 \Longrightarrow f_{\text{нгс}}(x) = e^0 = 1$;

в) Нека $x_2 > x_1$, тогава $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{2}(e^{x_2} + e^{-x_2}) - \dfrac{1}{2}(e^{x_1} + e^{-x_1}) = \dfrac{1}{2}\Big(e^{x_2} - e^{x_1} + \dfrac{1}{e^{x_2}} - \dfrac{1}{e^{x_1}}\Big) = \dfrac{1}{2}(e^{x_2} - e^{x_1})\Big(1 - \dfrac{1}{e^{x_1}e^{x_2}}\Big)$.

Ако $x_2 > x_1 > 0$, то $e^{x_2} - e^{x_1} > 0$, $e^{x_1}e^{x_2} > 1$ и $1 - \dfrac{1}{e^{x_1}e^{x_2}} > 0$.

Тогава и $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Longrightarrow$ функцията е *растяща*.

Ако $x_1 < x_2 < 0$, то $e^{x_2} - e^{x_1} > 0$, но $e^{x_1}e^{x_2} < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}e^{x_2}} > 1$ и $1 - \dfrac{1}{e^{x_1}e^{x_2}} < 0$. Тогава $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Longrightarrow$ функцията е *намаляваща*.

Следователно $y = \operatorname{ch} x$ намалява за отрицателни стойности на x и расте за $x > 0 \Longrightarrow y = \operatorname{ch} x$ има *най-малка стойност* $f_{\text{нмс}}(x) = f(0) = \operatorname{ch} 0 = 1$.

Пример 3.4. Изследвайте относно четност функциите:

а) $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$; г) $y = \operatorname{ch} x$;

б) $y = 3^{-x^2} + x\sin x$; д) $y = \operatorname{sh} x$.

в) $y = e^{x-x^2}$;

Решение. Казваме, че една функция е *четна*, ако е дефинирана в симетрично множество (т.е., ако $a \in DM$, то и $-a \in DM$) и е изпълнено

$$f(-x) = f(x).$$

Графиката на четна функция е *симетрична спрямо ординатната ос Oy*.

Една функция е *нечетна*, ако е дефинирана в симетрично множество и е изпълнено

$$f(-x) = -f(x).$$

Графиката на нечетна функция е *симетрична спрямо началото на координатната система* $O(0,0)$.

а) Дефиниционната област на функцията се определя от системата неравенства

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} - x > 0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1+x^2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \forall x \geq 0. \\ 1 + x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, +\infty) \end{array}\right.$$

Първото неравенство е вярно и за $x < 0$, защото тогава $\sqrt{1+x^2} > x$ е очевидно вярно.

Следователно $DM : x \in (-\infty, +\infty)$, което е симетрично множество и имаме основание да изследваме финкцията за четност (нечетност).

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{1+(-x)^2} - (-x)) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2} - x} \\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)^{-1} = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -f(x). \end{aligned}$$

Следователно функцията е *нечетна*;

б) Функцията е дефинирана за всяко x, т.е. имаме симетрично дефиниционно множество (вж. а)).

$$f(-x) = 3^{-(-x)^2} + (-x)\sin(-x) = 3^{-x^2} - (-x)\sin x = 3^{-x^2} + x\sin x = f(x).$$

Тук използвахме, че функцията $\sin x$ е нечетна, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$. И така, дадената функция е *четна*;

в) $DM : x \in (-\infty, +\infty)$. $f(-x) = e^{-x-(-x)^2} = e^{-x-x^2} \neq \pm f(x)$. Дадената функция е *нито четна, нито нечетна*;

г) Хиперболичните функции са дефинирани $\forall x$. От $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ следва:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x).$$

Следователно $y = \operatorname{ch} x$ е *четна* функция;

д) За DM вж. г). От $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ следва:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = -f(x).$$

Следователно $y = \operatorname{sh} x$ е *нечетна* функция.

Забележка. Произведението и частното на две нечетни или две четни функции е *четна функция*, а произведението или частното на четна и нечетна функция е *нечетна* функция. Например функциите $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ са *нечетни*, тъй като $\operatorname{sh} x$ е нечетна, а $\operatorname{ch} x$ е четна функция (проверете!).

Пример 3.5. Покажете, че функцията $y = f(x)$ удовлетворява функционалното уравнение:

а) $f(x) + f(x+1) = f(x(x+1))$, $f(x) = \log_a x$;

б) $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$, $f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение. а) От $f(x) = \log_a x \Longrightarrow f(x+1) = \log_a(x+1)$. Тогава

$$\log_a x + \log_a(x+1) = \log_a x(x+1) = f(x(x+1));$$

б) Сега $f(x_1) = \lg \dfrac{1+x_1}{1-x_1}$ и $f(x_2) = \lg \dfrac{1+x_2}{1-x_2}$. Тогава

$$f(x_1)+f(x_2) = \lg \frac{1+x_1}{1-x_1} + \lg \frac{1+x_2}{1-x_2} = \lg \frac{(1+x_1)(1+x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$= \lg \frac{1+x_1+x_2+x_1x_2}{1-x_1-x_2+x_1x_2} = \lg \frac{(1+x_1x_2)\left(1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)}{(1+x_1x_2)\left(1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)}$$

$$= \lg \frac{1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}} = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right).$$

Пример 3.6. Определете функцията $f(x)$, удовлетворяваща условието: $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

Решение. Полагаме $x + \dfrac{1}{x} = t$. Тогава

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \iff x^2+2+\frac{1}{x^2} = t^2 \Longrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Имаме $f(t) = t^2 - 2 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 2$.

Пример 3.7. Намерете обратната функция на дадената и нейната дефиниционна област:

$$\text{а)}\quad y = \frac{1-x}{1+x}; \qquad \text{б)}\quad y = (x-1)^3; \qquad \text{в)}\quad y = \ln 2x.$$

Решение. а) Предполагаме, че съществува обратна функция на дадената. Решаваме равенството спрямо x:

$$y(1+x) = 1-x \iff x(y+1) = 1-y \Longrightarrow x = \frac{1-y}{1+y}.$$

Формално заместваме x с y и y с x и получаваме $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, която е обратната функция на дадената. $DM : x \neq -1$;

б) Аналогично както в а) имаме $x - 1 = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y} + 1$ и след заместване на x с y и на y с x получаваме обратната функция $y = \sqrt[3]{x} + 1$, $DM : \forall x$;

в) От $y = \ln 2x$ имаме $2x = e^y \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}e^y$, или обратната функция на дадената е $y = \dfrac{1}{2}e^x$, $DM : \forall x$.

Пример 3.8. Намерете обратните функции на дадените:

а) $y = \dfrac{1}{1-x}$; г) $y = 2\sin 3x$;

б) $y = x^2 - 2x$; д) $y = 1 + 2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$;

в) $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$; е) $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Решение. а) $DM : x \neq 1$ Решаваме уравнението спрямо x:

$$y = \frac{1}{1-x} \Longleftrightarrow x = \frac{y-1}{y}.$$

Сменяме формално означенията на променливите и получаваме обратната функция на дадената $y = \dfrac{x-1}{x}$;

б) $y = x^2-2x \Longleftrightarrow y+1 = (x-1)^2 \Longleftrightarrow x-1 = \pm\sqrt{y+1} \Longrightarrow x = 1\pm\sqrt{y+1}$. Следователно обратната функция е $y = 1 \pm \sqrt{x+1}$;

в) Обратната функция е $y = \dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{2-x}$, $x \in (0,2)$, тъй като

$$y = \frac{10^x - \frac{1}{10^x}}{10^x + \frac{1}{10^x}} + 1 \Longleftrightarrow y = \frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1} + 1 \Longleftrightarrow 10^{2x} = \frac{y}{2-y} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\lg\frac{y}{2-y};$$

г) $y = 2\sin 3x \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2} \Longrightarrow$ обратната функция е $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$, $|x| \le 2$;

д) $y = 1 + 2\sin\dfrac{x-1}{x+1} \Longleftrightarrow \arcsin\dfrac{y+1}{2} = \dfrac{x-1}{x+1} \Longleftrightarrow x = \dfrac{1+\arcsin\frac{y+1}{2}}{1-\arcsin\frac{y+1}{2}}$

$\Longrightarrow y = \dfrac{1+\arcsin\frac{x+1}{2}}{1-\arcsin\frac{x+1}{2}}$ е търсената обратна функция;

е) $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2} \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sin\dfrac{y}{4} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{1-\sin^2\dfrac{y}{4}} = \pm\cos\dfrac{y}{4} \Longrightarrow y = \pm\cos\dfrac{x}{4}$, $x \in [0, 2\pi]$ е търсената обратна функция.

Пример 3.9. Функцията $y = f(x)$ е зададена с уравнението $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$. Намерете дефиниционната област на функцията и нейната обратна функция.

Решение. Дефиниционната област на функцията се определя от системата неравенства:

$$\left|\begin{array}{l} x-1>0 \\ 1-\log_2(x-1)\geq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x>1 \\ \log_2(x-1)\leq \log_2 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x>1 \\ x-1\leq 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x>1 \\ x\leq 3 \end{array}\right. \Longrightarrow x\in(1,3];$$

Обратната функция на дадената е $y=1+2^{1-x^2}$, тъй като

$$y^2-1+\log_2(x-1)=0 \Longleftrightarrow \log_2(x-1)=1-y^2 \Longleftrightarrow x=1+2^{1-y^2}.$$

Пример 3.10. Решете уравнението $\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. DM на функцията $\operatorname{arctg} u(x)$ е $\forall x\in\mathbb{R}$. Двете страни на уравнението са дъги, чиито тангенси са равни, т.е.

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)\right]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(x+2)\right]-\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]}{1+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(x+2)\right]\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]}=1$$

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2+3x+3}=1 \Longleftrightarrow x^2+3x+2=0$$

$$\Longrightarrow x_1=-1,\ x_2=-2.$$

Пример 3.11. Докажете тъждествата:

а) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; в) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\begin{cases}\arccos x, & 0<x\leq 1\\ -\pi+\arccos x, & -1\leq x<0.\end{cases}$

Решение. а) *За лявата* страна на тъждеството имаме:

$$\arccos x\to D^{-1}: -1\leq x\leq 1,\quad V^{-1}: x\in[0,\pi],$$

но в $[0,\pi]$ $\operatorname{tg}(\arccos x)$ не е дефиниран $\forall x$, т.е. $\arccos x\neq\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow x\neq 0$.

За дясната страна:

$$x\neq 0,\ 1-x^2\geq 0 \Longleftrightarrow (1-x)(1+x)\geq 0 \Longleftrightarrow -1\leq x\leq 1.$$

Така установихме, че задачата има смисъл при $-1 \leq x \leq 1$, $x \neq 0$. Тогава

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1 - [\cos(\arccos x)]^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

б) Полагаме $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) = \alpha \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 3 + 2\sqrt{2} > 0$. Полагаме $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \beta \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Даденото тъждество става $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$, където α и β са в първи квадрант.

Ще докажем например $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 1$? За целта ще докажем, че $0 < \alpha-\beta < \dfrac{\pi}{2}$.

$*$ От $6 + 4\sqrt{2} > \sqrt{2}\Big| : 2 > 0 \Longleftrightarrow 3 + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$ и понеже α и β са в първи квадрант, то $\alpha > \beta \Longrightarrow \alpha - \beta > 0$ (функцията тангенс е растяща в първи квадрант).

$*$ $\alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$, защото най-голямата стойност $\dfrac{\pi}{2}$ на $(\alpha - \beta)$ се получава при най-голямо α и най-малко β. Тогава

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{3 + 2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{6 + 3\sqrt{2}} = 1.$$

От $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 1 \Longrightarrow \alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$ и тъждеството е доказано;

в) Полагаме $\arcsin x = \alpha \Longrightarrow \sin\alpha = x, -\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$. Полагаме $\arccos x = \beta \Longrightarrow \cos\beta = x, 0 \leq \beta \leq \pi$. Даденото тъждество става $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Ще докажем например $\sin(\alpha + \beta) = 1$? От условията за α и β имаме $0 - \dfrac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \dfrac{\pi}{2} + \pi \Longleftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \dfrac{3\pi}{2}$. В получения интервал $\sin(\alpha + \beta) = 1$ само при $\dfrac{\pi}{2}$. Тогава

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = x.x + (+\sqrt{1 - \cos^2\beta})(+\sqrt{1 - \sin^2\alpha}) \\ &= x^2 + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2} = x^2 + |1 - x^2| = x^2 + 1 - x^2 = 1,\end{aligned}$$

тъй като от $-1 \leq x \leq 1$ (по условие) $\Longrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow |1 - x^2| = 1 - x^2$. Така от $\sin(\alpha + \beta) = 1 \Longrightarrow \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, което доказва тъждеството;

г) За *лявата* страна на тъждеството имаме:

$$1 - x^2 \geq 0,\ x \neq 0 \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1,\ x \neq 0.$$

За *дясната* страна:

$$\arccos x \to D^{-1} : -1 \le x \le 1,\ x \ne 0 \text{ (по условие)}.$$

Така установихме, че задачата има смисъл при $-1 \le x \le 1$, $x \ne 0$. Тогава, като положим $\arccos x = \alpha \iff \cos\alpha = x$, $0 \le \alpha \le \pi$, получаваме:

$$A = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha).$$

От формула (3.1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ само в $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\text{От } 0 \le \alpha \le \pi \Longrightarrow \begin{cases} 1)\ 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}, & [0, \frac{\pi}{2}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 2)\ \frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi, & (\frac{\pi}{2}, \pi] \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

1) $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \ne \alpha$, $\cos 0 = 1 \Longrightarrow 0 < x \le 1$. Тогава

$$A = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha = \arccos x.$$

2) $A = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\alpha - \pi)]$ и ще докажем, че $(\alpha - \pi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
От $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \ne \alpha$, $\cos\pi = -1 \Longrightarrow -1 \le x < 0$. Тогава

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \iff -\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi \le 0,\ (-\frac{\pi}{2}, 0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

И така $A = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\alpha - \pi)] = \alpha - \pi = \arccos x - \pi$, с което тъждеството е доказано.

Пример 3.12. Решете уравнението $\operatorname{arctg}(x+1) = 3\operatorname{arctg}(x-1)$.

Решение. От $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1) = 2\operatorname{arctg}(x-1)$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg}\frac{x+1-(x-1)}{1+(x^2-1)} = 2\operatorname{arctg}(x-1)$$

$$\iff \operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} - \operatorname{arctg}(x-1) = \operatorname{arctg}(x-1) \iff \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{x^2}-(x-1)}{1+\frac{2}{x^2}(x-1)} = \operatorname{arctg}(x-1)$$

$$\iff \frac{2-x^3+x^2}{x^2+2x-2} = x-1 \iff 2-x^3+x^2 = x^3+x^2-4x+2$$

$$\iff 2x^3 - 4x = 0 \iff 2x(x^2-2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}.$$

Пример 3.13. Докажете, че $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Полагаме $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Тогава $x = \operatorname{tg}\alpha$ и като заместим в равенството, получаваме:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}}$$
$$= \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \sin\alpha.$$

Пример 3.14. Изразете чрез $\arccos x$ функцията $\arccos\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$.

Решение. Означаваме $\arccos x = \alpha$. Тогава $x = \cos\alpha$, $0 \le \alpha \le \pi$.

Заместваме x в дадената функция:

$$\arccos\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \arccos\frac{\cos\alpha+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{2}} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$$
$$= \arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) = \arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$$
$$= \begin{cases} \alpha-\dfrac{\pi}{4}, & x\in[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}] \\ \dfrac{\pi}{4}-\alpha, & x\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1] \end{cases} = \begin{cases} \arccos x-\dfrac{\pi}{4}, & x\in[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}] \\ \dfrac{\pi}{4}-\arccos x, & x\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]. \end{cases}$$

Пример 3.15. Изразете чрез $\operatorname{arctg} x$ функцията $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Означаваме $\operatorname{arctg} x = \alpha \Longrightarrow x = \operatorname{tg}\alpha$, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Заместваме $x = \operatorname{tg}\alpha$ в дадената функция:

$$\arcsin\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \arcsin\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \arcsin\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}}$$
$$= \arcsin(\sin\alpha) = \alpha.$$

Тогава $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$.

Пример 3.16. Докажете равенствата:

a) $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \le x \le 1.$

Решение. а) Полагаме $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \alpha$, $\arccos\frac{1}{2} = \beta$, тогава

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \frac{\alpha}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos\beta = \frac{1}{2},\ \beta \in [0,\pi],$$

но $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos\beta > 0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$*$ От $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Longrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2},\ \alpha \in [0,\pi].$$

$*$ От $\cos\beta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin\beta = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$

$$2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\frac{1}{2} = \alpha + \beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2};$$

б) Полагаме $\arccos x = \alpha$. От $\frac{1}{2} \le x \le 1 \Longrightarrow 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$. Тогава $x = \cos\alpha$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3(1-x^2)} &= \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3(1-\cos^2\alpha)} = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}|\sin\alpha| \\ &= \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} \\ &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).\end{aligned}$$

Тук използвахме $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \sin\alpha \ge 0$ и $|\sin\alpha| = \sin\alpha$. Преработваме даденото равенство:

$$\arccos x + \arccos(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}) = \alpha + \arccos\Big(\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\Big) = \alpha + \frac{\pi}{3} - \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Пример 3.17. Докажете, че $\arcsin(2x^2-1)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}-2\arcsin x, & \text{за } -1\le x\le 0,\\ -\frac{\pi}{2}+2\arcsin x, & \text{за } 0\le x\le 1.\end{cases}$

Решение. Нека $\arcsin x=\alpha$. Тогава $\sin\alpha=x$, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и

$$\begin{aligned}\arcsin(2x^2-1)&=\arcsin(2\sin^2\alpha-1)=\arcsin(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\\&=\arcsin(-\cos 2\alpha)=\arcsin\Big(-\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)\Big)\\&=\arcsin\Big(\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})\Big).\end{aligned}$$

$*$ Нека $0\le x\le 1\iff\arcsin 0\le\arcsin x\le\arcsin 1$, т.е. $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Тогава $-\frac{\pi}{2}\le 2\alpha-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ и тогава $\arcsin\Big(\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})\Big)=2\alpha-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\arcsin x$.

$*$ Нека $-1\le x\le 0\iff\arcsin(-1)\le\arcsin x\le\arcsin 0\iff-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le 0$ и $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{2}-2\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Тогава $\arcsin\Big(\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})\Big)=\arcsin\Big(\sin(\pi-2\alpha+\frac{\pi}{2})\Big)=\arcsin\Big(\sin(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)\Big)=\arcsin\Big(\sin(-\frac{\pi}{2}-2\alpha)\Big)=-\frac{\pi}{2}-2\alpha=-\frac{\pi}{2}-2\arcsin x$.

Пример 3.18. Нека числата $x,y\in[-1,1]$ са с различни знаци или удовлетворяват неравенството $x^2+y^2\le 1$. Докажете, че $\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$.

Решение. Означаваме $\arcsin x=\alpha$, $\arcsin y=\beta$. Тогава $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=y$, $\alpha,\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Ако $-\frac{\pi}{2}\le\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})=\arcsin(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=\arcsin(\sin(\alpha+\beta))=\alpha+\beta$. Следователно трябва да покажем, че $\alpha+\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

1°. Нека $xy\le 0\iff x\ge 0,\ y\le 0\cup x\le 0,\ y\ge 0$. Тогава $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le 0\cup-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$. И в двата случая имаме $-\frac{\pi}{2}\le\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}$.

2°. Нека $xy\ge 0$, но $x^2+y^2\le 1$. От дефинициите на α и β имаме $-\pi\le\alpha+\beta\le\pi$. Изследваме знака на $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy.$$

Неравенството $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\ge 0\iff\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\ge xy\iff(1-x^2)(1-y^2)\ge x^2y^2\iff x^2+y^2\le 1$.

Следователно $\cos(\alpha+\beta)\ge 0\Longrightarrow-\frac{\pi}{2}\le\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}$ и тогава

$$\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})=\alpha+\beta=\arcsin x+\arcsin y.$$

Пример 3.19. Докажете, че

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

където $\varepsilon = 0$ при $xy < 1$; $\varepsilon = 1$ при $xy > 1$ и $x > 0$; $\varepsilon = -1$ при $xy > 1$ и $x < 0$.

Решение. Означаваме $\operatorname{arctg} x = \alpha$ и $\operatorname{arctg} y = \beta$, тогава $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Longleftrightarrow -\pi < \alpha + \beta < \pi$.

$$\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)).$$

1°. Нека $xy < 1 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta < 1 \Longleftrightarrow \sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta \Longleftrightarrow \cos(\alpha+\beta) > 0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$. Тогава

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)) = \alpha+\beta = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y.$$

2°. Нека $xy > 1$ и $x > 0$. Тогава $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 1$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta > 0$. Имаме $\sin\alpha\sin\beta > \cos\alpha\cos\beta \Longleftrightarrow \cos(\alpha+\beta) < 0 \Longleftrightarrow 0 < \alpha+\beta < \pi$ и тогава

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)) = \alpha+\beta-\pi = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \pi$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi.$$

3°. Нека $xy > 1$ и $x < 0$. Тогава $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 1$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta < 0$. Тогава $\pi < \alpha+\beta < 2\pi$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)) = \alpha+\beta+\pi = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \pi$. Следователно

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi.$$

Пример 3.20. Докажете равенството

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+2}.$$

Решение. За доказване на равенството ще използваме метода на пълната математическа индукция.

1°. При $n = 1 : \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+2}$, което е вярно равенство.

2°. Допускаме, че за $n = k$ равенството е вярно, т.е.

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k+k^2} = \operatorname{arctg} \frac{k}{k+2}.$$

3°. Ще докажем верността на равенството за $n = k+1$, т.е.

$$\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}}_{\operatorname{arctg}\frac{k}{k+2}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(k+1)+(k+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{k+1}{(k+1)+2}$$

Прилагаме резултатите от пример 3.19. ($x = \dfrac{k}{k+2}$, $y = \dfrac{1}{1+(k+1)+(k+1)^2}$ и очевидно $x < 1$, $y < 0 \Longleftrightarrow xy < 1$).

$$\operatorname{arctg}\frac{k}{k+2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+1+(k+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{k}{k+2}+\dfrac{1}{k^2+3k+3}}{1-\dfrac{k}{(k+2)(k^2+3k+3)}}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{k^3+3k^2+4k+2}{k^3+5k^2+8k+6} = \operatorname{arctg}\frac{(k+1)(k^2+2k+2)}{(k+3)(k^2+2k+2)}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{k+1}{k+3} = \operatorname{arctg}\frac{k+1}{(k+1)+2}.$$

Равенството е вярно за $n = k, k+1, \ldots$. Следователно ще е изпълнено за произволно цяло $n > 0$.

Пример 3.21. Докажете равенствата:

а) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; г) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

б) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$; д) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

в) $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$; е) $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; ж) $1 - \coth^2 x = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Решение. При доказателствот ще използваме формули (3.2).

а) вж. (3.3);

б) $\dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4} + \dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \dfrac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{4} = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x$;

в) $2\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$;

г) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y+e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{2(e^{x+y}-e^{-(x+y)})}{4} = \operatorname{sh}(x+y).$$

Аналогично се доказва равенството за $\operatorname{sh}(x-y)$;

д) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}-\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{2(e^{x-y}+e^{-(x-y)})}{4}=\operatorname{ch}(x-y).$$

Аналогично се доказва равенството за $\operatorname{ch}(x+y)$;

е) $1-\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$$=\frac{(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{2e^{-x}.2e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

ж) $1-\dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}=\dfrac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$

$$=\frac{(e^x-e^{-x}-e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x}+e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{-2e^{-x}.2e^x}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$=-\frac{1}{\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

ЗАДАЧИ

I. Определете дефиниционната област на функциите:

1. $y=\sqrt{9-x^2}$ — Отг. $x\in[-3,3]$
2. $y=-\sqrt{2\sin x}$ — Отг. $x\in[2k\pi,\pi+2k\pi]$
3. $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ — Отг. $x\in[-1,3]$
4. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x(1-x)}}$ — Отг. $x\in(0,1)$
5. $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$ — Отг. $x\in[-4,0]$
6. $y=\ln(1-2\cos x)$ — Отг. $x\in(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi)$
7. $y=2^{\arccos(1-x)}$ — Отг. $x\in[0,2]$
8. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ — Отг. $x\in(-1,1]$

9. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ Отг. $x \neq (2k+1)\pi$

10. $y = \dfrac{1}{\sin x}$ Отг. $x \neq k\pi$

II. Покажете, че функцията $f(x)$ удовлетворява функционалното уравнение:

1. $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0, \quad f(x) = kx + b$
2. $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2), \quad f(x) = e^x$

III. Намерете функция $f(x)$, удовлетворяваща условието:

1. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2},\ x > 0$ Отг. $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$
2. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ Отг. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$ Отг. $f(x) = \sin x$

IV. Изследвайте относно четност функциите:

1. $f(x) = x^4 + 5x^2$ Отг. четна
2. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ Отг. нечетна
3. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - x^3$ Отг. нечетна
4. $f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$ Отг. нечетна
5. $f(x) = x^2 \sin x$ Отг. нечетна
6. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ Отг. нито четна, нито нечетна
7. $f(x) = x^2 + \sin^2 x - \cos x$ Отг. четна
8. $f(x) = \sin x - \cos x$ Отг. нито четна, нито нечетна
9. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ Отг. четна

V. Определете периода T на функциите:

1. $f(x) = \cos^2 2x$ Отг. $T = \pi/2$
2. $f(x) = x\sin x$ Отг. непериодична
3. $f(x) = \sin x^2$ Отг. непериодична
4. $f(x) = \cos x + \sin(x\sqrt{3})$ Отг. непериодична
5. $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ Отг. $T = 6\pi$
6. $f(x) = 5\cos 7x$ Отг. $T = 2\pi/7$
7. $f(x) = \cos x - \ln\cos x$ Отг. $T = 2\pi$
8. $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$ Отг. $T = \pi$
9. $f(x) = \cos\dfrac{3x}{2} + \sin(3x - 2)$ Отг. $T = 4\pi$
10. $f(x) = \sin(x+2) + \sin\dfrac{x}{2}$ Отг. $T = 2\pi$

VI. Определете интервалите на монотонност на функциите:

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ Отг. $\begin{cases} x \in (-\infty, -1), & f(x) \text{ расте} \\ x \in (-1, +\infty), & f(x) \text{ расте} \end{cases}$

2. $f(x) = x - 1 - \sqrt{(x-1)^2}$ Отг. $\begin{cases} x \in (-\infty, 1), & f(x) \text{ расте} \\ x \in (1, +\infty), & f(x) \text{ не намалява} \end{cases}$

3. $f(x) = \dfrac{|x|-1}{|x+2|}$ Отг. $\begin{cases} x \in (-\infty, -2), & f(x) \text{ расте} \\ x \in (-2, 0), & f(x) \text{ намалява} \\ x \in (0, +\infty), & f(x) \text{ расте} \end{cases}$

4. $f(x) = 2 - x^3$ Отг. $f(x)$ намалява $\forall x$

VII. Намерете обратните функции на дадените:

1. $y = 2^x - 1$ Отг. $y = \log_2(x+1)$
2. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ Отг. $y = \operatorname{sh} x$
3. $y = \operatorname{cth} x$ Отг. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

VIII. Докажете тъждествата:

1. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & 0 < x \le 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1 \le x < 0 \end{cases}$

3. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \arccos\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

4. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{2}$

IX. Функцията $\arccos\dfrac{1-x}{1+x}$ да се изрази чрез $\operatorname{arctg} x$.

Отг. $\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x$

X. Изразете функцията $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ чрез $\arcsin x$.

Отг. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$

XI. За кои стойности на x е изпълнено равенството:

1. $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2}$ Отг. $x = 1$
2. $\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \dfrac{\pi}{6}$ Отг. $x = \dfrac{1}{2}$
3. $\arcsin e^x + \arcsin 2e^x = \dfrac{\pi}{2}$ Отг. $x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ГЛАВА 4

ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ. СРАВНЯВАНЕ НА БЕЗКРАЙНО МАЛКИ И БЕЗКРАЙНО ГОЛЕМИ ФУНКЦИИ

I. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ

Разглеждаме числова функция на числов аргумент $y = f(x)$ с дефиниционна област D, т.е. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$ - точка на сгъстяване за D ($x_0 \in D$ или $x_0 \notin D$).

Дефиниция 1 ***(по Коши).*** *Числото* $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *ако* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ *така, че от* $(\forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Дефиниция 2 ***(по Хайне).*** *Числото* $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *ако при всеки избор на числовата редица* $\{x_n\}$ *от* $(\forall x \in D,\ x_n \neq x_0,\ \lim\limits_{x \to x_0} x_n = x_0) \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ *(съответната на* $\{x_n\}$ *редица от функционални стойности на* $f(x)$ *има за граница* A*).*

Дефинициите 1 и 2 са *еквивалентни.*

II. ЛЯВА И ДЯСНА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ

Лява околност на точката x_0, която е точка на сгъстяване за $y = f(x)$, се нарича $x_0 - \delta, x_0)$, а *дясна околност* - $(x_0, x_0 + \delta)$, където $\delta > 0$.

Дефиниция 3 *Числото A е* ***лява граница*** *на* $f(x)$, *т.е.* $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, *ако* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ *така, че от* $(\forall x \in D \wedge x \in (x_0 - \delta, x_0)) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ *и* ***дясна граница*** *на* $f(x)$, $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, *ако* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ *така, че от* $(\forall x \in D \wedge x \in (x_0, x_0 + \delta)) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Теорема 1 *Ако* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$ *и* $A = B$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема 2 *Ако* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Следствие 3 *Ако* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$ *и* $A \neq B$, *то* $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

III. ТЕОРЕМИ ЗА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 е точка на сгъстяване за D, $D \subset \mathbb{R}$. Ако $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \; \forall x \in D$, то:

$$\textbf{T1. } \exists \lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B; \quad \textbf{T3. } \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \; B \neq 0;$$

$$\textbf{T2. } \exists \lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = AB; \quad \textbf{T4. } \exists \lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}, \; f(x) \geq 0, k \geq 2. \tag{4.1}$$

IV. НЯКОИ ОСНОВНИ ГРАНИЦИ

$$\mathbf{1.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \mathbf{2.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \mathbf{3.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1;$$

$$\mathbf{4.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \mathbf{5.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad \mathbf{6.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\mathbf{7.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1; \quad \mathbf{8.}\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \mathbf{9.}\ \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \tag{4.2}$$

$$\mathbf{10.}\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0; \quad \mathbf{11.}\ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \mathbf{12.}\ \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

V. БЕЗКРАЙНО МАЛКИ И БЕЗКРАЙНО ГОЛЕМИ ФУНКЦИИ. ГЛАВНА СТОЙНОСТ, СРАВНЯВАНЕ

Дефиниция 4 *$f(x)$ се нарича безкрайно малка функция (БМФ) в околност на точка x_0, ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

Дефиниция 5 *$f(x)$ се нарича безкрайно голяма функция (БГФ) в околност на точка x_0, ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.*

Ще означаваме БМФ с $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x), \dots$, а БГФ - $F(x)$, $G(x)$, $H(x), \dots$

Теорема 3 *Ако $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ са БМФ, зададени в някоя околност $U(x_0)$, с изключение на точката x_0, а $\gamma(x)$ е ограничена, то $\alpha(x) + \beta(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$, $\alpha\gamma(x)$ са също БМФ.*

Забележка: $\alpha(x) + F(x) = F(x)$, $F(x) + G(x) = H(x)$.

А. Сравняване на БМФ

Дефиниция 6 *Ако $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ се казва, че $\alpha(x)$ е БМФ от **по-висок ред**, отколкото $\beta(x)$ и бележим с $\alpha = o(\beta)$ (тогава $\alpha(x) \to 0$ по-бързо от $\beta(x)$).*

От $\alpha = o(\beta) \Longrightarrow \alpha(x) + \beta(x) \approx \beta(x)$ в околност на точката x_0.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0 \Longrightarrow x^2 = o(x)$.

Дефиниция 7 *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ *се казва, че* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *са* ***БМФ от един и същи ред*** *(тогава* $\alpha = o(\beta)$ *и* $\beta = o(\alpha)$*).*

Дефиниция 8 *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \neq 0$ *се казва, че* $\alpha(x) \approx \beta(x)$ *-* ***еквивалентни****.*

В математическия анализ често се замества една безкрайно малка функция с нейна еквивалентна.

Дефиниция 9 *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0$*,* $k > 0$ *се казва, че* $\alpha(x)$ *е БМФ от* k*-ти ред спрямо* β*, т.е.* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{C\beta^k(x)} = 1$.

От $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{C\beta^k(x)} = 1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha(x)}{C\beta^k(x)} = 1 + \delta(x)$, където $\lim\limits_{x\to x_0} \delta(x) = 0$ (БМФ). Тогава $\alpha(x) = C\beta^k(x) + C\delta(x)\beta^k(x)$, където $C\delta(x)\beta^k(x)$ е БМФ от по-висок ред спрямо $\beta^k(x)$, защото $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{C\delta(x)\beta^k(x)}{\beta^k(x)} = C.0 = 0$.

Дефиниция 10 *Изразът* $C\beta^k(x)$ *се наручича* ***главна част*** *(стойност) на БМФ* $\alpha(x)$*, като* $\alpha(x) = C\beta^k(x) + o(\beta^k(x))$*.*

Забележка. Ако $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ е БМФ от по-висок ред отколкото $\alpha(x)$ и бележим $\beta = o(\alpha)$.

Б. Сравняване на БГФ

Дефиниция 11 *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)}{G(x)} = 0$*, се казва, че* $G(x)$ *е БГФ от* ***по-висок ред*** *отколкото* $F(x)$ *и бележим* $G = O(F)$ *(тогава* $G(x) \to \infty$ *по-бързо от* $F(x)$*).*

Дефиниция 12 *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)}{G(x)} = C \neq 0$*, се казва, че* $F(x)$ *и* $G(x)$ *са БГФ от* ***един и същ ред*** *(тогава* $F = O(G)$ *и* $G = O(F)$*).*

Дефиниция 13 *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)}{G^k(x)} = C \neq 0$*,* $k > 0$*, се казва, че* $F(x)$ *е БГФ от ред* k *спрямо* $G(x)$*.*

Забележка. Ако $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\infty$, се казва, че $F=O(G)$. Означенията "o" и "O" са известни като *символи на Ландау.*

При намиране на граница на функция най-често се получават неопределености (при частно) от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, които да наречем *основни.*

Други неопределени форми при разлика, произведение и степен на функция са съответно: $[\infty-\infty]$, $[\infty.0]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$. Граници още се пресмятат с теоремите на Лопитал (вж. гл. 9).

VI. АСИМПТОТИ

Дефиниция 14 ***Асимптота*** *на крива $y=f(x)$ се нарича правата, към която неограничено се приближава точка от кривата при отдалечаването ѝ по кривата в безкрайност.*

$*$ Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, то правата $x=a$ е *вертикална* асимптота на кривата $y=f(x)$.

$*$ Ако в дясната част на уравнението на кривата $y=f(x)$ може да се отдели линейна част $y=f(x)=kx+n+\alpha(x)$ така, че $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$, то правата $y=kx+n$ е *асимптота* на кривата.

$*$ Ако съществуват крайни граници

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=n, \tag{4.3}$$

то правата $y=kx+n$ е наклонена асимптота на кривата $(k\neq 0)$.

Пример 4.1. Пресметнете границата на функцията:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^2-7x+10}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. а) Определяме DM на функцията $x^2-3\neq 0 \iff x=\pm\sqrt{3}$ или $DM: x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ От $x\to 2$ $[2\in(\sqrt{3},+\infty)]$ $\Longrightarrow x=2$ е точка на сгъстяване на DM, защото в δ-околност $(2-\delta,2+\delta)$, $\delta>0$ има поне един елемент на DM. Така установяваме, че има смисъл да търсим границата на функцията.

При $x\to 2$ знаменателят на функцията клони към 1 и можем да приложим теоремата за чстно при граници. Всъщност граница на функция се намира, като прилагаме последователно теореми (4.1) за граници:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5}{\lim\limits_{x\to 2}x\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{4+5}{4-3}=9;$$

б) От $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)\neq 0 \Longrightarrow DM:(-\infty,2)\cup(2,5)\cup(5,+\infty)$. Точката $x=2\notin DM$, но е точка на сгъстяване за DM. Теоремата за частно не може да се приложи. Затова:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x-5)}=\frac{8.4}{-3}=-\frac{32}{3};$$

в) От $1-x\neq 0$ $(1+x+x^2\neq 0)\Longrightarrow DM:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Теорема 1 за сбор не може да се приложи, защото $1-x\to 0$ при $x\to 1$. Функцията $\alpha(x)=1-x$ е безкрайно малка и тогава $\dfrac{1}{1-x}$ и $\dfrac{1}{1-x^3}$ са БГФ. Имаме неопределена форма от вида $[\infty-\infty]$. Затова извършваме означените действия ($x=1$ е точка на сгъстяване за DM, $x\notin DM$):

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-\frac{1+2}{1+1+1}=-1;$$

г) От $x\neq 0\Longrightarrow DM:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Точката $x=0$ е точка на сгъстяване за DM, $0\notin DM$. При $x\to 0$ имаме неопределена форма от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, затова ще рационализираме числителя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4.2. Пресметнете границата на функцията:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2-2}+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x}{5x^3-3x^2+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$.

Решение. а) При $x\to 0$ имаме неопределена форма от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, затова ще рационализираме числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{4+4}{1+1}=4;$$

б) При $x \to \infty$ имаме неопределена форма от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, затова изнасяме пред скоби от числителя и знаменателя най-високата степен на променливата x ($F(x) = x$ е БГФ, $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ е БМФ, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{3+0}{5-0+0} = \frac{3}{5};$$

в) Както в задача б) изнасяме пред скоби:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$$

г) Рационализираме функцията ($F(x) = \sqrt{1+x^2}+x$ е БГФ, а $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ е БМФ):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Пример 4.3. Пресметнете границата на функцията:

а) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+3}}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

Решение. а) Ще рационализираме числителя (от вида: $a-b$), като умножим с a^2+ab+b^2, за да получим a^3-b^3:

$$\lim_{x\to 5} \frac{2^3-(x+3)}{(x-5)\left(4+2\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right)} = \frac{-1}{4+4+4} = -\frac{1}{12};$$

б) *I начин.* При $x \to 0$ имаме неопределена форма $\left[\frac{0}{0}\right]$, затова ще рационализираме числителя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

II начин. Ще приложим теорема 2 (за произведение):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{4}\,\frac{1^2}{1^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\quad (\text{вж. } 1^\circ);$$

в) Няма да рационализираме знаменателя, а от $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, $x\to 0^+$ $(x>0)\Longrightarrow \sin\dfrac{x}{2}>0\Longrightarrow |\sin\dfrac{x}{2}|=\sin\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sqrt{2}|\sin\dfrac{x}{2}|}=\lim_{x\to 0+}\frac{2}{\sqrt{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\quad (\text{вж. } 1^\circ);$$

г) Ще преобразуваме числителя:

$$\lim_{x\to a}\frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a\quad (\text{вж. } 1^\circ).$$

Пример 4.4. Пресметнете границата на функцията:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right]$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$; в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. а) При $x\to 1$ имаме неопределеност от вида $[0.\infty]$.

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)\lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}=\frac{2}{\pi}.$$

(II начин: *Полагаме* $1-x=u$, при $x\to 1\Longrightarrow u\to 0$);

б) От $\sqrt{x}$ имаме $x\geq 0$ и тогава $x\to 0_-$ е невъзможно. Полагаме

$$\arccos(1-x)=\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=1-x\Longrightarrow x=1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad 0\leq\alpha\leq\pi.$$

От $x\to 0_+\Longrightarrow 1-x\to 1$ (чрез стойности <1) $\Longrightarrow\cos\alpha\to 1$, т.е. $\alpha\to 0$. Но $\cos\alpha\to 1$ при $\alpha\to 0_+$ или $\alpha\to 0_-$. Ще намерим границата при $\alpha\to 0_+$ (когато $\alpha\to 0_-$ се получава друга граница):

$$\lim_{x\to0+}\frac{\alpha}{\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1}{\sqrt2}\lim_{x\to0+}\frac{\alpha}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{1}{\sqrt2}\lim_{x\to0+}\frac{2}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$$

(от $0\le\alpha\le\pi\Longrightarrow 0\le\frac{\alpha}{2}\le\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\sin\frac{\alpha}{2}>0\Longrightarrow\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sin\frac{\alpha}{2}$);

в) $\lim\limits_{x\to0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$ (вж. 11°).

Забележка. Функцията $\ln(1+x)$ е непрекъсната, затова местата на операторите $\lim$ и $\ln$ се разменени. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ е *основна граница* (към IV).

Пример 4.5. Пресметнете границата на функцията:

а) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{x-1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2x-1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x-1}$.

Решение. а) Полагаме $-4x=\frac{1}{z}\Longrightarrow x=-\frac{1}{4z}$ и $z=-\frac{1}{4x}$.

* $\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}=1+4z$; От $x\to0$ и $4z=-\dfrac{1}{4x}\Longrightarrow z\to\infty$

* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{1+4z}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z\right]^4=e^4$ (вж. 11°);

б) Полагаме $3x=\alpha\Longrightarrow x=\dfrac{\alpha}{3}\Longrightarrow\dfrac{2x-1}{x}=2-\dfrac{1}{x}=2-\dfrac{3}{\alpha}$. От $x\to0$ и $\alpha=3x\Longrightarrow\alpha\to0$. Тогава

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{2-\frac{3}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^2\left[\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-3}=e^{-3}\quad\text{(вж. 12°)};$$

в) *I начин*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+4}{x-3}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{2x-1}.$$

Полагаме $\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{1}{z}\Longrightarrow z=\dfrac{x-3}{4}$ или $x=4z+3$. Тогава $2x-1=8z+5$, а от $z=\dfrac{x-3}{4}$ и $x\to\infty\Longrightarrow z\to\infty$. Така

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{8z+5}=\left[\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^8\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^5=e^8\quad\text{(вж. 11°)}.$$

II начин: Ще използваме формулата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+4}{x-3}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{(2x-1)\frac{x-3}{4}\,\frac{4}{x-3}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-4}{x-3}} = e^8.$$

Пример 4.6. Сравнете в околността на точката x_0 безкрайно малките функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$:

а) $x_0 = \pi$, $\alpha(x) = \sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}$, $\beta(x) = \sin 2x$;

б) $x_0 = 0$, $\alpha(x) = \sqrt{1+5x} - 1$, $\beta(x) = x$;

в) $x_0 = 0$, $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$, $\beta(x) = x^4$.

Решение. а) Търсим границата на $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to \pi$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}\lim_{x\to\pi}\frac{1-\operatorname{tg} x-1-\operatorname{tg} x}{\sin 2x(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}$$
$$= -\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\cos^2 x(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})} = \frac{-1}{(-1)^2(1+1)} = -\frac{1}{2} = C \neq 0.$$

Според дефиниция 7 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ са БМФ от един и същи ред, т.е. $\alpha(x) \approx C\beta(x)$ или $\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x} \approx -\dfrac{1}{2}\sin 2x$;

б) Търсим границата на $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}$ при $x \to 0$, като $k \geq 1$:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{1+5x-1}{x^k(\sqrt{1+5x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+5x}+1}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-1}},$$

като $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{k-1}}$ трябва да бъде крайна граница, различна от 0, а това е възможно само при $k = 1$.

Така $A = \dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{1-1}} = \dfrac{5}{2}$, като $\alpha(x) \approx \dfrac{5}{2}\beta(x)$ или $\sqrt{1+5x} - 1 \approx \dfrac{5}{2}x$, т.е. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ са БМФ от един и същи ред (първи);

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty,\ \text{т.е. } \lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

Според дефиниция 6 $\beta = o(\alpha)$ или $x^4 = o(\operatorname{tg} x - \sin x)$.

Забележка. Ако $\beta(x) = x$ образуваме $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}$ и тогава може да се докаже, че $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ са БМФ от един си същи трети ред ($k = 3$).

Пример 4.7. Сравнете $F(x) = \sqrt[3]{x+1} + x$ и $G(x) = x^3 + 1$ при $x \to \infty$.

Решение. От $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} + x = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3+1) = \infty$ следва, че $F(x)$ и $G(x)$ са БГФ. Тогава

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}+x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+x}{x^3+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Според дефиниция 11 $\beta = O(\alpha)$ или $x^3 + 1 = O(\sqrt[3]{x+1} + x)$.

Пример 4.8. Определете реда на БМФ $\alpha(x) = \sin^2 x\sqrt{1-\cos 2x}$ при $x \to 0$.

Решение. Приемаме $\beta(x) = x$, $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x) = 0$ (БМФ). Очевидно $\alpha(x)$ е от по-висок ред. Тогава

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\sqrt{1-\cos 2x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x^{k-2}}$$

$$= 1^2 . \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x^{k-2}} = \begin{cases} \sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{x^{k-2}} & \text{при } x \to 0_+ \\ -\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{x^{k-2}} & \text{при } x \to 0_-. \end{cases}$$

Получените две граници трябва да бъдат крайни и различни от нула ($k \geq 2$), т.е. $k = 3$ ($\alpha(x)$ е БМФ от трети ред). Така

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} \sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \sqrt{2} & \text{при } x \to 0_+ \\ -\sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = -\sqrt{2} & \text{при } x \to 0_-. \end{cases}$$

Тъй като $\alpha(x) > 0$, винаги в околността на точката 0,

$$\begin{cases} \sin^2 x\sqrt{1-\cos 2x} \approx \sqrt{2}x^3 & \text{при } x \to 0_+ \\ \sin^2 x\sqrt{1-\cos 2x} \approx -\sqrt{2}x^3 & \text{при } x \to 0_- \end{cases}$$

Пример 4.9. Намерете главната част на $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}$ в точката 0.

Решение. Сравняваме $\alpha(x)$ с $\beta(x) = x$, $\lim\limits_{x\to 0}\beta(x) = 0$. Ще рационализираме числителя по формулата $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x} = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Според дефиниция 7 $\alpha(x) \approx \dfrac{2}{3}\beta(x)$ или $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \dfrac{2}{3}x + o(x)$. Тогава главната част на $\alpha(x)$ е функцията $\dfrac{2}{3}x$, а $o(x)$ е БМФ (грешката).

Пример 4.10. Пресметнете границите:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt[5]{1-5x^2}}{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt[7]{1-7x^2}}$.

Решение. а) При $x \to 0$ имаме неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, но не можем да рационализираме числителя, тъй като n е произволно естествено число. Правим смяна на променливите чрез полагането $\sqrt[n]{1+x} = z$, $1+x = z^n \Longrightarrow x = z^n - 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} z = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^n-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-1)(z^n+z^{n-2}+\cdots+z+1)} = \frac{1}{n};$$

б) От а) имаме $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[n]{1+x}-1) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{n} \neq 0$. Следователно $(\sqrt[n]{1+x}-1)$ е безкрайно малка функция от първи ред спрямо x. Тогава $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x} = 1$ и можем да напишем приблизителното равенство

$$\sqrt[n]{1+x}-1 \approx \frac{1}{n}x \Longleftrightarrow \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x.$$

Следователно $\sqrt[3]{1+3x^2} \approx 1 + \dfrac{3x^2}{3} = 1 + x^2$; $\sqrt[5]{1-5x^2} \approx 1 - \dfrac{5x^2}{5} = 1 - x^2$; $\sqrt{1+2x^2} \approx 1 + \dfrac{2x^2}{2} = 1 + x^2$; $\sqrt[7]{1-7x^2} \approx 1 - \dfrac{7x^2}{7} = 1 - x^2$.

В граничен преход можем да заместваме безкрайно малките функции една с друга и получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt[5]{1-5x^2}}{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt[7]{1-7x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1+x^2}{1+x^2-1+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1.$$

Пример 4.11. Намерете асимптотите на кривите:

$$\text{а)}\quad y=\frac{a}{x-a};\qquad \text{б)}\quad y=\frac{x^3+x^2+1}{x^2}.$$

Решение. а) $*$ Тъй като $\lim\limits_{x\to a} y=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a}{x-a}=\left[\dfrac{a}{0}\right]=\pm\infty$, следва, че правата $x=a$ е *вертикална асимптота* на кривата.

$*$ От $y=\dfrac{a}{x-a}=0+\dfrac{a}{x-a}=0+\alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a}{x-a}=0\Longrightarrow$ правата $y=0$ е *хоризонтална асимптота* на кривата. Следователно $f(x)=\dfrac{a}{x-a}$ има две асимптоти с уравнения $x=a$ и $y=0$.

б) $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}=x+1+\dfrac{1}{x^2}=x+1+\alpha(x)$, като $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. Следователно $y=x+1$ е *наклонена асимптота* на кривата с уравнение $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$.

Пример 4.12. Намерете асимптотите на кривите:

$$\text{а)}\quad y=\frac{x^3}{x^2+x-2};\qquad \text{в)}\quad y=\ln(1+e^x);$$

$$\text{б)}\quad y=\frac{xe^x}{e^x-1};\qquad \text{г)}\quad y=x+\arccos\frac{1}{x}.$$

Решение. а) По формули (4.3) имаме

$$*\quad k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2+x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=1,$$

$$*\quad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+2x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=-1.$$

Търсената асимптота е с уравнение $y=x-1$.

$*$ От $\lim\limits_{x\to -2_-} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to -2_+} y=\infty\Longrightarrow x=-2$ е вертикална асимптота.

$*$ От $\lim\limits_{x\to 1_-} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1_+} y=\infty\Longrightarrow x=1$ е вертикална асимптота;

б) Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \neq \lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, кривата $y = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ ще има различни асимптоти при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

Нека $x \to -\infty$. По формули (4.3) имаме:

$$* \ k = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$* \ n = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = [\infty.0] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 - e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)^{-1}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right)^{-1} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{x} + \left(\frac{-x}{e^{-x}}\right)^{-1}\right]^{-1} = (0 + 0^{-1})^{-1} = 0$$

(вж. основна граница 10).

При $x \to -\infty$ асимптотата към кривата е $y = 0$;

Нека $x \to +\infty$. По формули (4.3) имаме:

$$* \ k = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1,$$

$$* \ n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x - xe^x + x}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x - 1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})} = 0 \text{ (вж. основна граница 10).}$$

При $x \to \infty$ асимптотата към кривата е $y = x$;

в) Както в б) търсим асимптотите при $x \to \pm\infty$:

Нека $x \to -\infty$. Според (4.3) получаваме:

$$* \ k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0,$$

$$* \ n = \lim_{x\to-\infty} [\ln(1 + e^x)] = 0.$$

При $x \to -\infty$ асимптотата към кривата е $y = 0$;

Нека $x \to \infty$. Според (4.3) получаваме:

$$* \ k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x(e^{-x} + 1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln e^x}{x} + \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{x}\right) = \left(1 + \frac{0}{\infty}\right) = 1,$$

$$* \ n = \lim_{x\to\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x\to\infty} [\ln e^x(e^{-x} + 1) - x]$$
$$= \lim_{x\to\infty} [x + \ln(e^{-x} + 1) - x] = \lim_{x\to\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0.$$

Асимптотата на кривата при $x \to \infty$ е $y = x$;

г) По формули (4.3) намираме:

$$* \ k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \arccos(1/x)}{x} = \left[1 + \frac{\pm\pi/2}{\infty}\right] = 1,$$

$$* \ n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \arccos\frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \arccos\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Кривата има три асимптоти: $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ и $x = 0$.

ЗАДАЧИ

I. Намерете границата на функцията:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ Отг. 0

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$ Отг. 6

3. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right]$ Отг. ∞

4. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \dfrac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)}\right]$ Отг. 0

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$ Отг. 0

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$ Отг. ∞

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$ Отг. -1

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{3x^2}{2x+1} - \dfrac{(2x-1)(3x^2 + x + 2)}{4x^2}\right]$ Отг. $-\dfrac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ Отг. 3

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ Отг. 4

11. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ Отг. 0

12. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ Отг. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{при } x \to +\infty \\ -\infty, & \text{при } x \to -\infty \end{cases}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})$ Отг. 0

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + x}{x + 2} - \dfrac{x}{2}\right)$ Отг. $-\dfrac{1}{2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ Отг. 2

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ Отг. $6\sqrt{2}$

17 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$ Отг. $-\dfrac{1}{4}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$ Отг. $\dfrac{3}{4}$

20. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$ Отг. π

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ Отг. $-\dfrac{1}{12}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$ Отг. 2

23. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$ Отг. $\dfrac{1}{e}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ Отг. 1

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x-1}$ Отг. e^8

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$ Отг. e

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ Отг. e

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ Отг. e^2

30. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{\operatorname{cotg} x}$ Отг. e

31. $\lim\limits_{x\to 1} (1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$ Отг. e^5

32. $\lim\limits_{x\to 0} (1+4\sin x)^{\frac{5}{x}}$ Отг. e^{20}

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x(a-\sqrt{a^2+x})}$ Отг. $-a^2$

34. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{\sqrt{2}\sin x-1}$ Отг. $\dfrac{2}{3}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{arccotg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ Отг. 1

36. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\ln(x-1)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x}{\operatorname{cotg}\pi x}$ Отг. -2

37. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$ Отг. $-\dfrac{2}{3}$

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+a\sin x)}{\sin x}$ Отг. a

II. *Сравнете* в околността на точката x_0 безкрайно малките функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$:

1. $x_0 = 1,\quad \alpha(x) = 1-x,\quad \beta(x) = 1-\sqrt[3]{x}$

   Отг. БМФ от един и същ ред ($k=3$)

2. $x_0 = 0,\quad \alpha(x) = x^3+1000x^2,\quad \beta(x) = x$ Отг. $k=2$

3. $x_0 = 0,\quad \alpha(x) = \sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x},\quad \beta(x) = x$ Отг. $k=\dfrac{1}{2}$

4. $x_0 = 0,\quad \alpha(x) = \dfrac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}},\quad \beta(x) = x$ Отг. $k=1$

5. $x_0 = 0,\quad \alpha(x) = \dfrac{7x^{10}}{x^4+1},\quad \beta(x) = x$ Отг. $k=10$

III. *Определете* реда спрямо x на безкрайно малките функции при $x\to 0$:

1. $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ Отг. $k=\dfrac{1}{3}$

2. $\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$ Отг. $k=\dfrac{1}{2}$

3. $e^{\sqrt{x}}-1$ Отг. $k=\dfrac{1}{2}$

4. $e^{\sin x}-1$ Отг. еквивалентни

5. $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ Отг. еквивалентни

6. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ Отг. $k=1$

7. $e^x-\cos x$ Отг. еквивалентни

8. $e^{x^2}-\cos x$ Отг. $k=2$

9. $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$ Отг. $k=2$

10. $\sin(\sqrt{1+x}-1)$ Отг. $k=1$

11. $\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$ Отг. $k=\dfrac{2}{3}$

12. $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-1)$ Отг. $k=2$

IV. При *каква стойност* на константата a при $x\to 1$ безкрайно малките функции $\alpha(x)=1-x$ и $\beta(x)=a(1-\sqrt[n]{x})$, $a\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$ са еквивалентни?

Отг. $a=n$

V. *Докажете*, че при $x \to 0$ БМФ $\alpha(x) = e^{2x} - e^{x}$ и $\beta(x) = \sin 2x - \sin x$ са еквивалентни.

VI. *Намерете* главната стойност на функцията $\sqrt[5]{1+5x} - 1$ в точката 0.

Упътване. Използвайте тъждеството:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

VII. *Намерете* асимптотите на функциите чрез определяне на цяла линейна част:

1. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ Отг. $y = x$
2. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ Отг. $y = x - 1$
3. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ Отг. $y = 1$

VIII. *Намерете* асимптотите на кривите:

1. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ Отг. $y = x \pm \pi$
2. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a-x}$ Отг. $y = -\dfrac{\pi}{4}$
3. $y = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Отг. $x = 0,\ y = x$
4. $y = \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2$ Отг. $x = 0,\ y = 1$
5. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$ Отг. $x = 0,\ y = -x$

ГЛАВА 5

НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ

I. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ В ТОЧКА

Разглеждаме изображение $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, т.е. функция $y = f(x)$ с дефиниционна област D ($\exists f(x_0)$, x_0 е точка на сгъстяване за D или не е - изолирана точка).

А. Нека x_0 е точка на сгъстяване за D

Дефиниция 1 *Ще казваме, че една функция $f(x)$, дефинирана в точката $x_0 \in D$ и някаква нейна околност, е* ***непрекъсната*** *в x_0, ако $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Дефиниция 1$'$(по Коши). Функцията $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon)$ така, че от $(\forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Дефиниция 1$''$(по Хайне). Функцията $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако $\forall \{x_n\}$ от $(x_n \in D,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0) \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Б. Нека x_0 не е точка на сгъстяване за D

Дефиниция 2 *Ако x_0 не е точка на сгъстяване за D (x_0 е изолирана точка) казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0 \in D$, ako:*

(по Коши): $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ така, че от $(x \in D \wedge |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(по Хайне): $\forall \{x_n\}$, ако $(x_n \in D,\ x_n \to x_0) \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Теорема 1 *Ако x_0 е точка на сгъстяване за D, то дефиниции 1 и 2 са еквивалентни.*

Забележка 1. Ако $x_0 \in D$ е точка на сгъстяване за D, то $\forall x \in D$ е дефинирано *нарастване на функцията* $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, което отговаря на *нарастване на аргумента на функцията* $\Delta x = x - x_0 = h$.

Теорема 2 *Ако $x_0 \in D$, x_0 е точка на сгъстяване за D и $f(x)$ е непрекъсната в x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$.*

Забележка 2. Ако $x_0 \in D$ е точка на сгъстяване за D, т.е. $\forall(x_0, x_0 + \delta)$ съдържа точки от D, тогава, ako $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0)$, то функцията $f(x)$ е непрекъсната в x_0 *отдясно* ($f(x)$ е непрекъсната в x_0 *отляво*, ако $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$).

Забележка 3. Ако $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема 3 *Сумата, произведението и частното на непрекъснати функции в точка е също непрекъсната функция.*

Теорема 4 *Ако $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in D$, $f(x_0) \neq 0$, то съществува δ-околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, за всяка точка от която $f(x)$ има знака на $f(x_0)$.*

Забележка 4. За непрекъсната функция $f(x)$ в точка x_0 от $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, т.е. при непрекъсната функция местата на операторите "lim" и "f" *могат да се разместят.*

II. ПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ В ТОЧКА

А. $x_0 \in D$ е точка на сгъстяване за D ($\exists\ f(x_0)$)

Условието $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ се нарушава в два случая:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *не съществува* като крайна граница

   1_1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не съществува, но $\exists \lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = B$, $A \neq B$

   1_{11}. Границите A и B са крайни - в този случай x_0 е точка на прекъсване от *първи род.*

   1_{12}. *Поне една* от границите A и B не е крайна, т.е. $f(x)$ расте неограничено (ако $x \to x_{0+}$, то $f(x) \to \infty$) - x_0 е точка на прекъсване от тип ∞.

   1_2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не съществува и *поне една* от A и B не съществува - x_0 е точка на прекъсване от *втори род.*

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ като крайна граница, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ - x_0 е точка на прекъсване ($A = B$).

Забележка 5. Ако x_0 е *изолирана точка* ($\exists\ U_\delta(x_0)$, в която освен x_0 няма други точки от D) според дефиниция 2 $f(x)$ е непрекъсната при $x = x_0$, т.е. $f(x)$ не е прекъсната.

Б. $x_0 \notin D$, но x_0 е задължително точка на сгъстяване за D

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *не съществува* като крайна граница

   1_1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не съществува, но $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} = A$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = B$, $A \neq B$ - крайни - x_0 е точка на прекъсване от първи род, но сега не може $A = f(x_0)$ или $B = f(x_0)$, защото не съществува $f(x_0)$.

   1_2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ не съществува и поне една от границите A и B не съществува - x_0 е точка на прекъсване от тип ∞ $(-\infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ съществува като крайна граница $(A = B)$ - x_0 се нарича точка на отстранима прекъснатост ($f(x)$ се додефинира до непрекъсната функция).

III. НЕПРЕКЪСНАТОСТ В ЗАТВОРЕН ИНТЕРВАЛ. СВОЙСТВА

Множеството от функции, непрекъснати в $[a, b]$, бележим $f(x) \in C[a, b]$.

Дефиниция 3

$$f(x) \in C[a,b] \iff \begin{cases} f(x) \text{ е непрекъсната } \forall x \in (a,b) \\ f(x) \text{ е непрекъсната отдясно и } \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a) \\ f(x) \text{ е непрекъсната отляво и } \lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b). \end{cases}$$

Теорема 5 *Ако $f(x) \in C[a, b]$, то $f(x)$ е* ***ограничена*** *в $[a, b]$, т.е. $\exists K > 0$ така, че $\forall x \in [a, b] \Longrightarrow |f(x)| \leq K$.*

Теорема 6 (на Вайерщрас). *Ако $f(x) \in C[a, b]$, то $f(x)$ притежава най-голяма и най-малка стойност за $x \in [a, b]$.*

Теорема 7 *Ако $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то $\exists\, \xi \in (a, b)$ и $f(\xi) = 0$ ($f(a) \neq f(b)$ и имат различни знаци, а графиката на $f(x)$ пресича Ox поне в една точка).*

Теорема 8 *Ако $f(x) \in C[a, b]$, то $f(x)$ приема всички стойности между $f(a)$ и $f(b)$ (теорема за междинните стойности).*

IV. РАВНОМЕРНА НЕПРЕКЪСНАТОСТ

Дефиниция 4 *Казваме, че $f(x) \in C[a, b]$ – равномерно, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon)$ така, че $\forall (x', x'') \in [a, b]$, $x' \neq x''$, за които $|x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (на малки нараствания на x отговарят малки нараствания на $f(x)$ и така равномерно в целия интервал).*

Теорема 9 (на Кантор). *Ако $f(x) \in C[a,b]$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.*

Теорема 10 (за непрекъснатост на обратната функция). *Ако $y = f(x) \in C[a,b]$ и е монотонно растяща, то $x = f^{-1}(y)$ е също непрекъсната и растяща в съответния затворен интервал от оста Oy.*

V. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ

Нека $f(x)$ е с дефиниционна област D (числовото множество).

$*$ Разглеждаме $f : D \to D^*$, т.е. $f(x)$ е числова функция с дефиниционна област D и е определена функция $u = f(x)$, $u \in D^*$.

$*$ Разглеждаме $F : D^* \to G$, т.е. $F(u)$ е числова функция с дефиниционна област D^* и е определена функция $y = F(u)$, $y \in G$.

Дефиниция 5 *Функцията $\varphi(x) = y = F[f(x)]$, $x \in D$ се нарича* ***сложна*** *(съствана), композирана чрез $f(x)$ и $F(u)$.*

Теорема 11 *Ако $f(x) \in C[x_0 \in D]$, $F(u) \in C[u_0 = f(x_0) \in D^*]$, то $\varphi(x) = F[f(x)] \in C[x_0]$.*

Пример 5.1. Чрез понятията лява и дясна граница установете непрекъснатостта на функцията $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ т точката $x = 0$.

Решение. $f(x)$ е дробна рационална функция, $x^2 + 1 \neq 0\,\forall x$. Точката $0+\varepsilon$ е надясно от точката $x = 0$, $\varepsilon > 0$ и когато $\varepsilon \to 0$, то $x \to x_0$ отдясно на точката. Аналогично, като положим $x = 0 - \varepsilon$, при $\varepsilon \to 0$ имаме $x \to x_0$ отляво на точката $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} * \lim\limits_{\substack{x\to 0+\\(x>0)}} \dfrac{x-1}{x^2+1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{(0+\varepsilon)-1}{(0+\varepsilon)^2+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ * \lim\limits_{\substack{x\to 0-\\(x<0)}} \dfrac{x-1}{x^2+1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{(0-\varepsilon)-1}{(0-\varepsilon)^2+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \in C[x=0]$$

(вж. заб. 3).

Пример 5.2. Изследвайте около точката $x = 3$ функцията $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$.

Решение. $DM : x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Точката $x = 3 \notin DM$, но е точка на сгъстяване за DM и тогава можем да търсим дясна и лява граница на функцията при $x \to 3$:

$$* \lim_{x\to 3+} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(\varepsilon>0)}} \frac{(3+\varepsilon)-2}{(3+\varepsilon)-3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right) = \frac{1}{0+}+1 = +\infty,$$

$$* \lim_{x\to 3-} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(\varepsilon>0)}} \frac{(3-\varepsilon)-2}{(3-\varepsilon)-3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1-\frac{1}{0+} = -\infty.$$

И така $y_{3+0} = +\infty$, $y_{3-0} = -\infty$ (вж. 1_{12}).

Пример 5.3. Изследвайте в точка $x = 2$, $x < 2$ и в точка $x = 3$, $x > 3$ функцията $y = f(x) = \ln\dfrac{x-2}{2x-6}$.

Решение. DM : $\dfrac{x-2}{2(x-3)} > 0 \iff (x-2)(x-3) > 0 \Longrightarrow DM : x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. Точката $x = 2$ не е точка на сгъстяване в дясна нейна околност, а точката $x = 3$ - в лява нейна околност.

$$* \lim_{\substack{x\to 2\\(x<2)}} \left(\ln\frac{x-2}{2x-6}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{2-\varepsilon-2}{4-2\varepsilon-6}\right) = \ln\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+2}\right) = \lim_{u\to 0+}\ln u = -\infty$$

$$* \lim_{\substack{x\to 3\\(x>3)}} \left(\ln\frac{x-2}{2x-6}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{3+\varepsilon-2}{6+3\varepsilon-6}\right) = \ln\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right) = \lim_{u\to +\infty}\ln u = +\infty.$$

И така $y_{3+0} = +\infty$, $y_{2-0} = -\infty$ (вж. 1_{12})

Забележка. При решаване на задачата е използвана заб. 4 и:

$$\lim_{u\to 0+}\log_a u = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}, \qquad \lim_{u\to +\infty}\log_a u = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Пример 5.4. Изследвайте функцията $y = f(x) = 3 + e^{\frac{1}{x-1}}$ около точката $x = 1$.

Решение. Точка на прекъсване е $x = 1 \Longrightarrow DM : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$* \lim_{x\to 1+} f(x) = 3 + \lim_{x\to 1+} e^{\frac{1}{x-1}} = 3 + \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{1+\varepsilon-1}} = 3 + \lim_{u\to\infty} e^u = +\infty,$$

$$* \lim_{x\to 1-} f(x) = 3 + \lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x-1}} = 3 + \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{1-\varepsilon-1}} = 3 + \lim_{u\to -\infty} e^u = 3 + 0^+ = 3.$$

И така $y_{1+0} = +\infty$, $y_{1-0} = 3$. (вж. 1_{12}).

Забележка. При решаване на задачата използвахме: $a^u \to +\infty$ при $u \to +\infty$, $a > 1$; $a^u \to 0^+$ при $u \to -\infty$, $a > 1$.

Пример 5.5. Изследвайте функцията $y = f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$ в околност на точката $x = 1$.

Решение. Функцията $f(x)$ е четна и има две точки на прекъсване ($x = \pm 1$) $\Longrightarrow DM : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$* \lim_{x\to 1+} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-(1+\varepsilon)^2} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{-\varepsilon(2+\varepsilon)}\right)$$
$$= \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$
$$* \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-(1-\varepsilon)^2} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)}\right)$$
$$= \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

И така $y_{1+0} = -\dfrac{\pi}{2}$, $y_{1-0} = \dfrac{\pi}{2}$ (вж. 1_{11}).

Забележка. При решаване на задачата е използвана заб. 4 и $\operatorname{arctg} u \to \pm\dfrac{\pi}{2}$ при $u \to \pm\infty$.

Пример 5.6. Изследвайте характера на прекъсване на функцията $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ в точката $x = 1$. Може ли да се додефинира y при $x = 1$ така, че функцията да е непрекъсната за $x = 1$?

Решение. $DM : x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$* \lim_{x\to 1-} y = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-2^{\frac{1}{1-1+\varepsilon}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-2^{\frac{1}{\varepsilon}}} = 2^{-\infty} = 0,$$
$$* \lim_{x\to 1+} y = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-2^{\frac{1}{1-1-\varepsilon}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-2^{\frac{1}{-\varepsilon}}} = 2^{0} = 1.$$

И така $y_{1-0} = 0$, $y_{1+0} = 1 \Longrightarrow x = 1$ е точка на прекъсване от първи род.

Не може да се додефинира функцията така, че да е непрекъсната в точката $x = 1$, защото $\lim\limits_{x\to 1-} y \neq \lim\limits_{x\to 1+} y \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} y$ не съществува.

Пример 5.7. Колко точки на прекъсване има функцията $y = \dfrac{1}{\ln|x|}$? Определете вида им.

Решение. Дефиниционната област на функцията се определя от:

$$\left|\begin{array}{l} |x| \neq 0 \\ \ln|x| \neq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow DM : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Функцията има три точки на прекъсване: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, и $x_3 = 1$.

Тъй като функцията е четна $\left(\dfrac{1}{\ln|-x|} = \dfrac{1}{\ln|x|}\right)$, достатъчно е да изследваме функцията за $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Тогава $|x| = x$ и $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

$$* \lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln x} = 0;$$

$$* \lim_{x\to 1-} y = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{\ln x} = -\infty;$$

$$* \lim_{x\to 1+} y = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\ln x} = +\infty.$$

Точката $x = 0$ е отстранима точка на прекъсване, а точките $x = \pm 1$ са точки на прекъсване от втори род.

Пример 5.8. Нека $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$. Определете константата a така, че функцията да е непрекъсната при $x = 1$.

Решение. Тъй като за $x \le 1$ $f(x) = x + 1$, то $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (x+1) = 2$ и $f(1) = 2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1)$. За да бъде непрекъсната функцията за $x = 1$, трябва да бъде изпълнено:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (3 - ax^2) = 2 \Longleftrightarrow 3 - a = 2 \Longrightarrow a = 1.$$

Пример 5.9. Нека $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\pi/2 \\ A\sin x + B, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \ge \pi/2 \end{cases}$.

Определете A и B така, че функцията да е непрекъсната за $x = \pm\pi/2$.

Решение. Аналогично, както в пример 5.8, имаме

$$* \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \Longrightarrow \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} (A\sin x + B) = 2$$
$$\Longleftrightarrow -A + B = 2;$$

$$* \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} (A\sin x + B) = 0$$
$$\Longleftrightarrow A + B = 0.$$

Получихме системата

$$\left| \begin{array}{l} -A + B = 2 \\ A + B = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = 1 - \sin x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Пример 5.10. Функцията $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ не е дефинирана за $x=1$. Каква трябва да бъде стойността на функцията за $x=1$, че да е непрекъсната?

Решение. $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{2}{3}$.

От $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{2}{3}$. Тогава и

$$f(1)=\frac{2}{3}\Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}, & x\neq 1\\ \dfrac{2}{3}, & x=1.\end{cases}$$

ЗАДАЧИ

I. Дадена е функция $f(x)$. При каква стойност на параметъра $f(x)$ е непрекъсната?

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ A, & x=1\end{cases}$ Отг. $A=3$

2. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leq 1\\ ax^2-2, & x>1\end{cases}$ Отг. $a=2$

3. $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\leq \pi/2\\ \sin x+b, & x>\pi/2\end{cases}$ Отг. $b=\dfrac{a\pi}{2}$, $\forall a$

II. Определете точките на прекъсване и характера им за функцията $f(x)$. В случай на отстранима прекъснатост предефинирайте $f(x)$ така, че да е непрекъсната:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$ Отг. $x=0$ и $x=1$ - точки на прекъснатост от II род
2. $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$ Отг. $x=5/3$ - точка на прекъсване от I род
3. $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n\in\mathbb{N}$ Отг. $x=0$ - отстранима точка на прекъсване, $f(0)=n$
4. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ Отг. $x=0$ - отстранима точка на прекъснатост, $f(0)=1$
5. $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$ Отг. $x=0$ - отстранима точка на прекъснатост, $f(0)=1$
6. $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$ Отг. $x=\pm 2$ - точки на прекъсване от II род
7. $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ Отг. $x=0$ - точка на прекъсване от I род

8. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$ Отг. $x = -2$ - точка на прекъсване от I род

9. $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}$ Отг. $x = 2$ - точка на прекъсване от I род

10. $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ Отг. $x = 0$ - точка на прекъсване от I род; $x = \pm 1$ - точки на прекъсване от II род

11. $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$ Отг. $x = 0$ - отстраняема точка на прекъсване, $f(0) = -1$; $x = 1$ - отстранима точка на прекъсване, $f(1) = 0$; $x = -1$ - точка на прекъсване от II род

12. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ Отг. $x = 0$ - отстранима точка на прекъсване, $f(0) = 1/2$

13. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 < x \le 4 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ Отг. $x = 1$ - точка на прекъсване от I род

14. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x < 5/2 \\ 2x - 7, & 5/2 \le x \le 4 \end{cases}$ Отг. $x = 5/2$ - точка на прекъсване от I род

15. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1, & x = \dfrac{\pi}{4} \\ x^2 - \dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi \end{cases}$ Отг. $x = \pi/4$ - точка на прекъсване от I род

ГЛАВА 6

ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ И ДИФЕРЕНЦИАЛ

I. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

Дадено е изображение $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и x_0 е *точка на сгъстяване* на D, т.е. дадена е функция $f(x)$, $x \in D$, $x_0 \in D$ и $\exists f(x_0)$.

Означаваме: $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 = h \text{ - нарастване на аргумента } (x \neq x_0), \\ \Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \text{ - нарастване на функцият} \end{cases}$

Дефиниция 1 *Границата (ако съществува)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \tag{6.1}$$

наричаме ***първа производна*** *на $f(x)$ в точката x_0.*

Понятието производна е локално. Когато се намери производната на функция казваме, че тя е *диференцируема.* От непрекъснатост на функция не следва, че съществува производна.

Теорема 1 *Ако $f(x)$ има производна в точка x_0, функцията $f(x)$ е непрекъсната в x_0.*

II. ДИФЕРЕНЦИРУЕМА ФУНКЦИЯ

От (6.1) $\Longrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, където $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \Delta x \to 0}} \alpha(\Delta x) = 0$ и означаваме $f'(x_0) = A$. Тогава

$$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \alpha(\Delta x) \Longleftrightarrow \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{6.2}$$

където $A\Delta x$ е *главна част* на нарастването Δy.

Дефиниция 2 *Функцията $f(x)$ се нарича* ***диференцируема*** *в точка x_0, ако нарастването ѝ Δy в x_0 може да се представи във вида* (6.2)*, където $A = const$, независеща от Δx.*

Теорема 2 *Функцията $f(x)$ е* ***диференцируема*** $\Longleftrightarrow \exists f'(x_0)$.

Следствие 1. Ако $f(x)$ е *диференцируема* в точка x_0, тя е *непрекъсната* в x_0 (обратното не е вярно).

Дефиниция 3 *Операцията намиране на производна на функция се нарича* ***диференциране.***

III. ДИФЕРЕНЦИАЛ НА ФУНКЦИЯ

Дефиниция 4 *Главната част $A\Delta x$ на нарстването Δy на функцията $y = f(x)$ в точката x_0, където $A = f'(x_0)$, а $\Delta x \neq 0$ – константа, се нарича* ***диференциал*** *на $f(x)$ в точката x_0 и се означава dy (линейната част на нарастването на диференцируемата функция $f(x)$ се нарича диференциал на $f(x)$).*

И така, $dy = df(x_0) = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$. В *частност* нека $f(x) = x \Longrightarrow df(x) = dx = x'\Delta x = \Delta x$, т.е. $\Delta x = dx$. Тогава

$$dy = f'(x)dx \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{6.3}$$

Следствие 2. $d(x \pm c) = (x \pm c)'dx = (1 \pm 0)dx = dx$, $c = \text{const}$.

Свойства на диференциала

$1^\circ.\ d(cu) = cdu$	$3^\circ.\ d(uv) = vdu + udv$
$2^\circ.\ d(u \pm v) = du \pm dv$	$4^\circ.\ d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}.$

IV. ТЕОРЕМИ ЗА НАМИРАНЕ НА ПРОИЗВОДНИ НА ФУНКЦИИ

А. Производни на основните елементарни функции

При диференциране на елементарна функция се получава елементарна функция. Ще намерим някои производни чрез дефиниция 1:

$$1^\circ.\ f(x) = x \to (x)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = 1,$$

$$2^\circ.\ (\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1.\cos x = \cos x \text{ и т.н.}$$

Б. Диференциране на съставна функция

Разглеждаме съставна функция $\varphi(x) = F(f(x))$ с дефиниционна област D, където $f : D \to D^*$ ($u = f(x)$, $u \in D^*$) и $F : D^* \to G$ ($y = F(u)$, $y \in G$).

Тогава

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(f(x))-F(f(x_0))}{x-x_0}$$
$$= \lim_{u\to u_0} \frac{F(u)-F(u_0)}{u-u_0}\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{u-u_0}{x-x_0} = F'(u_0)f'(x_0)$$
$$\Longrightarrow \varphi(x) = F(f(x)) \Longleftrightarrow \varphi'(x) = F'(f(x))f'(x) \tag{6.4}$$

Примери: $y = e^{3x} \Longrightarrow y' = e^{3x}(3x)' = 3e^{3x}$,

$y = \sqrt{f(x)} \Longrightarrow y' = (\sqrt{f(x)})'f'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

В. Диференциране на обратна функция

Разглеждаме $y = f(x) : D \to V$ (права функция) и нейната обратна $\eta = f^{-1}(\xi) : D^{-1} \equiv V \to V^{-1} \equiv D$. Тогава

$$\text{от } f[f^{-1}(\xi)] \equiv \xi \Longrightarrow (f[f^{-1}(\xi)])' = \xi' \Longrightarrow f'[f^{-1}(\xi)](f^{-1}(\xi))' = 1$$
$$\Longrightarrow (f^{-1}(\xi))' = \frac{1}{f'[f^{-1}(\xi)]} = \frac{1}{f'(\eta)}, \tag{6.5}$$

т.е. *производната на обратна функция е реципрочната стойност на производната на правата функция, като заместим x със стойността η на обратната функция*:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1],$$
$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1 \quad \text{и т.н.}$$

V. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ ОТ ВИДА $y = f(x)^{\varphi(x)}$

От $y = f(x)^{\varphi(x)} \Longrightarrow \ln y = \varphi(x)\ln f(x)$ и диференцираме по x:

$$\frac{1}{y}y' = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\Longrightarrow y' = f(x)^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] \tag{6.6}$$

Пример: $y = (\ln x)^{\operatorname{arctg} x} \Longleftrightarrow \ln y = \operatorname{arctg} x \ln(\ln x) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{y}y' = \dfrac{1}{1+x^2}\ln(\ln x) + \operatorname{arctg} x\dfrac{1}{x\ln x} \Longrightarrow y' = (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}\left[\dfrac{\ln(\ln x)}{1+x^2} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\ln x}\right]$.

Пример 6.1. Намерете производните на функциите:

а) $y = 2x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 + 5x + \sqrt[3]{17} + e^{\pi}$; в) $y = 2x^2\cos^2(x^3 - 3x^2)$;

б) $y = \dfrac{kx^3}{\sqrt{x}} + \dfrac{lx^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{m\sqrt{x}}{x}$; г) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Решение. а) Производната намираме, като приложим последователно формулите $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(cu)' = cu'$, $c' = 0$:

$$y' = 2.5x^4 + \frac{1}{4}.4x^3 + 3x^2 + 5 \Longrightarrow y = 10x^4 + x^3 + 3x^2 + 5;$$

$$\text{б) } y = kx^{\frac{5}{2}} + lx^{\frac{5}{3}} + mx^{-\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow y' = \frac{5}{2}kx^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}lx^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}mx^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{5}{2}kx\sqrt{x} + \frac{5}{3}l\sqrt[3]{x^2} - \frac{m}{2x\sqrt{x}};$$

в) Последователно прилагаме формулите $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ и $(cuv)' = c(u'v + uv')$:

$$y' = 2\{2x\cos^2(x^3 - 3x^2) + x^2 2\cos(x^3 - 3x^2)[-\sin(x^3 - 3x^2)](3x^2 - 6x)\}$$
$$y' = 4x\cos^2(x^3 - 3x^2) - 2x^2(3x^2 - 6x)\sin 2(x^3 - 3x^2);$$

$$\text{г) } y' = \frac{(x^2 + x + 1)'(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{(2x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Пример 6.2. Намерете производните на функциите:

а) $y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$; б) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$; в) $y = \dfrac{x\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$;

г) $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$; д) $y = \sin\dfrac{1}{x}$; е) $y = \cos^3 4x$;

ж) $y = (1 + \sin^2 x)^4$; з) $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$; и) $y = \cos^2\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$.

Решение. Последователно прилагаме формулите за производна на частно $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, на алгебричен сбор $(u \pm v)' = u' \pm v'$ и *производните на тригониметричните функции*:

а) $y' = \dfrac{(x)'(1-\cos x)-x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{1.(1-\cos x)-x\sin x}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$;

б) $y' = \dfrac{(\sin x)'x - \sin x(x)'}{x^2} + \dfrac{(x)'\sin x - x(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x\cos x - \sin x)\Big(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\Big)$;

в) $y' = \dfrac{(x\sin x)'(1+\operatorname{tg} x) - x\sin x(1+\operatorname{tg} x)'}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \dfrac{(\sin x + x\cos x)(1+\operatorname{tg} x) - \dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$

$= \dfrac{(\sin x + x\cos x)(\cos x + \sin x)\cos x - x\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$;

г) $y' = (\cos x)' - \dfrac{1}{3}(\cos^3 x)' = -\sin x - \dfrac{1}{3}.3\cos^2 x(-\sin x)$

$= -\sin x + \sin x\cos^2 x = -\sin x(1-\cos^2 x) = -\sin^3 x$;

д) $y' = \Big(\sin\dfrac{1}{x}\Big)' = \cos\dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)' = \cos\dfrac{1}{x}.\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$;

е) $y' = (\cos^3 4x)' = 3\cos^2 4x(\cos 4x)' = 3\cos^2 4x(-\sin 4x)(4x)'$

$= 3\cos^2 4x(-\sin 4x)4 = -12\sin 4x\cos^2 4x = -6\sin 8x\cos 4x$;

ж) $y' = [(1+\sin^2 x)^4]' = 4(1+\sin^2 x)^3(1+\sin^2 x)' = 4(1+\sin^2 x)^3 2\sin x\cos x$

$= 4\sin 2x(1+\sin^2 x)^3$;

з) $y' = \left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x+\dfrac{1}{x})}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)}}\Big(1+\operatorname{tg}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)\Big)'$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)}}\dfrac{1}{\cos^2\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)'$

$= \dfrac{1}{2\cos^2\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)\sqrt{1+\operatorname{tg}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)}}\Big(1-\dfrac{1}{x^2}\Big) = \dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)\sqrt{1+\operatorname{tg}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)}}$

и) $y' = \Big(\cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Big)' = 2\cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Big(-\sin\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Big)\Big(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Big)'$

$= -\sin\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}\;\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$

$= -\sin\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}\;\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sin\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

Пример 6.3. Намерете производните на функциите:

а) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$; б) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; в) $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$;

г) $y = x\sin x \operatorname{arctg} x$; д) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$; е) $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$;

ж) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$; и) $y = \arcsin \dfrac{2}{x}$;

й) $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; к) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin \sqrt{x^2+2x}}$; л) $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$.

Решение. Прилагаме правилата за диференциране и формулите за производни на *обратни тригонометрични функции.*

а) $$y' = \frac{(\arcsin x)' \arccos x - \arcsin x(\arccos x)'}{(\arccos x)^2} = \frac{\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arccos x)^2}$$

$$= \frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

Забележка: $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $$y' = x' \arcsin x + x(\arcsin x)' + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'$$

$$= \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x;$$

в) $$y' = -\frac{1}{(\arcsin x)^2}(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2};$$

г) $$y' = x' \sin x \operatorname{arctg} x + x(\sin x)' \operatorname{arctg} x + x \sin x(\operatorname{arctg} x)'$$

$$= \sin x \operatorname{arctg} x + x\cos x \operatorname{arctg} x + \frac{x\sin x}{1+x^2};$$

д) $$y' = \frac{(\arccos x)'x - x' \arccos x}{x^2} = \frac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} = -\frac{x + \sqrt{1-x^2}\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}};$$

е) $$y' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x^2-1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2};$$

ж) $$y' = \frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2} - \arcsin x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2x\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

з) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-4x^2+4x-1}}\,\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{2+4x-4x^2}};$

и) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}}\left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-4}}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}};$

й) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x-1+x}{1+x}\,\frac{1-x}{1+x}}}\,\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$= \frac{1+x}{2\sqrt{2x(1-x)}}\,\frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}};$

к) $y' = \frac{1}{2.4\sqrt[4]{(\arcsin\sqrt{x^2+2x})^3}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+2x)}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}(2x+2)$

$= \frac{x+1}{8\sqrt[4]{\arcsin^3\sqrt{x^2+2x}}\,\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}};$

л) $y' = \frac{1}{1+(x-\sqrt{1+x^2})^2}(x-\sqrt{1+x^2})' = \frac{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$

$= \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}\,2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)} = \frac{1}{2(1+x^2)}.$

Пример 6.4. Намерете производните на функциите:

а) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2});$ в) $y = \frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)];$

б) $y = e^{\frac{1+x}{1-x}} + 2^{\frac{\ln x}{x}} + e^{\sin\frac{\pi}{4}};$ г) $y = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

Решение. а) $y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}};$

б) $y' = e^{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} + 2^{\frac{\ln x}{x}}\ln 2\,\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2} + 0$

$= e^{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{2}{(1-x)^2} + \ln 2.2^{\frac{\ln x}{x}}\,\frac{1-\ln x}{x^2};$

в) $y' = \frac{1}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)] + \frac{x}{2}[\frac{1}{x}\cos(\ln x)+\frac{1}{x}\sin(\ln x)] = \sin(\ln x);$

г) $y' = \dfrac{2}{1+\dfrac{1+x}{1-x}} \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Пример 6.5. Намерете производните на функциите

а) $y = \operatorname{th}(\ln x)$; б) $y = x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$; в) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{th} x + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}.$

Решение. а) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(\ln x)}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$;

б) $y' = \operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = x\operatorname{ch} x$;

$$\text{в) } y' = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\sqrt{2}}{8}\,\frac{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}\,\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}^2 x}(1-\sqrt{2}\operatorname{th} x) + \dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}^2 x}(1+\sqrt{2}\operatorname{th} x)}{(1-\sqrt{2}\operatorname{th} x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\sqrt{2}}{8}\,\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}^2 x}\,\frac{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x+1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-2\operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x(1-2\operatorname{th}^2 x)}$$

$$= \frac{1-2\operatorname{th}^2 x+1}{2\operatorname{ch}^2 x(1-2\operatorname{th}^2 x)} = \frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x(1-2\operatorname{th}^2 x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x(\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{sh}^2 x)}$$

$$= \frac{1}{(1+\operatorname{sh}^2 x)(1-\operatorname{sh}^2 x)} = \frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}.$$

Пример 6.6. Намерете производните на функциите:

а) $y = x^{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}$; в) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \operatorname{Argsh} x$;

б) $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$; г) $y = \operatorname{Argsh}(\operatorname{tg} x)$.

Решение. а) (вж. (6.7)) $y = x^{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}} \iff \ln y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\ln x$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\,\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\ln x + \frac{1}{x}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow y' = x^{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}\left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{x}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right);$$

б) По формула $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \Longrightarrow y' = \dfrac{(\operatorname{ch} x)'}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$;

в) $y' = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$

Забележка: По дефиниция $\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow y' = 0$;

г) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \dfrac{1}{\cos^2 x \dfrac{1}{\cos x}} = \dfrac{1}{\cos x}.$

Пример 6.7. Намерете производните на функциите

а) $y = \dfrac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; б) $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$; в) $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-x^2}}$.

Решение. а) $y = \dfrac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3} \Longleftrightarrow \ln y = 2\ln(x-2) + \dfrac{1}{3}\ln(x+1) - 3\ln(x-5)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x-5} \Longrightarrow y' = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}\left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x-5}\right);$$

б) $\ln y = 3\ln x + x^2 + \ln(\sin 2x) \Longrightarrow \dfrac{1}{y}y' = \dfrac{3}{x} + 2x + \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}$

$$\Longrightarrow y' = x^3 e^{x^2} \sin 2x \left(\frac{3}{x} + 2x + 2\operatorname{cotg} 2x\right) = x^2 e^{x^2} \sin 2x (3 + 2x^2 + 2x\operatorname{cotg} 2x);$$

в) $\ln y = \dfrac{1}{2}\left[\ln x + \ln\sin x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)\right] \Longrightarrow \dfrac{1}{y}y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{x}{1-x^2}\right)$

$$\Longrightarrow y' = \frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{cotg} x - \frac{x}{1-x^2}\right).$$

Пример 6.8. Докажете, че функцията $y = f(x)$ удовлетворява равенството:

а) $y = \ln \dfrac{1}{1+x}$, $\quad xy' + 1 = e^y$;

б) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (1-x^2)y' - xy = 1$.

Решение. а) * Диференцираме функцията

$$y = \ln\frac{1}{1+x} \Longrightarrow y' = (1+x)\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = -\frac{1}{1+x}.$$

$**$ Заместваме в лявата страна на равенството

$$xy'+1=x\Big(-\frac{1}{1+x}\Big)+1=-\frac{x}{1+x}+1=\frac{-x+1+x}{1+x}=\frac{1}{1+x}$$

От $y=\ln\dfrac{1}{1+x}\Longrightarrow\dfrac{1}{1+x}=e^y\Longrightarrow e^y=e^y$.

б) $*\ y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Longrightarrow y'=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$**\ (1-x^2)y'-xy=\frac{(1-x^2)(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=1\Longrightarrow 1=1.$$

Пример 6.9. Изчислете сумата: $S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

Решение. $S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=(x)'+(x^2)'+(x^3)'+\cdots+(x^n)'$

$$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)'=\Big(x\frac{x^n-1}{x-1}\Big)'=\Big(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\Big)'$$

$$=\frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(n+1)x^{n+1}-x-(n+1)x^n+1-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Пример 6.10. Намерете (непосредствено) първия диференциал на функцията:

а) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{x-1}$ б) $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) $dy=d\Big(\arcsin\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{x-1}\Big)=d\Big(\arcsin\dfrac{1}{x}\Big)+d\Big(\dfrac{x^2}{x-1}\Big)$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}d\Big(\frac{1}{x}\Big)+\frac{(x-1)dx^2-x^2d(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)dx+\frac{2x(x-1)dx-x^2dx}{(x-1)^2}$$

$$=\Big[-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\Big]dx=y'dx;$$

б) $dy = d\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{2}{\sqrt{3}}d\Big(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\dfrac{(2x+1)^2}{3}}d\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{3+(2x+1)^2}d\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$= \frac{4.3dx}{3(4x^2+4x+4)} = \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Пример 6.11. Намерете диференциалите на функциите (чрез формула 6.3):

а) $y = (x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$; б) $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$; в) $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)$;

г) $y = 3\arcsin x - 4\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\arccos x - \dfrac{7}{2}\operatorname{arctg} x$.

Решение. Прилагаме формула (6.3): $dy = y'dx$.

а) $y' = (2x+4)(x^2-\sqrt{x}) + (x^2+4x+1)\Big(2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big)$

$$= 4x^3+12x^2+2x-\frac{5x\sqrt{x}}{2}-6\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Longrightarrow dy = \Big(4x^3+12x^2+2x-\frac{5}{2}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)dx;$$

б) $y' = \dfrac{3x^2(x^3-1)-3x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^2} = -\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2} \Longrightarrow dy = -\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2}dx$;

в) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)}\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)}\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}} \Longrightarrow dy = -\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}dx$;

г) $y' = \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4}{1+x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{7}{2(1+x^2)} = \dfrac{5}{2\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{2(1+x^2)}$

$$\Longrightarrow dy = \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{(1+x^2)}\Big)dx.$$

Пример 6.12. Покажете, че функцията $y = \dfrac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ удовлетворява равенството $2x^2dy = (x^2y^2+1)dx$.

Решение. $*$ Намираме y' и dy:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(x - x\ln x) - \left(1 - \ln x - x\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{1 - \ln x + \ln x + \ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$= \frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2} \Longrightarrow dy = \frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln^2 x)}dx.$$

$**$ Заместваме dy и y в равенството

$$\frac{2x^2(1+\ln^2 x)}{x^2(1-\ln x)^2}dx = \left(x^2\,\frac{(1+\ln x)^2}{(x - x\ln x)^2} + 1\right)dx$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2(1+\ln^2 x)}{(1-\ln x)^2}dx = \left(\frac{(1+\ln x)^2}{(1-\ln x)^2} + 1\right)dx$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2(1+\ln^2 x)}{(1-\ln x)^2}dx = \frac{2(1+\ln^2 x)}{(1-\ln x)^2}dx.$$

ЗАДАЧИ

I. *Намерете* производната на функцията:

1. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$ — Отг. $y' = x^2 - 4x + 4$
2. $y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2$ — Отг. $y' = x^3 - 2x$
3. $y = x + 2\sqrt{x}$ — Отг. $y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
4. $y = x^2 - \frac{1}{2x^2}$ — Отг. $y' = 2x + \frac{1}{x^3}$
5. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$ — Отг. $y' = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$
6. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$ — Отг. $y' = \frac{1 + 2x + 3x^2 - 2x^3 - x^4}{(x^3+1)^2}$
7. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$ — Отг. $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} - \frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$
8. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ — Отг. $y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$
9. $y = \sin x + \cos x$ — Отг. $y' = \cos x - \sin x$
10. $y = x\sin x + \cos x$ — Отг. $y' = x\cos x$
11. $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$ — Отг. $y' = \frac{3}{2}\sin 2x(2 - \sin x)$
12. $y = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + x$ — Отг. $y' = \mathrm{tg}^4 x$

13. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$ Отг. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$

14. $y = \sin^2(\cos 3x)$ Отг. $y' = -3\sin 3x \sin(2\cos 3x)$

15. $y = x^3\sin 2x + \operatorname{cotg}^2(3x-1)$ Отг. $y' = 3x^2\sin 2x + 2x^3\cos 2x - \dfrac{6\operatorname{cotg}(3x-1)}{\sin^2(3x-1)}$

16. $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ Отг. $y' = \dfrac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

17. $y = \dfrac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$ Отг. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

18. $y = \arcsin\dfrac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\sin x}$ Отг. $y' = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$

19. $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ Отг. $y' = -\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$

20. $y = x^n\ln x$ Отг. $y' = x^{n-1}(n\ln x + 1)$

21. $y = \ln\arccos 2x$ Отг. $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$

22. $y = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$ Отг. $y' = \dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$

23. $y = \sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$ Отг. $y' = \dfrac{\operatorname{cotg}\dfrac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\dfrac{x+3}{4}}}$

24. $y = x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \dfrac{1}{2}(\arcsin x - x)$ Отг. $y' = \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$

25. $y = e^x\cos x$ Отг. $y' = e^x(\cos x - \sin x)$

26. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ Отг. $y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}(\ln 2)(2^{\frac{x}{\ln x}})$

27. $y = e^{\frac{1}{\ln x}} + \dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} + \arcsin\sqrt{\sin x} + e^{\cos\frac{\pi}{4}}$

Отг. $y' = \dfrac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x} + 2\dfrac{\sin x(2\cos x - \cos 2x)}{(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x(1-\sin x)}}$

28. $y = \dfrac{1}{x}\operatorname{ch} 2x + \sqrt{x}\operatorname{sh} 2x$ Отг. $y' = \dfrac{x(4+\sqrt{x})\operatorname{sh} 2x + 2(2x^2\sqrt{x}-1)\operatorname{ch} 2x}{2x^2}$

29. $y = \sqrt[x]{1-\ln x}$ Отг. $y' = -\dfrac{(1-\ln x)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{1-\ln x} + \ln(1-\ln x)\right)}{x^2}$

30. $y = \sqrt[x]{\operatorname{arctg} x}$ Отг. $y' = \dfrac{\sqrt[x]{\operatorname{arctg} x}}{x^2}\left(\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} - \ln\operatorname{arctg} x\right)$

31. $y = (x^2+1)^{\sin x}$ Отг. $y' = (x^2+1)^{\sin x}\left(\dfrac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x\ln(x^2+1)\right)$

32. $y = 2x^{\sqrt{x}}$ Отг. $y' = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$

33. $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ Отг. $y' = \dfrac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\,\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

34. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ Отг. $y' = \dfrac{x^2}{1-x^4}$

35. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$ Отг. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

36. $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{cotg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$ Отг. $y' = -\cos 2x$

37. $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ Отг. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

38. $y = \dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$ Отг. $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

39. $y = \ln(e^x\cos x + e^{-x}\sin x)$ Отг. $y' = \dfrac{2(\cos x - \sin x)\operatorname{ch} x}{e^x\cos x + e^{-x}\sin x}$

40. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$ Отг. $y' = \dfrac{7}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$

41. $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{cotg} x\ln(1+\sin x) - x$ Отг. $y' = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$

42. $y = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$ Отг. $y' = \dfrac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$

43. $y = \ln(x\sin x\sqrt{1-x^2})$ Отг. $y' = \dfrac{1}{x} + \operatorname{cotg} x - \dfrac{x}{1-x^2}$

44. $y = \dfrac{\sin x}{4\cos^4 x} + \dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \dfrac{3}{8}\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$ Отг. $y' = \dfrac{1}{\cos^5 x}$

45. $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ Отг. $y' = (\arcsin x)^2$

46. $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ Отг. $y' = \operatorname{th} x$

47. $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$ Отг. $y' = \dfrac{1}{x^3+1}$

48. $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ Отг. $y' = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

49. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

Отг. $y' = \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

50. $y = -\dfrac{x}{1+8x^3} + \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-1}{\sqrt{3}}$ Отг. $y' = \dfrac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$

51. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$ Отг. $y' = \left(2x - \dfrac{1}{1+x^2}\right)\dfrac{y}{\sqrt{x}}$

52. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{cotg} \frac{x}{2}}$ Отг. $y' = y\left(\dfrac{4\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}}{\sin 4x} - \dfrac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}\right)$

53. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$ Отг. $y' = \dfrac{3x^2 + 10x + 20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2\sqrt[5]{x^2+4}}}$

54. $y = \arccos \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ Отг. $y' = -\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$

II. *Докажете*, че функцията $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$ удовлетворява равенството $2y = xy' + \ln y'$

III. *Изчислете* сумата $S = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2}$.

Отг. $S = \dfrac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$

IV. *Намерете* диференциала на функцията:

1. $y = 2x - \sin 2x$ Отг. $dy = 4\sin^2 x dx$

2. $y = \dfrac{a}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ Отг. $dy = -\dfrac{a^2}{x^2(a^2+x^2)}dx$

3. $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$ Отг. $dy = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

4. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$ Отг. $dy = \dfrac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}$

V. *Покажете*, че функцията y, определена от уравнението $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ удовлетворява равенството

$$x(dy - dx) = y(dy + dx).$$

ПРОИЗВОДНИ И ДИФЕРЕНЦИАЛИ ОТ ПО-ВИСОК РЕД. ФОРМУЛА НА ЛАЙБНИЦ

I. ПРОИЗВОДНИ НА ФУНКЦИЯТА $y = f(x)$ ОТ ПО-ВИСОК РЕД

Дефиниция 1 *Ако $f(x)$ е диференцируема функция в някакъв интервал, т.е. $\exists f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ и ако $f'(x)$ е също диференцируема, то $\exists f''(x) = [f'(x)]' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$, която се нарича **втора производна** на $f(x)$.*

Аналогично $f'''(x) = [f''(x)]'$, $f^{\text{iv}}(x) = [f'''(x)]', \dots,$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}.$$

Така е дефинирана производна на $f(x)$ от n-ти ред, която очевидно съществува, ако съществуват всички производни до (n-1)-и ред, вкл., и $f^{(n-1)}(x)$ е диференцируема (за удобство $f(x) = f^{(0)}(x)$ - нулева производна).

Пример 7.1. Намерете производните от по-висок ред на функциите:

а) $y = x^2 - 3x + 2,\ y'' =?$ г) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ f''(1) =?$

б) $y = (x+10)^6,\ y'''(2) =?$ д) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ y'' =?$

в) $f(x) = e^{2x-1},\ f''(0) =?$ е) $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x,\ y'' =?$

Решение. а) $y' = 2x - 3$, $y'' = 2$;

б) $y' = 6(x+10)^5, y'' = 5.6(x+10)^4, y''' = 4.5.6(x+10)^3 = 120(x+10)^3 \Longrightarrow y'''(2) = 120.12^3 = 12^4.10;$

в) $f'(x) = e^{2x-1}.2,\ f''(x) = 2e^{2x-1}.2 = 4e^{2x-1} \Longrightarrow f''(0) = \dfrac{4}{e};$

г) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow f''(1) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2};$

д) $y' = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ y'' = -\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.2x = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}};$

e) $y'=\dfrac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+1,\ y''=-\dfrac{\left(\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}x\arcsin x}{1-x^2}$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

II. ДИФЕРЕНЦИАЛИ НА $y = f(x)$ ОТ ПО-ВИСОК РЕД

$dy = f'(x)dx$ - първи диференциал на $f(x)$

$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx = f''(x)dx^2$ - втори диференциал

....

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \tag{7.1}$$

Ще намерим производни от n-ти ред на някои функции:

1. $y = e^{kx}$	2. $y = \sin x$	3. $y = \ln x$
$y' = ke^{kx}$	$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$	$y' = \frac{1}{x} = (-1)^0\frac{0!}{x}$
$y'' = k^2e^{kx}$	$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$	$y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1\frac{1!}{x^2}$
		....
$y^{(n)} = k^ne^{kx}$	$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$	$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

Последните три резултата са верни $\forall n \in \mathbb{N}$, след като се докажат по метода на пълната математическа индукция (вж. гл. 1).

III. ОБОБЩЕНИЕ НА ПРАВИЛАТА ЗА ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

Дадени са $u(x)$ и $v(x)$, които са диференцируеми функции до n-ти ред (вкл.).

A. Производни на сума $u(x) + v(x)$

$(v + v)' = u' + v'$

$(u + v)'' = u'' + v''$

....

$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$;

Б. Производни на произведение $u(x)v(x)$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv'' = \binom{2}{0}u''v + \binom{2}{1}u'v' + \binom{2}{2}uv''$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(uv)^{(n)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v^{(0)} + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \binom{n}{n}u^{(0)}v^{(n)}$$

И така,

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k)}, \tag{7.2}$$

където

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Доказателството на (7.2) - *формула на Лайбниц*, става по метода на пълната математическа индукция (вж. гл. 1).

Пример 7.2. Пресметнете $(x\sin x)^{(100)}$, като приложите (7.2).

Решение. Означаваме $f(x) = (x\sin x)^{(100)}$. Тогава

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{100}{0}(\sin x)^{(100)}x^{(0)} + \binom{100}{1}(\sin x)^{(99)}x' + \binom{100}{2}(\sin x)^{(98)}.0 + 0 + \cdots \\ &= x\sin(x + 100\tfrac{\pi}{2}) + 100\sin(x + 99\tfrac{\pi}{2}) = x\sin(x + 50\pi) + 100\sin[x + (100-1)\tfrac{\pi}{2}] \\ &= x\sin x + 100\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 100\frac{\pi}{2}\right] = x\sin x - 100\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= x\sin x - 100\cos x. \end{aligned}$$

В. Производни на съставна функция

Ако $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ - достатъчно пъти диференцируема, то $y = F(x) = f[\varphi(x)]$ е *съставна функция* на x. Тогава

$$F'(x) = f'(u)u'(x), \text{ където } f'(u) \text{ е съставна функция}$$

$$F''(x) = f''(x)[u'(x)]^2 + f'(x)u''(x)$$

$$F'''(x) = f'''(u')^3 + 3f''u'u'' + f'u''' \text{ и т.н.}$$

Забележка (инвариантно свойство на dy):

$$dy = F'(x)dx = [f'(u)u'(x)]dx = f'(u)[u'(x)dx] = f'(u)du,$$

т.е. *dy се изразява по една и съща формула* независмо дали y се разглежда като функция на независима променлива x или на зависима променлива u (dy има инвариантна форма).

Това свойство не важи за диференциал от по-висок ред. Например:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(u)du] = du\, d[f'(u)] + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

IV. ПРОИЗВОДНИ НА ОБРАТНА ФУНКЦИЯ

Нека е дадена функция $y = f(x)$, а $x \in \bar{f}(y)$ е нейната обратна. Известно е, $\bar{f}'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, където лявата страна е съставна функция на x, и като диференцираме по x, получаваме:

$$\bar{f}''(y)y' = -\frac{1}{(f'(x))^2}f''(x) \Longrightarrow \bar{f}''(y) = -\frac{1}{(f'(x))^3}f''(x) \quad \text{и т.н.}$$

V. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ, ЗАДАДЕНА ПАРАМЕТРИЧНО

Дефиниция 2 *Съвкупността от точки $M(x, y)$, чиито координати удовлетворяват уравненията* $\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ *, където t е параметър, се нарича **крива линия** в равнината.*

Ако е възможно и определим обратната функция $t = t(x)$, получаваме съставна функция $y = y[t(x)]$, на която ще намерим y'_x. Означаваме $x'_t = \dot{x}$, $y'_t = \dot{y}$.

$$\left.\begin{array}{l} * \; y'_x = y'_t[t(x)]t'(x) = \dot{y}[t(x)]t'(x) \\ * \text{ от } x[t(x)] \equiv x \Longrightarrow \dot{x}[t(x)]t'(x) = 1 \Longrightarrow t'(x) = \dfrac{1}{\dot{x}[t(x)]} \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{7.3}$$

$$* \;\; y''\dot{x} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \Longrightarrow y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \quad \text{и т.н.}$$

Желателно е да се запомни само формула (7.3) и чрез последователно диференциране да се намират y'', y''', y^{IV}, ... и т.н.

Пример 7.3. Намерете n-тата производна на функцията:

а) $y = f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; в) $y = \sin ax \cos bx$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$; г) $y = \cos^4 ax + \sin^4 ax$.

Решение. а) Ще използваме означенията: $1.2.3...n = n!$, $1.3.5.7...(2n-1) = (2n-1)!!$ и $2.4.6.8...2n = (2n)!!$. Тогава

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},\ y'' = \frac{1.3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}}, \dots, y^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}} \tag{1}$$

* проверяваме (1) при $n = 1$: $y' = (-1)\frac{1!!}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

* допускаме, че формула (1) е вярна при $n = k$, т.е.

$$y^{(k)} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k} x^{-\frac{2k+1}{2}};$$

* ще докажем, че (1) е вярна при $n = k+1$, т.е.

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= [y^{(k)}]' = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k}\left(-\frac{2k+1}{2}x^{-\frac{2k+1}{2}-1}\right) \\ &= (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k}(-1)\frac{2k+1}{2}x^{-\frac{2k+3}{2}} = (-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}x^{-\frac{2k+3}{2}}. \end{aligned}$$

Тогава по метода на пълната математическа индукция формула (1) е вярна при $n = k+2, k+3, \dots$, т.е. $\forall k \in \mathbb{N}$;

б) Разлагаме функцията в сума от елементарни дроби:

$$y = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3},$$

като намираме $A = -2$, $B = 3$. Тогава

$$y = (-2)(x-2)^{-1} + 3(x-3)^{-1} = -2u + 3v \Longrightarrow y^{(n)} = -2u^{(n)} + 3v^{(n)}$$

$$\begin{array}{ll} u = (x-2)^{-1} & v = (x-3)^{-1} \\ u' = (-1)(x-2)^{-2} = -\dfrac{1}{(x-2)^2} & v' = (-1)(x-3)^{-2} = -\dfrac{1}{(x-3)^2} \\ u'' = 1.2(x-2)^{-3} = (-1)^2\dfrac{1.2}{(x-2)^3} & v'' = 1.2(x-3)^{-3} = (-1)^2\dfrac{1.2}{(x-3)^3} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ u^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!}{(x-2)^{n+1}} & v^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!}{(x-3)^{n+1}} \end{array}$$

Тогава

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{3}{(x-3)^{n+1}} - \frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right],$$

която формула трябва да се докаже по метода на пълната математическа индукция (вж. а));

в) Написваме $y = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] = \frac{1}{2}(u+v)$. Тогава

$$u' = (a+b)\cos(a+b)x = (a+b)\sin[(a+b)x + \frac{\pi}{2}]$$

$$u'' = (a+b)^2[-\sin(a+b)x] = (a+b)^2\sin[(a+b)x + 2\frac{\pi}{2}]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(n)} = (a+b)^n\sin[(a+b)x + n\frac{\pi}{2}].$$

Аналогично получаваме $v^{(n)} = (a-b)^n\sin[(a-b)x + n\frac{\pi}{2}]$. Тогава

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}[u^{(n)}+v^{(n)}] = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n\sin\left((a+b)x+n\frac{\pi}{2}\right)+(a-b)^n\sin\left((a-b)x+n\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

г) При четни степени постъпваме така:

$$y = (\cos^2 ax + \sin^2 ax)^2 - 2\cos^2 ax\sin^2 ax = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2ax$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{1-\cos 4ax}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4ax}{4}.$$

Тогава

$$y' = \frac{4a}{4}(-\sin 4ax) = \frac{4a}{4}\cos\left(4ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \frac{(4a)^2}{4}(-\cos 4ax) = \frac{(4a)^2}{4}\cos\left(4ax + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \frac{(4a)^n}{4}\cos\left(4ax + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Последната формула е вярна $\forall n \in \mathbb{N}$ (доказва се по метода на пълната математическа индукция).

Пример 7.4. Покажете, че функцията $y = e^x\sin x$ удовлетворява обикновеното диференциално уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Решение. Намираме y' и y'' и заместваме в уравнението:

$$y' = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x\cos x$$

$$\Longrightarrow 2e^x\cos x - 2e^x(\sin x + \cos x) + 2e^x\sin x = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0.$$

Пример 7.5. Намерете втория диференциал d^2y на функцията:

а) $y = e^x \ln x + \operatorname{arctg} x$; б) $y = \arcsin \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{x-1}$; в) $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) Намираме y' и y'' и заместваме в (7.1):

$$y' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$y'' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x \frac{1}{x} + e^x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Longrightarrow d^2y = \left[e^x \ln x + e^x \frac{2x-1}{x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right] dx^2 \quad (n=2);$$

б) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{(x-1)^2} + 1;$$

$$y'' = \frac{1}{x^2(x^2-1)}\left(\sqrt{x^2-1} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow d^2y = \left(\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(x-1)^3}\right)dx^2;$$

в) $$y' = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$y'' = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \Longrightarrow d^2y = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx^2.$$

Пример 7.6. Намерете n-тата производна на функцията:

а) $y = x^2 e^{ax}$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = x^2 \ln x$.

Решение. а) Нека $y = e^{ax} x^2 = uv$. Ще приложим (7.2):

$$\begin{array}{ll} u' = ae^{ax} & v' = 2x \\ u'' = a^2 e^{ax} & v'' = 2 \\ \cdots\cdots\cdots & v''' = 0 \\ u^{(n)} = a^n e^{ax} & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$\Longrightarrow y^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \binom{n}{3} u^{(n-3)}.0 + 0$$

$$= a^n e^{ax} x^2 + n a^{n-1} e^{ax} 2x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} e^{ax} 2$$

$$= a^{n-2} e^{ax} [a^2 x^2 + 2anx + n(n-1)];$$

б) Означаваме $u = e^x$, $v = \sin x$ (или обратно) и прилагаме формула (7.2):

$$\begin{array}{ll} u' = e^x & v' = \cos x = \sin(x + \pi/2) \\ u'' = e^x & v'' = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u^{(n)} = e^x & v^{(n)} = \sin(x + n\pi/2) \end{array}$$

$$\Longrightarrow y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^x \left[\sin x + n \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \sin(x+\pi) + \dots + \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

в) Полагаме $u = \ln x$, $v = x^2$ и по (7.2) имаме:

$$\begin{array}{ll} u' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} & v' = 2x \\ u'' = -\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} & v'' = 2 \\ u''' = -\dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{1.2}{x^3} & v''' = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u^{(n)} = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{x^n} & v^{(n)} = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} x^2 + n(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} 2x + \frac{n(n-1)}{2!} (-1)^{n-1} \frac{(n-3)!}{x^{n-2}} 2 + 0$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(n-3)!}{x^{n-2}} [(n-1)(n-2) - 2n(n-2) + n(n-1)]$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2(n-3)!}{x^{n-2}}.$$

Забележка. Намерените производни от n-ти ред са верни $\forall n \in \mathbb{N}$, след като се докажат по метода на пълната математическа индукция.

Пример 7.7. Изчислете $y^{(n)}(0)$:

а) $y = \dfrac{3x+2}{x^2 - 2x + 5}$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$.

Решение. а) По условие имаме $y(x^2 - 2x + 5) = 3x + 2$. Диференцираме това тъждество n пъти по формулата на Лайбниц:

$$y^{(n)}(x^2 - 2x + 5) + ny^{(n-1)}(2x - 2) + n(n-1)y^{(n-2)} = 0.$$

При $x = 0$ получаваме

$$5y^{(n)}(0) - 2ny^{(n-1)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0,$$

или за $y^{(n)}(0)$ извеждаме рекурентната формула:

$$y^{(n)}(0) = \frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0) - \frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0), \qquad n \geq 2.$$

Непосредствено намираме $y(0) = \dfrac{2}{5}$.

От $y'(x^2 - 2x + 5) + (2x - 2)y = 3$ намираме $y'(0)$:

$$5y'(0) - 2.\frac{2}{5} = 3 \Longrightarrow y'(0) = \frac{19}{25}.$$

Полагайки в изведената рекурентна връзка последователно $n = 2, 3, \ldots$, получаваме

$$y''(0) = \frac{2}{5}.2.y'(0) - \frac{2}{5}y(0) = \frac{2}{5}\left(\frac{38}{25} - \frac{2}{5}\right) = \frac{56}{125};$$
$$y'''(0) = \frac{2}{5}.3.y''(0) - \frac{3.2}{5}y'(0) = \frac{6}{5}\left(\frac{56}{125} - \frac{19}{25}\right) = -\frac{234}{625} \text{ и т.н.}$$

б) $y' = \dfrac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow y'(1+x^2) = 1$. Диференцираме това равенство $(n-1)$ пъти посредством формулата на Лайбниц и получаваме

$$y^{(n)}(1+x^2) + (n-1)y^{(n-1)}2x + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0, \quad n \geq 2.$$

След като положим $x = 0$, извеждаме рекурентната връзка

$$y^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$$

в) Тъй като

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{1-x^2} \Longrightarrow xy' = y''(1-x^2).$$

Диференцираме посредством формулата на Лайбниц $n-2$ пъти

$$y^{(n)}(1-x^2) + (n-2)y^{(n-1)}(-2x) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}y^{(n-2)}(-2) = y^{(n-1)}x + (n-2)y^{(n-2)}.$$

Полагаме $x = 0 \Longrightarrow y^{(n)}(0) - (n-2)(n-3)y^{(n-2)}(0) = (n-2)y^{(n-2)}(0)$, или

$$y^{(n)}(0) = (n-2)^2y^{(n-2)}(0), \quad n \geq 3, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$$

Пример 7.8. Намерете производната на съставната функция:

а) $y = \sqrt[3]{u^2 + 5u}, \qquad u = x^3 + 2x + 1, \qquad y' = ?$

б) $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2}, \qquad u = \arcsin v, \; v = \cos 2x, \qquad y' = ?$

Решение. а) Прилагаме формулата за производна на съставна функция $y'_x = y'_u u'_x$ и получаваме

$$y'_x = \frac{1}{3}(u^2+5u)^{-\frac{2}{3}}(2u+5)(3x^2+2) = \frac{(2u+5)(3x^2+2)}{3\sqrt[3]{(u^2+5u)^2}};$$

б) $y'_x = y'_u u'_v v'_x$

$$\Longrightarrow y'_x = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}} \frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-2\sin 2x) = -\frac{2\sin 2x}{\sin u\sqrt{1-v^2}}.$$

Пример 7.9. Напишете параметричните уравнения и намерете първата производна на функцията $y = f(x)$, зададена в неявен вид $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (декартов лист).

Решение. Полагаме в даденото уравнение $y = xt$:

$$x^3 + x^3t^3 - 3ax^2t = 0 \,/ : x^2 \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{3at}{1+t^3}, \; y = xt = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Параметричните уравнения на кривата са:

$$\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{array}\right. \longrightarrow \left|\begin{array}{l} \dot{x} = 3a\dfrac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \\ \dot{y} = 3a\dfrac{2t(1+t^3)-3t^4)}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \end{array}\right. \Longrightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Пример 7.10. Намерете производната на функцията $f(x)$, зададена с параметричните уравнения:

а) $f(x) = \left|\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right., \; y' = ? \qquad$ б) $y = f(x) = \left|\begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array}\right., \; y', \, y'' = ?$

Решение. а) *I начин*: От $x^2+y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$ следва, че параметричните уравнения определят централна окръжност с $r = a$. По формула (7.3) имаме

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = a\cos t \end{array}\right. \longrightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{cotg} t = \varphi(t).$$

От $\dfrac{x}{a} = \cos t \Longrightarrow t = \arccos\dfrac{x}{a} \; \left(-1 \le \dfrac{x}{a} \le 1, \; 0 \le t \le \pi\right)$

$$\Longrightarrow y' = -\operatorname{cotg}\left(\arccos\tfrac{x}{a}\right) = -\frac{\cos(\arccos\frac{x}{a})}{\sin(\arccos\frac{x}{a})}$$

$$= -\frac{x/a}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{x}{a})}} = -\frac{x}{a\sqrt{1-x^2/a^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

II начин: От $y = a\sin(\arccos\dfrac{x}{a})$

$$\Longrightarrow y' = a\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\frac{-1/a}{\sqrt{1-x^2/a^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

б) Функцията $f(x)$ определя равнинна крива (*циклоида*) със скаларни параметрични уравнения. По формула (7.3) имаме:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = a(1-\cos t)\\ \dot{y} = a\sin t\end{array}\right. \longrightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}.$$

Полученото равенство диференцираме по t:

$$y''\dot{x} = -\frac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} \Longrightarrow y'' = -\frac{1}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

Ако диференцираме отново по t, ще получим y''' и т.н.

Пример 7.11. Намерете $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ на функцията $f(x)$, зададена с параметричните си уравнения:

$$\text{а)}\left|\begin{array}{l}x = t^2\\ y = t+t^3\end{array}\right.; \qquad \text{б)}\left|\begin{array}{l}x = e^{2t}\\ y = e^{3t}\end{array}\right..$$

Решение. а) По формула (7.3) имаме

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = 2t\\ \dot{y} = 1+3t^2\end{array}\right. \Longrightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1+3t^2}{2t} = \frac{1}{2t}+\frac{3}{2}t.$$

За параметрично зададена функция имаме $y^{(n)} = \dfrac{(y^{(n-1)})'_t}{\dot{x}}$. Тогава

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{\left(\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{2}t\right)'_t}{2t} = \frac{-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{3}{2}}{2t} = \frac{3t^2-1}{4t^3};$$

$$\text{б)}\left|\begin{array}{l}\dot{x} = 2e^{2t}\\ \dot{y} = 3e^{3t}\end{array}\right. \Longrightarrow y' = \frac{3e^{3t}}{2e^{2t}} = \frac{3}{2}e^t \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{\left(\dfrac{3}{2}e^t\right)'_t}{2e^{2t}} = \frac{3}{4}e^{-t}.$$

ЗАДАЧИ

I. *Намерете* втората производна на функцията:

1. $y = xe^{x^2}$ Отг. $y'' = 2e^{x^2}(3x + 2x^3)$

2. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$ Отг. $y'' = \dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$

3. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$ Отг. $y'' = \dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$

4. $y = x^x$ Отг. $y'' = x^x\left[(\ln x + 1)^2 + \dfrac{1}{x}\right]$

5. $y = \arcsin(a \sin x)$ Отг. $y'' = \dfrac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$

II. *Намерете* производната от n-ти ред на функцията:

1. $y = \sin^2 x$ Отг. $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. $y = xe^x$ Отг. $y^{(n)} = e^x(x+n)$

3. $y = x\ln x$ Отг. $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}\ (n \geq 2)$

4. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ Отг. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{2i}\left(\dfrac{1}{(x-i)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+i)^{n+1}}\right)$

5. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ Отг. $y^{(n)} = (-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$

6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ Отг. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{2^n}(2n-1)!!(x-1)^{-\frac{2n+1}{2}}$

7. $y = \operatorname{sh} x$ Отг. $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}(e^x - (-1)^n e^{-x})$

III. *Намерете* производната от n-ти ред на функцията с помощта на формулата на Лайбниц:

1. $y = (x^2+1)\sin x$

   Отг. $y^{(n)} = (x^2+1)\sin(x + n\dfrac{\pi}{2}) + 2nx\sin(x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}) + n(n-1)\sin(x+(n-2)\dfrac{\pi}{2})$

2. $y = e^x \sin x$ Отг. $y^{(n)} = e^x \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(x + k\dfrac{\pi}{2})$

3. $y = (x^2 - x)e^x$ Отг. $y^{(n)} = e^x(x^2 + (2n-1)x + n^2 - 2n)$

4. $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ Отг. $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$

5. $y = x^n \ln x$ Отг. $y^{(n)} = n!\left(\ln x + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$

IV. *Намерете* производната на параметрично зададената функция:

1. $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{1}{t^2-1} \end{array} \right.$, $y' = ?$ Отг. $y' = \dfrac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}$

2. $\left| \begin{array}{l} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{array} \right.$, $y' = ?$ Отг. $y' = \dfrac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$

3. $\left| \begin{array}{l} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{array} \right.$, $y'' = ?$ Отг. $y'' = 0$

4. $\left| \begin{array}{l} x = a\cos 3t \\ y = a\sin 3t \end{array} \right.$, $y''' = ?$ Отг. $y''' = \dfrac{-3a^2x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

5. $\left| \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array} \right.$, $y''' = ?$ Отг. $y''' = \dfrac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t \sin^3 t}$

6. $\left| \begin{array}{l} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{array} \right.$, $y'' = ?$ Отг. $y'' = 4t^2$

7. $\left| \begin{array}{l} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{array} \right.$, $y'' = ?$ Отг. $y'' = -\dfrac{2}{1-t^2}$

8. $\left| \begin{array}{l} x = at\cos t \\ y = at\sin t \end{array} \right.$, $y'' = ?$ Отг. $y'' = \dfrac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}$

V. *Намерете* производната на съставната функция относно независимата променлива:

1. $y = \cos^2 u$, $u = \dfrac{x^2-1}{4}$ Отг. $y' = -\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x^2-1}{2}$

2. $y = 3^{-\frac{1}{u}}$, $u = \ln \operatorname{tg} x$ Отг. $y' = \dfrac{2.3^{-\frac{1}{\ln \operatorname{tg} x}}\ln 3}{\ln^2 \operatorname{tg} x . \sin 2x}$

3. $y = e^u$, $u = \dfrac{1}{2}\ln v$, $v = 2x^2 - 3x + 1$ Отг. $y' = \dfrac{e^u(4x-3)}{2v}$

VI. *Покажете*, че, ако $y = (1-x)^{-a}e^{-ax}$, то

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = axy.$$

VII. Функцията $y = e^{a\arcsin x}$ удовлетворява равенството $(1-x^2)y'' - xy' - a^2y = 0$. Приложете формулата на Лайбниц и диференцирайте n пъти, за да докажете, че

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - (n^2+a^2)y^{(n)} = 0.$$

VIII. *Докажете*, че функцията $y = \arcsin x$ удовлетворява равенството $(1-x^2)y'' = xy'$ и намерете $y^{(n)}(0)$, $n \geq 2$.

Отг. $y^{(2n)}(0) = 0$, $y^{(2n+1)}(0) = ((2n-1)!!)^2$

IX. *Покажете*, че функцията $y = f(x)$, зададена с параметричните си уравнения $y = e^t\cos t$, $x = e^t\sin t$ удовлетворява равенството $y''(x+y)^2 = 2(xy'-y)$.

X. *Докажете*, че, ако $x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t$, $y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t$, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f(t) + f''(t)]^2 dt^2.$$

ГЛАВА 8

ТЕОРЕМИ ЗА КРАЙНИТЕ НАРАСТВАНИЯ. ФОРМУЛИ НА ТЕЙЛОР И МАКЛОРЕН

I. ТЕОРЕМИ ЗА КРАЙНИТЕ НАРАСТВАНИЯ И СЛЕДСТВИЯ

Теорема 1 *(на Рол). Ако функция $f(x)$ отговаря на условията:*

а) $f(x) \in C[a,b]$ *– непрекъсната функция;*

б) $\exists\, f'(x)$ *поне в* (a,b) *– съществува допирателна* t *в точка;*

в) $f(a) = f(b)$,

тогава $\exists\, \xi \in (a,b)$ *така, че* $f'(\xi) = 0$.

Геометрично тълкуване

1. $f'(\xi) = k_t = 0$ означава тангента t в точката $[\xi, f(\xi)]$, която е успоредна на оста Ox.
2. От T1 следва, че съществува точка $a < \xi < b$, но може да има и други точки.
3. От T1 следва, че съществува точка ξ, т.е. T1 е типична теорема за съществуване на ξ.

Теорема 2 *(на Коши). Ако функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ отговарят на условията:*

а) $f(x), \varphi(x) \in C[a,b]$ *– непрекъснати функции;*

б) $\exists\, f'(x), \varphi'(x)$ *поне в* (a,b) *– диференцируеми;*

в) $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$,

тогава $\exists\, \xi \in (a,b)$ *така, че*

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}. \tag{8.1}$$

Теорема 3 *(на Лагранж). Ако функцията $f(x)$ отговаря на условията:*

а) $f(x) \in C[a,b]$ *– непрекъсната функция;*

б) $\exists\, f'(x)$ *поне в* (a,b) *– тангентата* t *в точка,* *тогава* $\exists\, \xi \in (a,b)$ *така, че*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{8.2}$$

Геометрично тълкуване

1. $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k_{AB}$, където $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, но $f'(\xi) = k_t$ - тангента към графиката в точка $(\xi, f(\xi))$. Тогава има поне една допирателна $t \parallel AB$.

2. Може да има повече от една допирателна.

Следствия от теоремата на Лагранж

Следствие 1. Ако $f(x)$ е диференцируема $\forall x \in (a,b)$ и $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, то $f(x) = C$.

Следствие 2. Ако $f'(x) = \varphi'(x)$, $\forall x \in [a,b]$, то $f(x) = \varphi(x) + C$.

Пример: Функциите $fx) = \arcsin x$ и $\varphi(x) = -\arccos x$ в $[-1,1]$ имат $f'(x) = \varphi'(x)$. Тогава $f(x) - \varphi(x) = C$, т.е. $\arcsin x + \arccos x = C$. При $x = 0 \Longrightarrow C = \dfrac{\pi}{2}$ и получаваме $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

II. ФОРМУЛИ НА ТЕЙЛОР И МАКЛОРЕН

Нека $f(x)$ е произволна функция, дефинирана в околност на точката $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\exists\, f(x_0)$) и нека съществуват производните ѝ до $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, включително.

Дефиниция 1 *Полином от степен не по-висока от* n, *съответстващ на* $f(x)$ *в точка* x_0

$$T_n(x_0, x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{8.3}$$

ще наричаме ***полином на Тейлор***.

При $x = x_0$ имаме $T(x_0, x_0) = f(x_0)$, като $T'(x_0, x_0) = f'(x_0)$, $T''(x_0, x_0) = f''(x_0)$,..., $T^{(n)}(x_0, x_0) = f^{(n)}(x_0)$, но за $x \neq x_0 \to T_n(x_0, x) \neq f(x_0)$.

Означаваме *грешка* (остатъчен член) $R_n(x_0, x) = f(x) - T_n(x_0, x)$, която се допуска при замяна (*апроксимация*) на $f(x)$ с $T_n(x_0, x)$ в x_0.

Дефиниция 2 ***Формула на Тейлор*** *наричаме*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x. \quad (8.4)$$

Теорема 4 *Ако функция $f(x)$ удовлетворява условията:*

а) $f(x) \in C^n[a,b]$, т.е. $f(x)$ заедно с производните си до n (вкл.) са непрекъснати функции в $[a,b]$;

б) $\exists f^{(n+1)}(x)$ поне в (a,b),

тогава $f(x) = T_n(x_0, x) + \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, $\xi \in (x_0, x) \subset [a,b]$.

Остатъчният член $R_n(x_0, x)$ се представя в *различни форми*:

1°. (по Лагранж): $f(x) - T_n(x_0, x) = \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = R_n(x_0, x)$, $\xi \in (x_0, x)$;

2°. (по Коши): $f(x) - T_n(x_0, x) = \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] = R_n(x_0, x)$, $0 < \theta < 1$;

3°. (по Пеано): $f(x) - T_n(x_0, x) = o[(x - x_0)^n] = R_n(x_0, x)$, $x \to x_0$.

Теорема 5 *(**локална формула на Тейлор**). Ако $f(x)$ има производни до n-ти ред (вкл.) в точката $x_0 \in \mathbb{R}$, в сила е*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + o[(x - x_0)^n], \quad x \to x_0. \quad (8.5)$$

Дефиниция 3 *От (8.4) при $x_0 = 0$ получаваме* ***формула на Маклорен:***

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x), \quad (8.6)$$

където $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, $0 < \theta < 1$ *или* $R_n(x) = 0[x^n]$, $x \to 0$.

Пример 8.1. Може ли да се приложи теорема 1 на Рол за функцията:

а) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ в $[-1, 2]$;

б) $f(x) = 4^{\sin x}$ в $[0, \pi]$;

в) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ в $[-1, 1]$?

Решение. а) $f(x) \in C[-1, 2]$, защото $x \in (-\infty, +\infty)$; $f(x)$ е безброй пъти диференцируема; $f(-1) = f(2) = 0$ и тогава може да се приложи теоремата на Рол, т.е. $f'(\xi) = 0$.

Тогава $f'(x) = 3x^2 + 8x - 7 \Longrightarrow 3\xi^2 + 8\xi - 7 = 0 \Longrightarrow \xi_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{37}}{3}$, $-1 < \dfrac{\sqrt{37} - 4}{3} < 2 \Longleftrightarrow -3 < \sqrt{37} - 4 < 6 \Longleftrightarrow 1 < \sqrt{37} < 10$ - вярно! И така съществува $\exists\, \xi = \dfrac{\sqrt{37} - 4}{3}$, $\xi \in [-1, 2]$, $(\xi_2 \notin [-1, 2])$;

б) Показателната функция $f(x)$ е дефинирана в $[0, \pi]$; $\sin x$ е дефинирана $\forall x$: $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(0) = f(\pi) = 1$ и тогава може да се приложи теоремата на Рол, т.е. $f'(\xi) = 0$. Тогава

$$f'(x) = 4^{\sin x} \ln 4 \cos x \Longrightarrow 4^{\sin \xi} \cos \xi = 0 \Longrightarrow \cos \xi = 0 \Longrightarrow \xi = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi];$$

в) $f(x)$ е дефинирана в $[-1, 1] \subset (-\infty, +\infty)$; $f(x)$ е безброй пъти диференцируема; $f(-1) = 1 - \sqrt[3]{-1} = 1 - \sqrt[3]{i^2}$, $f(1) = 1 - \sqrt[3]{1} = 0$.

От $f(-1) \neq f(1)$ следва, че не може да се приложи теоремата на Рол.

Пример 8.2. Дадена е функцията $f(x) = 1 + x^m(x - 1)^n$ m и n - цели положителни числа. Без да намирате $f'(x)$, покажете, че уравнението има поне един корен в интервала $[0, 1]$.

Решение. $*$ $f(x) \in C[0, 1]$, защото $x \in (-\infty, +\infty)$;

$*$ $f(x)$ е безброй пъти диференцируема;

$*$ $f(0) = f(1) = 1$.

Следователно функцията удовлетворява условията на теоремата на Рол и тогава $\exists\, \xi \in (0, 1)$ такова, че $f'(\xi) = 0$, т.е. уравнението $f'(x) = 0$ има поне един корен $x = \xi$ в интервала $(0, 1)$.

Пример 8.3. Дадена е функцията $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Докажете, че уравнението $f'(x) = 0$ има три реални корена и определете интервалите, в които те са разположени.

Решение. $f(x)$ е полином от четвърта степен, непрекъснат и диференцируем за всяко x. За $x = 1, 2, 3, 4$, $f(x) = 0$ и по теоремата на Рол във всеки от интервалите $(1, 2)$ $(2, 3)$ и $(3, 4)$ има поне по една нула на $f'(x) = 0$. $f'(x)$ е полином от трета степен и има точно три нули. Следователно във всеки от посочените интервали има точно по една нула на $f'(x)$, която е реална.

Пример 8.4. Приложете теорема 3 на Лагранж за функцията

$$\text{а) } f(x) = x(1 - \ln x) \text{ в } [1, 2]; \quad \text{б) } f(x) = \ln x \text{ в } [1, e].$$

Решение. а) От $x > 0 \Longrightarrow \ln x, 1-\ln x, f(x) = x(1-\ln x)$ са диференцируеми в интервала $(0, +\infty)$; $f(x)$ е диференцируема $\forall x$, тъй като $[1, 2] \subset (0, +\infty)$; $f(1) = 1 \neq f(2) = 2 - \ln 4$. От Т3$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (1, 2)$ такава, че

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(\xi) \Longleftrightarrow 1-\ln 4 = 1-\ln\xi+\xi\Big(-\frac{1}{\xi}\Big) \Longleftrightarrow \ln\xi = \ln 4 - \ln e \Longrightarrow \xi = \frac{4}{e}.$$

Очевидно $1 < \dfrac{4}{e} < 2 \Longleftrightarrow e < 4 < 2e$ - вярно!

б) От $x > 0 \Longrightarrow f(x) = \ln x$ е диференцируема в $(0, +\infty)$; $f(x)$ е диференцируема $\forall x$, тъй като $[1, e] \subset (0, +\infty)$; $f(1) = \ln 1 = 0 \neq f(e) = \ln e = 1$. От Т3 $\Longrightarrow \exists\, \xi \in (1, e)$ такава, че $\dfrac{\ln e}{e-1} = \dfrac{1}{\xi} \Longrightarrow \xi = e-1$, като са верни неравенствата $1 < e - 1 < e$.

Пример 8.5. Върху кривата $y = x^3$ намерете точка, в която допирателната е успоредна на хордата, съединяваща точките $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

Решение. Разглеждаме $y = x^3$ в $[-1, 2]$, вж. A и B. От

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 3 \Longrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 3 = f'(\xi) = 3\xi^2 \Longrightarrow \xi = \pm 1.$$

Но $\xi_2 = -1 \notin (-1, 2)$, а $\xi_1 = 1 \in (-1, 2)$, при това $y = x^3$ е дефинирана в $(-\infty, +\infty)$, диференцируема е $\forall x$ във всеки подинтервал и $f(-1) \neq f(2)$. Търсената точка е $C(1, 1)$.

Пример 8.6. Докажете неравенството

$$\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}, \quad 0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. $f(x) = \operatorname{tg} x \in C[\beta, \alpha]$, диференцируема в интервала, и можем да приложим теоремата на Лагранж

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = (\alpha - \beta)\frac{1}{\cos^2 \xi}, \quad \beta < \xi < \alpha. \tag{1}$$

В интервала $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ $\cos x$ е намаляваща функция, следователно от $0 < \beta < \xi < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ имаме $0 < \cos\xi < \cos\beta < 1$.

В (1) заместваме $\cos^2\xi$ с $\cos^2\beta \Longrightarrow$ знаменателят нараства, дясната част на равенството намалява, тогава

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \geq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}. \tag{2}$$

Сега в (1) заместваме $\cos^2\xi$ с $\cos^2\alpha \Longrightarrow$ знаменателят намалява, дясната част расте и имаме:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

От (2) и (3) имаме

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leq \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$

Пример 8.7. Приложете теорема 2 на Коши за функциите $f(x) = x^3 - 2$ и $\varphi(x) = x^2 + 3$ в $[1, 2]$ и намерете точката ξ.

Решение. Полиномите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са дефинирани $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, диференцируеми са $\forall x$ и $\varphi'(x) = 2x \neq 0$. Тогава прилагаме Т2:

$$\frac{3\xi^2}{2\xi} = \frac{(8-2)-(1-2)}{(4+3)-(1+3)} = \frac{7}{3} \Longrightarrow \xi = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9} \in [1, 2].$$

Пример 8.8. Докажете тъждеството

$$\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - \pi/4, & x > -1 \\ \operatorname{arctg} x + 3\pi/4, & x < -1. \end{cases}$$

Доказателство. Означаваме $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi_0(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{3\pi}{4}$.
От следствие 2 на Т3 имаме, че, ако $f'(x) = \varphi'(x)$, то $f(x) - \varphi(x) = C$.

$* \; f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$* \; \varphi(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, т.е. $f'(x) = \varphi'(x)$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4} = C_1, \qquad C_1 = ?$$

Избираме стойност $x = 0$ от интервала $x > -1$. Тогава:

$$\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 0 + \frac{\pi}{4} = C_1$$

$\operatorname{arctg}(-1) = \alpha \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1 \Longrightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ – основен интервал

$\operatorname{arctg} 0 = \beta \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\beta = 0 \Longrightarrow \beta = 0$

$$\Longrightarrow -\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} = C_1 \Longrightarrow C_1 = 0 \text{ или } f(x) = \varphi(x) \text{ за } x > -1.$$

Аналогично от

$$\operatorname{arctg}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-\left(\operatorname{arctg}x+\frac{3\pi}{4}\right)=C_2,\qquad C_2=?$$

Нека $x\to-\infty$, като разглеждаме интервала $x<-1$. Тогава:

$$\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-\infty)-\frac{3\pi}{4}=C_2\iff\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3\pi}{4}=C_2\Longrightarrow C_2=0.$$

Следователно $f(x)=\varphi_0(x)$ за $x<-1$.

Пример 8.9. Покажете, че двойката функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad\text{и}\quad\varphi(x)=\arccos x$$

имат една и съща производна и намерете зависимостта между тях.

Решение. Дефиниционните области на функцииите са:

$$\left.\begin{array}{ll}D_1:-\infty<x<+\infty & \text{за } f(x)\\ D_2:-1\le x\le 1 & \text{за } \varphi(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow D=D_1\cap D_2:-1\le x\le 1.$$

От $f'(x)=\varphi'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Longrightarrow f(x)-\varphi(x)=C$ и при $x=1\in D$ имаме $\operatorname{arctg}0-\arccos 1=C\Longrightarrow C=0$.

И така, $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arccos x$ за $-1\le x\le 1$.

Пример 8.10. Разложете по степените на $(x-2)$ функцията

$$f(x)=(x^2-5x+6)^2.$$

Решение. Ще апроксимираме $f(x)$ с $T_n(x_0,x)$ в точката $x_0=2$ по формула (8.4):

$$\begin{aligned}
&f(x)=(x^2-5x+6)^2\to f(2)=0;\\
&f'(x)=2(x^2-5x+6)(2x-5)\to f'(2)=0;\\
&f''(x)=2(2x-5)^2+4(x^2-5x+6)\to f''(2)=2;\\
&f'''(x)=8(2x-5)+4(2x-5)\to f'''(2)=-12;\\
&f^{\text{IV}}(x)=16+8\to f^{\text{IV}}(2)=24;\\
&f^{\text{V}}(x)=0,\dots,f^{(n)}=0;
\end{aligned}$$

$$f(x)=0+\frac{x-2}{1!}0+\frac{(x-2)^2}{2!}2+\frac{(x-2)^3}{3!}(-12)+\frac{(x-2)^4}{4!}24$$

$$\Longrightarrow f(x)=(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4.$$

Пример 8.11. За функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ напишете първите пет члена от развитието на Тейлор по степени на $(x-5)$, т.е. $x_0 = 5$.

Решение. Функцията има n-та производна (вж. гл. 7, пр. 7.3.а))

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}};$$

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad f'(5) = (-1)\frac{1!!}{2}5^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{10\sqrt{5}}; \quad f''(5) = (-1)^2\frac{3!!}{2^2}5^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{100\sqrt{5}};$$

$$f'''(5) = (-1)^3\frac{5!!}{2^3}5^{-\frac{7}{2}} = -\frac{3}{200\sqrt{5}}; \qquad f^{\mathrm{IV}}(5) = (-1)^4\frac{7!!}{2^4}5^{-\frac{9}{2}} = \frac{21}{2000\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{10\sqrt{5}}\frac{x-5}{1!} + \frac{3}{100\sqrt{5}}\frac{(x-5)^2}{2!} - \frac{3}{200\sqrt{5}}\frac{(x-5)^3}{3!}$$

$$+\frac{21}{2000\sqrt{5}}\frac{(x-5)^4}{4!} + \underbrace{\frac{(x-5)^5}{5!}\frac{9!!}{2^5}\xi^{-\frac{11}{2}}}_{R_n}, \quad 5 < \xi < x, \text{ вж. } (8.4).$$

Пример 8.12. Напишете Маклореновото развитие на функцията $f(x) = \operatorname{sh} x$ $(x_0 = 0)$.

Решение. Функцията има n-та производна $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}[e^x - (-1)^n e^{-x}]$. Тогава

$$f(0) = \operatorname{sh} 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0; \; f'(0) = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1; \; f'' = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0; \dots$$

$$\Longrightarrow f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi})}_{R_n},$$

$$0 < \xi < x, \text{ вж. } (8.6).$$

Пример 8.13. Функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x$ разложете по степените на x, като се стигне до x^3 $(x_0 = 0)$.

Решение. Намираме производните до трети ред, включително:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \to f(0) = 0; \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \to f''(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \to f'(0) = 1; \qquad f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \to f'''(0) = -2$$

$$\Longrightarrow f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Пример 8.14. Намерете грешката, когато в $[-1,1]$ функцията $f(x) = e^x$ се апроксимира с Тейлоров полином $T_6(x)$.

Решение. От $e^x = e^0 + \frac{x}{1!}e^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}e^0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}, 0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ $e^x \approx T_6(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^6}{6!}$, като $[-1,1] \Longleftrightarrow |x| \leq 1$. Тогава

$$|R_6(x)| \leq \frac{|x|^7}{7!}e^{\xi} \leq \frac{e}{7!} < \frac{3}{7!} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow |e^x - T_6(x)| < 10^{-3}, \quad x \in [-1,1].$$

Пример 8.15. Намерете грешката, когато в $[-\pi/4, \pi/4]$ функцията $f(x) = \sin x$ се апроксимира с Тейлоров полином $T_7(x)$.

Решение. От $\sin x = \sin 0 + \frac{x}{1!}\cos 0 + \frac{x^2}{2!}(-\sin 0) + \frac{x^3}{3!}(-\cos 0) + \frac{x^4}{4!}\sin 0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\left(0 + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], 0 < \xi < 1 \Longrightarrow$

$$|R_7(x)| \leq \frac{|x|^8}{8!}\cdot 1 \leq \frac{(\pi/4)^8}{8!} < \frac{1}{8!} < 0{,}0002.$$

Тук е използвано, че, ако $a \leq x \leq b$, то $|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot 1 \leq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$.

И так, $|\sin x - T_7(x)| < 0{,}0002$.

Пример 8.16. Като се използва развитието на полинома $f(x) = x^5 - 15x^4 + 92x^3 - 287x^2 + 454x - 279$ по степените на $x - 3$, да се изчисли приблизителната стойност на $f(2{,}98)$ с точност до 0,0001.

Решение. Ще използваме формула (8.4) на Тейлор:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = x^5 - 15x^4 + 92x^3 - 287x^2 + 454x - 279 & \rightarrow f(3) = 12 \\
f'(x) = 5x^4 - 60x^3 + 276x^2 - 574x + 454 & \rightarrow f'(3) = 1 \\
f''(x) = 20x^3 - 180x^2 + 552x - 574 & \rightarrow f''(3) = 2 \\
f'''(x) = 60x^2 - 360x + 552 & \rightarrow f'''(3) = 12 \\
f^{\mathrm{IV}}(x) = 120x - 360 & \rightarrow f^{\mathrm{IV}}(3) = 0 \\
f^{\mathrm{V}}(x) = 120 & \rightarrow f^{\mathrm{V}}(3) = 120.
\end{array}$$

Тейлоровото развитие на полинома е:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 12 + \frac{x-3}{1!}1 + \frac{(x-3)^2}{2!}2 + \frac{(x-3)^3}{3!}12 + \frac{(x-3)^4}{4!}0 + \frac{(x-3)^5}{5!}120 \\
&= 12 + (x-3) + (x-3)^2 + 2(x-3)^3 + (x-3)^5.
\end{aligned}$$

За $x = 2,98$ имаме

$$\begin{aligned} f(2,98) &= 12 + (-0.02) + (-0.02)^2 + 2(-0.02)^3 + (-0.02)^5 \\ &= 12 - 0,02 + 0,0004 - 0,000016 - 0,000032 \approx 11,9804. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

I. *Може ли* да се приложи *теоремата на Рол* за функцията:

1. $f(x) = \cos^2 x$ в $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ — Отг. да, $\xi = 0$
2. $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ в $[-1, 1]$ — Отг. не
3. $f(x) = \operatorname{tg} x$ в $[0, \pi]$ — Отг. не
4. $f(x) = x^2$ в $[1, 2]$ — Отг. не
5. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ в $[-1, 1]$ — Отг. не
6. $f(x) = \ln(\sin x)$ в $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ — Отг. да, $\xi = \frac{\pi}{2}$
7. $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^4}$ в $[-1, 1]$ — Отг. не
8. $f(x) = 4^{\sin x}$ в $[0, \pi]$ — Отг. да, $\xi = \frac{\pi}{2}$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ в $[1, 2]$ — Отг. да, $\xi = \frac{3}{2}$
10. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 9$ в $[-1, 2]$ — Отг. да, $\xi = \dfrac{-4+\sqrt{37}}{3}$

II. *Напишете* формулата на Лагранж за функцията $f(x)$ и намерете стойността на ξ:

1. $f(x) = \ln x$ в $[1, e]$ — Отг. $\xi = e - 1$
2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в $[0, 1]$ — Отг. $\xi = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$
3. $f(x) = \arcsin x$ в $[0, 1]$ — Отг. $\xi = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$
4. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ в $[\frac{1}{2}, 2]$ — Отг. $\xi = 1$
5. $f(x) = 2x - x^2$ в $[0, 1]$ — Отг. $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

III. Като използвате теоремата на Лагранж, *докажете* неравенството:

1. $\dfrac{a-b}{a} \le \ln\dfrac{a}{b} \le \dfrac{a-b}{b}, \quad 0 < b \le a;$
2. $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b), \quad a > b,\ n > 1;$
3. $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0;$

   Упътване. Приложете формулата на Лагранж за $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in [1, 1+x]$.

4. $1+\dfrac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1+\dfrac{1}{e}$;

Упътване. За функцията $f(x)=\ln x$ приложете формулата на Лагранж в $[e, e+1]$.

5. $\dfrac{x}{2+x} < \ln(1+x) < \dfrac{x}{2}, \quad x>0$;

Упътване. Разгледайте функцията $f(x)=\ln(1+x)$ в $[1, 1+x]$.

6. $\dfrac{\beta-\alpha}{1+\beta^2} \le \operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg}\alpha < \dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \alpha<\beta$;

7. $e^x \ge 1+x$;

8. $e^x > ex, \quad x>1$;

9. $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y \le |x-y|$.

IV. Върху частта от параболата $y=x^2$, ограничена от точките $A(1,1)$ и $B(3,9)$ намерете точка, в която допирателната е успоредна на хордата AB.

Отг. $M(2,4)$

V. *Проверете* изпълнени ли са условията на теоремата на Коши за функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ в посочените интервали и намерете ξ:

1. $f(x)=x^3, \varphi(x)=x^2$ в $[2,3]$ Отг. $\xi=\dfrac{38}{15}$

2. $f(x)=\ln x, \varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ в $[a,a^2], a>0$ Отг. $\xi=\dfrac{a^2}{a-1}\ln a$

3. $f(x)=\sin x, \varphi(x)=\cos x$ в $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ Отг. $\xi=\dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x)=\sin x, \varphi(x)=\sqrt{x}$ в $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ Отг. не

5. $f(x)=x^2, \varphi(x)=\cos x$ в $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ Отг. не

VI. Определете броя на реалните нули на уравнението $f'(x)=0$ и интервалите, на които те принадлежат, ако $f(x)=x(x-2)(x-3)(x-5)$.

Отг. 3, (0,2), (2,3), (3,5)

VII. Докажете, че $y=f(x)$ е константа. Намерете тази константа:

1. $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$ Отг. $\dfrac{3}{4}$

2. $f(x)=2\operatorname{arctg} x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ при $x\ge 1$ Отг. π

VIII. Докажете, че функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ имат една и съща производна и намерете зависимост между тях:

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, \varphi(x)=\operatorname{arctg} x$ Отг. $f(x)=\varphi(x)+\dfrac{\pi}{4}$

2. $f(x)=e^x\operatorname{ch} x, \varphi(x)=e^x\operatorname{sh} x$ Отг. $f(x)=\varphi(x)+1$

3. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}, \varphi(x)=\arccos x$ Отг. $f(x)=\varphi(x)$

IX. Да се развие по степените на $(x-\alpha)$ до член, съдържащ $(x-\alpha)^k$ функцията:

1. $f(x) = x^3 \ln x$, $\alpha = 1$, $k = n$

   Отг. $f(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n 6(x-1)^n}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + R_n$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\alpha = 4$, $k = 3$

   Отг. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{256}(x-4)^2 - \frac{5}{2048}(x-4)^3$

3. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 9$, $\alpha = 1$ Отг. $f(x) = (x-1)^3 + 2(x-1)^2 - (x-1) + 5$

X. Намерете Маклореновото развитие на функциите:

1. $f(x) = e^x$ Отг. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$

2. $f(x) = \sin x$ Отг. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$

3. $f(x) = \cos x$ Отг. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$

4. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ Отг. $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} + \cdots$

5. $f(x) = \ln(1+x)$ Отг. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots$

6. $f(x) = xe^x$ Отг. $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \cdots$

ГЛАВА 9

НЕОПРЕДЕЛЕНИ ФОРМИ. ТЕОРЕМИ НА ЛОПИТАЛ

При намиране граница на функция $\lim\limits_{x \to x_0} \Phi(x)$ са възможни случаите: $\Phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\Phi(x) = f(x)g(x)$, $\Phi(x) = f(x) - g(x)$ и $\Phi(x) = f(x)^{g(x)}$, като са възможни съответно *неопределените форми*: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0.\infty]$, $[\infty - \infty]$ и $[1^{\infty}]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$.

I. НЕОПРЕДЕЛЕНА ФОРМА ОТ ВИДА $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Дефиниция 1 *Казваме, че функцията* $\Phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *е* ***неопределена форма в точката*** x_0 ***от вида*** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, *ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани в точката* x_0 *и някаква* δ*-околност* $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ *на точката* x_0 *(без* x_0*), като* $g(x) \neq 0$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Теорема 1 (***правило на Лопитал***). *Ако функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *отговарят на условията:*

а) $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани в точка* x_0 *и в* $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ *и са непрекъснати в* x_0*;*

б) $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *– безкрайно малки функции;*

в) $\exists f'x)$, $g'(x)$ *– диференцируеми поне за* $x \neq x_0$ *и* $g'(x) \neq 0$.

Тогава, ако $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, *то* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \tag{9.1}$$

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\dfrac{-1}{e - x} + 1} = \dfrac{2e}{e - 1}.$

Забележка 1. T1 остава в сила и когато $x \to x_0 = \infty$. Наистина, като положим $x = \dfrac{1}{t} \Longrightarrow t = \dfrac{1}{x}$, но

$$x \to \infty \Longrightarrow t \to 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Забележка 2. Ако производните на $f(x)$ и $g(x)$ от n-ти ред отговарят на условията на T1, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}. \tag{9.2}$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

II. НЕОПРЕДЕЛЕНА ФОРМА ОТ ВИДА $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Дефиниция 2 *Казваме, че функцията* $\Phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***е неопределена форма в точката*** x_0 ***от вида*** $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, *ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани в* $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, *при това* $g(x) \neq 0$, $f(x_0) = g(x_0) = \infty$.

Теорема 2 *Ако функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *отговарят на условията:*

а) $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани в* $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$;

б) $f(x_0) = g(x_0) = \infty$ *– безкрайно големи функции;*

в) $\exists f'x), g'(x)$ *– диференцируеми поне за* $x \neq x_0$ *и* $g'(x) \neq 0$.

Тогава, ако $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, *то* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \tag{9.3}$$

Забележки 1 и 2 при T1 остават в сила и при T2.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{\frac{x}{100}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{10^{-2}e^{\frac{x}{100}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{10^{-4}e^{\frac{x}{100}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{10^{-6}e^{\frac{x}{100}}}=0.$$

Извод: $e^{\frac{x}{100}}=O(x^3)\Longleftrightarrow e^{\alpha x}=O(x^n)$ или експоненциалната функция $e^{\alpha x}\to+\infty$ по-бързо, отколкото функцията x^n, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$ (сравняваме безкрайно големи функции).

III. НЕОПРЕДЕЛЕНИ ФОРМИ ОТ ДРУГ ВИД

А. $\Phi(x)=f(x)g(x)\to[0.\infty]$

Тогава

$$\Phi(x)=\frac{fx)}{\frac{1}{g(x)}}\to\left[\frac{0}{0}\right]\quad\text{или}\quad\Phi(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\left[\frac{\infty}{\infty}\right].\tag{9.4}$$

Пример 5. $\displaystyle\lim_{x\to0+}(x\ln x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0+}x=0.$

Б. $\Phi(x)=f(x)-g(x)\to[\infty-\infty]$

Тогава

$$\Phi(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}\to\left[\frac{0}{0}\right].\tag{9.5}$$

В. $\Phi(x)=f(x)^{g(x)}\to[1^\infty],\ [\infty^0],\ [0^0]$

Тогава съответно $\ln\Phi(x)=g(x)\ln f(x)\to[\infty\cdot0],\ [0\cdot\infty],\ [0\cdot(-\infty)]$. Накрая

$$\lim_{x\to x_0}(\ln\Phi(x))=L\Longleftrightarrow\ln(\lim_{x\to x_0}\Phi(x))=L\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\Phi(x)=e^L.$$

Този резултат се получава, като сменим местата на операторите “lim” и “ln”, защото логаритмичната функция е непрекъсната.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0} x^x \to [0^0]$ и като положим $\Phi(x) = x^x \Longrightarrow \ln\Phi(x) = x\ln x$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}(\ln\Phi(x)) = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0.$$

Тогава от $\ln(\lim\limits_{x\to 0} x^x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^x = e^0 = 1.$

Пример 9.1. Пресметнете границите (неопределеност $\left[\dfrac{0}{0}\right]$):

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3x^2+5x-21)}{x^2-6x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{6x+5}{3x^2+5x-21}}{2x-6} = \dfrac{6.2+5}{4-6} = -\dfrac{17}{2}$, вж. (9.1);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\cos x}{2\cos 2x} = \dfrac{3}{2}$;

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{-2\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{1+x^2} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 2;$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x} = -2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = -2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}$$
$$= -2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = -2.$$

Пример 9.2. Пресметнете границите (неопределеност $[\infty.0]$):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)\right]$; в) $\lim\limits_{x\to a}\left[(a^2-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}[(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x]$; г) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg}(\ln(1+x))]$.

Решение.

а) При $x \to \infty$ $\operatorname{arctg} \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} \to \operatorname{arctg} 1 \to \dfrac{\pi}{4}$. Тогава:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2x^2+6x+5} - \dfrac{2}{2x^2+4x+4}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{2x^2+4x+4} - \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+6x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4x+4} - \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+6}$$

$= 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, вж. (9.4);

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-2}{1+x^2}}{\dfrac{-1}{x\ln^2 x}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x\ln^2 x}{1+x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -4\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = 4\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \lim_{x\to 0} x = 0;$$

в) $$\lim_{x\to a} \frac{a^2 - x^2}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2a}} = \lim_{x\to a} \frac{-2x}{\dfrac{-1}{\sin^2 \dfrac{\pi x}{2a}} \cdot \dfrac{\pi}{2a}} = \frac{4a}{\pi} \lim_{x\to a} x \sin^2 \frac{\pi x}{2a} = \frac{4a^2}{\pi};$$

г) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}(\ln(1+x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2(\ln(1+x))} \cdot \dfrac{1}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{(1+x)\sin x \cos x \cos^2(\ln(1+x))}{1+\sin^2 x} = 0.$$

Пример 9.3. Пресметнете границите (неопределеност $[\infty - \infty]$):

а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x-1}{2x^2} + \dfrac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;   г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

Решение.

а) $$\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\dfrac{x}{2}-\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{x}{2}\sin^2 x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{\dfrac{1}{2}\sin^3 x+2\sin x\cos x\sin^2\dfrac{x}{2}}$$
$$=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{\sin^2 x+4\cos x\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x-2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{4},\ \text{вж. } (9.5);$$

б) $$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2};$$

в) $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(e^{2x}-1)+2x}{x^2(e^{2x}-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+2(x-1)e^{2x}+2}{2x(e^{2x}-1)+2x^2e^{2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(2x-1)+1}{2x(xe^{2x}+e^{2x}-1)}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}}{xe^{2x}+e^{2x}-1+x(2xe^{2x}+e^{2x}+2e^{2x})}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}(2x^2+4x+1)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{2e^{2x}(2x^2+4x+1)+e^{2x}(4x+4)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+2x}{2x^2+6x+3}=\frac{1}{6};$$

г) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-\sin x}=-2.$$

Пример 9.4. Пресметнете границите (неопределеност $[1^\infty]$):

а) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$; б) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos^3 x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$; в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1+\cos x}{2\sin x}}$.

Решение. а) Полагаме $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x \Longrightarrow \ln y=x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$. Тогава

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln y)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)}{\dfrac{1}{x}}$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x\operatorname{arctg}x+\dfrac{1+x^2}{1+x^2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

Итака $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln y) = -\dfrac{2}{\pi} \Longleftrightarrow \ln(\lim\limits_{x\to+\infty} y) = -\dfrac{2}{\pi} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y = e^{-\frac{2}{\pi}}$, вж. III, B;

б) Полагаме $y = (1+\cos^3 x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{\ln(1+\cos^3 x)}{\sin 2x}$. Тогава

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos^3 x)}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x\sin x}{2\cos 2x(1+\cos^3 x)} = 0.$$

От $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$;

в) Полагаме $y = (2-\cos x)^{\frac{1+\cos x}{2\sin x}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{(1+\cos x)\ln(2-\cos x)}{2\sin x}$. Тогава

$$\lim_{x\to0}(\ln y) = \lim_{x\to0} \frac{(1+\cos x)\ln(2-\cos x)}{2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{-\sin x\ln(2-\cos x) + (1+\cos x)\dfrac{\sin x}{2-\cos x}}{2\cos x} = 0.$$

Имаме $\lim\limits_{x\to0}(\ln y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(\lim\limits_{x\to0} y) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0} y = e^0 = 1$.

Пример 9.5. Пресметнете границите (неопределеност $[\infty^0]$):

а) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. а) Полагаме $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{tg} x \ln\dfrac{1}{x} = \operatorname{tg} x(\ln 1 - \ln x) = -\operatorname{tg} x \ln x$. Тогава

$$\lim_{x\to0+}(\ln y) = -\lim_{x\to0+}(\operatorname{tg} x\ln x) = -\lim_{x\to0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$$

$$= -\lim_{x\to0+} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to0+} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to0+} \sin x = 0.$$

И така, $\lim\limits_{x\to0+}(\ln y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(\lim\limits_{x\to0+} y) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0+} y = e^0 = 1$, вж. III, B.;

б) Полагаме $y = (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi} \Longrightarrow \ln y = (2x-\pi)\ln\operatorname{tg} x$. Тогава

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{2}{(2x-\pi)^2}}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = 0.$$

От $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y)=0 \Longleftrightarrow \ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y)=0 \Longrightarrow \ln y = e^0 = 1;$

в) Полагаме $y=(x+2^x)^{\frac{1}{x}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{\ln(x+2^x)}{x}$. Тогава

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2}=\ln 2.$$

И така, $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=\ln 2 \Longleftrightarrow \ln(\lim\limits_{x\to\infty} y)=\ln 2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = 2.$

Пример 9.6. Пресметнете границите (неопределеност $[0^0]$):

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. а) Полагаме $y=(\pi-2x)^{\cos x} \Longrightarrow \ln y=\cos x\ln(\pi-2x)$. Тогава

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\pi-2x)}{\dfrac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{-2}{\pi-2x}}{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{(\pi-2x)\sin x}$$
$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin x\cos x}{-2}=0$$
$$\Longleftrightarrow \ln(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y=e^0=1;$$

б) Полагаме $y=x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} \Longrightarrow \ln y=\dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$. Тогава

$$\lim_{x\to 0}(\ln y)=\ln(\lim_{x\to 0} y)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} y=e^1=e;$$

в) Полагаме $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} \Longrightarrow \ln y=\operatorname{tg} x\ln(\arcsin x)$. Тогава

$$\lim_{x\to 0}(\ln y)=\ln(\lim_{x\to 0} y)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\arcsin x)}{\operatorname{cotg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}=$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\arcsin x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sin 2x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$$

ЗАДАЧИ

I. Намерете границата (неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$):

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}$ Отг. $\dfrac{2}{5}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$ Отг. 0
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$ Отг. $c2$
5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ Отг. $\dfrac{2}{3}5^{-1/6}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ Отг. $\dfrac{a^2}{b^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ Отг. 2
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$ Отг. $\dfrac{2}{3}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$ Отг. $-\dfrac{1}{2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ Отг. 2
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$ Отг. $\dfrac{9}{50}$
12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{cotg} x-1}{\sin 4x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$
13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$
14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$ Отг. 0
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$
16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$ Отг. $-\infty$

17. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cos x \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$ Отг. $\cos 3$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{cotg} \pi x}$ Отг. -2

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{x(a - \sqrt{a^2 + x})}$ Отг. $-a^3$

II. Пресметнете границите (неопределеност $[0 \cdot \infty]$ или $[\infty - \infty]$):

1. $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ Отг. $-\dfrac{2}{\pi}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty} (x - \ln^2 x)$ Отг. $+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + e^{-x} - 2)\operatorname{cotg} x$ Отг. 0
4. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$ Отг. $+\infty$
5. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\operatorname{cotg} \pi(x-1)$ Отг. $\dfrac{1}{\pi}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{a}{x}$ Отг. a
7. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$ Отг. 0
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$ Отг. -1
9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$ Отг. 0
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$ Отг. $\dfrac{1}{12}$
11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi/2}{\cos x}\right)$ Отг. -1
12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$ Отг. $\dfrac{2}{3}$

III. Пресметнете границите (неопределеност $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$):

1. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ Отг. e^2
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ Отг. 1
3. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$ Отг. 1
4. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ Отг. $\dfrac{1}{e}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ Отг. $\dfrac{1}{e}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$ Отг. 1

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ Отг. e^{-6}

8. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ Отг. e^2

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ Отг. $\frac{1}{e}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$ Отг. e^2

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ Отг. $e^{1/3}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ Отг. 1

IV. Пресметнете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x^2}$ Отг. 2

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ Отг. $-\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$ Отг. $-\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$ Отг. $\frac{2}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$ Отг. $\frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x-\frac{x^2}{2}} - 1 - x}{x^3}$ Отг. $-\frac{1}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ Отг. 0

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ Отг. $-\frac{e}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ Отг. -2

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{cth} x - \operatorname{cotg} x}{x}$ Отг. $\frac{2}{3}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}+x}{e^x - x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$ Отг. $e^{-\frac{1}{3}}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ Отг. e^{-1}

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$ Отг. $e^{-\frac{2}{\pi}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ Отг. e^{-1}

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ Отг. 0

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$ Отг. $e^{\frac{1}{2}}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+a\sin\dfrac{x}{n}\right)^n$ Отг. e^{ax}

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$ Отг. $-\dfrac{1}{4}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ Отг. $e^{-\frac{1}{2}}$

21. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$ Отг. $e^{\frac{2}{\pi}}$

ГЛАВА 10

МОНОТОННОСТ НА ФУНКЦИЯ

Дадено е функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ - какъв да е интервал.

Дефиниция 1 *Функцията $y = f(x)$ се нарича* ***монотонно растяща*** *(ненамаляваща), ако $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ и* ***монотонно намаляваща*** *(нерастяща), ако $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Дефиниция 2 *Функцията $y = f(x)$ се нарича* ***строго растяща****, ако $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ и* ***строго намаляваща****, ако $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

Теорема 1 *Ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$ и е диференцируема поне в (a, b), то необходимо и достатъчно условие $f(x)$ да бъде* ***монотонно растяща*** *е $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$ (теорема на Лагранж за крайните нараствания).*

Теорема 2 *$f(x)$ е* ***монотонно намаляваща*** *$\Longleftrightarrow f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$, $f(x)$ е* ***растяща*** *$\Longleftrightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$ и $f(x)$ е* ***намаляваща*** *$\Longleftrightarrow f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$.*

Пример 10.1. Намерете интервалите на монотонност на функцията

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi}{12}x^2.$$

Решение. Дефиниционната област на функцията се определя от условията:

1°. $1 - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [-1, 1]$ (за да съществува $\sqrt{1 - x^2}$);

2°. $-1 \leq x \leq 1$ (дефиниционно множество на $\varphi(x) = \arcsin x$).

Тогава $DM : x \in [-1, 1]$

Намираме y':

$$y' = \frac{1}{2}\left[2x\arcsin x + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right] + \frac{1}{4}\left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right) - \frac{\pi x}{6}$$

$$= x\arcsin x + \frac{2x^2 - 1}{4\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1 - 2x^2}{4\sqrt{1 - x^2}} - \frac{\pi x}{6} = x\left(\arcsin x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$y' > 0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x > 0 \\ \arcsin x - \dfrac{\pi}{6} > 0 \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} x < 0 \\ \arcsin x - \dfrac{\pi}{6} < 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x > 0 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} x < 0 \\ x < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty).$$

От $y' > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \wedge x \in [-1, 1]$ следва, че y расте в интервала $[-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ и намалява в интервала $(0, \frac{1}{2})$.

Пример 10.2. Намерете интервалите на монотонност на функциите:

а) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; г) $y = x - 2\sin x,\ x \in [0, 2\pi]$;

б) $y = x^2 e^{-x}$; д) $y = 2\sin x + \cos 2x,\ x \in [0, 2\pi]$;

в) $y = 2x^2 - \ln x$; е) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Решение. а) $* \ DM : x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$,

$* \ y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, y' > 0 \Longleftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > e.$

За $x \in (0, 1) \cup (1, e)$ имаме $y' < 0 \Longrightarrow y$ намалява.

За $x \in (e, +\infty)$ имаме $y' > 0 \Longrightarrow y$ расте;

б) $* \ DM : x \in (-\infty, +\infty)$,

$* \ y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{2x} = xe^{-x}(2 - x)$;

$* \ y' > 0 \Longleftrightarrow x(2 - x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, 2) \ (\forall x,\ e^{-x} > 0).$

За $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ - y намалява.

За $x \in (0, 2)$ - y расте;

в) $* \ DM : x \in (0, +\infty)$,

$* \ y' = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2 - 1}{x} = \dfrac{(2x - 1)(2x + 1)}{x} = \dfrac{4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{x}$;

$* \ y' > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \cap x \in (0, +\infty) \Longrightarrow$
$x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.

За $x \in (0, \frac{1}{2})$ - y намалява.

За $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ - y расте;

г) $* \ DM : x \in [0, 2\pi]$ (по условие),

$* \ y' = 1 - 2\cos x$;

$* \ y' > 0 \Longleftrightarrow 1 - 2\cos x > 0 \Longleftrightarrow \cos x < \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in (\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3})$.

За $x \in [0, \dfrac{\pi}{3}) \cup (\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi]$ - y намалява.

За $x \in (\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3})$ - y расте;

д) * $DM : x \in [0, 2\pi]$,

$* \ y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x \cos x = 4\cos x\Big(\dfrac{1}{2} - \sin x\Big)$;

$$* \ y' > 0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \cos x > 0 \\ \dfrac{1}{2} - \sin x > 0 \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} \cos x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \sin x < 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\Big] \\ x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{6}\Big) \cup \Big(\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\Big] \end{array}\right. \bigcup \left|\begin{array}{l} x \in \Big(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\Big) \\ x \in \Big(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\Big) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow x \in \Big[0, \frac{\pi}{6}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\Big) \cup \Big(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\Big].$$

За $x \in \Big(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\Big)$ - y намалява.

За $x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{6}\Big) \cup (\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\Big) \cup \Big(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\Big]$ - y расте;

е) * $DM : x \in (-\infty, +\infty)$,

$$* \ y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \ \forall x;$$

Функцията расте $\forall x$ (в целия си дефиниционен интервал).

ЗАДАЧИ

Намерете интервалите на монотонност на функциите:

1. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ Отг. $x \in (-1, 1)$ $y \downarrow$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $y \uparrow$
2. $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$ Отг. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ $y \downarrow$, $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ $y \uparrow$
3. $y = x - e^x$ Отг. $x \in (0, \infty)$ $y \downarrow$, $x \in (-\infty, 0)$ $y \uparrow$
4. $y = x - 2\ln x$ Отг. $x \in (0, 2)$ $y \downarrow$, $x \in (2, \infty)$ $y \uparrow$

5. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$ Отг. $\forall x \in DM\ y \uparrow$

6. $y = e^x \cos x$

Отг. $x \in ((8k+1)\frac{\pi}{4}, (8k+5)\frac{\pi}{4})\ y \downarrow$, $x \in ((8k-3)\frac{\pi}{4}, (8k+1)\frac{\pi}{4})\ y \uparrow$

7. $y = 4x - \operatorname{tg} x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Отг. $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})\ y \downarrow$, $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})\ y \uparrow$

8. $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ Отг. $x \in (0, 1)\ y \uparrow$, $x \in (1, +\infty)\ y \downarrow$

9. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$ Отг. $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)\ y \uparrow$, $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\ y \downarrow$

10. $y = x \sin x + \cos x - \dfrac{1}{4}x^2,\ (-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2})$

Отг. $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}) \cup (0, \frac{\pi}{3})\ y \uparrow$, $x \in (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\ y \downarrow$

11. $y = \dfrac{2 - x}{\pi} \cos \pi(x + 3) + \dfrac{1}{\pi^2} \sin \pi(x + 3),\ 0 < x < 4$

Отг. $x \in (0, 1) \cup (3, 4)\ y \uparrow$, $x \in (1, 3))\ y \downarrow$

12. $y = x^x$ Отг. $x \in (0\frac{1}{e})\ y \downarrow$, $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)\ y \uparrow$

ГЛАВА 11

ЕКСТРЕМУМ НА ФУНКЦИЯ

Дадена е функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ и $x_0 \in (a, b)$ - *вътрешна точка.*

Дефиниция 1 *Казваме, че $f(x)$ има* ***локален (местен) максимум*** *в точката x_0, ако съществува δ-околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0 $(\delta > 0)$, т.е. $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \subset [a, b]$, в която $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ (ако $f(x) < f(x_0)$ локалният максимум се нарича строг).*

Ако $f(x)$ има най-голяма стойност в целия интервал $[a, b]$, това е *абсолютният максимум.* При затворен интервал от всички локални максимуми и тези в краищата на интервала се избира абсолютният максимум. Ако интервалът не е затворен, се извършват допълнителни разглеждания.

Дефиниция 2 *Казваме, че $f(x)$ има* ***локален минимум*** *в точката x_0, ako $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, така че $f(x \geq f(x_0)$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ (ако $f(x > f(x_0)$, локалният минимум е строг).*

Най-голямата (най-малката) стойност на непрекъсната функция $f(x)$ в даден затворен интервал $[a, b]$ се достига или в критичните точки на функцията, или в краищата на интервала.

Най-общо казано, в точката x_0 функцията $f(x)$ има *локален екстремум*, който не съвпада изобщо с най-голямата или най-малката стойност на $f(x)$ в $[a, b]$.

Теорема 1 *(**Необходимо условие за екстремум**). Ако в точката x_0 функцията $f(x)$ притежава локален екстремум и $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$, а точката x_0 се нарича стационарна (критична).*

Теорема 2 *(**Достатъчно условие за екстремум**). Нека*

1° *$f(x)$ е два пъти диференцируема функция в $U_\delta(x_0) \subset [a, b]$, т.е $\exists$ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$;*

2° *$f''(x) \in C[x_0]$ - непрекъсната функция в тпчката x_0;*

3° *$f''(x_0) \neq 0$. Тогава:*

а) ако $f''(x) > 0 \Longleftrightarrow f(x)$ има локален минимум в x_0;

б) ако $f''(x) < 0 \Longleftrightarrow f(x)$ има локален максимум в x_0.

Теорема 3 *(обобщение на Т2). Нека*

1° *$f(x)$ е n пъти диференцируема функция в $U_\delta(x_0) \subset [a,b]$, т.е $\exists f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$;*

2° *$f^{(n)}(x) \in C[x_0]$ – непрекъсната функция в тпчката x_0;*

3° *$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогава:*

а) *при $n = 2k$ (четно) функцията $f(x)$ има локален екстремум. При това, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$ или $f^{(n)}(x_0) < 0$, функцията* ***има*** *съответно локален минимум или локален максимум в x_0;*

б) *при $n = 2k + 1$ (нечетно) функцията $f(x)$* ***няма*** *екстремум в x_0, а инфлексна точка.*

При намиране на *най-голяма и най-малка стойност* на $f(x)$ в интервал, ако $f(x) \in C[a,b]$, то:

а) намираме локалните екстремуми на $f(x)$;

б) пресмятаме $f(a)$ и $f(b)$;

в) сравняваме получените резултати.

Пример 11.1. Изследвайте относно екстремуми и инфлексия функциите:

а) $y = f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; г) $y = f(x) = 1 + e^{\frac{1}{x-3}}$;

б) $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$; д) $y = f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

в) $y = f(x) = \cos x - \ln(\cos x)$;

Решение. а) $DM : x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Намираме производните на функцията и прилагаме Т1и Т2:

$$* \ y' = \frac{3x^2(3 - x^2) - x^3(-2x)}{(3 - x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 3, \ x_3 = 0.$$

Така получихме три точки, в които евентуално функцията има екстремум (стацинарни точки);

$$* \ y'' = \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2)^2 - (9x^2 - x^4)2(3 - x^2)(-2x)}{(3 - x^2)^4} = \frac{6x^3 + 54x}{(3 - x^2)^3};$$

* $y''(-3) = \dfrac{6(-3)^3 + 54(-3)}{(3-9)^3} > 0 \Longrightarrow y_{\min}(x=-3) = \dfrac{(-3)^3}{3-9} = 4,5;$

* $y''(3) = \dfrac{6.3^3 + 54.3}{(3-9)^3} < 0 \Longrightarrow y_{\max}(x=3) = \dfrac{3^3}{3-9} = -4,5;$

* $y''(0) = 0$, а от $y(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ е инфлексна точка за функцията (вж. гл. 12, Т3).

Забележка. Видът на екстремума на функцията може да се определи като определим интервалите на растене и намаляване на функцията в зависимост от знака на y'.

Така от $y' > 0 \iff x^2(3-x)(3+x) > 0 \Longrightarrow$ функцията $f(x)$ расте в интервала $-3 < x < 3$ и тогава $f(x)$ има локален минимум в точката $x = -3$, а локален максимум в точката $x = 3$.

б) $DM : (0^+, e) \cup (e, +\infty)$. Намираме производните на функцията:

* $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}(\ln x - 1) - \dfrac{1}{x}\ln x}{(\ln x - 1)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x - 1)^2};$

* $y'' = \dfrac{(\ln x - 1)^2 + 2x\dfrac{1}{x}(\ln x - 1)}{x^2(\ln x - 1)^4} = \dfrac{\ln x + 1}{x^2(\ln x - 1)^3};$

* $y' \neq 0\ \forall x \Longrightarrow f(x)$ няма екстремум, $y' < 0\ \forall x \Longrightarrow f(x)$ е само намаляваща;

* от $y'' = 0 \Longrightarrow \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$, а от $y(e^{-1}) = \dfrac{\ln e^{-1}}{\ln e^{-1} - 1} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ точката $I\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{2}\right)$ е инфлексна за $f(x)$.

в) Функцията е четна и периодична с период 2π, защото $\cos x$ е такава функция. Освен това $\ln(\cos x)$ е дефинирана за $\cos x > 0$. И така DM : $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ (основен интервал, първи и четвърти квадрант). Намираме производните:

* $y' = -\sin x - \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = \dfrac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x} = \operatorname{tg} x - \sin x;$

* $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \dfrac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x};$

* от $y' = 0 \Longrightarrow \sin x(1 - \cos x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \Longrightarrow x = 0 \end{cases};$

* ще изследваме занака на y' в интервалите $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(0, \frac{\pi}{2})$:

$y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \Longrightarrow f(x)$ е намаляваща в $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Longrightarrow f(x)$ е растяща в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

И така, $y_{\min}(0) = \cos 0 - \ln(\cos 0) = 1$.

г) $DM : x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Намираме производните на функцията:

* $y' = -\frac{1}{(x-3)^2} e^{\frac{1}{x-3}}$;

* $y'' = \frac{1}{(x-3)^4} e^{\frac{1}{x-3}} + \frac{2(x-3)}{(x-3)^4} e^{\frac{1}{x-3}} = \frac{2x-5}{(x-3)^4} e^{\frac{1}{x-3}}$;

* $y' \neq 0 \, \forall x \Longrightarrow f(x)$ няма екстремум, $y' < 0 \Longrightarrow f(x)$ е само намаляваща;

* от $y'' = 0 \Longrightarrow 2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$, а от $y\left(\frac{5}{2}\right) = 1 + e^{-2} \Longrightarrow I\left(\frac{5}{2}, 1 + e^{-2}\right)$ е инфлексна точка за $f(x)$.

д) $DM : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Намираме производните:

* $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^2} \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = -2\frac{x}{(x^2-1)^2 + 1}$;

* $y'' = -2\frac{(x^2-1)^2 + 1 - 2x(x^2-1)2x}{[(x^2-1)^2+1]^2} = 2\frac{3x^4 - 2x^2 - 2}{[(x^2-1)^2+1]^2}$;

* от $y' = 0 \Longrightarrow x = 0$ (стационарна точка), от $y' > 0 \Longleftrightarrow -x > 0 \Longrightarrow x < 0$ (вляво от точката $x = 0$ функцията е *растяща*). Тогава $y_{\max}(0) = \text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

* от $y'' = 0 \Longrightarrow 3x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ и като положим $x^2 = u$ имаме $3u^2 - 2u - 2 = 0 \Longrightarrow u_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{3} > 0$, $u_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{3} < 0$. Тогава $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}} \approx \pm 1,1$. И така $f(x)$ *има две инфлексни* точки $I_{1,2}$ с абсциси $x_{1,2} \approx \pm 1,1$.

Пример 11.2. Намерете екстремумите на функцията:

а) $y = (x^2 - 2x)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x;$

б) $y = x\sin x + \cos x - \dfrac{1}{4}x^2, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right].$

Решение. а) Дефиниционната област на функцията е $DM : x \in (0, +\infty)$. (за да съществува $\varphi(x) = \ln x$).

* $y' = (2x-2)\ln x + (x^2-2x)\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2}2x + 4 = 2(x-1)\ln x + x - 2 - 3x + 4$
$= 2(x-1)\ln x - 2(x-1) = 2(x-1)(\ln x - 1).$

* $y' = 0 \iff x - 1 = 0$ или $\ln x - 1 = 0 \iff x = 1$ и $x = e$.

* $y'' = 2\left[\ln x - 1 + (x-1)\dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{2}{x}(x\ln x - x + x - 1) = \dfrac{2}{x}(x\ln x - 1);$

$y''(1) = \dfrac{2}{1}(1.\ln 1 - 1) = -2 < 0 \Longrightarrow y(1) = y_{\max};$

$y''(e) = \dfrac{2}{e}(e\ln e - 1) = \dfrac{2}{e}(e-1) > 0 \Longrightarrow y(e) = y_{\min}.$

* $y_{\max} = y(1) = (1-2)\ln 1 - \dfrac{3}{2} + 4 = \dfrac{5}{2};$

$y_{\min} = y(e) = (e^2 - 2e)\ln e - \dfrac{3}{2}e^2 + 4e = \dfrac{e^2}{2}(4e - 1);$

б) $DM : x \in (-\infty, +\infty)$

* $y' = \sin x + x\cos x - \sin x - \dfrac{x}{2} = x\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right).$

* $y' = 0 \iff x = 0$ или $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\dfrac{\pi}{3}.$

* $y'' = \cos x - \dfrac{1}{2} - x\sin x;$

$y''(0) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0 \Longrightarrow y(0) = y_{\min};$

$y''\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) < 0 \Longrightarrow y\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = y_{\max};$

$y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Longrightarrow y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = y_{\max}.$

* $y_{\min} = y(0) = 1$;

$$y_{\max} = y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{9} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36};$$

$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{9} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36}.$$

Забележка. От $x \in (-\infty, +\infty)$ (симетрично множество) и $f(-x) = -x\sin(-x) + \cos(-x) - \frac{1}{4}(-x)^2 = f(x) \Longrightarrow$ функцията е четна. Ако

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f_{\max} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36} \Longrightarrow f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f_{\max} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36}.$$

Пример 11.3. Намерете екстремумите на функцията

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi}{12}x^2.$$

Решение. $DM : x \in [-1, 1]$ (вж. пример 10.1),

* $y' = x\left(\arcsin x - \frac{\pi}{6}\right)$;

* $y' > 0 \Longleftrightarrow x \in [-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $y' < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} x \in [-1, 0) & y \uparrow \\ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) & y \downarrow \\ x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] & y \uparrow \end{array}\right\} \Longrightarrow y(0) = y_{\max},\ y\left(\frac{1}{2}\right) = y_{\min}.$$

Тогава $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{48}$.

Пример 11.4. Намерете най-голямата стойност M и най-малката стойност m на функцията в указания затворен интервал (или в целия дефиниционен интервал):

а) $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $x \in [0, 1]$; б) $y = \operatorname{arctg}\frac{1 - x}{1 + x}$, $x \in [0, 1]$;

в) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; г) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение. а) Функцията е непрекъсната $\forall x \in [0, 1]$ $\left(DM : x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

* $y(0) = 1, \quad y(1) = 1;$

* $y' = \dfrac{(2x-1)(1+x-x^2) - (1-2x)(1-x+x^2)}{(1+x-x^2)^2} = \dfrac{2(2x-1)}{(1+x-x^2)^2};$

* От $y' = 0 \iff 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ - критична (стационарна) точка за функцията, $x = \dfrac{1}{2} \in [0, 1]$.

* За $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ имаме $y' < 0 \Longrightarrow y$ намалява, а за $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ $y' > 0 \Longrightarrow y$ расте $\Longrightarrow y\left(\dfrac{1}{2}\right) = y_{\min};$

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{5};$$

* От $y(0) = y(1) = 1$ и $y_{\min}\left(x = \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow M = 1, m = \dfrac{3}{5}.$

Забележка. Видът на екстремума не е от значение при определяне на M и m, защото сравняваме стойностите на функцията в критичните (стационарните) точки със стойностите в краищата на интервала;

б) $DM : x \neq -1 \Longrightarrow y \in C[0, 1]$ (непрекъсната в $[0, 1]$),

* $y(0) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad y(1) = \operatorname{arctg} 0 = 0;$

* $y' = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \dfrac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2};$

* $y' = 0 \iff x \in \emptyset \Longrightarrow$ функцията няма стационарни точки. От $1 + x^2 > 0$ $\forall x \Longrightarrow y' < 0 \, \forall x \Longrightarrow y$ намалява $\forall x \in [0, 1]$

$$\Longrightarrow M = y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad m = y(1) = 0;$$

в) $DM : x \in (-\infty, +\infty)$. Търсим M и m в целия дефиниционен интервал;

* $y' = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2};$

* $y' = 0 \iff 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ - стационарна точка.

* От $y' < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$ и $y' > 0$ за $x \in (0, +\infty) \Longrightarrow y(0) = y_{\min} = -1$;
* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{2x} = 1$, $y = 1$ - хоризонтална асимптота.

Функцията има най-малка стойност $m = y(0) = -1$ - абсолютен минимум и няма най-голяма стойност;

г) $DM : x \in (-\infty, +\infty)$. Аналогично на в) търсим M и m в целия дефиниционен интервал. От $f(x) = xe^{-x^2/2}$ и $f(-x) = -xe^{-x^2/2} = -f(x) \Longrightarrow$ функцията е нечетна и ще я изследваме в интервала $x \in [0, +\infty)$, $f(0) = 0$.

* $y' = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x)(1+x)$;
* $y' = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 1$, $x = 1 \in [0, +\infty)$ - критична точка;
* $\left.\begin{array}{l} y' > 0 \Longleftrightarrow x \in [0,1) \Longrightarrow y \uparrow \\ y' < 0 \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty] \Longrightarrow y \downarrow \end{array}\right\} \Longrightarrow y(1) = y_{\max}$;
* $y(1) = y_{\max} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. От нечетността на функцията следва, че $y(-1) = y_{\min} = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$;
* $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2/2} = [\infty.0] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x^2/2}} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} = 0$.
* От $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \cap y(\pm 1) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e}} \Longrightarrow M = y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}, m = y(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (абсолютен максимум и абсолютен минимум на функцията).

Пример 11.5. Да се докажат неравенствата:

а) $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}, \quad x > 1$;

б) $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad x \geq 0$;

в) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad x \in (0, \pi/2)$.

Решение. а) Образуваме помощната функция

$$y = f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1},\ x > 1.$$

Намираме производната ѝ

$$y' = \frac{1}{x} - 2\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2},$$

която е положителна $\forall x > 1$. Следователно $\forall x > 1$ y е растяща функция и $f(x) > f(1)$

$$f(1) = 0 \Longrightarrow f(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0 \Longleftrightarrow \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1},\ x > 1;$$

б) * Аналогично, както в а), образуваме

$$y = f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

* $y' = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$= \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

* Изследваме занака на y':

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \ln 1 \Longleftrightarrow \sqrt{1+x^2} > 1-x$$

** $1 - x < 0 \Longleftrightarrow x > 1$ неравенството е изпълнено,

** $1 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1 \Longrightarrow (\sqrt{1+x^2})^2 > (1-x)^2 \Longleftrightarrow 0 > -2x$, което е вярно $\forall x \in (0, 1]$.

Следователно $\forall x \in [0, +\infty)$ $f(x)$ е монотонно растяща функция и тогава

$$f(x) \geq f(0),\ f(0) = 0 \Longrightarrow 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2},\ x \geq 0;$$

в) * $y = f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$, $x \in (0, \pi/2)$

* $y' = \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2 = \dfrac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$,

* $y' > 0 \Longleftrightarrow \cos^3 x - 2\cos^2 x + 1 > 0 \quad (\cos^2 x > 0\ \forall x \in 0, \pi/2))$
$\cos^3 x - \cos^2 x - \cos^2 x + 1 = (\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)$

Когато $x \in (0, \pi/2) \Longleftrightarrow \cos x \in (0, 1)$ имаме $y' > 0 \Longrightarrow f(x)$ е растяща функция. Следователно $f(0) < f(x) < f(\pi/2)$, $f(0) = 0$, $f(\pi/2) \to \infty$, тогава

$$\sin x + \operatorname{tg} x - 2x > 0 \Longleftrightarrow \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad x \in (0, \pi/2).$$

Пример 11.6. Сумата на две положителни числа е равна на a. Намерете числата, ако произведението им има най-голяма стойност

Решение. Нека едното събираемо е x , тогава другото е $a - x$. Функцията $y = x(a - x) = ax - x^2$ е търсеното произведение, за което знаем, че приема най-голяма стойност при $x \in (0, a)$

* $y' = a - 2x$;
* $y' = 0 \Longleftrightarrow a - 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{a}{2} \in (0, a)$;
* $y'' = -2 < 0 \Longrightarrow y\left(\dfrac{a}{2}\right) = y_{max}$;
* $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to a} y = 0$. От $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to a}} y = 0$ и $y_{\max}\left(x = \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{4} \Longrightarrow y = \dfrac{a^2}{4}$ е най-голямата стойност на функцията.

Търсените числа са $x = \dfrac{a}{2}$ и $a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} \Longrightarrow \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$.

Пример 11.7. От всички правоъгълници с даден периметър P да се намери този, който има най-голямо лице.

Решение. Нека едната страна на правоъгълника е x, а другата $\dfrac{1}{2}(P - 2x) = \dfrac{P}{2} - x$. Тогава лицето на правоъгълника е

$$y = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = \frac{P}{2}x - x^2, \quad x \in \left(0, \frac{P}{2}\right).$$

* $y' = \dfrac{P}{2} - 2x$;
* $y' = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{P}{2} - 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{P}{4}$.
* $y'' = -2 < 0 \Longrightarrow y\left(\dfrac{P}{4}\right) = y_{\max} \Longrightarrow y_{\max}\left(x = \dfrac{P}{4}\right) = \dfrac{P^2}{16}$
* $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to \frac{P}{2}} y = 0 \Longrightarrow y_{\max}\left(x = \dfrac{P}{4}\right) = \dfrac{P^2}{16}$ е най-голямата стойност на функцията.

От $x = \dfrac{P}{4}$, втората страна на правоъгълника е $\dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{4} = \dfrac{P}{4} \Longrightarrow$ квадратът има най-голямо лице.

Пример 11.8. В полукръг с радиус R е вписан правоъгълник с най-голямо лице. Намерете страните му.

Решение. Нека едната страна на правоъгълника е x (например тази, която е перпендикулярна на диаметъра, ограничаващ полукръга). Тогава по Питагоровата теорема изразяваме втората страна

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2 - x^2 \Longleftrightarrow y = 2\sqrt{R^2 - x^2} \qquad \text{(направете чертеж).}$$

Лицето на правоъгълника е $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in (0, R)$.

* $S'(x) = 2\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = \dfrac{2(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

* $S'(x) = 0 \Longleftrightarrow R^2 - 2x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \in (0, R)$.

* За $x \in \left(0, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}, R\right)$ $S'(x)$ сменя знака си от (+) на (-) $\Longrightarrow S(x)$ расте за $\left(0, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$ и намалява за $\left(\dfrac{R}{2}, R\right)$

$$\Longrightarrow S\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = S_{\max} = \frac{2R}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}} = R^2.$$

* $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to R} S(x) = 0 \Longrightarrow S\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) = S_{\text{нгс}}$.

Правоъгълникът с най-голямо лице, вписан в полукръг с радиус R има страни $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ и $y = 2\sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{2}} = \dfrac{2R}{\sqrt{2}}$.

Пример 11.9. Законът за движение на тяло, хвърлено вертикално нагоре е $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, $t > 0$. Намерете най-голямата височина, на която ще се издигне тялото.

Решение. Скоростта на движението на тяло, хвърлено вертикално нагоре в най-високата точка на движение е нула. От $v = s'(t) = v_0 - gt = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{v_0}{g}$, като $s'(t) < 0$ при $t > \dfrac{v_0}{g}$ и $s'(t) > 0$ при $t < \dfrac{v_0}{g} \Longrightarrow$ за $t = \dfrac{v_0}{g}$ функцията $s(t)$ има максимум.

От $\lim\limits_{t\to 0} s(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to +\infty} s(t) = -\infty \Longrightarrow s\left(\dfrac{v_0}{g}\right) = S_{\text{нгс}}$.

Тогава максималната височина е равна на най-голямата стойност на функцията, която е

$$S\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

ЗАДАЧИ

I. *Намерете* екстремумите на функциите:

1. $y = \dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$ Отг. $y_{\max}(x=0)=4$, $y_{\min}(x=-2)=\dfrac{8}{3}$
2. $y = \dfrac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$ Отг. $y_{\max}(x=-3)=\dfrac{1}{\ln 3}$
3. $y = x-\ln(1+x)$ Отг. $y_{\min}(x=0)=0$
4. $y = x-\ln(1+x^2)$ Отг. няма екстремум, монотонно растяща
5. $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$ Отг. $y_{\max}(x=1)=1$
6. $y = x-\operatorname{arctg} 2x$ Отг. $y_{\min}(x=\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$, $y_{\max}(x=-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
7. $y = xe^{-x/2}$ Отг. $y_{\max}(x=2)=\dfrac{2}{e}$
8. $y = x\ln x$ Отг. $y_{\min}(x=\frac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$
9. $y = 2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$ Отг. $y_{\max}(x=\frac{\pi}{4}+k\pi)=1$
10. $y = x+\ln(\cos x)$ Отг. $y_{\max}(x=\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}$
11. $y = \ln\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$ Отг. $y_{\min}(x=1)=\ln\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{4}$
12. $y = x^2e^{-x}$ Отг. $y_{\min}(x=0)=0$, $y_{\max}(x=2)=\dfrac{4}{e^2}$

II. *Намерете* най-голямата стойност M и най-малката стойност m на функцията в указаните интервали или в цялото дефиниционно множество:

1. $y = x+2\sqrt{x}$, $[0,4]$ Отг. $M=8, m=0$
2. $y = \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$, $[0,1]$ Отг. $M=2, m=\sqrt[3]{2}$
3. $y = \sin 2x - x$, $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ Отг. $M=\frac{\pi}{2}, m=-\frac{\pi}{2}$
4. $y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $[0,3]$ Отг. $M=\sqrt[3]{9}, m=0$
5. $y = x^x$, $[10^{-1},\infty)$ Отг. $\nexists M$, $m=e^{-1/e}$
6. $y = 2\sin x-\cos 2x$, $[0,\frac{\pi}{2}]$ Отг. $M=3, m=-1$
7. $y = \sin 2x$, $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ Отг. $M=1, m=-1$

III. *Докажете* неравенствата

1. $e^x > 1+x,\ x\neq 0$
2. $2x\operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$
3. $\operatorname{ch} x > 1+\dfrac{x^2}{2},\ x\neq 0$

4. $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$, $x > 0$

5. $x > \ln(1+x)$, $x > 0$

IV. Сумата на две положителни числа е a. Намерете числата, ако сумата от кубовете им е най-малка.

Отг. $\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}$

V. От всички правоъгълници с даден периметър P намерете страните на този, който има най-малък диагонал.

Отг. $\dfrac{P}{2}, \dfrac{P}{2}$

VI. В полукръг с радиус R е вписан правоъгълник с най-голям периметър. Намерете отношението на страните му.

Отг. $1:4$

VII. В кръг с радиус a е вписан равнобедрен триъгълник. Намерете отношението на страните му, ако лицето му е най-голямо.

Отг. $1:1:1$ (равностранен триъгълник със страна $a\sqrt{3}$)

VIII. Законът за праволинейното движение на тяло е $s(t) = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$. Намерете максималната скорост на тялото.

Отг. $v(t = 3) = 3$ m/s

Упътване: $v(t) = s'(t)$.

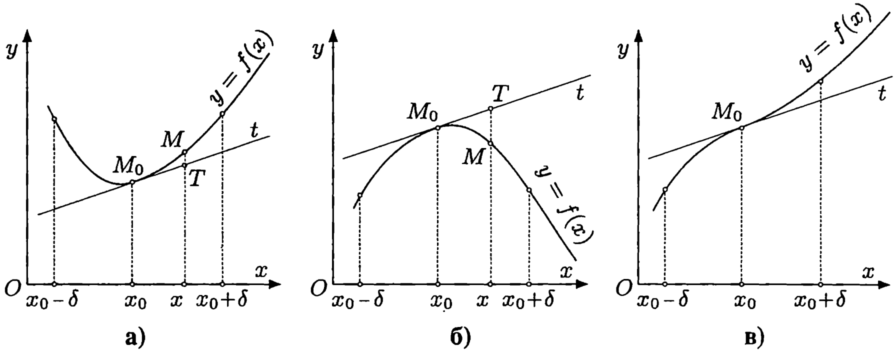
IX. Законът за движение на тяло, хвърлено вертикално нагоре, е $s(t) = 19{,}6t - 4{,}9t^2$. Намерете максималната височина, на която ще се издигне тялото.

Отг. 19,6 m.

ГЛАВА 12

ИЗПЪКНАЛОСТ И ВДЛЪБНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ. ИНФЛЕКСНИ ТОЧКИ

Нека $f(x) \in C[a,b]$, функцията $f(x)$ е диференцируема поне в (a,b) и точката $x_0 \in (a,b)$, т.е. дадена е непрекъсната функция $f(x)$ в $[a,b]$, $\exists f'(x_0)$ и $x_0 \in (a,b)$. Тогава съществува тангента (допирателна) към $f(x)$ в точката x_0.



Фиг. 12.1.

Дефиниция 1 *Казваме, че $f(x)$ е* ***изпъкнала надолу*** *в точката x_0 (гледана отдолу, по посока на оста $+Oy$), ако всички точки от кривата $(c) : y = f(x)$ в някаква околност $U_\delta(x_0)$ са* ***над*** *тангентата t в точката $M_0 \in (c)$, $M_0[x_0, f(x_0)]$, т.е. $\exists x \in U_\delta(x_0)$ така, че точката $M \in (c)$ е над точката $T \in t$ (фиг. 12.1а).*

Дефиниция 2 *Казваме, че $f(x)$ е* ***изпъкнала нагоре*** *(вдлъбната) в точката x_0 (гледана отдолу, по посока на оста $+Oy$), ако всички точки от кривата $(c) : y = f(x)$ в околност $U_\delta(x_0)$ са* ***под*** *тангентата t в точката $M_0 \in (c)$, т.е. $\exists x \in U_\delta(x_0)$ така, че точката $M \in (c)$ е под точката $T \in t$ (фиг. 12.1б).*

Дефиниция 3 *Точката $M_0[x_0, f(x_0)]$ се нарича* ***инфлексна*** *за кривата $(c) : y = f(x)$, ако в някоя полуоколност $(x_0 - \delta, x_0)$ кривата е изпъкнала, а в другата полуоколност $(x_0, x_0 + \delta)$ е вдлъбната, или обратно (фиг. 12.1в).*

И така изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексия на $f(x)$ прецизира характера на функцията $f(x)$ при растене и намаляване.

Забележка 1. Ако $\forall x \in U_\delta(x_0)$ точките на (c) са над тангентата t, то $f(x)$ е *строго изпъкнала* (респ. строго вдлъбната).

Забележка 2. Функцията $f(x)$ е изпъкнала в интервал, ако е изпъкнала за всяка точка от интервала.

Теорема 1 *Нека за функцията $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ точката $x_0 \in (a, b)$, като $U_\delta(x_0) \subset [a, b]$ и са изпълнени условията:*

1°. *$\exists f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ в $U_\delta(x_0)$;*

2°. *$f''(x) \in C[x_0]$ – непрекъсната функция в точката x_0;*

3°. *$f''(x_0) \neq 0$. Тогава*

а) ако $f''(x_0) > 0 \Longleftrightarrow f(x)$ е ***изпъкнала надолу;***

б) ако $f''(x_0) < 0 \Longleftrightarrow f(x)$ е ***изпъкнала нагоре*** *(вдлъбната).*

Теорема 2 ***(Обобщение).*** *Нека функцията $f(x)$ е n пъти диференцируема $(n \geq 2)$ в $U_\delta(x_0)$ и $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f^{(n)}(x) \in C[x_0]$. Тогава:*

1°. *при $n = 2k$*

а) ако $f^{(n)}(x_0) > 0 \Longleftrightarrow f(x)$ е ***строго изпъкнала*** *в точката x_0;*

б) ако $f^{(n)}(x_0) < 0 \Longleftrightarrow f(x)$ е ***строго вдлъбната*** *в точката x_0.*

2°. *при $n = 2k + 1$, $f(x)$* ***има инфлексия*** *в точката x_0.*

Теорема 3 *Необходимо условие точката $M[x_0, f(x_0)]$ да бъде* ***инфлексна точка*** *за функцията $y = f(x)$ е $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ да не съществува.*

Пример 12.1. Изследвайте функциите относно изпъкналост, вдлъбнатост и интервали на растене и намаляване:

а) $y = f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$;   г) $y = f(x) = 1 + e^{\frac{1}{x-3}}$;

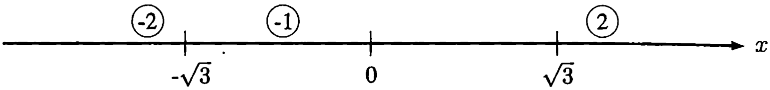
б) $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$;   д) $y = f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

в) $y = f(x) = \cos x - \ln(\cos x)$;

Решение. а) (вж. 11.1.а) $DM : x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

$$y' = \frac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2}, \qquad y'' = \frac{6x^3 + 54x}{(3 - x^2)^3}, \qquad O(0,0) \text{ - инфлексна точка,}$$

а функцията расте в интервала $-3 < x < 3$. Изпъкналост на $f(x)$ определяме по Т1 (гледана отдолу) чрез произволни стойности от дефиниционните интервали:



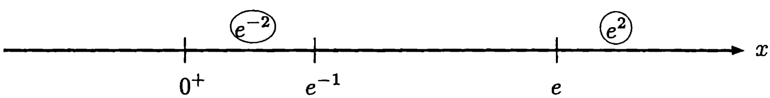
* $y''(-2) = \dfrac{6(-2)^3 + 54(-2)}{(3-4)^3} > 0 \Longrightarrow f(x)$ е *изпъкнала* в $(-\infty, -\sqrt{3})$;

* $y''(-1) = \dfrac{6(-1)^3 + 54(-1)}{(3-1)^3} < 0 \Longrightarrow f(x)$ е *вдлъбната* в $(-\sqrt{3}, 0)$, а при инфлексия y'' мени знака си, т.е. $f(x)$ е *изпъкнала* в $(0, \sqrt{3})$;

* $y''(2) = \dfrac{6(2)^3 + 54(2)}{(3-4)^3} < 0 \Longrightarrow f(x)$ е *вдлъбната* в $(\sqrt{3}, +\infty)$.

б) (вж. 11.1 б)) $DM : x \in (0^+, e) \cup (e, +\infty)$, $y'' = \dfrac{\ln x + 1}{x^2(\ln x - 1)^3}$, $I(e^{-1}, \frac{1}{2})$ - инфлексна точка, $f(x)$ е само намаляваща.

Изпъкналост на $f(x)$ определяме по T1 (гледана отдолу) чрез произволни стойности от дефиниционните интервали:

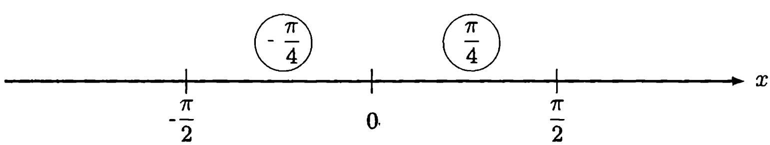


* $y''(e^{-2}) = \dfrac{\ln e^{-2} + 1}{e^{-4}(\ln e^{-2} - 1)^3} = \dfrac{-1}{e^{-4}(-3)^3} > 0 \Longrightarrow f(x)$ е *изпъкнала* в $(0^+, e^{-1})$, при инфлексия y'' мени знака си, т.е. $f(x)$ е *вдлъбната* в (e^{-1}, e);

* $y''(e^2) = \dfrac{\ln e^2 + 1}{e^4(\ln e^2 - 1)^3} = \dfrac{3}{e^4.1^3} > 0 \Longrightarrow f(x)$ е *изпъкнала* в $(e, +\infty)$

в) (вж. 11.1.в)) $DM : x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \dfrac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}$, $y_{\min}(0) = 1$.

Изпъкналост на $f(x)$ определяме по T1 (гледано отдолу) чрез произволни стойности от дефиниционните интервали:

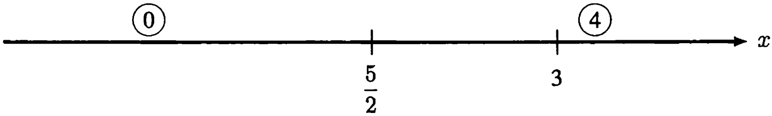


$$* \quad y''\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos^3\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2} > 0.$$

И така в лява и дясна полуоколност на точката $x = 0$ функцията е *изпъкнала*;

г) (вж. 11.1.г)) $DM : x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. $y'' = \dfrac{2x-5}{(x-3)^4} e^{\frac{1}{x-3}}$, $I\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ - инфлексна точка, $f(x)$ е само намаляваща.

Изпъкналост на $f(x)$ определяме по Т1 (гледана отдолу) чрез произволни стойности от дефиниционните интервали:

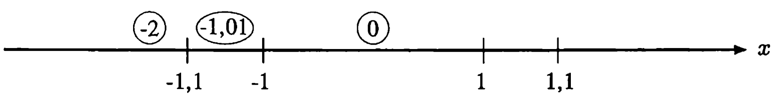


$* \quad y''(0) = \dfrac{-5}{(-3)^4} e^{-\frac{1}{3}} < 0 \Longrightarrow f(x)$ е *вдлъбната* в $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$, при инфлексия y'' мени знака си, т.е. $f(x)$ е *изпъкнала* в $\left(\dfrac{5}{2}, 3\right)$;

$* \quad y''(4) = \dfrac{8-5}{(4-3)^4} e > 0 \Longrightarrow f(x)$ е *изпъкнала* в $(3, +\infty)$;

д) (вж. 11.1д)) $DM : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, $y'' = 2\dfrac{3x^4 - 2x^2 - 2}{[(x^2-1)^2+1]^2}$, $I_1(1,1; y_1)$ и $I_2(-1,1; y_2)$ - инфлексни точки, $f(x)$ е растяща при $x < 0$ и намаляваща при $x > 0$. От $f(-x) = f(x) \Longrightarrow f(x)$ е четна, графиката ѝ е симетрична спрямо оста Oy.

Изпъкналост на $f(x)$ определяме по Т1 (гледана отдолу) чрез произволни стойности от дефиниционните интервали, като се съобразим с четността на функцията:



$* \quad y''(-2) = 2\dfrac{48-8-2}{10^2} > 0 \Longrightarrow f(x)$ е *изпъкнала* в $(-\infty; -1, 1)$, респективно *изпъкнала* и в $(1, 1; +\infty)$, при инфлексия y'' мени знака си, т.е. $f(x)$ е *вдлъбната* в $(-1, 1; -1)$;

$* \quad y''(0) = 2\dfrac{-2}{4} < 0 \Longrightarrow f(x)$ е *вдлъбната* в $(-1, 1)$.

Пример 12.2. Определете характера на функцията в околностите на дадените точки:

а) $y = \operatorname{arctg} x, \quad A(1, \pi/4)$ и $B(-1, \pi/4)$;

б) $y = x^2 \ln x, \quad A(1,0)$ и $B(1/e^2, -2/e^4)$.

Решение. Характерът на функцията се определя от знака на y'' (вж. T1).

а) $y = \operatorname{arctg} x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}, y'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

* $y''(x=1) = -\dfrac{2}{4} < 0 \Longrightarrow$ в околност на точка A функцията е изпъкнала нагоре (вдлъбната);

* $y''(x=-1) = \dfrac{2}{4} > 0 \Longrightarrow$ в околност на точка B - изпъкнала надолу;

б) $y = x^2 \ln x \Longrightarrow y' = x(2\ln x + 1), y'' = 2\ln x + 3$.

* $y''(x=1) = 3 > 0$: в точка A - изпъкнала надолу,

* $y''(x = \dfrac{1}{e^2}) = -1 < 0$: в точка B - изпъкнала нагоре.

Пример 12.3. Кривите $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ са изпъкнали надолу в интервала (a,b). Докажете, че в дадения интервал:

а) кривата $y = \varphi(x) + \psi(x)$ е изпъкнала надолу;

б) ако $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са положителни и имат обща точка на минимум в интервала (a,b), то кривата $y = \varphi(x)\psi(x)$ е също изпъкнала надолу.

Решение. а) От $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ изпъкнали надолу в $(a,b) \Longrightarrow \varphi''(x) > 0$ и $\psi''(x) > 0$ в (a,b). От $y = \varphi(x) + \psi(x) \Longrightarrow y' = \varphi'(x) + \psi'(x)$, $y'' = \varphi''(x) + \psi''(x) > 0$ в дадения интервал. Следователно и $y = \varphi(x) + \psi(x)$ е също изпъкнала надолу;

б) От $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - имат обща точка на минимум в x_0, $a < x_0 < b$ следва, че за $x \in (a, x_0)$ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са намаляващи функции $\Longrightarrow \varphi'(x) < 0$, $\psi'(x) < 0 \Longrightarrow \varphi'(x)\psi'(x) > 0$. За $x \in (x_0, b)$ функциите са растящи $\Longrightarrow \varphi'(x) > 0$, $\psi'(x) > 0$ и тогава $\varphi'(x)\psi'(x) > 0$, т.е. $\forall x \in (a,b)$ $\varphi'(x)\psi'(x) > 0$.

Изследваме знака на y'' в (a,b). От $y = \varphi(x)\psi(x)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow y' &= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x), \\
y'' &= \varphi''(x)\psi(x) + \varphi'(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi'(x) + \varphi(x)\psi''(x) \\
&= \varphi''(x)\psi(x) + 2\varphi'(x)\psi'(x)) + \varphi(x)\psi''(x).
\end{aligned}$$

Функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са положителни и изпъкнали надолу в $(a,b) \Longrightarrow \varphi''(x) > 0$, $\psi''(x) > 0 \Longrightarrow \varphi''(x)\psi(x) > 0$ и $\varphi(x)\psi''(x) > 0$. Тогава $y'' > 0$ в (a,b). Следователно $y = \varphi(x)\psi(x)$ е изпъкнала надолу в (a,b).

Пример 12.4. Намерете инфлексните точки на функцията $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ и докажете, че лежат на една права.

Решение. $DM : x \in (-\infty, +\infty)$;

$$* \ y' = \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$* \ y'' = \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3},$$

$$* \ y''=0 \Longrightarrow (x-1)(x^2+4x+1)=0 \Longrightarrow x_1=1,\ x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}.$$

за $x=1 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow I_1(1,1)$,

за $x=-2-\sqrt{3} \Longrightarrow y = \dfrac{-2-\sqrt{3}+1}{(-2-\sqrt{3})^2+1} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow I_2\left(-2-\sqrt{3}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$,

за $x=-2+\sqrt{3} \Longrightarrow y = \dfrac{-2+\sqrt{3}+1}{(-2+\sqrt{3})^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \Longrightarrow I_3\left(-2+\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$.

Като използваме уравнение на права през две точки $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, написваме уравнението на правата, определена от точките I_2 и I_3:

$$\frac{y-\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}}{\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}} = \frac{x-\sqrt{3}+2}{-2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4y-\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} = \frac{x-\sqrt{3}+2}{-2\sqrt{3}} \Longleftrightarrow x-4y+3=0.$$

Проверяваме дали $I_1(1,1)$ удовлетворява полученото уравнение на правата през I_2 и I_3: $1-4.1+3=0 \Longleftrightarrow 0=0 \Longrightarrow$ трите точки I_1, I_2 и I_3 лежат на една права.

Пример 12.5. При какви стойности на параметрите a и b точката $I(1,3)$ се явява инфлексна точка за кривата $y=ax^3+bx^2$?

Решение. Достатъчното условие за инфлексия е $y''=0$.

$$* \ y' = 3ax^2+2bx,\ y''=6ax+2b.$$

$$* \ \left|\begin{array}{l} 3=a+b \\ 0=6a+2b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=-3/2 \\ b=9/2. \end{array}\right.$$

Пример 12.6. Определете α и β така, че кривата $x^2y + \alpha x + \beta y = 0$ да има инфлексия в точката $A(2; 2,5)$. Определете и другите инфлексни точки на кривата.

Решение. Кривата е зададена с уравнение $F(x,y) = 0$, т.е. в неявен вид. Диференцираме равенството два пъти, като x е независима променлива, а y е функция:

$$2xy + x^2y' + \alpha + \beta y' = 0;$$

$$2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' + \beta y'' = 0 \Longleftrightarrow 2y + 4xy' + y''(x^2 + \beta) = 0.$$

В точката $A(2; 2,5)$ имаме $(y'' = 0)$:

$$2.2.2,5 + (2^2 + \beta)y' + \alpha = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{10 + \alpha}{4 + \beta};$$

$$5 + 8\left(-\frac{10 + \alpha}{4 + \beta}\right) = 0 \Longleftrightarrow 5\beta - 8\alpha = 60.$$

Точка A е от графиката на функцията. Следователно удовлетворява уравнението на кривата:

$$2^2.2,5 + 2\alpha + 2,5\beta = 0 \Longleftrightarrow 4\alpha + 5\beta = -20.$$

Определяме α и β от системата:

$$\left| \begin{array}{l} -8\alpha + 5\beta = 60 \\ 4\alpha + 5\beta = -20 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{20}{3} \\ \beta = \dfrac{4}{3}. \end{array} \right.$$

Като заместим получените стойности за α и β, получаваме уравнението на кривата и определяме y в явен вид:

$$x^2y - \frac{20}{3}x + \frac{4}{3}y = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{20x}{3x^2 + 4}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Намираме y' и y'':

$$y' = 20\frac{3x^2 + 4 - 6x^2}{(3x^2 + 4)^2} = \frac{20(4 - 3x^2)}{(3x^2 + 4)^2};$$

$$y'' = 20\frac{-6x(3x^2 + 4)^2 - 2.6x(3x^2 + 4)(4 - 3x^2)}{(3x^2 + 4)^4} = \frac{360x(x^2 - 4)}{(3x^2 + 4)^3}.$$

От достатъчното условие за инфлексия намираме:

$$y'' = 0 \Longleftrightarrow x(4 - x^2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, \ x_{2,3} = \pm 2$$

за $\quad x_1 = 0 : y_1 = 0 \Longrightarrow I_1(0,0),$

за $\quad x_2 = -2 : y_2 = -2,5 \Longrightarrow I_2(-2; -2,5),$

за $\quad x = 2 : y_3 = 2,5 \Longrightarrow A(2; 2,5)$ (дадената точка).

ЗАДАЧИ

I. *Определете* интервалите на изпъкналост и инфлексните точки на графиките на функциите:

1. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$, $a > 0$ — Отг. $(-\infty, -3a) \cup (0, 3a)$ - изпъкнала надолу
$(-3a, 0) \cup (3a, +\infty)$ - изпъкнала нагоре
$I_1(-3a, -9a/4)$, $I_2(0, 0)$, $I_3(3a, 9a/4)$

2. $y = e^{\sin x}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ — Отг. $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ - изпъкнала надолу
$\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ - изпъкнала нагоре
$I\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$

3. $y = \ln(x^2 + 1)$ — Отг. $(-1, 1)$ - изпъкнала надолу
$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ - изпъкнала нагоре
$I_{1,2}(\pm 1, \ln 2)$

4. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ — Отг. $(-\infty, 1/2)$ - изпъкнала надолу
$(1/2, \infty)$ - изпъкнала нагоре; $I\left(\dfrac{1}{2}, e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$

5. $y = x^4(12\ln x - 7)$ — Отг. $(1, \infty)$ - изпъкнала надолу
$(0, 1)$ - изпъкнала нагоре; $I(1, -7)$

6. $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$ — Отг. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$ - изпъкнала надолу
$(1, 3)$ - изпъкнала нагоре; $I(3, 2/9)$

7. $y = \dfrac{e\ln x}{x}$ — Отг. $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ - изпъкнала надолу
$(0, e^{\frac{3}{2}})$ - изпъкнала нагоре; $I\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$

8. $y = x - \ln x$ — Отг. навсякъде изпъкнала надолу

9. $y = exe^{-x}$ — Отг. $(-\infty, 2)$ - изпъкнала нагоре
$(2, +\infty)$ - изпъкнала надолу; $I(2, 2/e)$

10. $y = x + \dfrac{4}{x+2}$ — Отг. $(-\infty, -2)$ - изпъкнала нагоре
$(-2, +\infty)$ - изпъкнала надолу

II. *Покажете*, че инфлексните точки на кривата $y = x\sin x$ лежат върху кривата $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

III. *Покажете*, че графиката на функцията

1. $y = x\operatorname{arctg} x$ е навсякъде изпъкнала надолу;
2. $y = \ln(x^2 - 1)$ е навсякъде изпъкнала нагоре.

IV. Нека $P(x)$ е многочлен с положителни коефициенти и четни степенни показатели. Докажете, че графиката на функцията $y = P(x) + ax = b$ е навсякъде изпъкнала надолу.

V. При какъв избор на параметър h кривата на вероятностите $y = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $h > 0$ има инфлексни точки с абсциси $x = \pm 6$?

Отг. $h = (6\sqrt{2})^{-1}$

ГЛАВА 13

АСИМПТОТИ НА РАВНИННА КРИВА

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$. Определена е равнинна крива $(c) : y = f(x)$.

Дефиниция 1 *Асимптота на кривата (c) наричаме права l, която се допира до (c) в безкрайността $(x \to \infty)$.*

Дефиниция 2 *Ако $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c = const$, правата $l : y = c$ е* ***хоризонтална асимптота*** *за кривата (c), $l \parallel Ox$.*

Дефиниция 3 *Ако $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$, където x_0 е точка на прекъсване за $f(x)$, то в точката x_0 има* ***вертикална асимптота*** *$l : x = x_0$, $l \parallel Oy$, за $x > x_0$ (също за $x < x_0$).*

Дефиниция 4 *Правата $l : y = kx + n$ е* ***наклонена асимптота*** *(асимптота в общо положение) за кривата (c), ако $f(x) = kx + n + \delta(x)$ при $x \to \infty$, където $\delta(x)$ е безкрайно малка функция ($\lim\limits_{x \to \infty} \delta(x) = 0$).*

Теорема 1 *Достатъчно условие правата $l : y = kx + n$ да е* ***асимптота*** *на кривата $(c) : y = f(x)$ е*

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]. \tag{13.1}$$

Доказателство. Правата $l : y = kx + n$ е асимптота за $(c) : y = f(x)$. Тогава

а) при $x \to \infty$ имаме $f(x) = kx + n + \delta(x)\Big| : x \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{kx}{x} + \frac{n}{x} + \frac{\delta(x)}{x} \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k + 0 + 0 = k;$$

б) от $f(x) - kx - n = \delta(x)$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - n] = \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0 \Longrightarrow n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

Забележка: Ако $y = f(x)$ има хоризонтална асимптота, то тя няма наклонена, защото от $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = b$ (const) следва $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \left[\frac{b}{x}\right] = 0$ и $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} y = b$, т.е. хоризонталната и наклонената асимптота съвпадат.

Пример 13.1. Намерете уравненията на асимптотите на хиперболата с канонично уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. От $y = f(x) = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и формули (13.1) имаме:

$$* \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} = \pm\frac{b}{a};$$

$$* \quad n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - \left(\pm\frac{b}{a}\right)x\right] = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)$$

$$= \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

И така, търсените асимптоти имата уравнения $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Пример 13.2. Намерете уравненията на асимптотите на функцията $y = fx) = x - 2\mathrm{arctg}\, x$.

Решение. $DM : x \in (-\infty, +\infty)$ и по формули (13.1) имаме:

$$* \quad k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x - 2\mathrm{arctg}\, x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - 2\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}\right) = 1,$$

$$* \quad n_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}(x - 2\mathrm{arctg}\, x - x) = -2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \mp\pi.$$

И така асимптоти $l_1 : y = x - \pi$ и $l_2 : y = x + \pi$ на $y = f(x)$ имат съответно отрезови уравнения

$$l_1 : \frac{x}{\pi} + \frac{y}{-\pi} = 1 \quad \text{и} \quad l_2 : \frac{x}{-\pi} + \frac{y}{\pi} = 1, \qquad \text{като } l_1 \parallel l_2.$$

Пример 13.3. Изследвайте относно асимптоти функциите:

а) $y = f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$;

б) $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$;

в) $y = f(x) = \cos x - \ln(\cos x)$.

г) $y = f(x) = 1 + e^{\frac{1}{x-3}}$;

д) $y = f(x) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x^2 - 1}$;

Решение. а) $DM : x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. По дефиниции 2 и 3 намираме съответно хоризонтални и вертикални асимптоти за $f(x)$, а от (13.1) - наклонени асимптоти:

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2\left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)}=-(\pm\infty)=\mp\infty$ или $f(x)$ *няма хоризонтални* асимптоти;

* $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-}\dfrac{x^3}{3-x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{(-\sqrt{3}-\varepsilon)^3}{3-(-\sqrt{3}-\varepsilon)^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{(-\sqrt{3}-\varepsilon)^3}{3-3-2\varepsilon\sqrt{3}-\varepsilon^2}$
$=\dfrac{(-\sqrt{3})^3}{-0(2\sqrt{3}-0)}=+\infty$, но $f(-x)=-f(x)$ или функцията е нечетна, графиката е симетрична спрямо O и тогава $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-\infty$;

* $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+}\dfrac{x^3}{3-x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{-\sqrt{3}+\varepsilon)^3}{3-(-\sqrt{3}+\varepsilon)^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{(-\sqrt{3}+\varepsilon)^3}{3-3+2\varepsilon\sqrt{3}-\varepsilon^2}$
$=\dfrac{(-\sqrt{3})^3}{0(2\sqrt{3}-0)}=-\infty$ и поради нечетност на $f(x)$ имаме $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$.

И така в точките $x=\pm\sqrt{3}$ на прекъсване на $f(x)$ *има вертикални асимптоти*;

* За правата $l: y=kx+n$ намираме:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)}=-1;$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2\left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)}=0.$$

И така $f(x)$ *има наклонена* асимптота $y=-x$ (ъглополовяща на втори и четвърти квадрант);

б) $DM: x\in(0^+,e)\cup(e,+\infty)$. По дефиниции 2 и 3 и (13.1) търсим асимптоти на $f(x)$:

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1/x}=1^+$, т.е. $y=1$ е хоризонтална асимптота за десния клон от графиката;

* $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln x-1}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1/x}{1/x}=1^-$, т.е. $(0^+,1^-)$ е празна точка за левия клон на графиката на $f(x)$;

* $\lim\limits_{x\to e+}\dfrac{\ln x}{\ln x-1}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln(e+\varepsilon)}{\ln(e+\varepsilon)-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty,$

$\lim\limits_{x\to e-}\dfrac{\ln x}{\ln x-1}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln(e-\varepsilon)}{\ln(e-\varepsilon)-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty.$

И така в точката $x=e$ на прекъсване на $f(x)$ има *вертикална асимптота* за двата клона.

* За правата $l: y=kx+n$ намираме:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x(\ln x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\ln x-1+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{\infty}=0$$
$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln x-1}=1.$$

И така $f(x)$ *няма наклонени* асимптоти.

в) $DM: x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. по дефиниции 2 и 3 и (13.1) търсим асимптоти на $f(x)$:

* $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right)-\ln\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)\right]$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)\right]=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\sin\varepsilon-\ln(\sin\varepsilon))=+\infty;$

* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)\right]=+\infty;$

И така в точките $x=-\dfrac{\pi}{2}$ и $x=\dfrac{\pi}{2}$ *има вертикална* асимптота. Асимптоти в *общо положение няма*, тъй като x се мени в краен и отворен интервал;

г) $DM: x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$. По дефиниции 2 и 3 и (13.1) търсим асимптоти на $f(x)$:

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+e^{\frac{1}{x-3}}\right)=1+1=2$, т.е. правата $y=2$ е *хоризонтална асимптота* и за двата клона на графиката;

* $\lim\limits_{x\to3-}f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1+e^{\frac{1}{3-\varepsilon-3}}\right)=1+e^{-\infty}=1^+$, т.е. точката (3,1) е *празна точка* за левия клон;

* $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1+e^{\frac{1}{3+\varepsilon-3}}\right)=1+e^{\infty}=+\infty$, т.е. в точката $x=3$ *има вертикална асимптота* за десния клон;

* Тъй като $f(x)$ има хоризонтална асимптота $y = 1$, то тя *няма наклонена асимптота*.

д) $DM: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. По дефиниции 2 и 3 и (13.1) търсим асимптоти на $f(x)$:

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2-1}\right) = \operatorname{arctg} 0^+ = 0^+$, т.е. правата $y = 0$ (Ox) е *хоризонтална асимптота* за първия и третия клон на графиката на $f(x)$;

* $\lim\limits_{x\to-1-}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(-1-\varepsilon)2-1}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\right)$ $= \lim\limits_{u\to+\infty}(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{\pi}{2}$ и, тъй като $f(-x) = f(x)$ - четна, то

$$\lim_{x\to 1+}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{2};$$

* $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(1-\varepsilon)^2-1}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\varepsilon(-2+\varepsilon)}\right)$ $= \lim\limits_{u\to-\infty}(\operatorname{arctg} u) = -\dfrac{\pi}{2}$ и поради четност на $f(x)$,

$$\lim_{x\to -1+}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

И така правите $x = \pm 1$ *не са вертикални* асимптоти.

* Функцията няма наклонена асимптота (вж. забележката).

ЗАДАЧИ

I. *Намерете* асимптотите на функциите:

1. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x}$ Отг. $x = 0, y = x - 1$
2. $y = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Отг. $x = 0, y = x$
3. $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$ Отг. $y = 3x + \dfrac{\pi}{2}$ (дясна), $y = 3x - \dfrac{\pi}{2}$ (лява)
4. $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ Отг. $x = 0, y = 2x, x = -1$
5. $y = \dfrac{\sin x}{x}$ Отг. $y = 0$
6. $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ Отг. $x = -\dfrac{1}{e}, y = x + \dfrac{1}{e}$

7. $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$ Отг. $y = \dfrac{\pi}{2}$

8. $y = \dfrac{x}{e^x}$ Отг. $y = 0$

9. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ Отг. $x = 0, y = 0$

10. $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ Отг. $x = \pm 1, y = 1$

11. $y = \ln(1 + e^x)$ Отг. $y = x$

12. $y^2(1-x) = x^2(1+x)$ Отг. $x = 1$

ГЛАВА 14

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ФУНКЦИЯ И ПОСТРОЯВАНЕ НА НЕЙНАТА ГРАФИКА

Дефиниция 1 *Ако е дадена равнинна крива* $(c) : y = f(x),\ x \in [a, b]$, *то на* $\forall x \in [a, b]$ *отговаря точка* $M[x, f(x)] \in (c)$ *в равнината. Множеството от точки* M *се нарича* **графика** *на функцията* $y = f(x)$, *което множество не е крайно.*

Графиката на функцията се чертае приблизително (като се използват свойствата на $f(x)$) по следния **алгоритъм**:

I. DM, непрекъснатост или точки на прекъсване, четност, нечетност, периодичност

1. Дефиниционна област- зависи от елементарните функции, участващи в аналитичния израз на дадената функция:

- *дробна функция* - знаменателят трябва да е различен от нула;
- *ирационален израз с четен корен* - подкоренната функция е неотрицателна;
- *логаритмична функция* - аргументът е положителен;
- *тригонометрични функции tg и cotg* - съобразяват се техните дефиниционни множества;
- *обратни тригонометрични функции* $\arcsin\varphi$ *и* $\arccos\varphi$ - $|\varphi| \leq 1$.

2. Точки на прекъсване- точките, в които функцията не е дефинирана.

3. Четност, нечетност, периодичност- за четност и нечетност се изследват само функции, които имат симетрично дефиниционно множество.

- Ако $f(x) = f(-x)$, то $f(x)$ е четна и графиката ѝ е симетрична спрямо оста Oy.
- Ако $f(x) = -f(-x)$, то $f(x)$ е нечетна и графиката ѝ е симетрична спрямо началото на координатната система.
- Ако $f(x) \neq \pm f(-x)$, то $f(x)$ е нито четна, нито нечетна.

При $f(x) = \pm f(-x)$ изследваме функцията и построяваме графиката ѝ само в положителната част на дефиниционното множество, а в отрицателната част графиката построяваме симетрично в зависимост от четността.

- Ако $f(x) = f(x+T), T > 0$, функцията е периодична.

II. Екстремуми, интервали на растене и намаляване на функцията, изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексни точки

1. Екстремуми

* $y' = 0$ - необходимо условие за екстремум; x_i - нули на $y' = 0$;

* $y''(x = x_i) \begin{cases} > 0 & \text{- минимум за } x = x_i \\ < 0 & \text{- максимум за } x = x_i \\ = 0 & \text{- допълнително изследване} \end{cases}$;

* $y = f(x_i) \to M(x_i, f(x_i))$ - точки на екстремум.

2. Монотонност на $f(x)$ (растене, намаляване)

* $y' > 0$ - $f(x)$ расте;

* $y' < 0$ - $f(x)$ намалява.

3. Изпъкналост, вдлъбнатост

* $y'' > 0$ - изпъкнала надолу;

* $y'' < 0$ - изпъкнала нагоре.

4. Инфлексни точки

* $y'' = 0 \Longleftrightarrow x = x_j, I(x_j, f(x_j))$ - инфлексни точки.

III. Граници на функцията, когато x клони към краищата на дефиниционните интервали (хоризонтални и вертикални асимптоти)

1. Ако x_0 е точка на прекъсване, то

* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon), \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$ - лява граница в x_0;

* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$ - дясна граница в x_0;

* $x = x_0$ - *вертикална асимптота.*

2. Ако $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b = \text{const} \Longleftrightarrow y = b$ - *хоризонтална асимптота.*

IV. Наклонени асимптоти и някои произволни точки от графиката, вкл. пресечните точки на графиката с координатните оси

1. Правата с уравнение $y = kx + n$, където

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$$

се нарича *наклонена асимптота.*

Ако функцията има хоризонтална асимптота, то тя няма наклонена асимптота. **2.** Точки от графиката:

* $x = 0 \Longrightarrow Y[0, f(0)]$ - пресечни точки с оста Oy;
* $y = f(x) = 0$ (ако може да се реши) $\to x_k \Longrightarrow X[x_k, 0]$ - пресечни точки с оста Ox.

V. Построяване на графиката на функцията по предварително изготвена таблица с нанесени всички получени резултати

Пример 14.1. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}.$$

Решение. Изготвяме таблица, в която ще нанасяме резултатите от изследването:

x	$-\infty$		0		1^-	1^+		$3-\sqrt{3}$		2^-	2^+		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$			$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y''		$-$	0	$+$			$-$		$-$			$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\uparrow$	$-6\sqrt{3}$	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$	$6\sqrt{3}$	$\uparrow$	$+\infty$
			infl					max					min		

I. Определяме DM

* $DM : x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ или $f(x)$ има *две точки на прекъсване.* Тогава $DM : x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.
* DM не е симетрично множество, следователно не изследваме функцията относно четност (нечетност).

* $f(x)$ е *непериодична*, защото в аналитичния ѝ израз не са включени кръгови (тригонометрични) функции.

II. Намираме производните на функцията:

* $y' = \dfrac{3x^2(x^2-3x+2) - x^3(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{x^2(x^2-6x+6)}{(x^2-3x+2)^2}$;

* $y'' = \dfrac{(4x^3-18x^2+12x)(x^2-3x+2)^2 - 2x^2(x^2-6x+6)(x^2-3x+2)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^4}$
  $= \dfrac{2x(7x^2-18x+12)}{(x^2-3x+2)^3}$;

  Прилагаме Т1 и Т2:

* $y' = 0 \iff x_1 = 0,\ x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}$, т.е. функцията има три стационарни точки (точки, в които функцията има евентуално екстремум);

* $y''(3-\sqrt{3}) = \dfrac{2(3-\sqrt{3})[7(3-\sqrt{3})^2 - 18(3-\sqrt{3}) + 12]}{[(3-\sqrt{3})^2 - 3(3-\sqrt{3}) + 2]^3}$
  $= \dfrac{2(3-\sqrt{3})(42-24\sqrt{3})}{(5-3\sqrt{3})^3} < 0$;

* $y''(3+\sqrt{3}) = \dfrac{2(3+\sqrt{3})[7(3+\sqrt{3})^2 - 18(3+\sqrt{3}) + 12]}{[(3+\sqrt{3})^2 - 3(3+\sqrt{3}) + 2]^3}$
  $= \dfrac{2(3+\sqrt{3})(42+24\sqrt{3})}{(5+3\sqrt{3})^3} > 0$;

* $y''(0) = 0$, а от $y(0) = 0 \Longrightarrow I \equiv O(0,0)$ е инфлексна точка (вж. гл. 12, Т3).

* От $y''(3-\sqrt{3}) < 0 \Longrightarrow y(3-\sqrt{3}) = y_{\max}$, локален максимум.
  От $y''(3+\sqrt{3}) > 0 \Longrightarrow y(3+\sqrt{3}) = y_{\min}$, локален минимум.

* $y_{\max} = y(3-\sqrt{3}) = \dfrac{(3-\sqrt{3})^3}{(3-\sqrt{3})^2 - 3(3-\sqrt{3}) + 2} = -6\sqrt{3}$;

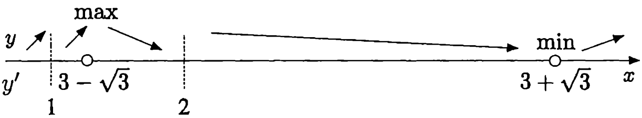
* $y_{\min} = y(3+\sqrt{3}) = \dfrac{(3+\sqrt{3})^3}{(3+\sqrt{3})^2 - 3(3+\sqrt{3}) + 2} = 6\sqrt{3}$.

Забележка. Видът на екстремума може да се определи и от монотонността на функцията:

* $y' > 0 \iff x^2 - 6x + 6 > 0 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, +\infty)$;

* $y' < 0 \iff x^2 - 6x + 6 < 0 \iff x \in (3-\sqrt{3}, 2) \cup (2, 3+\sqrt{3})$.

Когато $y' > 0 \Longrightarrow y$ расте, а при $y' < 0 \Longrightarrow y$ намалява. Тогава



$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} y(3-\sqrt{3}) = y_{\max} \\ y(3+\sqrt{3}) = y_{\min} \end{array} \right.$$

Получените резултати нанасяме в таблицата.

* $y'' = 0 \Longleftrightarrow 2x(7x^2 - 18x + 12) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} \notin \mathbb{R},\ y(0) = 0 \Longrightarrow$ точката $I(0,0)$ е инфлексна точка;

* $y'' > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$ и тогава функцията е *изпъкнала надолу*;

* $y'' < 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (1,2)$ и тогава функцията е *изпъкнала нагоре*.

Нанасяме резултатите в таблицата.

III. * $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} = \pm\infty;$

* $$\lim_{x\to 1-} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1-\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon-1)(1-\varepsilon-2)} = \left[\frac{1}{0.1}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\to 1+} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon-1)(1+\varepsilon-2)} = \left[\frac{1}{0.(-1)}\right] = -\infty;$$

* $$\lim_{x\to 2-} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(2-\varepsilon)^3}{(2-\varepsilon-1)(2-\varepsilon-2)} = \left[\frac{8}{1.(-0)}\right] = -\infty$$
  $$\lim_{x\to 2+} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(2+\varepsilon)^3}{(2+\varepsilon-1)(2+\varepsilon-2)} = \left[\frac{8}{1.0)}\right] = +\infty.$$
  Нанасяме резултатите в таблицата.

* Правите $x = 1$ и $x = 2$ са *вертикални* асимптоти към графиката на функцията.

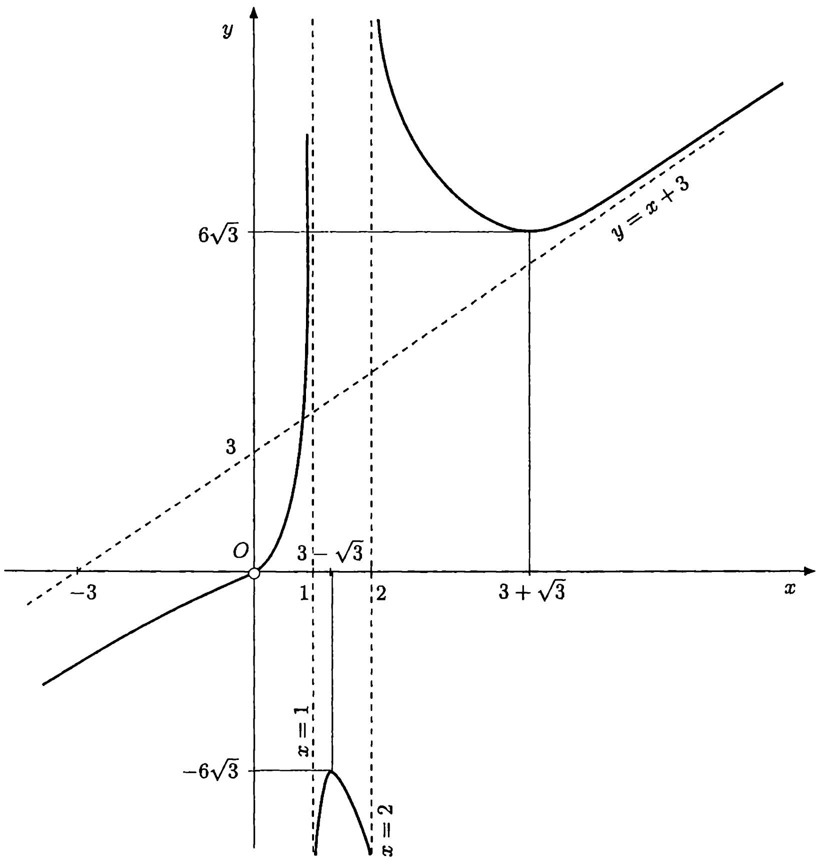
IV. Тъй като $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти $\left(\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\right)$, търсим *наклонени* асимптоти с уравнение $y = kx + n$:

* $\displaystyle k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} = 1;$

$$* \; n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3x+2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2-3x+2} = 3.$$

Следователно правата $y = x + 3$ е *наклонена асимптота* за $f(x)$.

V. Графиката на функцията построяваме, като използваме попълнената таблица (фиг. 14.1).



Фиг. 14.1.

Пример 14.2. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}.$$

Решение. Изготвяме таблица, в която нанасяме постепенно получените резултати (вж. примери 11.1, 12.1, 13.3а):

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}_-$	$-\sqrt{3}_+$		0		$\sqrt{3}_-$	$\sqrt{3}_+$		3		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y''		$+$		$+$			$-$	0	$+$			$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\downarrow$	4,5	$\uparrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\uparrow$	$-4,5$	$\downarrow$	$-\infty$
			min					infl					max		

I. Определяме DM

* DM : $3 - x^2 \neq 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$ или $f(x)$ има *две точки на прекъсване*. Тогава DM : $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

* От $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{3-x^2} = -f(x) \Longrightarrow f(x)$ е *нечетна*, а графиката ѝ е симетрична спрямо O.

* $f(x)$ е *непериодична*, защото в нея липсват кръгови (тригонометрични) функции.

II. Вж. 11.1.а) и 12.1.а), като получените резултати се нанасят в таблицата.

III. Вж. 13.3.а) и нанасяме резултатите в таблицата.

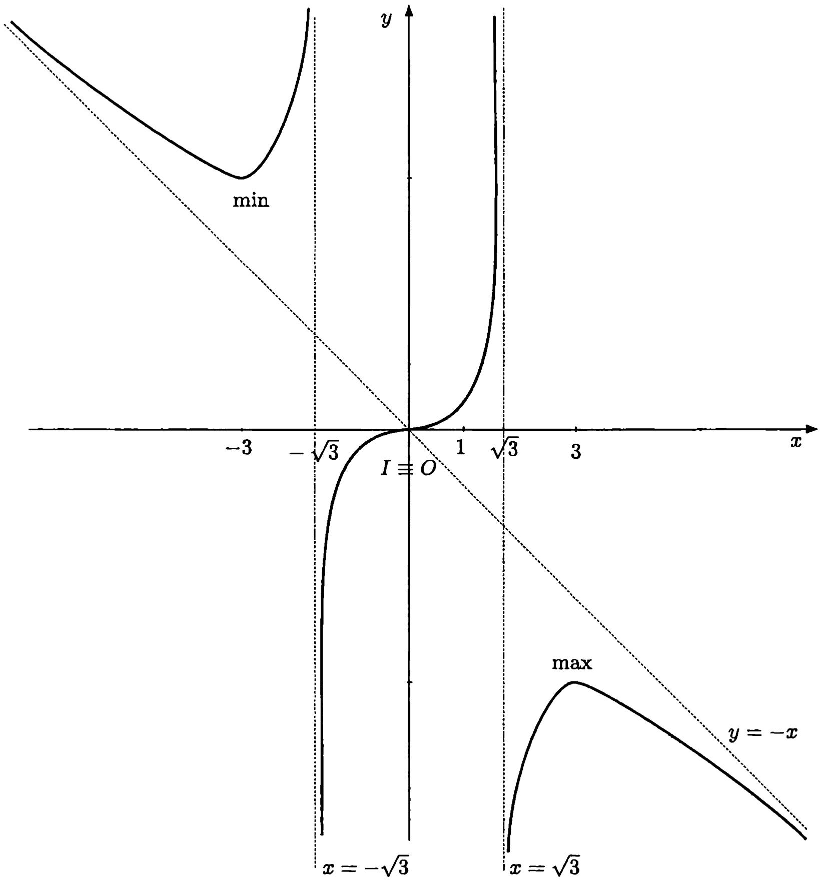
IV. $f(x)$ *има наклонена асимптота* $y = -x$ (вж. 13.3.а)).

* Произволни точки от графиката намираме така: при $x = \pm 2 \Longrightarrow y = \mp 8$ или точките $(-2, 8)$ и $(2, -8)$ са съответно от първи и трети клон, като са симетрични спрямо O; при $x = \pm 1 \Longrightarrow y = \pm\dfrac{1}{2}$ или точките $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ са от втория клон и са симетрични спрямо O.

* Пресечните точки на графиката с координатните оси $(y = 0, x = 0)$ намираме от две системи:

$$\left| \begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{3-x^2} \\ y = 0 \end{array} \right., \qquad \left| \begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{3-x^2} \\ x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{само точка } O(0,0).$$

V. Графиката на функцията построяваме, като използваме попълнената таблица (фиг. 14.2).



Фиг. 14.2.

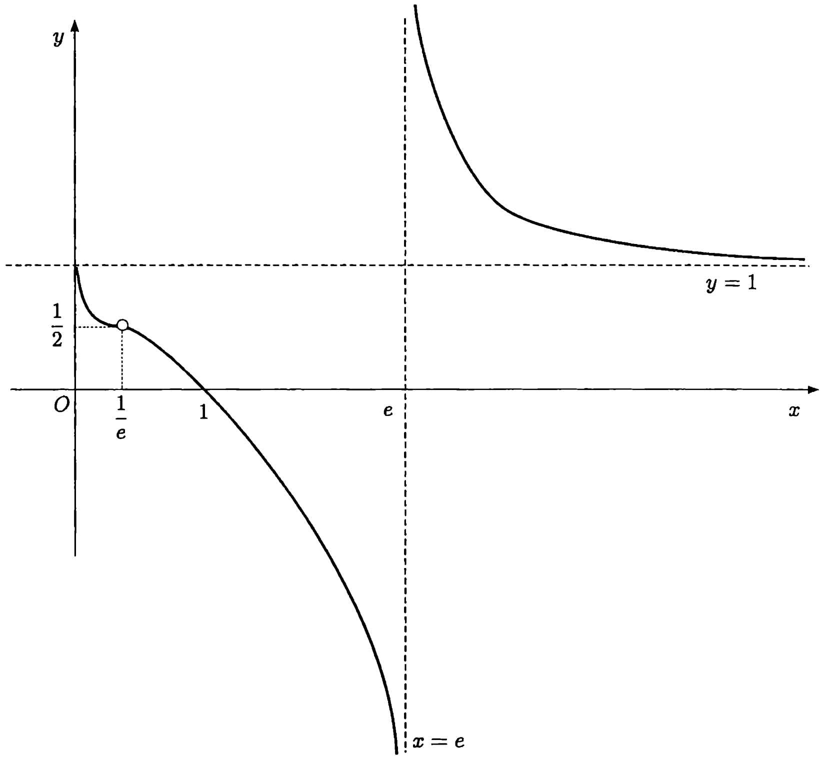
Пример 14.3. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}.$$

Решение. Изготвяме таблица, която попълваме постепенно (вж. примери 11.1, 12.1, 13.3.б)):

I. Определяме DM

$$DM : \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x - 1 > 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x \in (0^+, +\infty) \\ x \neq e \end{array} \right. \Longrightarrow DM : x \in (0^+, e) \cup (e, +\infty)$$



Фиг. 14.3.

или $f(x)$ има *една точка на прекъсване.* Въпрос за четност не може да се поставя ($f(-x)$ не съществува), симетрия няма и $f(x)$ е *непериодична* функция

x	0^+	e^{-2}	$\frac{1}{e}$	1	e_-	e_+		e^2		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
y''	$\overset{+}{\smile}$	$\overset{+}{\smile}$	0	$\underset{-}{\frown}$	$\underset{-}{\frown}$		$\overset{+}{\smile}$	$\overset{+}{\smile}$	$\overset{+}{\smile}$	
y	1^-	$\frac{2}{3}\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$0\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$	2	$\downarrow$	1^+
			infl							

II. Вж. 11.1.б) и 12.1.б), като получените резултати се нанасят в таблицата.

III. Вж. 13.3.б) и нанасяме резултатите в таблицата.

IV. $f(x)$ *няма наклонена асимптота* (вж. 13.3.б)).

* Произволни точки от графиката намираме така: при $x = e^2 \Longrightarrow y = 2$ или точката $(e^2, 2)$ е от втория клон на графиката, а от първия клон - при $x = e^{-2} \Longrightarrow y = \dfrac{2}{3}$.

* Пресечните точки на графиката с $Ox : y = 0$ намираме от системата:

$$\left| \begin{array}{l} y = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1} \\ y = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1, \text{ т.е. } (1,0).$$

V. Графиката на функцията построяваме, като използваме попълнената таблица (фиг. 14.3).

Пример 14.4. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}.$$

Решение. **I.** $DM : \dfrac{x-2}{x+2} > 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

* дефиниционното множество е симетрично спрямо нулата. Следователно имаме основание да изследваме функцията относно четност:

$$f(-x) = \ln \frac{-x-2}{-x+2} = \ln \frac{x+2}{x-2} = \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{-1} = -\ln \frac{x-2}{x+2} = -f(x),$$

т.е. функцията е четна и ще изследваме само за $x > 0$, или $DM^* : x \in (2, +\infty)$.

Изготвяме таблица, която ще попълваме постепенно:

x	2^+							$+\infty$
y'	$+$		$+$		$+$		$+$	
y''	$\frown$ $-$		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$	
y	$-\infty$	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		0

Функцията е непериодична.

II. Намираме y' и y'':

$$y' = \frac{x+2}{x-2} \frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} = \frac{4}{x^2-4} > 0, \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

$$y'' = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} < 0, \quad \forall x \in (2, +\infty).$$

От $y' > 0\ \forall x \in (2, +\infty) \Longrightarrow f(x)$ расте в DM^*.
От $y'' < 0\ \forall x \in (2, +\infty) \Longrightarrow f(x)$ е изпъкнала нагоре в DM^*.
Следователно функцията няма екстремуми и инфлексни точки.

III. В точката $x = 2$ търсим дясна граница:

$$* \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln\frac{x-2}{x+2} = \ln\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2+\varepsilon-2}{2+\varepsilon+2} = \ln 0 = -\infty$$

$\Longrightarrow x = 2$ е вертикална симптота.

$$* \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x-2}{x+2} = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+2} = \ln 1 = 0$$

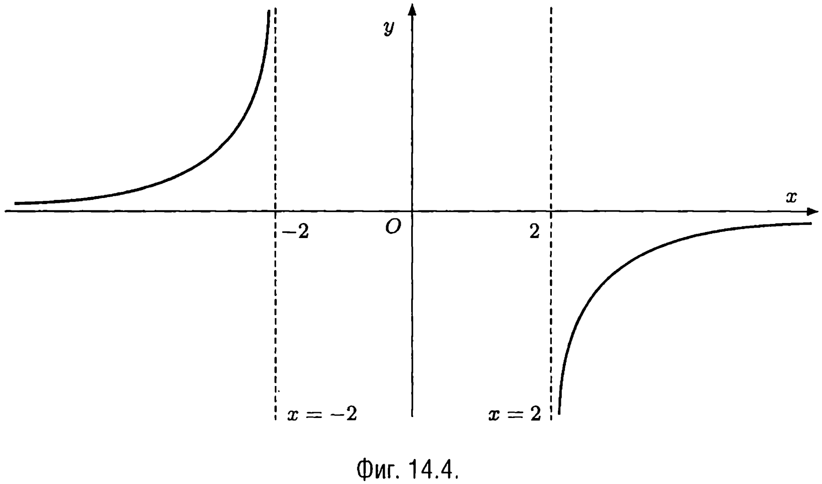
$\Longrightarrow y = 0$ е хоризонтална асимптота.

IV. 1. $f(x)$ *няма наклонена асимптота*, защото има хоризонтална.
2. Графиката на функцията не пресича осите Oy ($x = 0 \notin DM$);

$$\ln\frac{x-2}{x+2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x-2}{x+2} = 1 \Longleftrightarrow x \in \emptyset,$$

т.е. графиката на $f(x)$ не пресича оста Ox (тя е хоризонтална асимптота).

V. Построяваме графиката (фиг. 14.4) за $x \in (2, +\infty)$, а за $x \in (-\infty, -2)$ построяваме графиката симетрично спрямо $O(0, 0)$ (нечетна функция).



Фиг. 14.4.

Пример 14.5. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \cos x - \ln(\cos x).$$

Решение. Изготвяме таблица, която попълваме постепенно (вж. примери 11.1, 12.1, 13.3.в)):

x	$-\frac{\pi}{2}+$				0			$\frac{\pi}{2}-$
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$\smile +$	$\smile +$	$\smile +$	0	$\smile +$	$\smile +$	$\smile +$
y	$+\infty$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	1	$\uparrow$	$\uparrow$	$+\infty$

I. (Вж. 11.1. в)) $DM : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а всички интервали са $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. При $k = 1 \Longrightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, при $k = -1 \Longrightarrow x \in \left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$ и т.н.

$$f(-x) = \cos(-x) - \ln(\cos(-x)) = \cos x - \ln(\cos x) = f(x),$$

т.е. $f(x)$ е *четна*, графиката е симетрична спрямо Oy.

II. Вж. 11.1.в) и 12.1.в), като получените резултати се нанасят в таблицата.

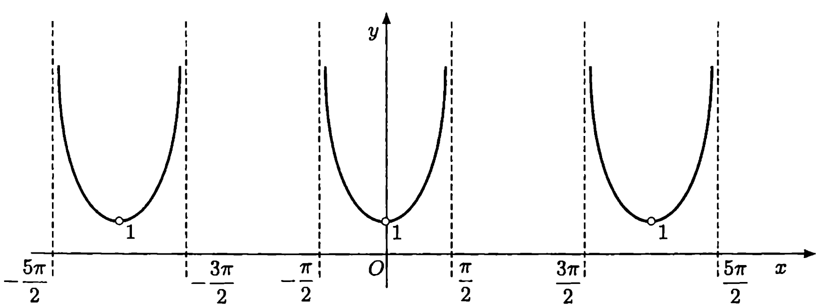
III. Вж. 13.3.в) и нанасяме резултатите в таблицата.

IV. $f(x)$ *няма наклонена асимптота* (вж. 13.3).

* Произволни точки от графиката е излишно да търсим.

* Графиката не пресича координатните оси.

V. Построяваме графиката (фиг. 14.5).



Фиг. 14.5.

Пример 14.6. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = 1 + e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Решение. Изготвяме таблица, която попълваме постепенно (вж. примери 11.1, 12.1, 13.3.г)):

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3_-	3_+		4		$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$			$-$		$-$ $-$	
y''		$\frown_-$ $\frown_-$	0	$\smile^+$ $\smile^+$			$\smile^+$		$\smile^+$ $\smile^+$	
y	2^-	$\searrow$	$1\frac{1}{8}$	$\searrow$	1^+	$+\infty$	$\downarrow$	$1+e$	$\searrow$	2^+
			infl							

I. Определяме DM:

* $DM : x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3$ или $f(x)$ има *една точка на прекъсване.* Тогава $DM : x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

* DM е несиметрично множество $\Longrightarrow f(x)$ е *нито четна, нито нечетна.* Функцията $f(x)$ е *непериодична.*

II. Вж. 11.1.г) и 12.1.г), като получените резултати се нанасят в таблицата.

III. Вж. 13.3.г) и нанасяме резултатите в таблицата.

IV. $f(x)$ *няма наклонена асимптота* (вж. 13.3.г)).

* Произволни точки от графиката намираме така: при $x = 4 \Longrightarrow y = 1 + e$, или $(4, 1 + e)$ е точка от втория клон на графиката, и т.н.

* Пресечните точки на графиката с координатните оси търсим със системите:

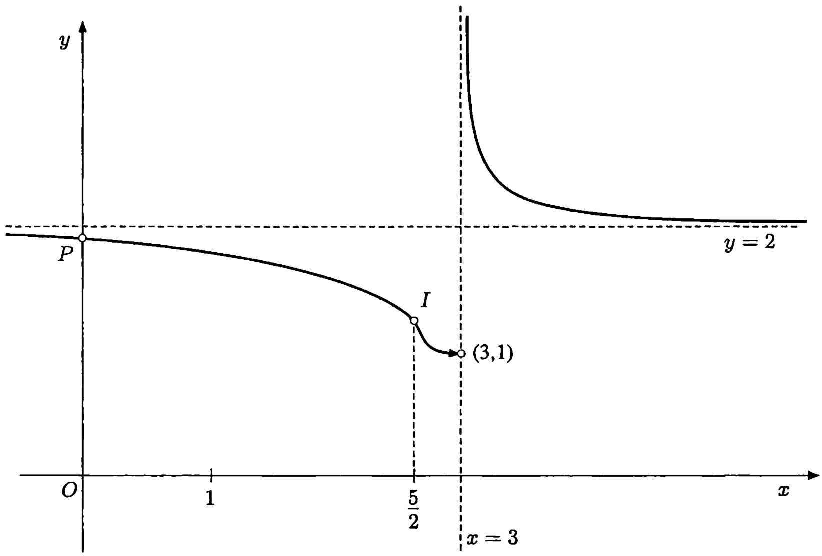
$$\left|\begin{array}{l} y = 1 + e^{\frac{1}{x-3}} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow P\left(0, 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right); \quad \left|\begin{array}{l} y = 1 + e^{\frac{1}{x-3}} \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) \cap Ox = \emptyset.$$

V. Построяваме графиката (фиг. 14.6).

Пример 14.7. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Решение. **I.** Определяме DM:



Фиг. 14.6.

* $DM : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Longrightarrow x = 0$ - точка на прекъсване.

* Функцията е нито четна нито нечетна, защото

$$f(-x) = (-x-2)e^{-\frac{1}{-x}} = -(x+2)e^{\frac{1}{x}} \neq \pm f(x).$$

* Функцията $f(x)$ е *непериодична.*

Изготвяме таблицата:

x	$-\infty$		-2		0_-	0_+		$\frac{2}{5}$		1		2		$+\infty$
y'		$+\ +$	0	$-\ -$			$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y''		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$			$-$	0	$+$	$+$		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-4\sqrt{e}$	$\searrow$	$-\infty$	0	$\searrow$	$-\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$		$-e^{-1}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
			max					infl		min				

II. $y' = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$;

$$y'' = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,\frac{x^2+x-2}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}}\frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2+x-2)}{x^4} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{5x-2}{x^4}.$$

1. Екстремуми:

   * $y' = 0 \Longleftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2, x_2 = 1,$

   * $y''(x = -2) = e^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \Longrightarrow f(-2) = f_{\max};$

     $y''(x = 1) = e^{-1}.3 > 0 \Longrightarrow f(1) = f_{\min}.$

   * $y_{\max} = f(-2) = -4\sqrt{e}, y_{\min} = f(1) = -\dfrac{1}{e}.$

2. Монотонност:

   * $y' > 0 \Longleftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ - $f(x)$ расте;

   * $y' < 0 \Longleftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ - $f(x)$ намалява.

3. Изпъкналост, инфлексни точки:

   * $y'' < 0 \Longleftrightarrow 5x - 2 < 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{2}{5})$ - $f(x)$ е изпъкнала нагоре;

   * $y'' > 0 \Longleftrightarrow 5x - 2 > 0 \Longrightarrow x \in \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$ - $f(x)$ е изпъкнала надолу;

   * $y'' = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{2}{5}, f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \Longrightarrow I\left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ - инфлексна точка.

III. * $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} = [\pm\infty.1] = \pm\infty;$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(-\varepsilon - 2)e^{\frac{1}{\varepsilon}} = [-2.\infty] = -\infty;$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (x - 2)e^{-\frac{1}{x}} \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon - 2)e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = [-2.0] = 0.$

  $\Longrightarrow x = 0$ - вертикална асимптота, функцията няма хоризонтална асимптота ($\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \neq \text{const}$).

IV. 1. Наклонени асимптоти $y = kx + n$:

* $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x} \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1;$

* $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[(x-2)e^{-\frac{1}{x}} - x] = [\pm\infty - \mp\infty]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x-2}{x}e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x-x+2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x-2}{x}e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

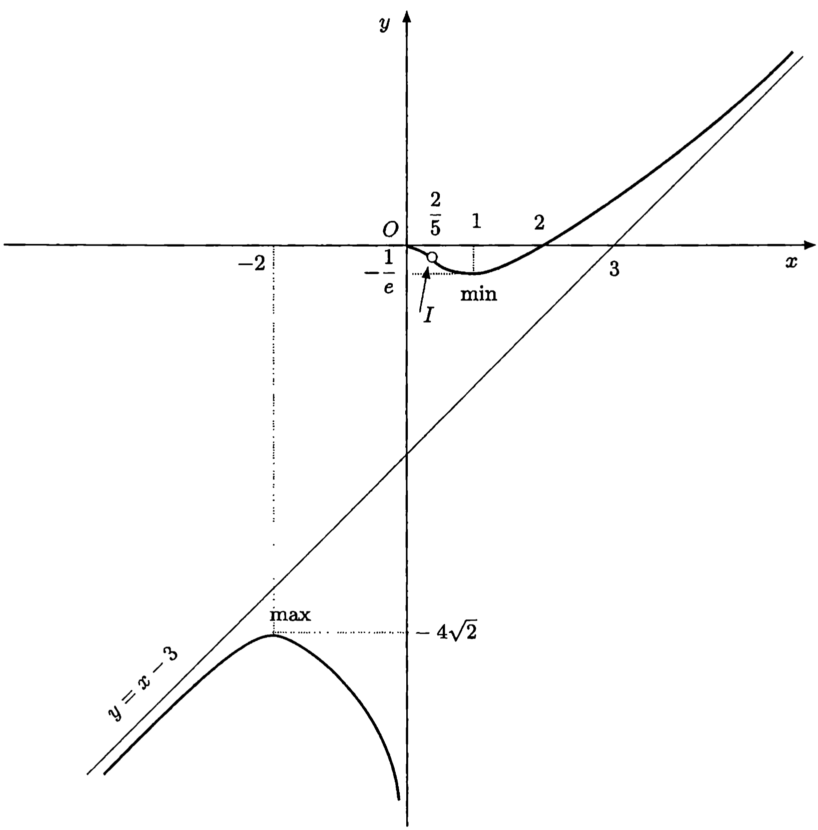
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2-3x}{x} = -3 \Longrightarrow y = x - 3$ - наклонена асимптота.

2. Точки от графиката:

* $x = 0$, но $0 \notin DM \Longrightarrow$ няма пресечни точки с оста Oy;

* $y = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$ - $X(2, 0)$ - пресечна точка с оста Ox.

V. Построяваме графиката (фиг. 14.7).



Фиг. 14.7.

Пример 14.8. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Решение. **I.** Определяме DM:

* $DM : x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$ или $f(x)$ има *две точки на прекъсване*. Тогава $DM : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

* От $f(-x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = f(x) \implies f(x)$ е *четна*, графиката ѝ е симетрична спрямо Oy.

* $f(x)$ е *непериодична функция*, защото е обратна кръгова функция.

Изготвяме таблицата:

x	$-\infty$	x_2	-1_-	-1_+	0	1_-	1_+	x_1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$		$+$ 0 $-$		$-$	$-$	$-$
y''	$\overset{+}{\smile}$	0	$\underset{-}{\frown}$	$\underset{-}{\frown}$	$\underset{-}{\frown}$	$\underset{-}{\frown}$	$\underset{-}{\frown}$	0	$\overset{+}{\smile}$
y	0^+ $\nearrow$	y_2	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$ $-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	y_1	$\searrow$ 0^+
		infl			max			infl	

II. Вж. 11.1 д) и 12.1 д), като нанасяме получените резултати в таблицата.

III. Вж. 13.3 д) и нанасяме резултатите в таблицата.

IV. * $f(x)$ няма наклонена асимптота (вж. 13.3 д)).

* Пресечните точки на графиката с координатните оси търсим със системата:

$$\left| \begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1} \\ x = 0 \end{array} \right. \implies \left(0, -\frac{\pi}{4}\right) \equiv \max; \qquad \left| \begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1} \\ y = 0 \end{array} \right. \implies f(x) \cap Ox = \emptyset$$

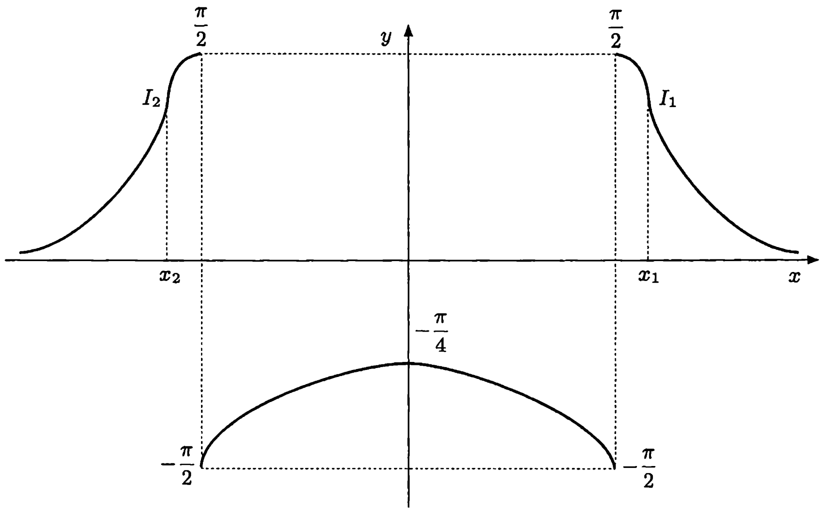
V. Построяваме графиката (фиг. 14.8).

Пример 14.9. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Решение. **I.** Определяме DM:

* $DM : -1 \leq \dfrac{2x}{1 + x^2} \leq 1 \iff x \in (-\infty, +\infty);$



Фиг. 14.8.

* Функцията е непрекъсната;

* $f(-x) = \arcsin\left(\dfrac{-2x}{1+(-x)^2}\right) = -\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = -f(x)$ (защото $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha \Longrightarrow f(x)$ е нечетна функция и изследването ще извършим за $x \geq 0$, т.е. $DM^* : x \in [0, +\infty)$.

* Функцияте е непериодична.

x	0			1			$+\infty$
y'		$+$	$+$		$-$	$-$	
y''		$\frown$ $-$	$\frown$ $-$		$\smile$ $+$	$\smile$ $+$	
y	0	$\nearrow$		$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\searrow$	0
	infl			max			

II. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} 2\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1-x^2)} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & x \in [0,1) \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & x \in (1, +\infty); \end{cases}$

$$y'' = \begin{cases} -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

1. y' не се анулира за нито една стойност на x, но

   * за $x \in [0,1)$ $y' > 0\ \forall x \Longrightarrow f(x)$ расте

   * за $x \in (1,+\infty)$ $y' < 0\ \forall x \Longrightarrow f(x)$ намалява.

   Следователно за $x = 1$ функцията има максимална стойност $y_{\max} = f(1) = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. * $y'' < 0$, $x \in [0,1) \Longrightarrow f(x)$ е изпъкнала нагоре;

   * $y'' > 0$, $x \in (1,+\infty) \Longrightarrow f(x)$ е изпъкнала надолу.

3. $y'' = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $f(0) = 0 \Longrightarrow I(0,0)$ - инфлексна точка.

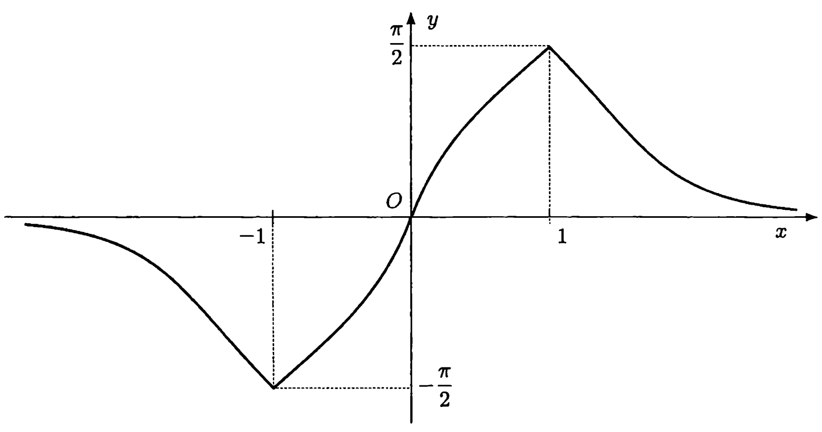
III. * $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \arcsin \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0 \Longrightarrow y = 0$ е хоризонтална асимптота;

* Функцията няма вертикална асимптота.

IV. * Тъй като $f(x)$ има хоризонтална асимптота, тя няма наклонени.

* Графиката пресича координатните оси в координатното начало ($f(0) = 0$).

V. Графика (фиг. 14.9). Най-напред построяваме графиката за $x \in [0,+\infty)$ и след това начертаваме симетрично спрямо т. O графиката за $x \in (-\infty,0)$, защото показахме, че $f(x)$ е нечетна функция.



Фиг. 14.9.

Пример 14.10. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}.$$

Решение. **I.** $DM: x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

* $f(-x) = \dfrac{|-x-1|}{(-x)^2} = \dfrac{|x+1|}{x^2} \neq \pm f(x)$ - функцията е нито четна, нито нечетна и има една точка на прекъсване;

* Функцията е непериодична.

x	$-\infty$		0_-	0_+		1		2		3		$+\infty$
y'		$+\ \ +\ \ +$			$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$		$-$	
y''		$+\ \ +$			$+$		$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{9}$	$\searrow$	0
								max		infl		

От $y = \dfrac{|x-1|}{x^2} \Longrightarrow y = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x^2}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \dfrac{x-1}{x^2}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$

II. $y' = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \dfrac{2-x}{x^3}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}, \quad y'' = \begin{cases} \dfrac{2(3-x)}{x^4}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \dfrac{2(x-3)}{x^3}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

* $y' = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2-x}{x^3} = 0 \Longleftrightarrow x = 2, y''(x=2) < 0 \Longrightarrow f(2) = \dfrac{1}{4} = y_{\max}$;

* $y' < 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{c} \dfrac{x-2}{x^3} < 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{array} \right. \bigcup \left| \begin{array}{c} \dfrac{2-x}{x^3} < 0 \\ x \in (1, +\infty) \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ намалява за } x \in (0, 1) \cup (2, +\infty); \\ f(x) \text{ расте за } x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)\ (y' > 0) \end{cases}$$

Тогава за $x = 1$ $f(x)$ има минимална стойност $f(1) = 0 = f_m$.

* $y'' > 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{c} \dfrac{2(3-x)}{x^4} > 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{array} \right. \bigcup \left| \begin{array}{c} \dfrac{2(x-3)}{x^4} > 0 \\ x \in (1, +\infty) \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty) & f(x) \text{ изпъкнала надолу;} \\ x \in (1, 3) & f(x) \text{ изпъкнала нагоре.} \end{cases}$$

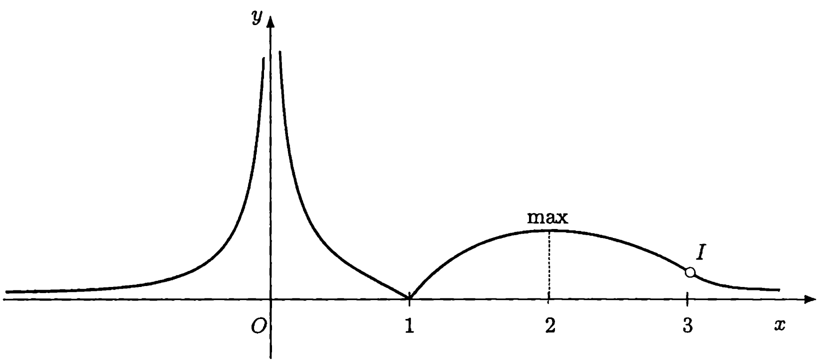
* $y'' = 0 \iff \dfrac{2(x-3)}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 3,\ f(3) = \dfrac{2}{9} \Longrightarrow I(3, \dfrac{2}{9})$ - инфлексна точка.

III. * $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0$
$\Longrightarrow y = 0$ - хоризонтална асимптота на $f(x)$;

* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\lim\limits_{\varepsilon\to0} \dfrac{-\varepsilon-1}{(-\varepsilon)^2} = +\infty;\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\lim\limits_{\varepsilon\to0} \dfrac{\varepsilon-1}{(\varepsilon)^2} = +\infty$
$\Longrightarrow x = 0$ - вертикална асимптота.

IV. * Графиката на $f(x)$ не пресича оста Oy, тъй като $0 \notin DM$; $y = 0 \iff \dfrac{|x-1|}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$ (точката на минималната стойност лежи върху Ox).

V. Графика (фиг. 14.10).



Фиг. 14.10.

Пример 14.11. Изследвайте и постройте графиката на функцията y, ако

$$(1-x)y^2 = x^2(1+x).$$

Решение. **I.** Кривите от вида $y^2 = f(x)$ имат графики симетрични относно оста Ox, защото $(-y)^2 = f(x) = y^2$. Така че, ако точката (x, y) принадлежи на кривата, то и $(x, -y)$ ѝ принадлежи.

Определяме y явно от даденото уравнение:

$$y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Longrightarrow *\ DM : x \in [-1, 1).$$

* $f(x)$ е нито четна, нито нечетна, непериодична.

II. $y' = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + x\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\,\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\dfrac{x^2-x-1}{(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

Нули на y' са $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, но само $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \in DM$:

$$\begin{cases} x \in [-1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}) & y' < 0 \Longrightarrow y \text{ намалява} \\ x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 1) & y' > 0 \Longrightarrow y \text{ расте.} \end{cases}$$

Тогава за $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ имаме минимум и

$$y_{\min} = f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

$$* \quad y'' = -\frac{(2x-1)(1-x)^2 + 2(1-x)(x^2-x-1)}{(1-x)^4}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$-\frac{x^2-x-1}{(1-x)^2}\,\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\,\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1-x^2)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$\Longrightarrow y'' > 0 \quad \forall x \in DM \Longrightarrow f(x)$ е изпъкнала надолу в цялата си дефиниционна област и няма инфлексни точки.

III. $* \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon)\sqrt{\dfrac{1+(1-\varepsilon)}{1-(1-\varepsilon)}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}} = \infty$; $f(-1) = 0$.

Следователно $x = 1$ е вертикална асимптота; няма хоризонтални асимптоти.

IV. $*$ Тъй като $x \in [-1, 1)$, не изследваме за наклонени асимптоти.

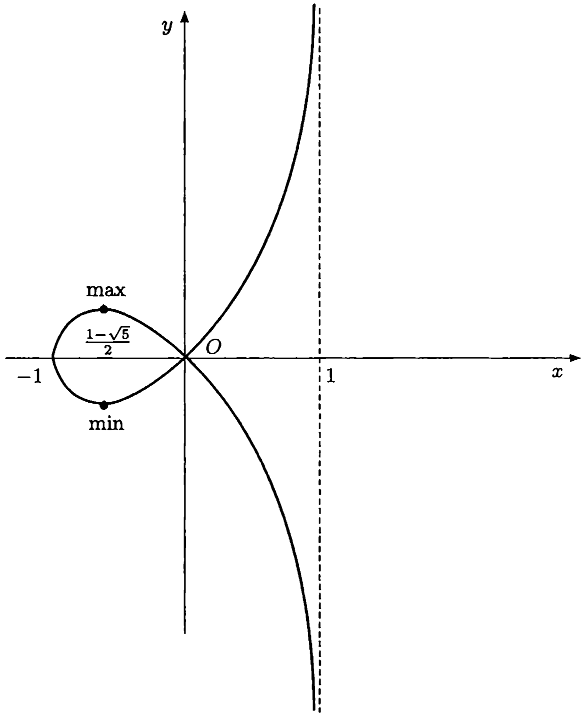
$*$ $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow O(0,0)$ е точка от графиката;

$*$ $y = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \cup x = -1 \Longrightarrow (-1, 0)$ е точка от графиката.

V. Таблицата има следния вид:

x	-1				$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1_-
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$\smile^{+}$	$\smile^{+}$			$\smile^{+}$		$\smile^{+}$	
y	0	$\searrow$	$\searrow$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					min				

∗ Графиката (фиг. 14.11) начертаваме, като първо чертаем графиката на $y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (изследваната функция), а след това симетрично относно оста Ox чертаем и другуия клон.



Фиг. 14.11.

Пример 14.12. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}.$$

Решение. **I.** ∗ DM : $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x^3}{x-2} \le 0 \\ x - 2 \ne 0 \end{array} \right. \iff x \in (-\infty, 0] \cup (2, +\infty).$

∗ DM не е симетрично множество и не изследваме относно четност.

* $f(x)$ е непериодична.

II. * $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}\,\dfrac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2(x-3)}{\left|\dfrac{x}{x-2}\right|(x-2)^2\sqrt{x(x-2)}}$,

но $\dfrac{x}{x-2} \geq 0\ \forall x \in DM \Longrightarrow y' = \dfrac{x^2-3x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$.

$$* \ y'' = \frac{(2x-3)(x-2)\sqrt{x^2-2x}-(x^2-3x)\left[\sqrt{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)\right]}{(x-2)^2[x(x-2)]}$$

$$= \frac{3}{(x-2)^2]\sqrt{x^2-2x}};$$

1. $y' = 0 \Longleftrightarrow x^2-3x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$, но $x_1 = 0$ не е точка на екстремум.

$$y''(x=3) = \frac{3}{\sqrt{3}} > 0 \Longrightarrow f(3) = f_{\min} = 3\sqrt{3}.$$

2. * $y' > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x(x-3)}{x-2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (3,+\infty) \Longrightarrow f(x)$ расте;

   * $y' < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(2,3) \Longrightarrow f(x)$ намалява;

   * $y'' \neq 0\ \forall x \Longrightarrow f(x)$ няма инфлексни точки;

   * $y'' < 0 \Longleftrightarrow x \in \emptyset\, y'' > 0\ \forall x \in DM \Longrightarrow f(x)$ е изпъкнала надолу в цялата си дефиниционна област.

III. * $f(0) = 0$; * $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = \infty$;

* $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\sqrt{\dfrac{(2+\varepsilon)^3}{2+\varepsilon-2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\sqrt{\dfrac{(2+\varepsilon)^3}{\varepsilon}} = \infty.$

Следователно $f(x)$ има вертикална асимптота $x = 2$ и няма хоризонтална.

IV. Търсим наклонена асимптота с уравнение $y = kx + n$ (тъй като няма хоризонтална)

$$* \quad k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}}} = 1;$$

$$* \quad n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2(x-2)}}-1}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}-1}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}\,\dfrac{x-2-x}{(x-2)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x}}\,\frac{x^2}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x}}\,\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1$$

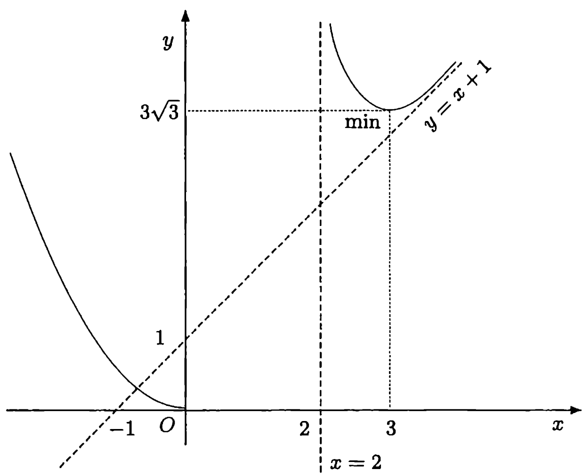
$\Longrightarrow y = x + 1$ е наклонена асимптота при $x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ няма наклонена асимптота, тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - x] = \infty$.

* Графиката на функцията минава през координатното начало ($f(0) = 0$).

V. Таблицата с всички нанесени резултати има следния вид:

x	$-\infty$		0		2_+		3		$+\infty$
y'		$-\quad -$				$-\quad -$	0	$+\quad +$	
y''		$\smile^{+}$				$\smile^{+}$	0	$\smile^{+}$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

Графиката е показана на фиг. 14.12.



Фиг. 14.12.

ЗАДАЧИ

I. *Изследвайте* функциите и начертайте графиките им (вж. пример 14.1, 14.2):

1. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ 2. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$ 3. $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 4. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

5. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 6}$ 6. $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 7. $y = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{(x+1)^2}$ 8. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

9. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 10. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 11. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$ 12. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

II. *Изследвайте* функциите и начертайте графиките им (вж. пример 14.3, 14.4):

1. $y = \ln\dfrac{x-1}{x^3}$ 2. $y = \dfrac{\ln x - 1}{x}$ 3. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 4. $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$

5. $y = x\ln x$ 6. $y = 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ 7. $y = \dfrac{x}{\ln x}$ 8. $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

9. $y = x - \ln(x+1)$ 10. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$ 11. $y = \ln(x^2+1)$ 12. $y = \dfrac{x-1}{x\ln x}$

13. $y = \dfrac{x-1}{\ln x}$ 14. $y = \dfrac{x-1}{1-\ln x}$ 15. $y = \ln x - \sqrt{x}$ 16. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

17. $y = \dfrac{\ln x}{(1-\ln x)^2}$ 18. $y = \dfrac{2-\ln x}{x-1}$ 19. $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ 20. $y = x^2\ln^2 x$

21. $y = x^2\ln|x|$ 22. $y = \ln|x^2-1|$ 23. $y = \dfrac{1}{x^2}\ln^2|x|$ 24. $y = \dfrac{1}{x\ln x}$

III. *Изследвайте* функциите и начертайте графиките им (вж. пример 14.6, 14.7):

1. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ 2. $y = xe^{\frac{x}{x-1}}$ 3. $y = 1 + e^{\frac{x}{x-1}}$ 4. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

5. $y = (1+x^2)e^x$ 6. $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$ 7. $y = \dfrac{e^x}{1+x}$ 8. $y = 2 + e^{\frac{1}{x^2-2}}$

9. $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 10. $y = 1 + e^{\frac{1}{x^2-1}}$ 11. $y = xe^{x-2}$ 12. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

13. $y = \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ 14. $y = \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{\operatorname{sh} x}$ 15. $y = \dfrac{\operatorname{sh} x - e^x}{x-1}$ 16. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

17. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ 18. $y = x^3 e^{-x}$ 19. $y = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$ 20. $y = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

21. $y = e^{2x-x^2}$ 22. $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ 23. $y = (2x-1)e^{\frac{2}{x}}$ 24. $y = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$

IV. *Изследвайте* функциите и начертайте графиките им (вж. пример 14.8, 14.9):

1. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ 2. $y = \arcsin x - 2x$ 3. $y = x + \operatorname{arctg} x$

4. $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 5. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ 6. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}$

7. $y = x\operatorname{arctg} x$ 8. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x$ 9. $y = x^3 - 6x + 6\operatorname{arctg} x$

10. $y = \operatorname{arctg}(x^3 - x^2)$ 11. $y = x + \operatorname{arccotg} 2x$ 12. $y = \ln\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$

13. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ 14. $y = x + 2\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$

V. *Изследвайте* функциите и начертайте графиките им:

1. $y = x + \ln(\cos x)$ 2. $y = \ln(\sin x)$ 3. $y = e^{\operatorname{tg} x}$ 4. $y = \sqrt{\ln \frac{1-x}{1+x}}$

5. $y = \sqrt{\frac{1-\ln x}{x}}$ 6. $y = \sqrt{\ln \frac{1+x}{1-x}}$ 7. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 8. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+\pi}}$

9. $y = x\sqrt{1-x}$ 10. $y = |x|(x+2)$ 11. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

12. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ 13. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ 14. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$

15. $y = x\sqrt{x+3}$ 16. $y^2 = x^2(x-1)$ 17. $y^2 = x(x-1)^2$

18. $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$, $a > 0$ 19. $y^2(2z - x) = x^3$, $a > 0$ 20. $x^2 y^2 = (x-1)(x-2)$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОИЗВОДНИ НА НЯКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

функция	производна	функция	производна	функция	производна
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Argsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Argch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Argth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Argcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

$$\operatorname{Argsh} x \equiv \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{Argch} x \equiv \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}),\ |x| \geq 1$$

$$\operatorname{Argth} x \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},\ |x| < 1 \qquad \operatorname{Argcth} x \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},\ |x| > 1$$

Забележка. За съставна функция $y = f[u(x)]$ производната е $y' = f'_u u'_x$.

***

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 2, София, “Техника”, 1977.
2. *Шополов Н., Бончев Е.*, Математически анализ I част, София, ТУ, 1990.
3. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ - Втора част, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
4. *Берман Г.Н.*, Сборник задач по курсу математического анализа, Москва, “Наука”, 1985.
5. *Ефимов А.В., Демирович Б.П.*, Сборник задач по математике для ВТУЗОВ, Линейная алгебра и основы математического анализа, Москва, “Наука”, 1967.
6. *Манолов С., Шополов Н. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика - втора част, София, “Техника”, 1979.
7. *Богомилов Н.В.*, Практические занятия по высшей математике, Москва, “Высшая школа”, 1973.
8. *Димова В. и колектив*, Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част II, София, “Техника”, 1966.
9. *Сборник*, Математический анализ в вопросах и задачах. “Высшая школа”, Москва, 1988.