Лекции и семинарни занятия по диференциално и интегрално смятане – 1

Писани са от мен, Иван Димитров Георгиев (вече завършил) студент по информатика, електронната ми поща е ivandg@yahoo.com.
Четени са през зимния семестър на учебната 2001/2002 година. Лектори тогава бяха професор Пламен Джаков и главен асистент Николай Буюклиев. Семинарните упражнения водеше главен асистент Росен Николов и не присъстват всичките.
Използвал съм моите (и на мои колеги) записки от лекции и семинарни занятия, както и следните учебници: Диференциално смятане на Ярослав Тагамлицки, Математически Анализ на Дойчин Дойчинов.
Добре е да имате инсталиран MathType, за да нямате проблеми при разчитането. От този линк http://www.dessci.com/en/dl/MTW6.exe може да изтеглете trial версия за един месец.

1. Понятие за R – множество от реалните числа

Множеството на естествените числа { 1, 2, …n,…} означаваме с **N**;
Множеството на целите числа { 0, ±1, ±2, …±n,…} означаваме с **Z**;
Множеството на рационалните числа { p/q; $p, q \in$ **Z**, $q \neq 0$ } означаваме с **Q**;
Множеството на реалните числа означаваме с **R**.
Множеството на комплексните числа { $a+b.i$; $a, b \in$ **R**, $i^2 = -1$ } означаваме с **C**;

За тези множества имаме: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$**;**

Аксиоми на Пеано за естествените числа:

1. Всяко естествено число n има наследник n+1;
2. На всеки две естествени числа се m, n се съпоставя еднозначно сумата им m+n, която е естествено число;
3. На всеки две естествени числа се m, n се съпоставя еднозначно произведението им m.n, което е естествено число;
4. Множеството **N** на естествените числа е наредено; съществува релация ≤ - сравнение на естествени числа;

Рационалните числа представляват крайни и безкрайни периодични дроби; едно рационално число m/n може да се представи като крайна десетична дроб тогава и само тогава, когато $n = 2^k.5^m$, където k и m са естествени или нули; в такъв случай това число може да се запише по следния начин:

$m/n = \overline{a_o, a_1a_2a_3\ldots a_n}$ - ако числото е записано в десетична бройна система, то $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_o \in$ **Z**;

Ако $n = 2^k.5^m.c$, където $c \in$ **N**, $c \neq 1$, тогава числото m/n се записва като безкрайна <u>периодична</u> дроб; дължината на периода е минималното числото s за което $10^s - 1$ се дели на n, а преди периода стоят точно $l = \max(k, m)$ цифри; обикновено записът е следният:

$m/n = \overline{a_0, a_1a_2\ldots a_l(a_{l+1}a_{l+2}\ldots a_{l+s})}$; $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_0 \in$ **Z**;

Крайните десетични дроби могат да се разглеждат като безкрайни периодични дроби с период 0.

Пример, че съществуват безкрайни непериодични дроби: да разгледаме числото 1, 010010001…
то не е рационално, тъй като не е периодична дроб (очевидно не е крайна); това е пример, че съществуват **ирационални** числа;

Реалните числа се дефинират като обединение на рационалните и ирационалните, т.е. всички безкрайни периодични или непериодични дроби:

$\mathbf{R} = \{ \overline{a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots}\ - a_0 \in \mathbf{Z}, a_i \in \{ 0, 1, \ldots, 9 \} \}$;

В дефиницията за реални числа ще добавим следното - за всяко $k \in \mathbf{N}$, съществува индекс $n > k : a_n \neq 9$; това го добавяме, за да не допускаме едни и същи числа да се записват по различни начини чрез безкрайни дроби – например 1, (0) = 0, (9) и - 2.25(0) = - 2.24(9);

Аксиоми за реалните числа **R**.

Аксиоми за събирането:

1. $a+b = b+a$;
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$;
3. съществува число 0: $a + 0 = a$;
4. за всяко число a, съществува $-a : a + (-a) = 0$; елементът $-a$ се нарича противоположен

Тези четири свойства на събирането определят структура на група по отношение на събирането;

Аксиоми за умножението:

5. $a.b = b.a$;
6. $(a.b).c = a.(b.c)$;
7. съществува число 1: $a.1=a$;
8. за всяко число $a \neq 0$, съществува a^{-1}: $a.a^{-1} = 1$;

Дистрибутивен закон:

9. $(a+b).c = a.c + b.c$;

Релации за наредба:

10. Ако $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
11. Ако $c \geq 0$ и $a \geq b \Rightarrow a.c \geq b.c$;

Аксиома на Архимед:
За всяко число a съществува естествено число n: $n.1 > a$;

Нека имаме две реални числа:
$a = \overline{a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots}$
$b = \overline{b_0, b_1b_2\ldots b_n\ldots}$
$a_0, b_0 \in \mathbf{Z}$; $a_i \in \{ 0, 1, 2\ldots, 9 \}$
Казваме, че $a > b$, ако съществува индекс $k \in \{ 0, 1, 2,\ldots \}$, такъв че $a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$; …; $a_k > b_k$

Дефиниция: Нека $X \subset R$. Казваме, че M е **горна граница** на X, ако за всяко $x \in X$ е в сила, че $x \leq M$; в такъв случай множеството X се нарича **ограничено отгоре**.

Дефиниция: Най-малката горна граница на X се нарича супремум на X или **точна горна граница**. Бележи се sup X.

Дефиниция: Нека $X \subset R$. Казваме, че m е **долна граница** на X, ако за всяко $x \in X$ е в сила, че $x \geq m$; в такъв случай множеството X се нарича **ограничено отдолу**.
Дефиниция: Най-голямата долна граница на X се нарича инфимум на X или **точна долна граница**. Бележи се inf X.

Дефиниция: Едно множество е **ограничено**, ако то е ограничено отдолу и отгоре, т.е. съществува $M > 0$, че за всяко $x \in X$: $|x| < M$;

Твърдение: За всяко множество, което е ограничено отгоре, съществува точна горна граница $\overline{x}$ (супремум) ⇔

1. Ако $x \in X$, то $x \leq \overline{x}$
2. Ако $x' < \overline{x}$, то съществува $x \in X$: $x > x'$

Доказателство: Разглеждаме два случая – дали в x има или няма положителни числа; ще докажем твърдението за първия случай, във втория е аналогично;

Нека $X_0 = \{ x \in X, x \geq 0 \}$;
с $[x]$ означаваме цялата част на x;
Нека $A_0 = \{ [x], x \in X_0\}$; тъй като X_0 е ограничено ➔ съществува горна граница M на X_0, за нея е изпълнено $0 \leq [x] \leq M$ ➔ A_0 е ограничено, но то се състои само от цели числа ➔ A_0 е крайно множество, означаваме най-големият елемент от A_0 с $\overline{x_0}$;

Нека $X_1 = \{ x \in X_0, [x] = \overline{x_0} \}$; нека A_1 е множеството от цифрите, които стоят на първо място след десетичната запетая в числата от X_1; A_1 е крайно, означаваме с $\overline{x_1}$ най-големият елемент на A_1;

По този начин получаваме числото $\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\ldots\overline{x_n}\ldots}$; твърдим, че $\overline{x}$ е супремумът на X.

Първо: ще докажем, че за всяко $x \in X$, $x \leq \overline{x}$;
Без ограничение на общността можем да разглеждаме единствено елементите на X_0;
Допускаме, че съществува $x > 0$, $x \in X$: $x > \overline{x}$;
Нека $x = x_0, \overline{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots}$, тогава съществува индекс $k \in \{ 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$, такъв че (1) $x_0 = \overline{x_0}$; $x_1 = \overline{x_1}$ …; $x_{k-1} = \overline{x_{k-1}}$;
(2) $x_k > \overline{x_k}$;
от (1) ➔ $x \in X_k$, освен това $\overline{x_k}$ е максималното число, което стои на k-то място след десетичната запетая в числата $\in X_k$, което е в противоречие с (2) ➔ допускането не е вярно ➔ за всяко $x \in X$, $x \leq \overline{x}$;

Второ: ще докажем, че ако $x' < \overline{x}$ съществува $x \in X$, такова че $x > x'$;

Нека $x' = \overline{x_0', x_1'x_2'\ldots x_n'\ldots}$, тогава съществува индекс $k \in \{0, 1,\ldots, n,\ldots\}$, такъв че $x_0' = \overline{x_0}$; $x_1' = \overline{x_1}$ …; $x_{k-1}' = \overline{x_{k-1}}$;

(1) $x_k' < \overline{x_k}$;

Нека $x \in X_{k+1} \subset X$, $x = \overline{x_0, x_1x_2\ldots x_n\ldots}$, тогава:

$x_0 = \overline{x_0}$; $x_1 = \overline{x_1}$ …; $x_{k-1} = \overline{x_{k-1}}$;

(2) $x_k = \overline{x_k}$;

от (1), (2) ➔ $x > x'$

С това доказателството е завършено;
Аналогично се доказва:
Всяко числово множество, което е ограничено отдолу има точна долна граница (инфимум);

Понятия свързани с изброимост

Нека X е множество; казваме, че X е **изброимо** множество, ако съществува биекция $f : N \rightarrow X$;
условия за биекция: ако $n_1 \neq n_2$, то $f(n_1) \neq f(n_2)$ (инекция) и за всяко $x \in X$ съществува $n \in \mathbf{N}$, такова че $f(n) = x$ (сюрекция);
X е изброимо, ако елементите му могат да се наредят в редица, в която няма повтарящи се елементи;

Твърдение: Множеството **Q** е изброимо.
Доказателство: Нека за определеност p и q са взаимно прости, $q > 0$, нулата е представена еднозначно като (0/1). Дефинираме височина на рационално число $p/q = |p| + q$; $|p| + q > 0$; очевидно съществуват краен брой рационални числа с фиксирана височина; номерираме последователно числата, като започваме от тези с височина 1 (0/1), след това с височина 2 (-1/1, 1/1) и т.н.; с това доказахме, че съществува биекция $f : N \rightarrow Q$;

Дефиниция: На всяко множество съпоставяме **мощност (кардинално число)**; ако мощностите на две множества A и B са равни, то съществува взаимноеднозначно съответствие между елементите им (те са еквивалентни; $A \sim B$); ако мощността на едно множество A е по-голяма от мощността на друго множество B, следва че A е еквивалентно на множество C, което съдържа като нетривиално подмножество множеството B ($A \sim C \subset B$);

Твърдение: R не е изброимо;

Доказателство:

Допускаме, че реалните числа могат да се подредят в редица:
$x_0 = x_0^0, x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0 \ldots;$
$x_1 = x_0^1, x_1^1 x_2^1 \ldots x_n^1 \ldots;$
$x_2 = x_0^2, x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 \ldots;$
…
$x_n = x_0^n, x_1^n x_2^n \ldots x_n^n \ldots;$
…
Нека $\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1}\overline{x_2}\ldots\overline{x_n}\ldots$, освен това нека:
$\overline{x_0} \neq x_0^0$; $\overline{x_1} \neq x_1^1, 9$; $\overline{x_2} \neq x_2^2, 9$; …; $\overline{x_n} \neq x_n^n, 9$;…
Твърдим, че числото $\overline{x}$ не фигурира в редицата; това е така, тъй като то съдържа безброй много цифри и се различава от всяко число в редицата поне по една цифра; избягваме деветките, за да не се получи двусмислието, коментирано по-горе;

От твърдението ➔ Ирационалните числа имат по-голяма мощност от рационалните.

Семинарни занятия

Математическа индукция

Дадена е безкрайна редица от твърдения:
$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots;$
Дадено е, че:
1. T_1 е вярно;
2. За всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено: ако T_n е вярно, то T_{n+1} също е вярно;

От тези две условия ➔ T_n е вярно за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Пример: Да се докаже, че всички химикали пишат с един и същи цвят; Доказателство: T_1 е вярно, защото един химикал пише с един и същи цвят; Нека T_n е вярно, т.е. всеки n химикала пишат с един и същи цвят; тогава T_{n+1} също е вярно - нека имаме n+1 химикала; вземаме n от тях, те пишат еднакво по допускане; остава 1 химикал, нека вземем него и още n-1 от останалите, тогава и те пишат еднакво от допускането ➔ всичките n+1 пишат еднакво; по индукция ➔ всички химикали пишат с един и същи цвят;

Абсурдността на това наглед добре доказано твърдение идва от факта, че условие 2 е изпълнено за всяко n, освен за n=2; т.е. ако имаме два химикала не можем да изпълним гореописаната операция; този пример има за цел да покаже необходимостта на условията 1. и 2.;

Неравенство на Коши: $(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}$;

Доказателство:
Лема: Нека са дадени k положителни числа $A_1, A_2, \ldots, A_k$, такива че:
$A_1.A_2\ldots A_k = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 + \ldots + A_k \geq k$;
Доказателство:
Индукция по k;

1. База: при $k = 1 – A_1 = 1 \geq 1 = k$; твърдението е вярно;

при $k = 2 – A_1.A_2 = 1$; $A_1 + A_2 = A_1 + 1/A_1 = 2 + (A_1^2 – 2.A_1 + 1)/A_1 = 2 + (A_1 – 1)^2/A_1 \geq 2$; твърдението е вярно;

2. Стъпка: Нека твърдението е изпълнено за k; т.е.

ако $A_1.A_2\ldots A_k = 1$, то $A_1 + A_2 + \ldots + A_k \geq k$; При k+1 получаваме:
Нека A_i са положителни числа и $A_1.A_2\ldots A_k.A_{k+1} = 1$;
$A_1 + A_2 + \ldots + A_k.A_{k+1} \geq k$ (по допускане) $\Rightarrow$
$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1} \geq k – A_k.A_{k+1}$;
$A_1 + A_2 + \ldots + A_k + A_{k+1} \geq k – A_k.A_{k+1} + A_k + A_{k+1} =$
$= k + 1 + A_k – 1 + A_{k+1} – A_k.A_{k+1} = k + 1 + (A_k – 1).(1 – A_{k+1})$;
Без ограничение на общността можем да смятаме, че A_k е най-голямото число, а A_{k+1} е най-малкото число от $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$;
тъй като $A_1.A_2\ldots A_{k+1} = 1 \Rightarrow A_k \geq 1, A_{k+1} \leq 1 \Rightarrow (A_k – 1). (1 – A_{k+1}) \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 + A_2 + \ldots + A_k + A_{k+1} \geq k + 1 + (A_k – 1). (1 – A_{k+1}) \geq k + 1 \Rightarrow$
твърдението е изпълнено за k+1; от метода на математическата индукция $\Rightarrow$ твърдението е изпълнено за всяко $k \in \mathbf{N}$;

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \Leftrightarrow$

$a_1/\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} + a_2/\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} + \ldots + a_n/\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \geq n$;

Полагаме $a_i/\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} = A_i \Rightarrow A_1.A_2\ldots A_n = 1$; използваме лемата:
и получаваме $A_1 + A_2 + \ldots + A_n \geq n$, а това е точно горното неравенство;

Неравенство на Бернули: $(1 + x)^n \geq 1 + n.x$; $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$, $x \geq –1$

Други неравенства:
$(1 + 1/n)^k \leq 1 + k/n + k^2/n^2$
Доказателство: Индукция по k (n го мислим фиксирано);
$(n/3)^n < n! < (n/2)^n$, $n \geq 6$
Доказателство: Индукция по n;

Полиноми. Принцип за сравняване на коефициентите. Приложение.

Дефиниция: Полином от степен n се нарича функция от вида:
$P_n(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_1.x + a_0$; $n \in \mathbf{N_0}$; $x, a_k \in \mathbf{R}$; $a_n \neq 0$;

1. Произведението на два полинома от степен n и m е полином от степен n+m;
2. Сумата на два полинома от степен n и степен m е полином от степен $\leq \max(n, m)$, когато полиномите не са с еднакви степени и с противоположни коефициенти;
3. Разлика на два полинома от степен n и степен m е полином от степен $\leq \max(n, m)$, когато полиномите не са с еднакви степени и еднакви коефициенти;

Твърдение (лема на Безу): Даден е полином $P_n(x)$ от степен n;
ако $x = \alpha$ е корен на $P_n(x)$, т.е. $P(\alpha) = 0$, то съществува полином $Q_{n-1}(x)$ от степен n-1, такъв че $P_n(x) = (x - \alpha).Q_{n-1}(x)$ или $P_n(x)$ се дели без остатък на $x - \alpha$;

Твърдение: Нека $P_n(x)$ е полином от степен n; тогава $P_n(x)$ има не повече от n различни корена;
Доказателство: Индукция по n + лема на Безу;

Принцип за сравняване на коефициентите:

Нека P (x) и Q (x) са полиноми от степен ≤ n;
Ако $P(x_k) = Q(x_k)$ за $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$; $k = 1, 2, \ldots, n, n+1$
➔ $P(x) \equiv Q(x)$;
Доказателство: Допускаме, че P (x) не съвпада с Q (x); тогава полиномът $R(x) = P(x) - Q(x)$ е от степен ≤ n; но R (x) е от степен ≤ n и се анулира за n+1 стойности, което е в противоречие с горното твърдение ➔ $P(x) \equiv Q(x)$;

Следствие: Ако два полинома P (x) и Q (x) от степен ≤ n съвпадат за n+1 стойности на x ➔ те съвпадат за всички стойности на x;

Твърдение: Дадени са точките (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots, n, n+1$;
$x_1 < x_2 \ldots < x_n < x_{n+1}$; тогава съществува точно един полином P (x), такъв че $P(x_k) = y_k$ за $k = 1, 2, \ldots, n, n+1$;
Доказателство: Единствеността е пряко следствие от принципа за сравняване на коефициентите;
Съществуване: **Интерполационна формула на Ла Гранж:**

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{(x - x_1).(x - x_2)\ldots.(x - x_{k-1}).(x - x_{k+1})\ldots.(x - x_{n+1})}{(x_k - x_1).(x_k - x_2)\ldots.(x_k - x_{k-1}).(x_k - x_{k+1})\ldots.(x_k - x_{n+1})}$$

2. Редици. Аритметични действия със сходящи редици.

Дефиниция: Редица е множество от числа, елементите на което са снабдени с индекси (естествени числа), като съответствието е биективно; означение: $\{ a_n\}_{n=1}^{\infty}$;

Една редица може да бъде зададена чрез формула относно индекса (пример: $a_n = n^2$); чрез рекурентна връзка между елементите ($b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$), тук задължително трябва да се посочат началните елементи ($b_0 = 0$, $b_1 = 1$); чрез неявна дефиниция (например c_n = n-тата цифра в десетичният запис на числото π;

Дефиниция:
Ако са дадени две редици a_n и b_n;

1. Сбор на двете редици е редицата $c_n = a_n + b_n$;
2. Разлика на двете редици е редицата $c_n = a_n – b_n$;
3. Произведение на двете редици е редицата: $c_n = a_n.b_n$;
4. Частно на двете редици (при положение, че $b_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$) е редицата $c_n = a_n/b_n$;

Дефиниция: Редицата a_n е **ограничена отгоре**, ако съществува $M \in \mathbf{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq M$;

Дефиниция: Редицата a_n е **ограничена отдолу**, ако съществува $m \in \mathbf{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbf{N}$, $m \leq a_n$;

Дефиниция: Редицата a_n е **ограничена**, ако съществува $M \in \mathbf{R}$, $M > 0$, такова че за всяко $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq M$;

Дефиниция: Редицата a_n е **неограничена**, ако за всяко число $M \in \mathbf{R}$ съществува $n \in \mathbf{N}$, такова че $|a_n| > M$;

Твърдение: Ако a_n е неограничена, то за всяко $M > 0$, $M \in \mathbf{R}$, съществуват безброй много членове на редицата a_n, за които $|a_n| > M$;
Доказателство: с допускане на противното;

Дефиниция: Редицата a_n е **безкрайно голяма**, ако за всяко $M > 0$, $M \in \mathbf{R}$, съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$: $|a_n| > M$;

Разлика с определението за неограниченост – пример е редицата:
1 0 2 0 3 0 … тя е неограничена, но не е безкрайно голяма;

Дефиниция: Редицата a_n е **безкрайно малка**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$: $|a_n| < \varepsilon$;

Дефиниция: Интервалът $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ се нарича **ε-околност** на точката a ($\varepsilon > 0$);

Една редица е безкрайно малка ако във всяка околност на нулата попадат всички елементи на редицата от определено място нататък;

Твърдение: Ако a_n е ограничена и b_n е безкрайно малка ➔ $a_n.b_n$ е безкрайно малка;
Доказателство: Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$, където $M > 0$ е такова, че $|a_n| < M$; тогава $|a_n.b_n| = |a_n|.|b_n| < \varepsilon_1 . M = \varepsilon$ ➔ $a_n.b_n$ е безкрайно малка;

Твърдение: Ако a_n е безкрайно малка ➔ a_n – ограничена;
Доказателство: Избираме $\varepsilon > 0$; съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$: $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$; нека $M = \max(\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_N)$;
$m = \min(-\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ➔ за всяко $n \in \mathbf{N}$: $m \leq a_n \leq M$ ➔ a_n – ограничена;

Твърдение: Произведение на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица;
Доказателство: използваме предните две твърдения;

Твърдение: Нека a_n е безкрайно голяма и $a_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
Нека $b_n = 1 / a_n$ ➔ b_n е безкрайно малка;
Доказателство: Нека $M > 0$, $M = 1/\varepsilon$; съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$: $|a_n| > M \Leftrightarrow 1/|a_n| < 1/M \Leftrightarrow |b_n| < \varepsilon$ ➔ b_n е безкрайно малка;

Твърдение: Нека a_n е безкрайно малка и $a_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
Нека $b_n = 1 / a_n$ ➔ b_n е безкрайно голяма;
Доказателство: аналогично на предното твърдение;

Дефиниция: Казваме, че редицата a_n е **сходяща** и има за граница числото A (a_n клони към A), ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$: $|a_n - A| < \varepsilon$;

Следствие: Ако a_n е сходяща и клони към числото A ➔ $a_n = A + \alpha_n$, където α_n е безкрайно малка;
Означения: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;

Дефиниция: Ако a_n не е сходяща, то тя е **разходяща**;

Дефиниция: Казваме, че редицата a_n клони към $\pm\infty$, ако за всяко число $M \in \mathbf{R}$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$ е в сила $a_n > M$ ($a_n < M$);

Твърдение: Ако a_n е сходяща, то тя е ограничена;
Доказателство:
Нека границата на a_n е A.
Избираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$,
$|a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;
нека $m = \min(a_1, a_2, \dots, a_N, A - \varepsilon)$; $M = \max(a_1, a_2, \dots, a_N, A + \varepsilon)$;
тогава $m \leq a_n \leq M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Твърдение: Ако a_n и b_n са сходящи и с граници съответно A и B, тогава:

1. $a_n + b_n$ е сходяща и клони към $A + B$;
2. $a_n - b_n$ е сходяща и клони към $A - B$;
3. $a_n.b_n$ е сходяща и клони към $A.B$;
4. при $b_n \neq 0$, $B \neq 0$ – a_n/b_n е сходяща и клони към A/B;

Доказателство на 1.:
Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2 > 0$; тогава съществуват $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$, такива че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$ и при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_1$;
в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2.\varepsilon_1 = \varepsilon$
➔ $a_n + b_n$ е сходяща и клони към $A + B$;
Доказателство на 2.:
Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2 > 0$; тогава съществуват $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$, такива че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$ и при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_1$;
в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
$|(a_n - b_n) - (A - B)| = |a_n - A + B - b_n| \leq |a_n - A| + |B - b_n| < 2.\varepsilon_1 = \varepsilon$
➔ $a_n - b_n$ е сходяща и клони към $A - B$;
Доказателство на 3.:
a_n – сходяща ➔ a_n – ограничена ➔ съществува $M > 0$: $|a_n| < M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon / |2.B| > 0$; тогава съществува $N_1 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$;
Избираме $\varepsilon_2 = \varepsilon / (2.M) > 0$; тогава съществува $N_2 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_2$;
в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
$|a_n.b_n - A.B| = |a_n.b_n - a_n.B + a_n.B - A.B| \leq$
$\leq |a_n.b_n - a_n.B| + |a_n.B - A.B| = |a_n|.|b_n - B| + |a_n - A|.|B| <$
$M.\varepsilon_2 + \varepsilon_1.|B| = \varepsilon$;
➔ $a_n.b_n$ е сходяща и клони към $A.B$;
Доказателство на 4.:
a_n – сходяща ➔ a_n – ограничена ➔ съществува $M > 0$: $|a_n| < M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

нека $\varepsilon_0 = |B|/2 > 0$; тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$,
$|b_n - B| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow B - \varepsilon_0 < b_n < B + \varepsilon_0 \Rightarrow |B|/2 < |b_n| < 3.|B|/2$
$\Rightarrow c = \min(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_N|, |B|/2)$ е долна граница на $|b_n|$; освен това $c > 0$, тъй като $b_n \neq 0$, $B \neq 0$;
Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon.|B|/2 > 0$; тогава съществува $N_1 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$;
Избираме $\varepsilon_2 = (|B|.c/(2.M)).\varepsilon > 0$; тогава съществува $N_2 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_2$;
в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
$|a_n/b_n - A/B| = |a_n.B - b_n.A|/|b_n.B| =$
$|a_n.B - a_n.b_n + a_n.b_n - b_n.A|/|b_n.B| \leq |a_n.B - a_n.b_n|/|b_n.B| +$
$|a_n.b_n - b_n.A|/|b_n.B| = |a_n|.|B - b_n|/|b_n.B| + |a_n - A|/|B| <$
$< M.\varepsilon_2/c.|B| + \varepsilon_1/|B| = \varepsilon$;
$\Rightarrow a_n/b_n$ е сходяща и клони към A/B;

Твърдение: Ако a_n е сходяща и има граница A, $a_n < M$ за всяко $n > k$, където $k \in \mathbf{N} \Rightarrow A \leq M$;
Доказателство:
Допускаме противното - нека $A > M$.
Избираме $\varepsilon = (M - A)/2 > 0$; тогава съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > \max(N, k)$, $|a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow a_n > A - \varepsilon = (3.A - M)/2 > M$ – противоречие $\Rightarrow A \leq M$;

Твърдение: Ако a_n е сходяща и има граница A, $a_n > M \Rightarrow A \geq M$;
Доказателство:
Аналогично на горното твърдение;

Твърдение: Ако a_n е сходяща и има граница A, b_n е сходяща и има граница B и за безброй много стойности на n имаме $a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$;
Доказателство:
Допускаме, че $A > B$;
Нека $\varepsilon = (A - B)/2$;
a_n - сходяща и има граница $A \Rightarrow$ съществува индекс $N_1 \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N_1$ имаме $|a_n - A| < \varepsilon$;
b_n - сходяща и има граница $B \Rightarrow$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N_2$ имаме $|b_n - B| < \varepsilon$;
тогава при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, $B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$, но $A - \varepsilon = B + \varepsilon \Rightarrow$
$b_n < B + \varepsilon = A - \varepsilon < a_n$, т.е. $b_n < a_n$ – противоречие (излиза че само за краен брой е възможно $a_n \leq b_n$) $\Rightarrow$ допускането не е вярно $\Rightarrow A \leq B$;

Теорема за полицаите: Ако a_n е сходяща и има граница D, c_n е сходяща и има граница D, $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > k$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow b_n$ – сходяща и има граница D;

Доказателство:
Избираме $\varepsilon > 0$;
тогава съществува $N_1 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_1$, $|a_n - D| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$D - \varepsilon < a_n < D + \varepsilon$;
освен това съществува $N_2 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_2$, $|c_n - D| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$D - \varepsilon < c_n < D + \varepsilon$;
в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2, k)$ имаме:
$D - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < D + \varepsilon \Rightarrow b_n$ е сходяща и има граница D;

Семинарни занятия

Дефиниция: $n! = 1.2.\ldots.n$, $n \in \mathbf{N}$; чете се n факториел;
Дефиниция: $0! = 1$;
Дефиниция: Биномни коефициенти – числа;
означение: $\binom{n}{k}$, C_n^k ; $\binom{n}{k} = n! / (k!.(n-k)!) = n.(n-1)\ldots(n-k+1)/k\,!$;
$n, k \in \mathbf{N_0}$;

Основни свойства: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$;

Триъгълник на Паскал:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

n

k

Елементът на върха на триъгълника е $\binom{0}{0}$; елементът, който се намира на ред n и на ляв диагонал k е точно $\binom{n}{k}$; триъгълникът на Паскал илюстрира основните свойства на биномните коефициенти; елементите в краищата са единици, а всеки един от останалите елементи е получен като сума от двата елемента стоящи над него (това е точно второто свойство);

Бином на Нютон:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}.a^n + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^n + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}.a.b^{n-1} + \binom{n}{n}.b^{n-1};$$

Някои тъждества с биномни коефициенти:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k};$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0;$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n};$$

Доказателство на последното:
Използваме равенството $(1+x)^n.(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ и принципа за сравняване на коефициентите;

Обобщени биномни коефициенти
$\binom{\alpha}{k} = \alpha.(\alpha-1)\dots (\alpha - k + 1)/\ k!$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N_0}$;

$\binom{\alpha}{0} = 1$ за всяко $\alpha \in \mathbf{R}$;

Твърдение: $\binom{\alpha}{k} = 0$ ако $\alpha \in \mathbf{N}$, $\alpha < k$;

$\binom{-1}{k} = (-1)^k$;

Забележка: $\binom{\alpha}{k}$ е полином от степен k на α.

$\binom{x}{0} - \binom{x}{1} + \binom{x}{2} \dots + (-1)^k\binom{x}{k} = (-1)^k . \binom{x-1}{k}$;

Доказателство: Нека дясната страна означим с P (x), лявата с Q (x); това са полиноми от степен k на x; нека l е естествено число между 1 и k; тогава от горните тъждества P (l) = 0; Q (l) = 0, тъй като $l-1<k$; ➔ P (l) = Q (l) за l = 1, 2, …, k;
P (0) = 1; Q (0) = $(-1)^k . \binom{-1}{k} = (-1)^{2k} = 1$ ➔ P (0) = Q (0); P, Q съвпадат за k+1 стойности ➔ $P(x) \equiv Q(x)$;

3. Монотонни редици. Дефиниране на числото е.

Дефиниция: Редицата a_n е **монотонно растяща**, ако за всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено $a_n \le a_{n+1}$;
Дефиниция: Редицата a_n е **монотонно намаляваща**, ако за всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено $a_n \ge a_{n+1}$;
Дефиниция: Редицата a_n е **монотонна**, ако тя е монотонно намаляваща или монотонно растяща;

Теорема: Нека a_n е растяща и ограничена отгоре. Тогава a_n е сходяща и клони към точната си горна граница.
Доказателство: Нека A е точната горна граница на редицата a_n.
Тъй като A е горна граница са в сила следните твърдения:

1. $a_n \le A$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
2. за всяко $A' < A$, съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че $a_N > A'$ или за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че $a_N > A - \varepsilon$;

Нека n > N. Тогава за произволно избраното ε имаме:
$A - \varepsilon < a_N < a_n \le A < A + \varepsilon$ ➔ a_n е сходяща и клони към числото A;

Теорема: Нека a_n е растяща и ограничена отдолу. Тогава a_n е сходяща и клони към точната си долна граница.
Доказателство:
Аналогично на горната теорема;

Разглеждаме редицата $a_n = (1 + 1/n)^n$; ще покажем, че тази редица е сходяща;
По бинома на Нютон получаваме:
$(1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}.1/n + \binom{n}{2}.1/n^2 + \dots + \binom{n}{k}.1/n^k + \dots + \binom{n}{n}.1/n^n =$

$1 + (n/1!).1/n + (n.(n-1)/2).1/n^2 + \dots + (n.(n-1)\dots(n-k+1)/k!).1/n^k + \dots + (n.(n-1)\dots(n-(n-1))/n!).1/n^n = 1 + 1 + 1/2!.(1 - 1/n) + 1/3!(1-1/n).(1-2/n) + \dots + 1/k!.(1 - 1/n).(1 - 2/n)\dots(1 - (k-1)/n) + \dots + 1/n!.(1 - 1/n).(1 - 2/n)\dots(1 - (n-1)/n)$;

Очевидно
$a_n \le 1 + 1 + 1/2!.(1 - 1/(n+1)) + 1/3!.(1 - 1/(n+1).(1 - 2/(n+1)) + \dots$
$1/k!.(1 - 1/(n+1)).(1 - 2/(n+1))\dots(1 - (k-1)/(n+1)) + \dots$
$1/n!.(1 - 1/(n+1)).(1 - 2/(n+1))\dots(1 - (n-1)/(n+1)) = a_{n+1} -$
$1/(n+1)!.(1 - 1/(n+1)).(1 - 2/(n+1))\dots(1 - n/(n+1)) < a_{n+1}$;
➔ редицата a_n е монотонно растяща; (1)

Очевидно
$(1 - 1/n).(1 - 2/n)\dots(1 - (k-1)/n) < 1$
➔ $a_n \le 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n!$;
от друга страна $k! = k.(k-1)\dots3.2 \ge 2.2\dots2 = 2^{k-1}$;
➔ $a_n \le 1 + 1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots + 1/2^{n-1} = 1 + (1 - 1/2^n)/(1 - 1/2) =$
$3 - 1/2^{n-1} < 3$; освен това $a_n \ge a_1 = 2$ ➔
$2 \le a_n < 3$ ➔ a_n – ограничена; (2)
от (1) и (2) ➔ a_n – сходяща;
Дефиниция: Неперовото число *e* се дефинира като граница на редицата $a_n = (1 + 1/n)^n$; $e \approx 2,718281828\dots$;

Ще докажем, че a_n е сходяща по друг начин;
нека $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$;
очевидно $a_n.(1 + 1/n) = b_n$ ➔ $a_n < b_n$;
Разглеждаме числата $\underbrace{1+1/n, 1+1/n, \dots, 1+1/n}_{n \text{ числа}}, 1$;
тези числа са строго положителни; освен това не могат да бъдат всичките еднакви ($1 \ne (1 + 1/n)$); прилагаме неравенството за средно аритметично и средно геометрично;
получаваме:
$(n.(1+1/n) + 1)/(n+1) > \sqrt[n+1]{(1 + 1/n)^n} \Leftrightarrow (1 + 1/(n+1))^{n+1} > (1+1/n)^n$ или което е все същото $a_{n+1} > a_n$; равенство не може да има, тъй като числата не могат да бъдат едновременно еднакви;

аналогично избираме числата $\underbrace{1 - 1/(n+1), \ldots, 1 - 1/(n+1)}_{n+1 \text{ числа}}$, 1;

тези числа са строго положителни; освен това не могат да бъдат всичките еднакви ($1 \neq (1 + 1/(n-1)$); прилагаме неравенството за средно аритметично и средно геометрично;

получаваме:

$((n+1).(1 - 1/(n+1)) + 1)/(n+2) > \sqrt[n+2]{(1 - 1/(n+1))^{n+1}} \Leftrightarrow$

$((n+1 -1 + 1)/(n+2))^{n+2} > (1 - 1/(n+1))^{n+1} \Leftrightarrow$

$((n+1)/(n+2))^{n+2} > (n/(n+1))^{n+1} \Leftrightarrow ((n+2)/(n+1))^{n+2} < ((n+1)/n)^{n+1} \Leftrightarrow$

$(1 + 1/(n+1))^{n+2} < (1 + 1/n)^{n+1}$ или което е все същото $b_{n+1} < b_n$;

равенство не може да има, тъй като числата не могат да бъдат едновременно еднакви;

получаваме: $2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4 \Rightarrow a_n$ – ограничена, b_n – ограничена $\Rightarrow a_n$ – сходяща и клони към числото A, b_n – сходяща и клони към числото B;

освен това $a_n.(1 + 1/n) = b_n \Rightarrow A = B$ (границата на $1+1/n$ е 1);

числото *e* дефинираме като общата граница на двете редици a_n и b_n;

Теорема на Кантор за свиваща система от интервали

Определение: Нека е дадена безкрайна редица от интервали $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$; казваме, че $\{ \Delta_n\}$ е свиваща система от интервали, ако:

1. Всички интервали са затворени, т.е. $\Delta_i = [a_i, b_i]$;
2. Всеки интервал Δ_n съдържа следващия Δ_{n+1}, т.е. за всяко $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$;
3. При $n \to \infty$, $b_n - a_n \to 0$

Теорема на Кантор: Нека е дадена една свиваща система от интервали $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$. Тогава съществува единствена точка C, такава че $C \in [a_n, b_n]$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Доказателство:

$a_n \leq a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, т.е. $\{ a_n\}$ е растяща редица;

$b_n \geq b_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, т.е. $\{ b_n\}$ е намаляваща редица;

освен това $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \Rightarrow a_n, b_n$ са ограничени редици $\Rightarrow$

a_n – сходяща, нека $a_n \to A$ при $n \to \infty$;

b_n – сходяща, нека $b_n \to B$ при $n \to \infty$;

$\Rightarrow b_n - a_n \to B - A$ при $n \to \infty$, но по определение $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$

$\Rightarrow B - A = 0$, т.е. $A = B$;

Нека $C = A = B$;

a_n – монотонна растяща и клони към C $\Rightarrow a_n \leq C$;

b_n – монотонна намаляваща и клони към C $\Rightarrow C \leq b_n$;

$\Rightarrow a_n \leq C \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Да допуснем, че съществува друга точка C′, такава че $a_n \leq C' \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; нека за определеност $C' < C$;

в такъв случай $a_n \leq C' < C \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
a_n – сходяща и има граница C;
нека $\varepsilon = (C - C') / 2 > 0$;
тогава съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N$;
$|a_n - C| < \varepsilon \Leftrightarrow C - \varepsilon < a_n < C + \varepsilon \Rightarrow a_n > C - \varepsilon = (C + C') / 2 > C'$ - противоречие ($a_n \leq C'$ за всяко $n \in \mathbf{N}$) ➔ точката C е единствена;

Твърдение: Нека a_n – сходяща; тогава границата е единствена.
Доказателство:
Да допуснем, че a_n има две граници $A < A'$;
избираме $\varepsilon = (A' - A)/2$;
a_n – сходяща и има граница A ➔ съществува индекс $N_1 \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N_1$: $|a_n - A| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;
a_n – сходяща и има граница A′ ➔ съществува индекс $N_2 \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N_2$: $|a_n - A'| < \varepsilon$, т.е. $A' - \varepsilon < a_n < A' + \varepsilon$;
тогава при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;
$A' - \varepsilon < a_n < A' + \varepsilon$;
но $A + \varepsilon = A' - \varepsilon = (A + A')/2 \Rightarrow A - \varepsilon < a_n < (A + A')/2 < a_n < A' + \varepsilon$ - противоречие ➔ границата наистина е единствена;

4. Точки на сгъстяване. Подредици. Теорема на Болцано – Вайерщрас.

Определение: Нека е дадена редица $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; казваме, че редицата $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ е **подредица** на $\{a_n\}$, ако целите положителни числа $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ удоволетворяват неравенствата: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$;

Твърдение: Ако редицата a_n е сходяща и има граница A, тогава всяка нейна подредица $\{a_{n_k}\}$ е сходяща и има същата граница;
Доказателство:
Фиксираме $\varepsilon > 0$;
a_n - сходяща и има граница A ➔ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N$ имаме $|a_n - A| < \varepsilon$;
избираме индекс k_0, такъв че при $n_{k_0} > N$; това е възможно, тъй като редицата $\{n_k\}$ е безкрайна, а само краен брой естествени числа са по-малки от N;
тогава при $k > k_0$ имаме: $n_k > n_{k_0} > N$ ➔
$|a_{n_k} - A| < \varepsilon$ ➔ $\{a_{n_k}\}$ е сходяща и има граница A;

Определение 1: Казваме, че A е **точка на сгъстяване** за редицата $\{a_n\}$, ако съществува подредица $\{a_{n_k}\}$, която е сходяща и има за граница числото A;

Определение 2: Казваме, че A е **точка на сгъстяване** за редицата $\{a_n\}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват безброй много членове на $\{a_n\}$, които се намират в интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$;

Ще докажем, че двете определения са еквивалентни;
Очевидно от определение 1 ➔ определение 2, тъй като за всяко $\varepsilon > 0$ в околността $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ са всички елементи с достатъчно голям индекс (> N, където N – фиксирано);
Ще докажем, че от определение 2 ➔ определение 1;
Нека $\varepsilon_1 = 1$; тогава съществува индекс n_1, такъв че
$a_{n_1} \in (A - 1, A + 1)$;
Нека $\varepsilon_2 = 1/2$; тогава в околността $(A - \varepsilon_2, A + \varepsilon_2)$ има безброй много елементи на редицата, тогава ще има и такива с индекс $n_2 > n_1$;
$a_{n_2} \in (A - 1/2, A + 1/2)$, $n_2 > n_1$;
…
Нека $\varepsilon_k = 1/k$; тогава в околността $(A - \varepsilon_k, A + \varepsilon_k)$ има безброй много елементи на редицата, тогава ще има и такива с индекс $n_k > n_{k-1}$;
$a_{n_k} \in (A - 1/k, A + 1/k)$, $n_k > n_{k-1}$;
…

По този начин получихме една подредица $\{a_{n_k}\}$ на редицата $\{a_n\}$, за която $A - 1/k < a_{n_k} < A + 1/k$ за всяко $k \in \mathbf{N}$ ➔ от теоремата за полицаите, че $\{a_{n_k}\} \to A$;

Теорема на Болцано – Вайерщрас: Всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване; друга еквивалентна формулировка е, че от всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица;

Означение: Най-голямата точка на сгъстяване се бележи с
$\overline{\lim}\, a_n$ и се чете 'лимес супериор';
Означение: Най-малката точка на сгъстяване се бележи с
$\underline{\lim}\, a_n$ и се чете 'лимес инфериор';

Ще докажем по-силното твърдение:
Твърдение: Всяка ограничена редица $\{a_n\}$ притежава най-голяма и най-малка точка на сгъстяване;
Доказателство:
Нека m и M са съответно една долна и една горна граница за редицата $\{a_n\}$, т.е. $m \le a_n \le M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
Разглеждаме следното множество A:
A се състои от всички реални числа x, за които съществуват <u>краен</u> брой членове от редицата, които са по-големи от x;
в такъв случай $M \in A$, тъй като има 0 (краен брой) членове, които са по-големи от M ➔ $A \ne \varnothing$;

освен това всяко $y \leq m \notin A$, тъй като безброй много членове (всичките) са по-големи от y ➔ за всяко $x \in A$, $x > m$ ➔ m е долна граница на A, освен това A е непразно ➔ A притежава точна долна граница; нека $\inf(A) = x$;
Ако $x \in A$ ➔ всяко $y > x \in A$;
Ако $x \notin A$ ➔ всяко $y < x \notin A$;
ще докажем, че x е най-голямата точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}$, т.е.:

1. x е точка на сгъстяване;
2. всяко $x' > x$ не е точка на сгъстяване на редицата;

доказателство на 1:
фиксираме $\varepsilon > 0$;
тогава $x + \varepsilon > x$; ако допуснем, че $x + \varepsilon \notin A$ ➔ всяко $y < x + \varepsilon \notin A$ ➔ за всяко $y \in A : y > x + \varepsilon$ ➔ $x + \varepsilon$ е долна граница на A – противоречие с факта, че x е най-голямата долна граница ➔ $x + \varepsilon \in A$ ➔ само краен брой членове на редицата са по-големи от $x + \varepsilon$;
$x - \varepsilon < x$ ➔ $x - \varepsilon \notin A$ ➔ безброй много членове на редицата са по-големи от $x - \varepsilon$ ➔ в околността $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ има безброй много членове на редицата $\{a_n\}$ ➔ x е точка на сгъстяване;
доказателство на 2:
нека $x' > x$, по-горе доказахме, че в такъв случай $x' \in A$;
нека $\varepsilon = (x' - x)/2$, $\varepsilon > 0$;
➔ $x' - \varepsilon = (x' + x)/2 > x$ ➔ $x' - \varepsilon \in A$, $x' + \varepsilon \in A$ ➔
в околността $(x' - \varepsilon, x' + \varepsilon)$ има краен брой членове ➔ x' не е точка на сгъстяване ➔ x е най-голямата точка на сгъстяване;

За сходящи редици имаме: $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$;

Твърдение: Нека редицата $\{a_n\}$ е неограничена; тогава или съществува подредица $\{a_{n_k}\} \to +\infty$ или подредица $\{a_{n_k}\} \to -\infty$;
Доказателство:
$\{a_n\}$ – неограничена ➔ за всяко $M \in \mathbf{R}^+$ съществува индекс n, такъв че $|a_n| > M$;
избираме $M_1 = 1$ ➔ съществува индекс n_1 : $|a_{n_1}| > M_1 = 1$;
избираме $M_2 = \max(2, |a_{n_1}|)$ ➔ съществува индекс n_2: $|a_{n_2}| > M_2$;
…
избираме $M_k = \max(k, |a_{n_{k-1}}|)$ ➔ съществува индекс n_k: $|a_{n_k}| > M_k$;
…
за избраната подредица на $\{a_{n_k}\}$ имаме:
$|a_{n_1}| < |a_{n_2}| < \ldots < |a_{n_k}| < \ldots$; $|a_{n_k}| > k$ ➔ $|a_{n_k}| \to +\infty$;
безброй много членове от редицата са със знак '+' (или със знак '-');
избираме съответната подредица и тя клони към $+\infty$ $(-\infty)$;

Като обобщение от всяка редица можем да изберем сходяща подредица, ако прибавим несобствените точки $+\infty$, $-\infty$;

Семинарни занятия

Функции

Дефиниция: Дадени са две множества X и Y. Ако на всеки елемент $x \in X$ е съпоставен точно един елемент $y \in Y$, $y = f(x)$, казваме че е дефинирана **функцията** $f : X \to Y$;
y е **образ** на x, а x е **праобраз** на y под действие на функцията f;
X – **дефиниционно множество**;
Y – **множество от стойности**;
Означаваме с $f(X) = \{ y \in Y \mid y \text{ е образ на някое } x \}$;

Дефиниция: Функцията $f : X \to Y$ се нарича **'върху'** или **сюрективна**, ако за всяко $x \in X$ съществува $y \in Y : f(x) = y$, т.е. $f(X) = Y$;
Дефиниция: Функцията $f : X \to Y$ се нарича **еднозначна** или **инективна**, ако от $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
Дефиниция: Функцията $f : X \to Y$ се нарича **взаимноеднозначна** или **биективна**, ако е едновременно сюрективна и инективна;

Дефиниция: Дадени са две функции $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$; в такъв случай $h : X \to Z$, дефинирана с $h(x) = g(f(x))$ за всяко $x \in X$ се нарича **композиция** на функциите f и g;

Дефиниция: Дадена е функция $f : X \to Y$; в такъв случай $g : f(X) \to X$ се нарича **обратна функция** на f, ако $f(g(y)) = y$ за всяко $y \in f(X)$;

Твърдение: Ако $f : X \to Y$ е биекция, тогава f притежава точно една обратна функция и тя се означава с f^{-1};

5. Фундаментални редици. Условие на Коши за сходимост.

Определение: редицата $\{ a_n \}$ е **фундаментална**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $m > N$, $n > N$: $|a_m - a_n| < \varepsilon$;

Твърдение: Ако $\{ a_n \}$ е фундаментална, то a_n е ограничена;
Доказателство: Нека $\varepsilon = 1$; съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $m > N$, $n > N$: $|a_m - a_n| < 1$;
нека $m = N + 1$; тогава за всяко $n > N$: $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$
$\Rightarrow$ $M = \max(a_{N+1} + 1, a_1, a_2, \ldots, a_N)$ е горна граница на редицата;
$m = \min(a_{N+1} - 1, a_1, a_2, \ldots, a_N)$ е долна граница на редицата;

$\Rightarrow$ { a_n } е ограничена;

Критерий на Коши за сходимост: редицата { a_n } е фундаментална $\Leftrightarrow$ редицата { a_n } е сходяща;
Доказателство:
Нека { a_n } е сходяща и има граница A;
Избираме $\varepsilon > 0$; нека $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$;
$\Rightarrow$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, че за всяко $n > N$: $|a_n - A| < \varepsilon_1$;
нека $m > N \Rightarrow |a_m - A| < \varepsilon_1$;
нека $p > N \Rightarrow |a_p - A| < \varepsilon_1$;
$\Rightarrow |a_m - a_p| = |a_m - A + A - a_p| \leq |a_m - A| + |a_p - A| < 2.\varepsilon_1 = \varepsilon$
$\Rightarrow$ { a_n } – фундаментална;
Нека { a_n } е фундаментална $\Rightarrow$ { a_n } – ограничена $\Rightarrow$ { a_n } притежава точка на сгъстяване (по Болцано-Вайерщрас);
Допускаме, че съществуват две различни точки на сгъстяване $A < B$;
Избираме $\varepsilon = (B - A)/3$;
A – точка на сгъстяване $\Rightarrow$ съществуват безброй много елементи на редицата в околността $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$;
B – точка на сгъстяване $\Rightarrow$ съществуват безброй много елементи на редицата в околността $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$;
{ a_n } – фундаментална $\Rightarrow$ съществува $N \in \mathbf{N}$, че за $n > N$, $m > N$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$;
Избираме $n > N$: $|a_n - A| < \varepsilon$;
Избираме $m > N$: $|a_m - B| < \varepsilon$;
това е възможно, защото само краен брой елементи имат индекси $\leq N$, а ε - околностите на A и B съдържат безброй много елементи;
Получаваме:
$3.\varepsilon = B - A = |B - a_m + a_m - a_n + a_n - A| \leq |B - a_m| + |a_m - a_n| + {}$
$+|a_n - A| < 3.\varepsilon$ - противоречие $\Rightarrow$ съществува единствена точка на сгъстяване на редицата { a_n } $\Rightarrow$ { a_n } е сходяща;

Примери:
Нека $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$;
тогава $a_{2n} - a_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \ldots + 1/2n > (1/2n).n = 1/2$
$\Rightarrow$ редицата не е фундаментална $\Rightarrow$ не е сходяща;
Дадена е ограничената редицата { a_n };
Нека $b_n = a_0 + a_1.q + a_2.q^2 + \ldots + a_n.q^n$, $|q| < 1$;
Избираме $m = n+p$; нека $0 \leq |a_n| < M$
$|b_{n+p} - b_n| = |a_{n+1}.q^{n+1} + a_{n+2}.q^{n+2} + \ldots + a_{n+p}.q^{n+p}| = |q|^{n+1}.(a_{n+1} + {}$
$+ q.a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}.q^{p-1}) \leq |q|^{n+1}.(|a_{n+1}| + |q|.|a_{n+2}| + \ldots + |q^{p-1}|.|a_{n+p}|) <$
$< |q^{n+1}|.M. (1 - |q|^p)/(1 - |q|) < M. |q|^{n+1}/(1 - |q|) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$
{ b_n } – фундаментална $\Rightarrow$ { b_n } – сходяща;

Семинарни занятия

Твърдение: Ако $\{ a_n \}$ е сходяща и има граница числото $a \neq 0$;
$\{ b_n \} \to +\infty$, тогава $\{ a_n.b_n \} \to +\infty$, ако $a > 0$ и $\{ a_n.b_n \} \to -\infty$, ако $a < 0$;
Доказателство: Нека $a > 0$; избираме $\varepsilon = a/2$;
$\{ a_n\}$ – сходяща $\Rightarrow$ съществува индекс $N_1 \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N_1$,
$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a/2 < a_n < 3.a/2$;
избираме произволно положително число M; нека $M_1 = 2.M/a$;
тогава съществува индекс N_2, такъв че за всяко $n > N_2$, $b_n > M_1$;
нека $N = \max (N_1, N_2)$; получаваме, че за всяко $n > N$,
$a_n.b_n > a/2.b_n > a/2.2.M/a = M \Rightarrow \{ a_n.b_n \} \to +\infty$;
за $a < 0$ аналогично;

Следствие: Нека $P (n) = a_k.n^k + a_{k-1}.n^{k-1} + \ldots + a_1.n + a_0$,
където $a_k \neq 0$, $a_s \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$ - фиксирани;
границата на $P (n)$ при $n \to \infty$ е:
$+\infty$, ако $a_k > 0$;
$-\infty$, ако $a_k < 0$;

Задача: Да се докаже, че съществува полином $P_{k+1}(x)$ от степен $k+1$, където $P_{k+1} (x) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$; освен това старшият коефициент на $P_{k+1} (x)$ е $1/(k+1)$;

Дефиниция: Ще казваме, че две редици $\{ a_n \}$ и $\{ b_n \}$ са **еквивалентни**, ако редицата $\{ a_n/b_n \}$ има граница число, което е различно от 0; означаваме $a_n \sim b_n$;

Дефиниция: Казваме, че **спрегнато** на $a - b$ от ред k, където $a, b \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ е $a^{k-1} + a^{k-2}.b + \ldots + a.b^{k-2} + b^{k-1}$;

Граница на редицата $a_n = q^n$ при $n \to \infty$:
$+\infty$, ако $q > 1$;
1, ако $q = 1$;
0, ако $|q| < 1$;
не съществува, ако $q \leq -1$;

Твърдение: Ако $\{ a_n \} \to 0$, тогава $\{ |a_n| \} \to 0$;

Твърдение: Ако $\{ a_n \} \to a$, тогава $\{ |a_n| \} \to |a|$;

Твърдение: Нека $a_n \leq b_n$ за всяко $n > k$;
1. Ако $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$;
2. Ако $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$;

Границата на редицата $\{ n^k/a^n \}$, където $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}^+$ - фиксирани:
$+\infty$, ако $0 < a < 1$;
$+\infty$, ако $a = 1$;
0, ако $a > 1$;

Етапи при изследване на рекурентни редици:

1. Намиране на евентуални граници – заместваме с едно и също число във връзката;
2. Изследване за интервали на монотонност – $n = ?$, ако $a_n < a_{n+1}$;
3. Изследване за ограниченост – $n = ?$, ако $a_n \le l$, където l са някакви числа, получени от предните два етапа;

Твърдение: Нека $a_{n+2} = p.a_{n+1} + q.a_n$, $a_0 = A$, $a_1 = B$,
където A, B, p, q – фиксирани; тогава ако уравнението $x^2 = p.x + q$ има два реални корена α, β съществуват константи c_1, c_2, такива че:
ако $\alpha \ne \beta$, $a_n = c_1.\alpha^n + c_2.\beta^n$;
ако $\alpha = \beta$, $a_n = (c_1 + n.c_2).\alpha^n$;

6. Граници на функции. Еквивалентност на дефинициите на Хайне и Коши.

Дефиниция на Хайне: Казваме, че числото A е **граница** на функцията f (x) в точката a, ако за всяка редица $\{x_n\}$ със свойствата: $x_n \to a$ при $n \to \infty$, $x_n \ne a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ да е в сила: $\{ f(x_n) \} \to A$ при $n \to \infty$;

Дефиниция на Коши: Казваме, че числото A е **граница** на функцията f (x) в точка a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x, такова че $0 < |x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Означения: $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$;

Теорема: Дефинициите на Хайне и на Коши са еквивалентни.
Доказателство:
от Коши ➔ Хайне:
Избираме произволна редица $\{ x_n \} \to a$ при $n \to \infty$ и
$x_n \ne a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x, такова че $0 < |x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - A| < \varepsilon$; тъй като $\delta > 0$ е фиксирано, $\{ x_n \}$ има граница a ➔ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$, $|x_n - a| < \delta$; тъй като $x_n \ne a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ ➔
$0 < |x_n - a| < \delta$ ➔ $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ за всяко $n > N$ ➔ редицата $\{ f(x_n) \}$ е сходяща и има граница A ➔ f (x) има граница по Хайне в точката a;

от Хайне ➔ Коши:
допускаме противното: нека съществува число $\varepsilon_0 > 0$, такова че за всяко $\delta > 0$ съществува x, такова че $0 < |x - a| < \delta$ и $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$;
Нека $\delta_1 = 1$; тогава можем да намерим $x_1 \neq a$, такова че
$|x_1 - a| < \delta_1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;
Нека $\delta_2 = 1/2$; тогава можем да намерим $x_2 \neq a$, такова че
$|x_2 - a| < \delta_2$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;
…
Нека $\delta_k = 1/k$; тогава можем да намерим $x_k \neq a$, такова че
$|x_k - a| < \delta_k$ и $|f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0$;
…

Получихме една редица от числа $\{ x_n \}$, за която е изпълнено:
$0 < |x_n - a| < 1/n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$;
очевидно $x_n \to a$, $x_n \neq a$ (например по теорема за полицаите) ➔
$f(x_n) \to A$, което е в противоречие с $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ ➔ допускането не е вярно ➔ f (x) има граница по Коши в точката A;

Примери:
Ще покажем, че $x.\sin 1/x \to 0$ при $x \to 0$;
Фиксираме $\varepsilon > 0$;
$|x.\sin 1/x| = |x|.|\sin 1/x| \leq |x|$;
ако изберем $\delta = \varepsilon$ ➔ $|x.\sin 1/x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ ➔ $x.\sin 1/x$ има граница 0 при $x \to 0$;
Ще покажем, че $\sin 1/x$ няма граница при $x \to 0$;
за целта избираме редицата $\{ x_n \}$ по следния начин:
$x_1 = 2/\pi$, $x_2 = 2/(3.\pi)$, …, $x_n = 2/((2.n+1).\pi)$, …;
за съответната редица $\{ f(x_n) \}$ получаваме:
$f(x_1) = \sin \pi/2 = 1$
$f(x_2) = \sin 3.\pi/2 = -1$
…
$f(x_n) = \sin (2n+1).\pi/2 = (-1)^n$;
както знаем редицата $(-1)^n$ е разходяща ➔ по дефиниция на Хайне,
$f(x) = \sin 1/x$ не притежава граница при $x \to 0$;

Дефиниция: Казваме, че f (x) клони към $\pm\infty$ при $x \to a$, ако при всеки избор на редицата $\{ x_n \}$, със свойствата $\{ x_n \} \to a$,
$x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, съответната редица $\{ f(x_n) \} \to \pm\infty$;

Дефиниция: Казваме, че f (x) има граница A при $x \to \pm\infty$, ако при всеки избор на редицата $\{ x_n \}$ клоняща към $\pm\infty$,
съответната редица $\{ f(x) \} \to A$;

7. Свойства на граници на функции. Намиране на границите sinx/x при x → 0 и (1 + x)^{1/x} при x → 0;

Дефиниция: Казваме, че функцията f (x) е **ограничена** в интервал Δ, който е подмножество на дефиниционното и множество, ако съществува $M \in \mathbf{R}^+$, такова че $|f(x)| < M$;

Свойство 1:
Нека са дадени две функции f (x) и g (x), които имат една и съща дефиниционна област Δ; тогава, ако $f(x) \to A$ при $x \to a$ и $g(x) \to B$ при $x \to a$:

1. $(f+g)(x) \to A + B$ при $x \to a$;
2. $(f - g)(x) \to A - B$ при $x \to a$;
3. $(f.\,g)(x) \to A.B$ при $x \to a$;
4. $(f/\,g)(x) \to A/B$ при $x \to a$ при условие, че $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$;

Свойство 2:
Нека са дадени две функции f (x) и g (x), които имат една и съща дефиниционна област Δ; тогава, ако $f(x) \to A$ при $x \to a$ и $g(x) \to B$ при $x \to a$ и $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in D \Rightarrow A \leq B$;

Свойство 3:
Нека са дадени три функции f (x), h (x), g (x) които имат една и съща дефиниционна област Δ; ако $f(x) \to C$ при $x \to a$, $g(x) \to C$ при $x \to a$ и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in \Delta \Rightarrow h(x) \to C$ при $x \to a$;

Доказателство на трите свойства: Непосредствено по дефиниция на Хайне и свойства на сходящи редици;

Свойство 4:
Нека f (x) и g (x) са две функции с една и съща дефиниционна област Δ; тогава ако $f(x) \to 0$ при $x \to a$ и g (x) е ограничена в някоя околност на a, $(f.\,g)(x) \to 0$ при $x \to a$;
Доказателство:
Нека $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ е околност на a, в която g (x) е ограничена $(\delta_1 > 0) \Rightarrow$ съществува $K \in \mathbf{R}^+$, такова че $|g(x)| < K$ за всяко $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \Leftrightarrow |x - a| < \delta_1$;
Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $\varepsilon/K > 0$;
f (x) има граница 0 $\Rightarrow$ съществува $\delta_2 > 0$, такова че за всяко x, такова че $0 < |x - a| < \delta_2$ е в сила $|f(x)| < \varepsilon/K$;
тогава ако $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:
$|f(x).g(x)| = |f(x).g(x)| < K.\varepsilon/K = \varepsilon \Rightarrow$
f (x).g (x) има граница 0 при $x \to a$;

Свойство 5:
Нека f (x) е дефинирана в Δ. Ако f (x) има граница при x → a, то съществува околност на a, в която f (x) е ограничена;
Доказателство: Фиксираме $\varepsilon = 1$;
нека f (x) има граница A при x → a ➔ съществува $\delta > 0$, такова че от $0 < |x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < 1$ ➔ $A - 1 < f(x) < A + 1$ ➔ функцията f (x) е ограничена в $(a - \delta, a + \delta)\backslash\{a\}$;

Дефиниция: Казваме, че f (x) има **дясна граница** числото A при x → a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $0 < x - a < \delta$ следва $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Дефиниция: Казваме, че f (x) има **лява граница** числото A при x → a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $0 < a - x < \delta$ следва $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Означения за дясна граница: $f(x) \xrightarrow[x\to a+0]{} A$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$;

Означения за лява граница: $f(x) \xrightarrow[x\to a-0]{} A$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$;

Твърдение: Нека функцията f (x) е дефинирана в околност на a;
f (x) има граница A при x → a тогава и само тогава, когато f (x) има лява и дясна граница при x → a и те са равни;
Доказателство:
Ако f (x) има граница A при x → a;
избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta > 0$ е такова, че от $0 < |x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$; тогава от $0 < x - a < \delta$ ➔ $0 < |x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ➔ f (x) има дясна граница A при x → a; аналогично от $0 < a - x < A$ ➔ $0 < |x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ➔ f (x) има лява граница A при x → a;
Нека f (x) има дясна граница A и лява граница A при x → a;
избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta_1 > 0$ е такова, че от $0 < x - a < \delta_1$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$; нека $\delta_2 > 0$ е такова, че от $0 < a - x < \delta_2$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$; тогава за $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$ имаме:
от $0 < x - a < \delta$, $0 < a - x < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. от $0 < |x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ➔ f (x) има граница A при x → a;

Твърдение: $\sin x/x \to 1$ при $x \to 0$;
Доказателство:
Чрез единичната окръжност и сравняване на лица можем да докажем следното неравенство:
$\sin x < x < \mathrm{tg} x$ за $0 < x < \pi/2$;
от него ➔ $1 < x/\sin x < 1/\cos x$ ➔ $1 > \sin x/x > \cos x$ ➔
$0 < 1 - \sin x/x < 1 - \cos x$ ➔ $0 < 1 - \sin x/x < 2.\sin^2 x/2$ ➔
$0 < 1 - \sin x/x < x^2/2$;

това неравенство очевидно е вярно и при $-\pi/2 < x < 0$, тъй като $\sin x/x$ и x^2 запазват знаците си;
ясно е, че $x^2/2 = x \cdot x \cdot 1/2 \to 0$ при $x \to 0$;
по теорема на полицаите получаваме, че $1 - \sin x/x \to 0$ при $x \to 0$ ➔ $\sin x/x \to 1$ при $x \to 0$;

Твърдение: $(1 + x)^{1/x} \to e$ при $x \to 0$;
Доказателство:
Ще докажем, че дясната граница е e;
по – долу предполагаме, че $x > 0$;
Известно е, че редиците $a_n = (1 + 1/(n+1))^n$ и $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ са сходящи и клонят към e;
избираме $\varepsilon > 0$;
тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$ е в сила:
$|a_n - e| < \varepsilon$, $|b_n - e| < \varepsilon$ или $e - \varepsilon < a_n < e + \varepsilon$, $e - \varepsilon < b_n < e + \varepsilon$;
избираме $\delta = 1/(N + 1)$;
нека x е такова, че $x < \delta \Leftrightarrow x < 1/(N+1)$ ➔ $N + 1 < 1/|x|$;
Нека $\lceil 1/x \rceil = n + 1$ ➔ $\lfloor 1/x \rfloor = n$;
освен това $n + 1 = \lceil 1/x \rceil \geq 1/x > N + 1$ ➔ $n > N$;
от неравенствата:
$n + 1 \geq 1/x \geq n$ ➔ $1/(n+1) \leq x \leq 1/n$ ➔ $1 + 1/(n+1) \leq 1 + x \leq 1 + 1/n$
➔ $(1 + 1/(n+1))^n \leq (1+x)^{1/x} \leq (1 + 1/n)^{n+1}$; последното неравенство следва от това, че основите са по-големи от 1 и се повдига в степени $n \leq 1/x \leq n+1$; тъй като $n > N$ от последното неравенство получаваме:
$e - \varepsilon < (1+x)^{1/x} < e + \varepsilon$ ➔ $(1+x)^{1/x} \to e$ при $x \to 0$;
За да докажем, че лявата граница е e полагаме $x = -t$; тогава t клони към 0 с положителни стойности;
$(1 + x)^{1/x} = (1 - t)^{-1/t} = (1/(1 - t))^{1/t} = (1 + t/(1 - t))^{(1-t)/t + 1} =$
$= (1 + t/(1-t))^{(1-t)/t} \cdot (1 + t/(1 - t)) = e$,
тъй като $t/(1-t)$ клони към 0 с положителни стойности ➔ първият множител клони към e (от по-горе), а вторият клони към 1 (от свойството за събиране);

Условие на Коши за граници на функции

Определение: Функцията $f(x)$ удовлетворява **условието на Коши** в точката a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всеки две точки x' и x'', такива че $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ е в сила
$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$;

Твърдение: Функцията $f(x)$ има граница в точката a тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши;
Доказателство:
Нека $f(x)$ има граница A при $x \to a$; избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta > 0$ е такова, че от $0 < |x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - A| < \varepsilon/2$;

нека x' е такова, че $0 < |x' - a| < \delta$ ➔ $|f(x') - A| < \varepsilon/2$;
нека x'' е такова, че $0 < |x'' - a| < \delta$ ➔ $|f(x'') - A| < \varepsilon/2$;
➔ $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| = \varepsilon$
➔ функцията удовлетворява условието на Коши в точката a;
Нека $f(x)$ удовлетворява условието на Коши в точката a;
избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta > 0$ е такова, че за всяко x', x'', такива че $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ е в сила $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$; избираме произволна редица $\{x_n\} \to a$, $x_n \neq a$; съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$, $0 < |x_n - a| < \delta$; нека $n_1 > N$, $n_2 > N$ ➔
$0 < |x_{n1} - a| < \delta$, $0 < |x_{n2} - a| < \delta$ ➔ $|f(x_{n1}) - f(x_{n2})| < \varepsilon$ ➔ редицата $\{f(x_n)\}$ е фундаментална ➔ $\{f(x_n)\}$ сходяща ➔ функцията има граница при $x \to a$;

8. Непрекъснатост на функции в точка. Еквивалентни определения. Свойства.

Дефиниция на Хайне: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката a; казваме, че $f(x)$ е **непрекъсната** в точката a, ако за всяка редица $\{x_n\} \to a$ е в сила $f(x_n) \to f(a)$;

Дефиниция на Коши: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката a; казваме, че $f(x)$ е **непрекъсната** в точката a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

Теорема: Дефинициите на Хайне и Коши за непрекъснатост са еквивалентни.
Доказателство:
от Коши ➔ Хайне:
Избираме произволна редица $\{x_n\} \to a$ при $n \to \infty$;
фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x, такова че $|x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; тъй като $\delta > 0$ е фиксирано, $\{x_n\}$ има граница a ➔ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$, $|x_n - a| < \delta$ ➔ $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ за всяко $n > N$ ➔ редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница $f(a)$ ➔ $f(x)$ е непрекъсната по Хайне в точката a;

от Хайне ➔ Коши:
допускаме противното: нека съществува число $\varepsilon_0 > 0$, такова че за всяко $\delta > 0$ съществува x, такова че $|x - a| < \delta$ и $|f(x) - f(a)| \ge \varepsilon_0$;
Нека $\delta_1 = 1$; тогава можем да намерим x_1, такова че
$|x_1 - a| < \delta_1$ и $|f(x_1) - f(a)| \ge \varepsilon_0$;
Нека $\delta_2 = 1/2$; тогава можем да намерим x_2, такова че
$|x_2 - a| < \delta_2$ и $|f(x_2) - f(a)| \ge \varepsilon_0$;

…
Нека $\delta_k = 1/k$; тогава можем да намерим x_k, такова че
$|x_k - a| < \delta_k$ и $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;
…

Получихме една редица от числа $\{x_n\}$, за която е изпълнено:
$|x_n - a| < 1/n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;
очевидно $x_n \to a$ (например по теорема за полицаите) ➔
$f(x_n) \to f(a)$, което е в противоречие с $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ ➔ допускането не е вярно;

Една функция е непрекъсната в числово множество, ако тя е непрекъсната за всяка точка от това множество;

Пример: Ще покажем, че $\sin x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$;
нека $a \in \mathbf{R}$; избираме $\varepsilon > 0$;
$|\sin x - \sin a| = 2.\sin|(x - a)/2|.\cos|(x + a)/2| \leq 2.|(x - a)/2| = |x - a|$;
използвали сме неравенството $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$, което е вярно за $\alpha \in \mathbf{R}$;
нека изберем $\delta = \varepsilon$ ➔ $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$ ➔ функцията $\sin x$ е непрекъсната в точката a;

Дефиниция: Една функция е **прекъсната** в точката a, ако тя не е непрекъсната в точката a;

Пример: Ще покажем, че функцията $\operatorname{sgn}(x)$ дефинирана с:
$-1, x < 0$; $1, x > 0$; $0, x = 0$ е прекъсната в точката 0;
Избираме произволна редица $\{x_n\} \to 0$, $x_n \neq 0$; тогава съответната редица $\{\operatorname{sgn}(x_n)\}$ е сходяща и клони към $1 \neq \operatorname{sgn}(0)$ ➔ по Хайне функцията е прекъсната в точката 0;
Ще покажем, че функцията на Дирихле $De(x)$ дефинирана с:
$0, x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$; $1, x \in \mathbf{Q}$ е прекъсната за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Нека $a \in \mathbf{R}$; в произволна околност на a има безброй много рационални и ирационални числа; избираме една редица $x_n' \to a$ и $x_n' \in \mathbf{Q}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; избираме друга редица $x_n'' \to a$ и $x_n'' \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ ➔ редиците $\{De(x_n')\}$, $\{De(x_n'')\}$ клонят съответно към 1 и към 0 ➔ по Хайне функцията е прекъсната в точката a;

Твърдение: $f(x)$ е непрекъсната в точката $a \Leftrightarrow f(x)$ има лява и дясна граница в точката a и те са равни на $f(a)$;
Доказателство: Непосредствено от определенията;

Свойство 1: Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката a и ако $f(a) \neq 0$, то съществува околност $(a - \delta, a + \delta)$ на точката a, в която $f(x)$ не си мени знака;

Доказателство:
Нека $f(a) > 0$; случаят $f(a) < 0$ се разглежда аналогично;
Нека $\varepsilon = f(a)/2 > 0$; тъй като $f(x)$ е непрекъсната в точката a, тогава съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \Leftrightarrow f(a)/2 < f(x) < 3.f(a)/2 \Rightarrow$
за всяко $x \in (a - \delta, a + \delta)$ имаме $f(a) > 0$;

Свойство 2: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в някакво множество Δ и нека $a \in \Delta$; ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката a, тогава:
1. $f(x) + g(x)$ е непрекъсната в точката a;
2. $f(x) - g(x)$ е непрекъсната в точката a;
3. $f(x) . g(x)$ е непрекъсната в точката a;
4. $f(x) / g(x)$ е непрекъсната в точката a, ако $g(a) \neq 0$;

Доказателство: Използваме дефиниция на Хайне; например за делението: тъй като $g(a) \neq 0 \Rightarrow$ от горното твърдение, съществува околност $(a - \delta_0, a + \delta_0)$ в която $g(x) \neq 0$; нека $\{ x_n \} \to a$; тъй като $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката a, $\{ f(x_n) \} \to f(a)$, $\{ g(x_n) \} \to g(a) \Rightarrow$
$\{ f(x_n)/g(x_n) \} \to f(a)/g(a) \Rightarrow f(x)/g(x)$ е непрекъсната в точката a;

Дефиниция: Нека $f(x)$: $\Delta_1 \to \Delta_2$; нека $g(t)$: $\Delta_3 \to \Delta_4$, където $\Delta_4 \subseteq \Delta_1$; дефинираме функцията $F(t) = f(g(t))$: $\Delta_3 \to \Delta_2$; функцията F наричаме **композиция** на двете функции g и f;
означаваме: $F = f \circ g$;

Свойство 3: Нека $f(x)$: $\Delta_1 \to \Delta_2$ е непрекъсната в точката x_0; нека $g(t)$: $\Delta_3 \to \Delta_4$, където $\Delta_4 \subseteq \Delta_1$, е непрекъсната в точката t_0 и $g(t_0) = x_0$; тогава $F = f \circ g : \Delta_3 \to \Delta_2$ е непрекъсната в точката t_0;
Доказателство: Нека $\{ t_n \}$ е произволна редица от стойности, която клони към t_0 и за всяко $n \in \mathbf{N}$, $t_n \in \Delta_3$; тъй като $g(t)$ е непрекъсната в точката $t_0 \Rightarrow$ съответната редица $\{ g(t_n) \} \to g(t_0) = x_0$;
тъй като $t_n \in \Delta_3$ за всяко $n \in \mathbf{N} \Rightarrow g(t_n) \in \Delta_4 \Rightarrow$
$g(t_n) \in \Delta_1$; тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $g(t_n) \to x_0 = g(t_0) \Rightarrow$ редицата $\{ f(g(t_n)) \}$ е сходяща и клони към $f(x_0)$, но $F(t_n) = f(g(t_n))$, $F(t_0) = f(g(t_0)) = f(x_0) \Rightarrow \{ F(t_n) \}$ клони към $F(t_0) \Rightarrow$
функцията $F(t)$ е непрекъсната в точката t_0;

Свойство 4: Нека $f(x)$ е непрекъсната в точката a; тогава съществува околност $(a - \delta, a + \delta)$ на точката a, в която функцията $f(x)$ е ограничена;
Доказателство: Фиксираме $\varepsilon = 1$;

тъй като f (x) е непрекъсната в точката a ➔ съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - a| < \delta$ ➔ $|f(x) - f(a)| < 1$ ➔ $f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$ ➔ функцията f (x) е ограничена в $(a - \delta, a + \delta)$;

9. Теореми за непрекъснати функции в краен затворен интервал.

Роля на затворения интервал: Нека $\{x_n\} \to A$ е произволна сходяща редица и всичките и елементи са в интервала [a, b]; тогава като използваме теоремите за граничен преход получаваме, че $a \le A \le b$, което означава, че граница остава в затворения интервал;

Теорема 1 (Болцано – Коши): Нека функцията f (x) е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]; нека f (a) и f (b) имат различни знаци, т.е.
$f(a).f(b) < 0$ ➔ съществува $c \in [a, b]$, такова че $f(c) = 0$;
Доказателство: Нека за определеност $f(a) < 0$, $f(b) > 0$;
Нека $c_1 = (a + b)/2$; ако $f(c_1) = 0$, теоремата е доказана;
ако $f(c_1) > 0$, тогава $a_1 = a$, $b_1 = c_1$; ако $f(c_1) < 0$, тогава $a_1 = c_1$, $b_1 = b$;
получаваме $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$;
Нека $c_2 = (a_1 + b_1)/2$; ако $f(c_2) = 0$, теоремата е доказана;
ако $f(c_2) > 0$, тогава $a_2 = a_1$, $b_1 = c_2$; ако $f(c_2) < 0$, тогава $a_2 = c_2$, $b_2 = b_1$;
получаваме $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$;
…
Нека $c_{n+1} = (a_n + b_n)/2$; ако $f(c_{n+1}) = 0$, теоремата е доказана;
ако $f(c_{n+1}) > 0$, тогава $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$; ако $f(c_1) < 0$, тогава
$a_{n+1} = c_{n+1}$, $b_{n+1} = b_n$; получаваме $f(a_{n+1}) < 0$, $f(b_{n+1}) > 0$;
…
Получаваме една <u>свиваща</u> се система от интервали $[a_n, b_n]$; това е така, защото дължината на един интервал е $(b_n - a_n)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$ и всеки интервал се съдържа в следващия; по теоремата на Кантор ➔ съществува единствена точка c, която принадлежи на всеки един от тези интервали ➔ $a_n \to C$, $b_n \to C$ при $n \to \infty$;
тъй като f (x) е непрекъсната, по Хайне ➔ $f(a_n) \to f(C)$; тъй като $f(a_n) < 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, след граничен преход получаваме: $f(C) \le 0$;
тъй като f (x) е непрекъсната, по Хайне ➔ $f(b_n) \to f(C)$; тъй като $f(b_n) > 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, след граничен преход получаваме: $f(C) \ge 0$;
➔ $f(C) = 0$;

Следствие 1: Всеки полином от нечетна степен има поне един реален корен;
Следствие 2: Нека f (x) е непрекъсната в $\mathbf{R}$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ са всички нули на f (x); тогава f (x) не си променя знака в интервалите
$(-\infty, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_n, +\infty)$;

Теорема 2 (за междинните стойности): Нека f (x) е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]; нека λ е число между f (a) и f (b); тогава съществува $c \in [a, b]$, такова че f (c) = λ;
Доказателство: Разглеждаме помощната функция $\varphi(x) = f(x) - \lambda$; имаме: $\varphi(a) = f(a) - \lambda < 0$, $\varphi(b) = f(b) - \lambda > 0$, $\varphi(x)$ – непрекъсната в [a, b] ➔ съществува x_0, такова че $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda$;

Теорема 3 (на Вайерщрас): Нека f (x) е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]; тогава f (x) е ограничена в [a, b];
Доказателство: Допускаме противното; нека за определеност f (x) е неограничена отгоре в интервала [a, b]; в такъв случай за всяко $M \in \mathbf{R}$ съществува $x \in [a, b]$, такова че $f(x) > M$;
Нека $M_1 = 1$; избираме x_1, такова че $f(x_1) > M_1$;
Нека $M_2 = 2$; избираме x_2, такова че $f(x_2) > M_2$;
…
Нека $M_n = n$; избираме x_n, такова че $f(x_n) > M_n$;
…

Разглеждаме редицата $\{x_n\}$; за нея $a \le x_n \le b$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; по теоремата на Болцано – Вайерщрас, съществува сходяща подредица $\{x_{nk}\} \to x_0 \in [a, b]$; получаваме, че $f(x_{nk}) > n_k$ за всяко $k \in \mathbf{N}$ ➔ редицата $f(x_{nk}) \to \infty$ при $k \to \infty$; от друга страна f (x) е непрекъсната ➔ по Хайне $\{f(x_{nk})\} \to f(x_0)$ – получаваме противоречие ➔ f (x) наистина е ограничена в [a, b];

Теорема 4 (на Вайерщрас): Нека f (x) е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]; тогава тя достига най-голяма стойност (супремум) и най-малка стойност (инфимум);
Доказателство: f (x) непрекъсната в [a, b] ➔ f (x) е ограничена ➔ множеството $X = \{f(x) \mid a \le x \le b\}$ притежава точна горна граница; нека $M = \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}$; тогава за всяко $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ не е горна граница на X;
Нека $\varepsilon_1 = 1$; тогава съществува $x_1 \in [a, b]$, такова че $f(x_1) > M - \varepsilon_1$;
Нека $\varepsilon_2 = 1/2$; тогава съществува $x_2 \in [a, b]$, такова че $f(x_2) > M - \varepsilon_2$;
…
Нека $\varepsilon_n = 1/n$; тогава съществува $x_n \in [a, b]$, такова че $f(x_n) > M - \varepsilon_n$;
…
Получаваме една редица $\{x_n\}$, за която $x_n \in [a, b]$ и $f(x_n) > M - 1/n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; тъй като $\{x_n\}$ е ограничена, тогава по теоремата на Болцано-Вайерщрас съществува сходяща подредица
$\{x_{nk}\} \to x_0 \in [a, b]$; тъй като f (x) е непрекъсната ➔ по Хайне
$\{f(x_{nk})\} \to f(x_0)$ за $k \to \infty$;
от друга страна $M - 1/n_k < f(x_{nk}) \le M$; от теоремата за полицаите ➔

$f(x_{nk}) \rightarrow M \Rightarrow f(x_0) = M$;
по същия начин се установява, че f (x) достига най-малка стойност;

10. Непрекъснатост на елементарните функции. Непрекъснатост на монотонни функции.

Непрекъснатост на рационалните функции

Нека функцията $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ е константа, т.е. $f(x) = C$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Тогава f (x) е непрекъсната;
Доказателство:
Нека $a \in \mathbf{R}$; Избираме $\varepsilon > 0$; $|f(x) - f(a)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$; т.е. каквото и да бъде δ, условието на Коши е удовлетворено ➔ f (x) е непрекъсната в a;

Нека функцията $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ е дефинирана с $f(x) = x$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Тогава f (x) е непрекъсната;
Доказателство:
Нека $a \in \mathbf{R}$; Избираме $\varepsilon > 0$; $|f(x) - f(a)| = |x - a|$; ясно е, че ако изберем $\delta = \varepsilon$, от $|f(x) - f(a)| < |x - a| < \delta = \varepsilon$, получаваме, че f (x) е непрекъсната в a;

Като използваме горните функции и свойствата за аритметичните операции, получаваме, че всеки полином на x е непрекъсната функция, а от там и всяка рационална функция на x е непрекъсната в дефиниционната си област (няма смисъл да се говори за прекъсване в точките където се анулира знаменателя);

Непрекъснатост на тригонометричните функции

Ще покажем, че sinx е непрекъсната в **R**;
нека $a \in \mathbf{R}$; избираме $\varepsilon > 0$;
$|\sin x - \sin a| = 2.\sin|(x - a)/2|.\cos|(x + a)/2| \leq 2.|(x - a)/2| = |x - a|$;
използвали сме неравенството $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$, което е вярно за $\alpha \in \mathbf{R}$;
нека изберем $\delta = \varepsilon$ ➔ $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$ ➔ функцията sinx е непрекъсната в точката a;
Почти аналогично се доказва, че cosx е непрекъсната в **R**;
от свойството за частно на непрекъснати функции ➔ tgx е непрекъсната в $\mathbf{R}\backslash\{\pi/2 + k.\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ и cotgx е непрекъсната в $\mathbf{R}\backslash\{k.\pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

Непрекъснатост на показателната, логаритмичната и степенната функция

Ще покажем, че $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ дефинирана с $f(x) = a^x$, $a > 0$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$;
Първо ще покажем, че a^x е непрекъсната в 0;
ще използваме, че $\{a^{1/n}\}$ и $\{a^{-1/n}\}$ клонят към 1 при $n \to \infty$;
нека $a > 1$; тогава $a^{1/n} > a^{-1/n}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
избираме $\varepsilon > 0$;
тогава съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че
$|a^{1/N} - \varepsilon| < 1$ и $|a^{-1/N} + \varepsilon| < 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^{1/N} < 1 + \varepsilon$;
избираме $\delta = 1/N$; тогава при $|x| < \delta$ като използваме, че a^x е растяща за $a > 1$ получаваме:
$1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^x < a^{1/N} < 1 + \varepsilon \Rightarrow |a^x - a^0| < \varepsilon$; с това показахме, че a^x е непрекъсната в точката 0 за $a > 1$; аналогично се показва при $a < 1$, а при $a = 1$ функцията a^x е константа;
нека $x_0 \in \mathbf{R}$; тогава $a^x = a^{x_0}.a^{x - x_0} \to a^{x_0}$ при $x \to x_0 \Rightarrow$
a^x е непрекъсната в $\mathbf{R}$;

Ще покажем, че функцията $f(x) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ дефинирана с
$f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;
Ще покажем, че $\ln x = \log_a x . \ln a$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;
нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
използваме неравенството $(1 + 1/n)^n < e$; като използваме, че $\ln x$ е растяща получаваме:
$(1 + 1/n)^n < e \Rightarrow n.\ln(1 + 1/n) < 1 \Rightarrow \ln(1 + 1/n) < 1/n$;
$(1 + 1/(n-1))^{n-1} < e \Rightarrow (n-1).\ln(1 + 1/(n-1)) < 1 \Rightarrow \ln(n/(n-1)) < 1/(n-1)$
$\Rightarrow \ln(1 - 1/n) > -1/(n-1)$;
тогава $-1/(n-1) < \ln(1 - 1/n) < \ln(1 + 1/n) < 1/n \Rightarrow$ по теорема на полицаите, че $\ln(1 - 1/n)$ и $\ln(1 + 1/n)$ клонят към 0 при $n \to \infty$;
избираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че:
$-\varepsilon < \ln(1 - 1/N) < \ln(1 + 1/N) < \varepsilon$;
избираме $\delta = x_0/N$;
тогава от $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$
$1 - 1/N < x/x_0 < 1 + 1/N \Rightarrow -\varepsilon < \ln(1 - 1/N) < \ln x - \ln x_0 <$
$< \ln(1 + 1/N) < \varepsilon \Rightarrow |\ln x - \ln x_0| < \varepsilon \Rightarrow$ функцията $\ln x$ е непрекъсната в точката $x_0 \Rightarrow$ по свойство за частно на непрекъснати функции
$\Rightarrow \ln x/\ln a = \log_a x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

Ще покажем, че функцията $f(x) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = x^\alpha$, α - произволно е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;
използваме, че $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$; по свойството за композиция на непрекъснати функции $\Rightarrow x^\alpha$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

Твърдение: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ и тя е монотонно растяща (намаляваща); тогава $f(x)$ е непрекъсната тогава

и само тогава, когато множеството от стойностите f (Δ) също е интервал;
Доказателство: Нека f (x) е растяща; случаят, когато е намаляваща се разглежда аналогично;
Ще докажем, че ако f (x) е непрекъсната, то f (Δ) е интервал;
Нека x_1, $x_2 \in \Delta$; нека y е такова, че $f(x_1) < y < f(x_2)$;
ще покажем, че съществува $x \in \Delta$, такова че $f(x_0) = y$;
образуваме си функцията $g(x) = f(x) - y$;
$g(x_1) = f(x_1) - y < 0$, $g(x_2) = f(x_2) - y > 0$ ➔ съществува $x_0 \in (x_1, x_2)$, такова че $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow y = f(x_0)$; с това показахме, че f (Δ) също е интервал;
Ще докажем, че ако f (Δ) е интервал, то f (x) е непрекъсната;
Нека x_0 е вътрешна точка за Δ;
тъй като функцията е монотонно растяща, числовото множество $M = \{ f(x) \mid x > x_0 \}$ е ограничено отдолу ➔ то притежава точна долна граница $A \in f(\Delta)$; аналогично множеството $m = \{ f(x) \mid x < x_0 \}$ притежава точна горна граница $B \in f(\Delta)$; ако допуснем, че $f(x_0) < A$, тогава $(f(x_0) + A)/2 < A \in f(\Delta)$ ➔ съществува $x' > x_0$, такова че $f(x') = (f(x_0) + A)/2$ ➔ $f(x') < A$ ➔ A не е точна долна граница на M ➔ $A = f(x_0)$, аналогично $B = f(x_0)$; фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $f(x_0) - \varepsilon$ не е горна граница на m ➔ съществува $x_1 < x_0 \in \Delta$, такова че $f(x_0) - \varepsilon < f(x_1) < f(x_0)$; избираме $\delta = (x_0 + x_1)/2$ ➔ за всяко x, такова че $x_0 - x < \delta$ имаме $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$ ➔ $f(x_0)$ е лява граница на функцията f (x) при $x \to x_0$; аналогично получаваме, че $f(x_0)$ е дясна граница при $x \to x_0$ ➔ f (x) има граница $f(x_0)$ при $x \to x_0$ ➔ f (x) е непрекъсната в точката x_0;

11. Равномерна непрекъснатост.

Дефиниция: Нека функцията f (x) е дефинирана в интервал Δ; казваме, че f (x) е **равномерно непрекъсната** в Δ, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $|x' - x''| < \delta$ ➔ $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$;

Пример:
Нека $f(x) = a.x + b$; ще покажем, че f (x) е равномерно непрекъсната в **R**;
Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $|f(x') - f(x'')| = |a|.|x' - x''|$; ясно е, че ако изберем $\delta = \varepsilon/|a|$, ще получим $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ при $|x' - x''| < \delta$;

Нека f (x) = sinx; ще покажем, че f (x) е равномерно непрекъсната в **R**;
Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $|f(x') - f(x'')| = 2.|\sin((x' - x'')/2)|.$
$. |\cos((x' + x'')/2)| \leq 2.|x' - x''|/2.1 = |x' - x''|$; ясно е, че ако изберем $\delta = \varepsilon$, ще получим $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ при $|x' - x''| < \delta$;

Нека $f(x) = x^2$; ще покажем, че $f(x)$ не е равномерно непрекъсната в $\mathbf{R}$;
Допускаме, че $f(x)$ е равномерно непрекъсната;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че от $|x' - x''| < \delta$ да следва: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \Leftrightarrow |x'^2 - x''^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x' - x''|.|x' + x''| < \varepsilon \Rightarrow \delta.|x' + x''| < \varepsilon$; това неравенство очевидно се нарушава за достатъчно големи стойности за x' и x'' ➔ $f(x)$ не е равномерно непрекъсната;

Теорема (на Кантор): Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$; тогава $f(x)$ е равномерно непрекъсната;
Доказателство:
Допускаме противното; нека $\varepsilon > 0$ е такова, че за всяко $\delta > 0$ съществуват x', x'' такива че, $|x' - x''| < \delta$ и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$;
избираме $\delta_1 = 1$; тогава можем да изберем x_1', x_1'', такива че $|x_1' - x_1''| < \delta_1$ и $|f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon$;
избираме $\delta_2 = 1/2$; тогава можем да изберем x_2', x_2'', такива че $|x_2' - x_2''| < \delta_2$ и $|f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon$;
…
избираме $\delta_n = 1/n$; тогава можем да изберем x_n', x_n'', такива че $|x_n' - x_n''| < \delta_n$ и $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$;
…
Получаваме две редици $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, които са ограничени ($\in [a, b]$) ➔ по Болцано-Вайерщрас можем да изберем сходящи подредици $\{x_{n_k}'\}$ и $\{x_{n_k}''\}$; нека $\{x_{n_k}'\} \to C$; известно е, че
$|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < 1/n_k \Leftrightarrow x_{n_k}' - 1/n_k < x_{n_k}'' < x_{n_k}' + 1/n_k$;
тъй като $1/n_k \to 0$ при $k \to \infty$, по теоремата за полицаите получаваме, че $\{x_{n_k}''\} \to C$; тъй като $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ ➔ $\{f(x_{n_k}')\} \to f(C)$ и $\{f(x_{n_k}'')\} \to f(C)$ ➔ $\{f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')\} \to 0$ при $k \to \infty$, което очевидно е в противоречие с $|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geq \varepsilon$ за всяко $k \in \mathbf{N}$ ➔ $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a, b]$;

12. Производна на функция – определение, геометричен и механичен смисъл.

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност Δ на точката x_0; изразът $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, където $x \in \Delta$, $x \neq x_0$ се нарича **диференчно частно** на функцията $f(x)$ в точката x_0; друг начин на записване е $(h = x - x_0)$ $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$;

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност Δ на точката x_0; казваме, че функцията $f(x)$ е **диференцируема** в точката x_0, ако съществува границата на диференчното частно при $x \to x_0$;

тази граница се бележи с $f'(x_0)$ и се нарича **производна** на функцията $f(x)$ в точката x_0;

Примери: Нека $f(x) = C$ за всяко $x \in \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = 0 \Rightarrow$ границата му при $x \to x_0$ е $0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Нека $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = (x - x_0)/(x - x_0) = 1$ $\Rightarrow$ граница му при $x \to x_0$ е $1 \Rightarrow f'(x_0) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Нека $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$; ще покажем, че $f(x)$ не е диференцируема в точката 0; разглеждаме диференчното частно $(|x| - |0|)/(x - 0) =$
$= |x|/x$; при $x > 0$ границата му е 1, а при $x < 0$ границата е $-1 \Rightarrow$ границата при $x \to 0$ не съществува $\Rightarrow f(x)$ няма производна в точката 0;

Твърдение: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0; ако $f(x)$ е диференцируема в точката $x_0 \Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в x_0;
Доказателство:
нека $\{x_n\}$ е произволна редица, която клони към x_0; тогава
$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0).(f(x_n) - f(x_0))/(x_n - x_0)$; първият множител клони към 0, а вторият клони към $f'(x_0) \Rightarrow f(x_n) - f(x_0) \to 0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x_0)$ при $n \to \infty \Rightarrow$ по Хайне $f(x)$ е непрекъсната;

Теорема: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката x_0 и са диференцируеми в x_0; тогава:

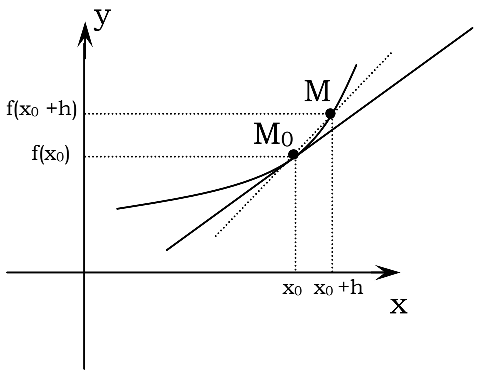
1. $f(x_0) + g(x_0)$ е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $f(x_0) - g(x_0)$ е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $f'(x_0) - g'(x_0)$;
3. $f(x_0) . g(x_0)$ е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$;
4. Ако $g(x_0) \neq 0$, то $f(x)/g(x)$ е дефинирана в околност на x_0 и е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $(f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0))/(g(x_0)^2)$;

Доказателство на 1.:
$((f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0)))/(x - x_0) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) +$
$(g(x) - g(x_0))/(x - x_0) \to f'(x_0) + g'(x_0)$ при $x \to x_0$;
Доказателство на 2.:
$((f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0)))/(x - x_0) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) -$
$(g(x) - g(x_0))/(x - x_0) \to f'(x_0) - g'(x_0)$ при $x \to x_0$;
Доказателство на 3.:
тъй като $f(x)$ е диференцируема в $x_0 \Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в x_0;
$(f(x).g(x) - f(x_0).g(x_0))/(x - x_0) = (f(x).g(x) - f(x).g(x_0) + f(x).g(x_0) -$
$f(x_0).g(x_0))/(x - x_0) = f(x).(g(x) - g(x_0))/(x - x_0) +$

$g(x_0).(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \rightarrow f(x_0).g'(x_0) + g(x_0).f'(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0;
Доказателство на 4.:
$g(x)$ е диференцируема в точката x_0 ➔ $g(x)$ е непрекъсната в точката x_0; тъй като $g(x_0) \neq 0$ и $g(x)$ – непрекъсната в x_0 ➔ съществува околност на x_0, в която $g(x) \neq 0$;
Лема: производната на $1/g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ е $-g'(x_0)/(g(x_0))^2$;
Доказателство: $(1 / g(x) - 1/ g(x_0) / (x - x_0) =$
$(g(x_0) - g(x))/((x - x_0).g(x).g(x_0)) \rightarrow - g'(x_0)/g(x_0)^2$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x_0;
по свойство 3. получаваме, че производната на $f(x)/g(x) = f(x).1/g(x)$ в точката x_0 е $f'(x_0)/g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)/g(x_0)^2 =$
$(f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0))/ g(x_0)^2$;

Геометричен смисъл на производната

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на x_0; ще си поставим за задача да намерим уравнение на секуща през точката $M_0(x_0, f(x_0))$ към графиката на функцията;
Нека $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ е друга точка от графиката на функцията; тогава уравнението на секущата е:
$y = k.(x - x_0) + f(x_0)$, където с (x, y) бележим текущите координати, а k е точно диференчното частно в точката x_0;



Допирателна в точката M_0 дефинираме като гранично положение на секущата MM_0, когато $M \rightarrow M_0$; функцията има допирателна в точката M_0, ако коефициентите в уравнението на секущата притежават граници когато $x \rightarrow x_0$; но това е така точно тогава, когато функцията е диференцируема в точката x_0; в такъв случай ъгловият коефициент на секущата ще клони към стойността на производната в точката x_0; получаваме, че уравнението на допирателната в точката x_0 е:
$y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$, при условие че функцията има производна в точката x_0;

окончателно: функцията е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато към графиката на функцията може да се прекара единствена допирателна в точката (x_0, $f(x_0)$);

Механичен смисъл на производната

Разглеждаме една материална точка M, която се движи по права линия; да изберем начало на координатната система върху правата; считаме, че абцисата на точка M в момент t се определя от някаква функция $f(t)$ на времето t;
Да разгледаме два момента t и t_0; в такъв случай както знаем от механиката изразът $(f(t) - f(t_0))/ (t - t_0)$ се нарича средна скорост в интервала от време (t_0, t); границата на $(f(t) - f(t_0))/ (t - t_0)$ при $t \to t_0$ се нарича средна скорост в момента t_0, т.е. средната скорост в момента t_0 е точно $f'(t_0)$;

Последователни производни

Нека е дадена функция $f(x)$, която е диференцируема в някакъв интервал Δ; в такъв случай при фиксирано x производната е някакво число, което зависи от x и е еднозначно определено от x; тогава можем да считаме, че производната е също функция на x; ако функцията $f'(x)$ е диференцируема, казваме че $f(x)$ е два пъти диференцируема и производната на $f'(x)$ наричаме **втора производна** на $f(x)$ и бележим с $f''(x)$; аналогично се дефинират производни от по висок ред; **n-та производна** бележим с $f^{(n)}$;
в сила е следната **формула на Лайбниц** за n-та производна на произведение на две функции:
$(f(x).\, g(x))^{(n)} = \binom{n}{0}.f^{(n)}(x).g(x) + \binom{n}{1}.f^{(n-1)}(x).g'(x) + \ldots +$
$+ \binom{n}{k}.f^{(n-k)}(x).\, g^{(k)}(x) + \ldots + \binom{n}{n-1}.f'(x).g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n}.f(x).g^{(n)}(x)$;
доказателството се извършва с индукция по n;

13. Диференциране на съставни функции.

Теорема: Нека функцията $f(u)$ е дефинирана в околност на точката u_0 и $f(u)$ е диференцируема в точката u_0; нека функцията $g(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, $g(x_0) = u_0$ и $g(x)$ е диференцируема в точката x_0; тогава функцията $F(x) = f(g(x))$ е дефинирана в околност на точката x_0, диференцируема в точката x_0 и $F'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$;
Доказателство:
Функцията $F(x)$ е дефинирана в тази околност на x_0, за която $g(x)$ е от дефиниционната област на $f(u)$, т.е. $g(x)$ приема стойности в достатъчно малка околност на u_0; такава околност съществува, тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x_0 и $g(x_0) = u_0$;

$(F(x_0 + h) - F(x_0))/h = (f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)))/h$;
полагаме $k = g(x_0 + h) - g(x_0)$, т.е. $g(x_0 + h) = k + u_0$;
получаваме:
$(F(x_0 + h) - F(x_0))/h = (f(u_0 + k) - f(u_0))/k \,.\, (g(x_0 + h) - g(x_0))/h$;
нека $h \to 0$, тогава $k = g(x_0 + h) - g(x_0)$ също клони към 0, тъй като $g(x)$ е диференцируема в точката x_0 ➔ непрекъсната в точката x_0;
тогава диференчното частно на $F(x)$ в точката x_0 клони към $f'(u_0).g'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$;

доказателството има един пропуск: то не третира случаят, когато $k = 0$; в такъв случай делението на k не е дефинирано;
дефинираме помощната функция $\varphi(k) = (f(u_0 + k) - f(u_0))/k$ при $k \neq 0$ и $\varphi(k) = f'(u_0)$ при $k = 0$; тогава $\varphi(k)$ е дефинирана в околност на нулата, тъй като f е дефинирана в околност на u_0; освен това $\varphi(k)$ е непрекъсната в точката 0, тъй като $\varphi(k)$ клони към $f'(u_0) = \varphi(0)$ при $k \to 0$;
получаваме:
$(F(x_0 + h) - F(x_0))/h = \varphi(k) \,.\, (g(x_0 + h) - g(x_0))/h$;
при $k \neq 0$ това равенство очевидно е изпълнено; при $k = 0$ имаме $g(x_0 + h) = g(x_0)$ ➔ $F(x_0 + h) - F(x_0) = 0$, $\varphi(k) = f'(u_0)$, $g(x_0 + h) - g(x_0) = 0$ ➔ равенството отново е изпълнено;
след граничен преход при $h \to 0$ получаваме:
$F'(x_0) = \varphi(0).g'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$, тъй като $\varphi(k)$ е непрекъсната в точката 0;

14. Теорема на Рол. Теорема за крайните нараствания. Обобщена теорема за крайните нараствания.

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0; казваме, че $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0, ако съществува околност U на x_0, такава че $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0; казваме, че $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0, ако съществува околност U на x_0, такава че $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Локалните минимуми и максимуми се наричат **локални екстремуми**;

Теорема (на Ферма): Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и $f(x)$ е диференцируема в точката x_0; тогава ако $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0, $f'(x_0) = 0$;
Доказателство:

Нека за определеност $f(x_0)$ е локален максимум за $f(x)$;
разглеждаме диференчното частно $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$;
нека $h \to 0$ с положителни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h > 0$ ➔ диференчното частно е ≤ 0 ➔ след граничен преход $f'(x_0) \leq 0$; (1)
нека $h \to 0$ с отрицателни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h < 0$ ➔ диференчното частно е ≥ 0 ➔ след граничен преход $f'(x_0) \geq 0$; (2)
от (1) и (2) получаваме, че $f'(x_0) = 0$;

Теорема (на Рол): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; освен това $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$; в такъв случай съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, за която $f'(\xi) = 0$;
Доказателство:
Функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ ➔ по теоремата на Вайерщрас $f(x)$ е ограничена в $[a, b]$; нека m е най-малката стойност и M е най-голямата стойност на $f(x)$;
Ако $m = M$, от $m \leq f(x) \leq M$ ➔ $f(x)$ е константа за всяко $x \in [a, b]$ ➔ $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и теоремата е доказана;
Ако $m < M$, тогава по теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x_1 и x_2, такива че $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$; поне една от тези две точки е вътрешна за интервала $[a, b]$ – в противен случай ще получим, че $m = M = f(a) = f(b)$, което е противоречие; ако $x_1 \in (a, b)$, тогава x_1 е локален екстремум ➔ $f'(x_1) = 0$ по теоремата на Ферма; ако $x_1 = a$ или $x_1 = b$, тогава $x_2 \in (a, b)$ е локален екстремум и $f'(x_2) = 0$ по теоремата на Ферма; с това теоремата е доказана;
Теоремата на Рол има следния геометричен смисъл: ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$, то върху графиката на функцията $f(x)$ има поне една точка, в която допирателната е успоредна на O_x;

Теорема за крайните нараствания (на Лагранж): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b); тогава съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $f(b) - f(a) = f'(\xi).(b - a)$;
Доказателство:
Да отбележим, че при $f(a) = f(b)$ получаваме теоремата на Рол, която е частен случай на теоремата на Лагранж;
Разглеждаме функцията $g(x) = f(x) - k.x$, където
$k = (f(b) - f(a))/(b - a)$;
в такъв случай $g(a) = g(b)$; действително
$g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(a) - k.a = f(b) - k.b \Leftrightarrow f(b) - f(a) = k(b - a)$, което очевидно е изпълнено;

освен това $g(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и $g(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b); налице са условията в теоремата на Рол ➔ съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $g'(\xi) = 0$ ➔ $f'(\xi) - k = 0$ ➔ $f(b) - f(a) = f'(\xi).(b - a)$;
Теоремата на Лагранж има следния геометричен смисъл: ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b), то върху графиката на функцията $f(x)$ има поне една точка, в която допирателната е успоредна на правата, която съединява точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$;

Следствие 1 (основна теорема на интегралното смятане): Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ; тогава ако $f'(x) = 0$ за всяко $x \in \Delta$ ➔ $f(x)$ е константа в този интервал;
Доказателство: Фиксираме две точки $x_1 < x_2 \in \Delta$; в затворения интервал $[x_1, x_2]$ очевидно са изпълнени условията на теоремата на Лагранж ➔ съществува точка $\xi \in (a, b)$, такава че $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi).(x_2 - x_1)$, но $f'(\xi) = 0$ за всяко $\xi \in \Delta$ ➔ $f(x_1) = f(x_2)$; точките x_1 и x_2 са избрани произволно ➔ $f(x)$ е константа в Δ;

Следствие 2: Нека $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ; ако $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$, то $f(x)$ е растяща в Δ; ако $f'(x) > 0$ за всяко $x \in \Delta$, то $f(x)$ е монотонно растяща в Δ;
Доказателство:
Фиксираме две точки $x_1 < x_2 \in \Delta$; в затворения интервал $[x_1, x_2]$ очевидно са изпълнени условията на теоремата на Лагранж ➔ съществува точка $\xi \in (a, b)$, такава че
$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi).(x_2 - x_1)$, но $f'(\xi) \geq 0$ за всяко $\xi \in \Delta$ ➔ $f(x_1) \leq f(x_2)$; точките $x_1 < x_2$ са избрани произволно ➔ $f(x)$ е растяща в Δ;
ако неравенството е строго, т.е. $f'(\xi) > 0$ ➔ $f(x_1) < f(x_2)$ и функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща;

Следствие 3: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ; ако $f'(x)$ е ограничена в Δ, тогава $f(x)$ е равномерно непрекъсната в Δ;
Доказателство: Тъй като $f'(x)$ е ограничена в Δ ➔ съществува $C \in \mathbf{R}^+$, такова че $|f'(x)| < C$ за всяко $x \in \Delta$; фиксираме две точки $x_1, x_2 \in \Delta$; тогава за затворения интервал $[x_1, x_2]$ очевидно са изпълнени условията на теоремата на Лагранж ➔ съществува $\xi \in (x_1, x_2)$, такова че $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi).(x_2 - x_1)$, но $|f'(\xi)| < C$ ➔
$|f(x_2) - f(x_1)| < C.|x_2 - x_1|$; фиксираме $\varepsilon > 0$; избираме $\delta = \varepsilon/C$; тогава $|f(x_2) - f(x_1)| < C.|x_2 - x_1| < C.\varepsilon/C = \varepsilon$ ➔ $f(x)$ е равномерно непрекъсната в Δ;
Аналогично твърдение имаме и за монотонно намаляващи функции;

Обобщена теорема за крайните нараствания (на Коши): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируеми в отворения интервал (a, b); нека освен това $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$; в такъв случай, съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(\xi) / g'(\xi)$;
Доказателство:
Теоремата на Лагранж е частен случай на теоремата на Коши, при нея $g(x) = x$;
Ще покажем, че $g(a) \neq g(b)$; действително, ако $g(a) = g(b)$, тогава за функцията $g(x)$ ще са изпълнени условията на теоремата на Рол ➔ съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $g'(\xi) = 0$, което е противоречие;
Разглеждаме функцията $\varphi(x) = f(x) - k.g(x)$, където $k = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$;
в такъв случай $\varphi(a) = \varphi(b)$; действително
$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow f(a) - k.g(a) = f(b) - k.g(b) \Leftrightarrow f(b) - f(a) = k.(g(b) - g(a))$, което очевидно е изпълнено;
освен това $\varphi(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и $\varphi(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b); налице са условията в теоремата на Рол ➔ съществува $\xi \in (a, b)$, такова че
$\varphi'(\xi) = 0$ ➔ $f'(\xi) - k.g'(\xi) = 0$ ➔ $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(\xi)/g'(\xi)$;

15. Обратни функции. Диференциране на обратни функции.

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ; $f(x)$ е **обратима**, ако тя притежава единствена обратна функция; $f(x)$ е обратима $\Leftrightarrow$ $f(x)$ е инекция; в такъв случай случай обратната функция на $f(x)$ е $f^{-1}(y) : f(\Delta) \rightarrow \Delta$;

Твърдение: Нека $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ и $f(x)$ е строго монотонно растяща (намаляваща); тогава тя е обратима и нейната обратна функция също е строго монотонно растяща (намаляваща);
Доказателство: Нека за определеност $f(x)$ е монотонно растяща;
тъй като $f(x)$ е строго монотонно растяща ➔ за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$ е изпълнено $f(x_1) < f(x_2)$ ➔ $f(x_1) \neq f(x_2)$ ➔ $f(x)$ е инекция ➔ $f(x)$ е обратима; нека нейната обратната функция е $f^{-1}(y)$: $f(\Delta) \rightarrow \Delta$;
избираме две произволни числа $y_1 < y_2 \in f(\Delta)$ ➔ $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$;
в такъв случай $f^{-1}(y_1) = x_1$ и $f^{-1}(y_2) = x_2$; ако допуснем, че
$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ ще получим, че $x_1 \geq x_2$ ➔ $f(x_1) \geq f(x_2)$ ➔ $y_1 \geq y_2$, което е противоречие ➔ $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ за всеки $y_1 < y_2 \in f(\Delta)$ ➔ f^{-1} е монотонно растяща;

Твърдение: Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервал Δ и

f (x) е строго монотонно растяща (намаляваща); тогава f (x) е обратима и нейната обратна функция е непрекъсната за всяко $x \in f(\Delta)$;
Доказателство: Нека за определеност f (x) е строго монотонно растяща; Тъй като f (x) е непрекъсната и Δ е интервал ➔ по твърдение за непрекъснатост на монотонни функции ➔ f (Δ) е интервал; от горното твърдение получаваме, че f (x) е обратима и обратната и функция $f^{-1}: f(\Delta) \rightarrow \Delta$ е строго монотонно растяща; използваме твърдение за непрекъснатост на монотонни функции: f^{-1} е строго монотонно растяща дефинирана в интервала f (Δ) и приемаща стойности в интервала Δ ➔ f^{-1} е непрекъсната;

Теорема: Нека функцията f (x) е дефинирана в интервал Δ, f (x) е диференцируема в Δ и $f'(x) > (<) 0$ за всяко $x \in \Delta$; в такъв случай f (x) е обратима и нейната обратна функция $g(y) : f(\Delta) \rightarrow \Delta$ е диференцируема и $g'(f(x)) = 1/ f'(x)$ за всяко $x \in \Delta$;
Доказателство: Нека за определеност $f'(x) > 0$;
Тъй като $f'(x) > 0$ ➔ f (x) е строго монотонно растяща в Δ, освен това f (x) е диференцируема в Δ ➔ f (x) е непрекъсната в Δ; от горното твърдение ➔ f (x) е обратима и нейната обратна функция
$g(y) : f(\Delta) \rightarrow \Delta$ е непрекъсната в f (Δ);
Ще покажем, че g (y) е диференцируема в f (Δ);
разглеждаме диференчното частно на g (y): $(g(y+h) - g(y))/h$;
полагаме $k = g(y+h) - g(y)$ ➔ $g(y+h) = k + g(y) = k + x$, където $x \in \Delta$;
➔ $y + h = f(x+k)$ ➔ $h = f(x+k) - y$ ➔ $h = f(x+k) - f(x)$;
тогава $(g(y+h) - g(y))/h = k / (f(x+k) - f(x))$; нека $h \rightarrow 0$; като използваме, g (y) е непрекъсната, получаваме, че $k = g(y+h) - g(y) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ ➔ $g'(y) = 1/f'(x)$, т.е. $g'(f(x)) = 1/f'(x)$;

16. Производни на елементарните функции.

Производна на константа

Нека $f(x) = C$ за всяко $x \in \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = 0$ ➔ границата му при $x \rightarrow x_0$ е 0 ➔ $f'(x_0) = 0$ ➔ $f'(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
и така $(C)' = 0$;

Производна на степенна функция с цял показател

Нека $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(x^n - x_0^n)/ (x - x_0) = x^{n-1} + x^{n-1}.x_0 + \dots +$
$+ x.x_0^{n-1} + x_0^{n-1} \rightarrow n.x_0^{n-1}$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като x^n е непрекъсната;
и така $(x^n)' = n.x^{n-1}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
нека $n = 0$; тогава $f(x) = 1$ за всяко x ➔ $f'(x) = 0$, т.е. формулата

остава в сила;
нека $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$ и $x \neq 0$; тогава $x^n = 1/x^{-n}$, където $-n \in \mathbf{N}$; като използваме формулата за диференциране на частно получаваме: $(1/x^{-n})' = (1'.x^{-n} - 1.(x^{-n})')/(x^{-2.n}) = n.x^{-n-1+2.n} = n.x^{n-1}$, т.е. формулата остава в сила и за цели показатели и при $x \neq 0$;

Производни на тригонометричните функции

Нека $f(x) = \sin x$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(\sin x - \sin x_0)/(x - x_0) = \sin((x - x_0)/2).\cos((x + x_0)/2)/((x - x_0)/2)$; когато $x \rightarrow x_0$,
$\sin((x - x_0)/2)/((x - x_0)/2) \rightarrow 1$ (основна граница) и
$\cos((x + x_0)/2) \rightarrow \cos x_0$, тъй като $\cos x$ е непрекъсната;
така получихме, че $(\sin x)' = \cos x$;

Нека $f(x) = \cos x$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(\cos x - \cos x_0)/(x - x_0) = - \sin((x - x_0)/2).\sin((x + x_0)/2)/((x - x_0)/2)$; когато $x \rightarrow x_0$,
$\sin((x - x_0)/2)/((x - x_0)/2) \rightarrow 1$ (основна граница) и
$\sin((x + x_0)/2) \rightarrow \sin x_0$, тъй като $\sin x$ е непрекъсната;
така получихме, че $(\cos x)' = - \sin x$;
От тук лесно получаваме, че $(\mathrm{tg}x)' = 1/\cos^2 x$, $(\mathrm{cotg}x)' = - 1/\sin^2 x$;

Нека $f(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$;
ако $\arcsin x = y$, то $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\sin y = x$;
тъй като функцията $\arcsin x$ е обратна на $\sin x$ ➔
$(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1 - \sin^2 y} = 1/\sqrt{1 - x^2}$;
Ще покажем че $\arcsin x$ няма производна в точките ± 1;
да допуснем противното; имаме равенството $\sin(\arcsin x) = x$;
като диференцираме, получаваме, че $\sin'(\arcsin x).(\arcsin x)' = 1$ ➔
$\cos(\arcsin x).(\arcsin x)' = 1$, но $\arcsin \pm 1 = \pm \pi/2$ ➔ $\cos(\arcsin \pm 1) = 0$ – противоречие ➔ функцията $\arcsin x$ наистина не е диференцируема в ± 1;
по аналогичен начин се показва, че
$(\arccos x)' = - 1/\sqrt{1 - x^2}$ за $x \in (-1, 1)$;
$(\mathrm{arctg}x)' = 1/(1 + x^2)$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
$(\mathrm{arccotg}x)' = - 1/(1 + x^2)$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;

Производна на логаритмичната функция

Нека $f(x) = \ln x$, $f(x) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}^+$;
разглеждаме диференчното частно $(\ln(x_0 + h) - \ln(x_0))/h = 1/x_0 . \ln(1 + h/x_0)^{x_0/h}$; полагаме $z = h/x_0$;

тогава диференчното частно е $1/x_0.\ln(1+z)^{1/z}$;
нека $h \to 0 \Rightarrow z \to 0 \Rightarrow (1+z)^{1/z} \to e$ (основна граница) $\Rightarrow$
$\ln(1+z)^{1/z} \to \ln e = 1$, тъй като $\ln x$ е непрекъсната функция;
и така получихме формулата $(\ln x)' = 1/x$;
като използваме, че $\log_a x = \ln x/\ln a$, получаваме че $(\log_a x)' = 1/(\ln a\,.\,x)$;

Производна на показателната функция

Нека $f(x) = e^x$, $f(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$; както знаем $f(x)$ е обратна функция на $g(y) = \ln y$; ако $x_0 \in \mathbf{R}$, тогава $e^{x_0} = y_0$ и $\ln y_0 = x_0$;
получаваме:
$f'(x_0) = 1/g'(y_0) = 1/(1/y_0) = y_0 = e^{x_0}$;
и така получихме, че $(e^x)' = e^x$;
като използваме, че $a^x = e^{x.\ln a}$ получаваме:
$(a^x)' = (e^{x.\ln a})' = a^x.(x.\ln a)' = \ln a.a^x$;

Производна на степенната функция с реален показател

Нека $f(x) = x^\alpha$, където $x > 0$ и $\alpha \in \mathbf{R}$;
тогава $f'(x) = (x^\alpha)' = (e^{\alpha.\ln x})' = x^\alpha.(\alpha.\ln x)' = x^\alpha.\alpha.1/x = \alpha.x^{\alpha-1}$;
и така формулата, която получихме за степенната функция с цял показател важи и за реални показатели;

17. Правило на Лопитал за намиране на граници.

Теорема (първа на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > a$ ($x < a$); нека $g'(x) \neq 0$ при $x > a$ ($x < a$); нека $f(x)$ и $g(x)$ клонят към 0 при $x \to a+0$ ($x \to a-0$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \to a+0$ ($x \to a-0$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \to a+0$ ($x \to a-0$) и тези две граници са равни;
Доказателство: Нека за определеност $x > a$;
Доопределяме функциите $f(x)$ и $g(x)$ в точката a по този начин:
$f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката a;
изпълнено е равенството:
$f(x)/g(x) = (f(x) - f(a))/(g(x) - g(a))$ $(f(a) = g(a) = 0)$;
изпълнени са условията на теоремата на Коши $\Rightarrow$
$(f(x) - f(a))/(g(x) - g(a)) = f'(\xi)/g'(\xi)$, където $\xi \in (a, x)$;
нека $x \to a+0 \Rightarrow \xi \to a+0 \Rightarrow$ границата на $f'(x)/g'(x)$ е равна на границата $f'(\xi)/g'(\xi)$ при $x \to a+0$; тъй като $f(x)/g(x) = f'(\xi)/g'(\xi)$, то границите $f(x)/g(x)$ и $f'(x)/g'(x)$ при $x \to a+0$ са равни;

Теорема (втора на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > a$ ($x < a$);

нека $g'(x) \neq 0$ при $x > a$ ($x < a$) и функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$ растат неограничено при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) и тези две граници са равни;
Доказателство: Нека за определеност $x > a$;
Означаваме с L границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$;
Фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме $\delta > 0$, такова че ако $0 < x - a < \delta$,
$|f'(x)/g'(x) - L| < \varepsilon/2$;
можем да считаме, че сме избрали δ достатъчно малко, че
$g(x) \neq 0$ при $0 < x - a < \delta$; това е възможно, тъй като $|g(x)|$ расте неограничено при $x \rightarrow a+0$;
нека $x < x_0$ са две произволни числа, такива че
$0 < x - a < \delta$ и $0 < x_0 - a < \delta$;
за затворения интервал $[x, x_0]$ са налице условията на теоремата на Коши $\Rightarrow$ $(f(x) - f(x_0))/(g(x) - g(x_0)) = f'(\xi)/g'(\xi)$, където $\xi \in (x, x_0)$ $\Rightarrow$
$\xi - a < \delta \Rightarrow |f'(\xi)/g'(\xi) - L| < \varepsilon/2 \Rightarrow$
$|(f(x) - f(x_0))/(g(x) - g(x_0)) - L| < \varepsilon/2 \Leftrightarrow$
$|f(x) - f(x_0) - L.(g(x) - g(x_0))| < |g(x) - g(x_0)|.\varepsilon/2$;
делим това неравенство на $|g(x)| \neq 0$ и получаваме:
$|f(x)/g(x) - f(x_0)/g(x) - L + L.g(x_0)/g(x)| < |1 - g(x_0)/g(x)|.\ \varepsilon/2 \Rightarrow$
$|f(x)/g(x) - L| - |f(x_0)/g(x)| - |L.g(x_0)/g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.|g(x_0)/g(x)|$
$\Rightarrow |f(x)/g(x) - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.|g(x_0)/g(x)| + |f(x_0)/g(x)| +$
$+ |L.g(x_0)/g(x)|$;
фиксираме x_0; тъй като $|g(x)|$ е неограничена при $x \rightarrow a+0$, ние можем да изберем $\delta_1 < 0$, $\delta_1 < \delta$, такова че ако $x - a < \delta_1$ да имаме:
$\varepsilon/2.|g(x_0)/g(x)| + |f(x_0)/g(x)| + |L.g(x_0)/g(x)| < \varepsilon/2$;
$\Rightarrow$ за $x - a < \delta_1$ получаваме $|f(x)/g(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow$ границата на $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a+0$ е числото L = границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$;

Теорема (трета на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > p$ ($x < p$); нека $g'(x) \neq 0$ при $x > p$ ($x < p$); нека освен това $f(x)$ и $g(x)$ клонят към 0 при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) и тези две граници са равни;
Доказателство: Нека за определеност $x > p$;
полагаме $t = 1/x$; когато $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0 + 0$; тогава границата на $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ е равна на границата на $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \rightarrow 0+0$; от друга страна границата $(f(1/t))'/(g(1/t))' =$
$((-1/t^2).f'(1/t))/((-1/t^2).g'(1/t)) = f'(1/t)/g'(1/t) = f'(x)/g'(x)$, т.е. границата $(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \rightarrow 0+0$ съществува; като използваме първа теорема на Лопитал ($a = 0$) получаваме, че съществува границата $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \rightarrow 0+0$ и тя е равна на границата на

$(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \to 0+0$, т.е. съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \to +\infty$ и тя е равна на границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \to +\infty$;

Теорема (четвърта на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > p$ ($x < p$);
нека $g'(x) \neq 0$ при $x > p$ ($x < p$) и функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$ растат неограничено при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) и тези две граници са равни;
Доказателство:
Нека за определеност $x > p$;
полагаме $t = 1/x$; когато $x \to +\infty$, $t \to 0 + 0$; тогава границата на $f(x)/g(x)$ при $x \to +\infty$ е равна на границата на $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \to 0+0$; от друга страна границата $(f(1/t))'/(g(1/t))' = ((-1/t^2).f'(1/t))/((-1/t^2).g'(1/t)) = f'(1/t)/g'(1/t) = f'(x)/g'(x)$, т.е. границата $(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \to 0+0$ съществува; като използваме втора теорема на Лопитал ($a = 0$) получаваме, че съществува границата $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \to 0+0$ и тя е равна на границата на $(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \to 0+0$, т.е. съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \to +\infty$ и тя е равна на границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \to +\infty$;

18. Изпъкнали функции. Необходими и достатъчни условия за изпъкналост.

Дефиниция: Казваме, че функцията $f(x)$ е **изпъкнала** в интервал Δ, ако за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$ и всеки две числа $p_1, p_2 > 0$,
такива че $p_1 + p_2 = 1$ е изпълнено $f(p_1.x_1 + p_2.x_2) \leq p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2)$;
Дефиниция: Казваме, че функцията $f(x)$ е **вдлъбната** в интервал Δ, ако за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$ и всеки две числа $p_1, p_2 > 0$,
такива че $p_1 + p_2 = 1$ е изпълнено $f(p_1.x_1 + p_2.x_2) \geq p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2)$;

Геометричният смисъл на понятията изпъкналост и вдлъбнатост – функцията $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ, ако за всяка точка от този интервал можем да намерим околност в която графиката на функцията е над (под) допирателната в точката;

Дефиниция: Казваме, че $x = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n$ е **изпъкнала комбинация** на $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ако числата $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са положителни и сумата им е 1;

Твърдение: Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, то всяка изпъкнала комбинация $x = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n \in [a, b]$;
Доказателство: Имаме $a \leq x_i \leq b \Rightarrow (p_i > 0)\ p_i.a \leq p_i.x_i \leq p_i.b$;
Събираме тези неравенства за $i = 1, 2, \ldots, n$ и получаваме:

$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n).a \le p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n \le (p_1 + p_2 + \ldots + p_n).b$
$\Rightarrow$ $a \le x \le b$;
Твърдението остава в сила когато интервала е отворен или полуотворен;

Твърдение: Всяка точка $x \in [a, b]$ може да се представи като изпъкнала комбинация на a и b;
Доказателство:
Нека $x \in [a, b]$; тогава в сила е равенството:
$a \,.\, (b - x)/(b - a) + b \,.\, (x - a)/(b - a) = x$;
действително, ако умножим и двете страни с $(b - a) \neq 0$ получаваме:
$a.b - a.x + b.x - b.a = x.(b - a)$, което очевидно е изпълнено;
освен това $(b - x)/(b - a) + (x - a)/(b - a) = 1$ $\Rightarrow$
$a \,.\, (b - x)/(b - a) + b \,.\, (x - a)/(b - a)$ е изпъкнала комбинация на a и b;

Твърдение (неравенство на Йенсен): Нека $f(x)$ е изпъкнала в интервал Δ; ако $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $n \in \mathbf{N}$ са произволни положителни числа, такива че $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, тогава е изпълнено:
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n) \le p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2) + \ldots + p_n.f(x_n)$;
Доказателство:
Ще извършим доказателството с индукция по n;
База: при $n = 2$ неравенството очевидно е изпълнено по определението за изпъкнала функция;
Стъпка: нека неравенството е изпълнено за $n-1$;
ще докажем, че то е изпълнено за n;
нека $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са произволни положителни числа,
такива че $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$; нека $S = p_2 + \ldots + p_n$;
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n) = f(p_1.x_1 + S.\,(p_2.x_2/S + p_3.x_3/S + \ldots +$
$+ p_n.x_n/S))$; нека $p_2.x_2/S + p_3.x_3/S + \ldots + p_n.x_n/S = x_1'$; ясно е, че
x_1' е изпъкнала комбинация на $x_2, x_3, \ldots, x_n$ $\Rightarrow$ $x_1' \in \Delta$;
тогава $f(p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n) = f(p_1.x_1 + S.x_1') \le p_1.f(x_1) +$
$+ S.f(x_1')$ по дефиницията за изпъкналост; от индукционното предположение получаваме, че:
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2 + \ldots + p_n.x_n) \le p_1.f(x_1) + S.p_2/S.f(x_2) + S.p_3/S.f(x_3) + \ldots +$
$+ S.p_n/S.f(x_n) = p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2) + \ldots + p_n.f(x_n)$;
по метода на математическата индукция е вярно за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирама и диференцируема в интервал Δ; тогава $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ е монотонно растяща (намаляваща) функция;
Доказателство: Ще докажем теоремата за изпъкналост; за вдлъбнатост е абсолютно аналогично;
Нека $f'(x)$ е монотонно растяща функция;
Нека $x_1 < x_2 \in \Delta$ и $p_1, p_2 \in \mathbf{R}^+$, $p_1 + p_2 = 1$;
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2) - p_1.f(x_1) - p_2.f(x_2) = p_1.(f(p_1.x_1 + p_2.x_2) - f(x_1))$ -

$p_2.(f(x_2) - f(p_1.x_1 + p_2.x_2))$;
по теоремата на Лагранж получаваме:
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2) – f(x_1) = f'(t_1).(p_1.x_1 + p_2.x_2 – x_1) = p_2.f'(t_1).(x_2 – x_1)$,
където $t_1 \in (x_1, p_1.x_1 + p_2.x_2)$;
$f(x_2) - f(p_1.x_1 + p_2.x_2) = f'(t_1).(x_2 - p_1.x_1 - p_2.x_2) = p_2.f'(t_2).(x_1 – x_2)$,
където $t_2 \in (p_1.x_1 + p_2.x_2, x_2)$; да отбележим, че $t_1 < t_2$;
получаваме:
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2) – p_1.f(x_1) – p_2.f(x_2) = p_2.(x_2 – x_1).(f'(t_1) – f'(t_2)) \le 0$, тъй като $f'(x)$ е монотонно растяща и $t_1 < t_2$ ➔
$f(p_1.x_1 + p_2.x_2) \le p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2)$ ➔ $f(x)$ е изпъкнала функция;
Нека $f(x)$ е изпъкнала функция;
Нека $0 < h < x_2 – x_1$;
тогава $x_1 + h \in [x_1, x_2]$ ➔ от горното твърдение
$x_1 + h = p_1.x_1 + p_2.x_2$, където $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ и $p_1 + p_2 = 1$;
в такъв случай $(f(x_1 + h) – f(x_1))/h = f(p_1.x_1 + p_2.x_2) – f(x_1)/(x_1 - p_1.x_1 + p_2.x_2) \le (p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2) – f(x_1))/(p_2.(x_2 – x_1)) = (f(x_2) – f(x_1))/(x_2 – x_1)$;
от друга страна:
$x_2 - h \in [x_1, x_2]$ ➔ от горното твърдение
$x_2 - h = q_1.x_1 + q_2.x_2$, където $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ и $q_1 + q_2 = 1$;
в такъв случай $(f(x_2 - h) – f(x_2))/(-h) = (f(x_2) – f(x_2 – h))/h = (f(x_2) –$
$- f(q_1.x_1 + q_2.x_2))/(x_2 – q_1.x_1 - q_2.x_2) \ge (f(x_2) – q_1.f(x_1) – q_2.f(x_2))/$
$/(q_1.(x_2 - x_1) = q_1.(f(x_2) – f(x_1))/(q_1.(x_2 – x_1)) = (f(x_2) – f(x_1))/(x_2 – x_1)$;
и така получихме, че за всяко h, такова че $0 < h < x_2 – x_1$ е изпълнено:
$(f(x_1 + h) – f(x_1))/h \le (f(x_2) – f(x_1))/(x_2 – x_1) \le (f(x_2 - h) – f(x_2))/(-h)$;
ако сега $h \to 0+0$ при граничния преход получаваме:
$f'(x_1) \le f'(x_2)$ ➔ $f'(x)$ е монотонно растяща функция;

Следствие: Ако $f(x)$ е дефинирана и поне два пъти диференцируема в интервал Δ, тогава $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) в $\Delta \Leftrightarrow f''(x) \ge 0$ (≤ 0) за всяко $x \in \Delta$;
Доказателство: Тъй като $f''(x) \ge 0$ (≤ 0) ➔ от следствие 2 на теоремата на Лагранж, че $f'(x)$ е монотонно растяща (намаляваща) функция ➔ $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната);

Приложение на изпъкналост

Ще докажем, че e^x е изпъкнала в $\mathbf{R}$; действително
$f''(e^x) = e^x > 0$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
по друг начин това може да се запише така:
$e^{p.x+q.y} \le p.e^x + q.e^y$, където $p, q > 0$, $p + q = 1$; $x, y \in \mathbf{R}$;

Твърдение (неравенство на Юнг): Ако $a, b > 0$; $\alpha, \beta > 1$ и $1/\alpha + 1/\beta = 1$ ➔ $a.b \le a^\alpha/\alpha + b^\beta/\beta$;
Доказателство:

полагаме $p = 1/\alpha$, $q = 1/\beta$, $x = \ln a^{\alpha} = \alpha.\ln a$, $y = \ln b^{\beta} = \beta.\ln b$;
тогава от изпъкналостта на e^x получаваме:
$e^{p.x+q.y} \le p.e^x + q.e^y \Leftrightarrow e^{\alpha.\ln a.1/\alpha+\beta.\ln b.1/\beta} \le a^{\alpha}/\alpha + b^{\beta}/\beta \Leftrightarrow a.b \le a^{\alpha}/\alpha + b^{\beta}/\beta$;

Твърдение (неравенство за средно аритметично и средно геометрично): Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$; в сила е неравенството:
$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n \ge \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots .a_n}$;
Доказателство:
Използваме неравенство на Йенсен и изпъкналост на e^x;
полагаме $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$; $x_1 = \ln a_1$, $x_2 = \ln a_2$, …, $x_n = \ln a_n$;
тогава:
$e^{p_1.x_1+p_2.x_2+\ldots+p_n.x_n} \le p_1.e^{x_1} + p_2.e^{x_2} + \ldots + p_n.e^{x_n} \Leftrightarrow$
$e^{\ln a_1/n + \ln a_2/n + \ldots + \ln a_n/n} \le e^{\ln a_1}/n + e^{\ln a_2}/n + \ldots + e^{\ln a_n}/n \Leftrightarrow$
$\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n} \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$;

Твърдение (неравенство на Хьолдер за суми): Нека
$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}$; освен това $p, q > 0$ и
$1/p + 1/q = 1$; в сила е неравенството:
$x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_n.y_n \le \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}.\sqrt[q]{y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q}$;
Доказателство:
Полагаме $A = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}$, $B = \sqrt[q]{y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q}$;
Полагаме $a_i = x_i/A$, $b_i = y_i/B$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$;
ясно е, че $a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p = 1$ и $b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q = 1$;
прилагаме неравенство на Юнг за $a_i, b_i > 0$ и p, q; получаваме:
$a_i.b_i \ge a_i^p/p + b_i^q/q$; събираме тези неравенства за $i = 1, 2, \ldots, n$;
получаваме:
$a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n \le (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)/p + (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)/q$
$= 1/p + 1/q = 1 \Rightarrow$
$x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_n.y_n \le A.B = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}.\sqrt[q]{y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q}$;

19. Формула на Тейлор.

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирана и $(n+1)$ пъти диференцируема в интервал $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$), $n \in \mathbf{N}$; тогава за всяко $p \ne 0$ имаме:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)/1! + f''(x_0).(x - x_0)^2/2! + \ldots +$
$+ f^{(n)}(x_0).(x - x_0)^n/n! + R_n$, където $R_n = (x - x_0)^p.(x - t_0)^{n-p+1}.f^{(n+1)}(t_0)/(p.n!)$,
където $t_0 \in (x_0, x)$ ((x, x_0));
Доказателство: Нека за определеност $x_0 < x$;
Разглеждаме функцията:
$\varphi(t) = f(x) - (f(t) + f'(t).(x - t)/1! + f''(t).(x - t)^2/2! + \ldots + f^{(n)}(t).(x - t)^n/n!) -$
$- \lambda.(x - t)^p$;
ясно е, че $\varphi(x) = 0$;
избираме λ така, че $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $R_n - \lambda.(x - x_0)^p = 0 \Leftrightarrow \lambda = R_n/(x - x_0)^p$;

непосредствено се вижда, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната и диференцируема в интервала $[x_0, x]$;
сега за функцията $\varphi(x)$ можем да приложим теоремата на Рол в интервала $[x_0, x]$ ➔ съществува $t_0 \in (x_0, x)$, такова че $\varphi'(t_0) = 0$;
$\varphi'(t_0) = -(f'(t_0) - f'(t_0) + f''(t_0).(x - t_0)/1! - f''(t_0).(x - t_0)/1! + f'''(t_0).$
$.(x - t_0)/2! - \ldots + f^{(n+1)}(t_0).(x - t_0)^n/n!) + p.(x - t_0)^{p-1}.R_n/(x - x_0)^p = 0$ ➔
$f^{(n+1)}(t_0).(x - t_0)^n/n! = p.(x - t_0)^{p-1}.R_n/(x - x_0)^p$ ➔
$R_n = (x - t_0)^{n-p+1}.(x - x_0)^p.f^{(n+1)}(t_0)/(p.n!)$;

R_n се нарича **остатъчен член** във формулата на Тейлор;
при $p = n + 1$ получаваме **форма на Лагранж** за остатъчния член и тя е : $R_n = (x - x_0)^{n+1}.f^{(n+1)}(t_0)/(n+1)!$;
при $p = 1$ получаваме **форма на Коши** за остатъчния член и тя е:
$R_n = (x - x_0).(x - t_0)^n.f^{(n+1)}(t_0)/n!$;

показаната формула дава най-добрият полином, който приближава дадена функция $f(x)$ в точката x_0;

при $x_0 = 0$, формулата на Тейлор се нарича **формула на Маклорен**:
$f(x) = f(0) + f'(0).x/1! + f''(0).x^2/2! + \ldots + f^{(n)}.x^n/n! + R_n$, където
$R_n = f^{(n+1)}(t_0).x^{n+1}/(n+1)!$ във формата на Лагранж или
$R_n = f^{(n+1)}(t_0).x.(x - t_0)^n/n!$ във формата на Коши;

Приложение на формулата на Тейлор

Нека $f(x) = e^x$; известно е, че $f^{(n)}(x) = e^x$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ ➔
$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$;
по формулата на Маклорен получаваме:
$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + \ldots + x^n/n! + R_n$, където
$R_n = x^{n+1}.e^{t_0}/(n+1)!$ във формата на Лагранж, $0 < t_0 < x$;
Ще покажем, че $R_n \to 0$ при $n \to \infty$;
действително имаме неравенствата $0 < R_n \leq x^{n+1}.e^x/(n+1)!$;
нека $n_0 = [x]$;
➔ $0 < R_n \leq (x/1).(x/2).\ldots(x/n_0).(x/(n_0+1)).(x/(n_0+2))\ldots(x/(n+1)) <$
$< c_0.x/(n+1)$, където c_0 е фиксирано число; по теоремата за полицаите, получаваме, че $R_n \to 0$ при $n \to \infty$; в такъв случай
$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + \ldots + x^n/n! + \ldots$
от дясната страна на равенството стои степенен ред на x;
един ред е сходящ, ако редицата от частичните му суми е сходяща;
тогава сума на реда се дефинира като граница на тази редица;
равенството по-горе означава, че редът е сходящ и неговата сума за всяко $x \in \mathbf{R}$ е e^x;
прилагайки формулата на Маклорен за sinx и cosx получаваме:
$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots + (-1)^n.x^{2.n+1}/(2.n+1)! + \ldots$
$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots + (-1)^n.x^{2.n}/(2.n)! + \ldots$

ще изведем следната формула на Ойлер:
$e^{i.x} = \cos x + i.\sin x$;
и наистина:
$e^{i.x} = 1 + i.x/1! + (i.x)^2/2! + (i.x)^3/3! + (i.x)^4/4! + (i.x)^5/5! + \ldots =$
$= 1 + i.x/1! - x^2/2! - i.x^3/3! + x^4/4! - i.x^5/5! + \ldots = (1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots)$
$+ i.(x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots) = \cos x + i.\sin x$;

Дефиниция: Ще записваме, че $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, ако $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на x_0 и $f(x)/g(x) \to 0$ при $x \to x_0$;

Твърдение: Ако $f(x)$ е дефинирана и диференцируема поне $(n+1)$ пъти в интервала $[x_0, x]$ и ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то $f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)/1! + f''(x_0).(x - x_0)^2/2! + \ldots + f^{(n)}(x_0).(x - x_0)^n/n! + R_n$, където $R_n = f^{(n+1)}.(x - x_0)^{n+1}/(n+1)! + o((x - x_0)^{n+1})$; R_n се нарича **остатъчен член във вида на Пеано**;
Доказателство:
Записваме остатъчният член във формата на Лагранж:
$R_n = (x - x_0)^{n+1}.f^{(n+1)}(t_0)/(n+1)! = (x - x_0)^{n+1}.f^{(n+1)}(x_0)/(n+1)! -$
$- ((f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0)).(x - x_0)^{n+1}/(n+1)!)$;
но $f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0) \to 0$ при $x \to x_0$, тъй като $x_0 < t_0 < x$ и функцията $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната в точката t_0 $\Rightarrow$
$(f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0)).(x - x_0)^{n+1}/(n+1)!/(x - x_0)^{n+1} \to 0$ при $x \to x_0$ $\Rightarrow$
$(f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0)).(x - x_0)^{n+1}/(n+1)! = o((x - x_0)^{n+1})$;

20. Локални максимуми и минимуми – необходими и достатъчни условия.

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0; казваме, че $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0, ако съществува околност U на x_0, такава че $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0; казваме, че $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0, ако съществува околност U на x_0, такава че $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Локалните минимуми и максимуми се наричат **локални екстремуми**;

Теорема (на Ферма): Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и $f(x)$ е диференцируема в точката x_0; тогава ако $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0, $f'(x_0) = 0$;
Доказателство:
Нека за определеност $f(x_0)$ е локален максимум за $f(x)$;
разглеждаме диференчното частно $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$;
нека $h \to 0$ с положителни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h > 0$

$\Rightarrow$ диференчното частно е ≤ 0 $\Rightarrow$ след граничен преход $f'(x_0) \leq 0$; (1)
нека $h \to 0$ с отрицателни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h < 0$
$\Rightarrow$ диференчното частно е ≥ 0 $\Rightarrow$ след граничен преход $f'(x_0) \geq 0$; (2)
от (1) и (2) получаваме, че $f'(x_0) = 0$;

Теоремата на Ферма е необходимо, но не и достатъчно условие за локален екстремум;

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на x_0 и притежава производни до ред n включително; нека са изпълнени условията:

1. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, …, $f^{(n-1)}(x_0) = 0$;
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$;
3. $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в точката x_0;

Тогава ако n е четно, f има локален екстремум в точката x_0; той е минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$ и максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$;
Ако n е нечетно, f няма локален екстремум в точката x_0;
Доказателство:
По формулата на Тейлър за функцията $f(x)$ в точката x_0 получаваме:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)/1! + f''(x_0).(x - x_0)^2/2! + \ldots +$
$f^{(n-1)}(x_0).(x - x_0)^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}(t_0).(x - x_0)^n/n!$, където $x < t_0 < x_0$ или $x_0 < t_0 < x$;
остатъчният член е във формата на Лагранж;
тъй като $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $\Rightarrow$
$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(t_0).(x - x_0)^n/n!$;
тъй като $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в точката t_0, тогава по едно твърдение за непрекъснати функции, съществува околност U на точката x_0, където $f^{(n)}(x)$ не си мени знака, т.е. има знака на $f^{(n)}(x_0)$;
нека $x \in U$; тогава $t_0 \in U$;
нека n е нечетно; тогава $(x - x_0)^n$ си мени знака за $x < x_0$ и $x > x_0$;
тъй като $f^{(n)}(t_0)$ е с постоянен знак, то $f(x) - f(x_0)$ също си мени знака $\Rightarrow$ в x_0 няма локален екстремум;
нека n е нечетно; $(x - x_0)^n > 0$ $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0)$ има знака на $f^{(n)}(x_0)$ в цялата околност U $\Rightarrow$ в x_0 има локален екстремум; той е максимум когато $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x_0) < 0$ или минимум, ако $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x_0) > 0$;

21. Неопределени интеграли. Елементарни свойства. Интегриране по части.

Дефиниция: Казваме, че функцията $F(x)$ е **неопределен интеграл** на $f(x)$ в интервал Δ, ако $F(x)$ е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \Delta$;
означение: $F(x) = \int f(x)\, dx$
$f(x)$ наричаме **подинтегрална функция**, dx наричаме **диференциал** на функцията $f(x)$;

$F(x)$ се нарича още **примитивна функция** на $f(x)$ в Δ;

Твърдение: Ако $F(x)$ е неопределен интеграл на $f(x)$ в интервал Δ, то за всяко $C \in \mathbf{R}$, $F(x) + C$ е неопределен интеграл на $f(x)$ в Δ; също така с това се изчерпват всички неопределени интеграли на $f(x)$, т.е. ако $F(x)$ и $G(x)$ са неопределени интеграли на $f(x)$ в Δ, то $F(x) - G(x)$ е константа;
Доказателство:
очевидно имаме $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$, т.е. $F(x) + C$ е неопределен интеграл на $f(x)$;
нека $H(x) = F(x) - G(x)$; тогава $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$;
по първо следствие от теоремата на Лагранж $\Rightarrow$ $H(x)$ е константа;

действието намиране на примитивна функция наричаме **интегриране**;

Интеграли на елементарните функции

$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x\, dx = e^x + C$;
$(\ln|x|)' = 1/x \Rightarrow \int 1/x\, dx = \ln|x| + C$;
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1} \Rightarrow \int x^\alpha\, dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C,\ \alpha \neq -1$;
$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x\, dx = \sin x + C$;
$(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x\, dx = -\cos x + C$;
$(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2) \Rightarrow \int 1/(1+x^2)\, dx = \operatorname{arctg} x + C$;
$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int 1/\sqrt{1-x^2}\, dx = \arcsin x + C$;

Свойства на неопределените интеграли

Твърдение: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ притежават неопределен интеграл в някакъв интервал Δ; тогава фунцкията $f(x) + g(x)$ също притежава неопределен интеграл в Δ и е изпълнено:
$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx + C$;
Доказателство: действително $\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ е един неопределен интеграл на $f(x) + g(x)$, тъй като $(\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx)' = (\int f(x)\, dx)' + (\int g(x)\, dx)' = f(x) + g(x)$;

Твърдение: Нека функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл в някакъв интервал Δ; тогава функцията $a.f(x)$, където a е реална константа, също притежава неопределен интеграл в Δ и е изпълнено:
$\int a.f(x)\, dx = a.\int f(x)\, dx + C$;
Доказателство: действително $a.\int f(x)\, dx$ е един неопределен интеграл на $a.f(x)$, тъй като $(a.\int f(x)\, dx)' = a.(\int f(x)\, dx)' = a.f(x)$;

Пример: $\int 2.x^2 + 3.x + 5\, dx = 2.\int x^2\, dx + 3.\int x\, dx + \int 5\, dx =$

$= 2.x^3/3 + 3.x^2/2 + 5.x + C$;

Дефиниция: Диференциал на f (x) наричаме израза $f'(x).dx = d\,f(x)$; прилагането на това равенство наричаме **внасяне под диференциала**; прилагане на равенството $d\,f(x) = f'(x).dx$ наричаме **изнасяне от диференциала**;

Твърдение: Нека f (u) има неопределен интеграл в интервал Δ; нека функцията φ (x) е диференцируема в интервала Δ' и стойностите и не напускат Δ, когато x се мени в Δ'; тогава функцията $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ притежава неопределен интеграл в Δ' и ако $\int f(u)\,du = F(u)$, то $\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$;
Доказателство: правилото за диференциране на съставна функция дава: $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x) = f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ – това равенство показва, че $F(\varphi(x))$ е един неопределен интеграл на $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$;

като използваме горната дефиниция ние можем да запишем твърдението по следния начин:
$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$;

Примери: $\int e^{\sin x}.\cos x\,dx = \int e^{\sin x}\,d\sin x = e^{\sin x} + C$;
$\int \sin x^2.x\,dx = 1/2 \int \sin x^2\,dx^2 = \sin x^2/2 + C$;

Интегриране по части

Твърдение: Нека функциите f (x) и g (x) са диференцируеми в интервал Δ; нека функцията $f(x).g'(x)$ има неопределен интеграл в този интервал; тогава функцията $f'(x).g(x)$ също има неопределен интеграл в Δ и е изпълнено:
$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).\,g(x)\,dx + C$;
Доказателство: действително $f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx$ е един неопределен интеграл на $f(x).g'(x)$, тъй като $(f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx)' = (f(x).g(x))' - (\int f'(x).g(x)\,dx)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) - f'(x).g(x) = f(x).g'(x)$;

Като използваме внасяне под диференциала можем да запишем последното равенство по този начин:
$\int f(x)\,dg(x) = f(x).g(x) - \int g(x)\,df(x) + C$;

Примери: $\int \ln x\,dx = x.\ln x - \int x\,d\ln x = x.\ln x - \int x.1/x\,dx = x.\ln x - x + C$;
$\int e^x.\cos x\,dx = \int e^x\,d\sin x = e^x.\sin x - \int \sin x\,de^x = e^x.\sin x - \int e^x.\sin x\,dx =$
$= e^x.\sin x + \int e^x\,d\cos x = e^x.\sin x + e^x.\cos x - \int \cos x\,de^x = e^x.\sin x + e^x.\cos x -$
$- \int e^x.\cos x\,dx \Rightarrow \int e^x.\cos x\,dx = (e^x.\sin x + e^x.\cos x)/2 + C$;

22. Интегриране на рационални функции.

Дефиниция: Казваме, че функцията f (x) е **рационална** функция, ако тя се преставя като частно на два полинома, т.е. f (x) = P (x)/Q (x), където P (x) и Q (x) са полиноми на x;

Нека f (x) е рационална функция, т.е. f (x) = P (x)/Q (x);

Дефиниция: Казваме, че P (x)/Q (x) е **правилна дроб**, ако степента на P (x) е строго по-малка от степента на Q (x); в противен случай казваме, че P (x)/ Q (x) е **неправилна дроб**;

От алгебрата е известно, че ако степента на P (x) е по-голяма от степента на Q (x) можем да извършим деление и в резултат получаваме: P (x)/Q (x) = S (x) + R (x)/Q (x),
където deg R (x) < deg Q (x);

интегрирането на полином не представлява проблем, така че можем да считаме, че deg P (x) < deg Q (x);

Твърдение: Ако един полином Q (x) има реални коефициенти и $a + b.i$ е комплексен корен на Q (x), то $a - b.i$ също е корен на Q (x);
Доказателство: Използваме, че комплексно спрегнато на произведение и сума е произведение и сума на комплексно спрегнати;

Твърдение: Всеки полином Q (x) с реални коефициенти може да се разложи по следния начин:
$Q (x) = c_0.(x - a_1)^{k_1}.(x - a_2)^{k_2}. \dots(x^2 + p_1.x + q_1)^{m_1}.(x^2 + p_2.x + q_2)^{m_2}\dots$,
където c_0 е старшия коефициент на Q (x), числата a_i, p_j, $q_j \in \mathbf{R}$;
Доказателство: Използваме основна теорема на алгебрата и предното твърдение (групираме комплексните корени по двойки); по този начин получаваме линейни множители и квадратни множители с два комплексни корена ($p_i^2 - 4.q_i < 0$ за всяко i);

Дефиниция: Изразите $A / (x - a)^k$ и $(B.x + C)/(x^2 + p.x + q)^m$, където $A, B, C, a, p, q \in \mathbf{R}$, $p^2 - 4.q < 0$; $k, m \in \mathbf{N}$ наричаме **елементарни дроби** съответно от **първи** и от **втори род**;

Твърдение: Всяка рационална функция f (x) = P (x)/Q (x), където deg P (x) < deg Q (x) може да се представи като сума от краен брой елементарни дроби; при това, ако полиномът Q (x) се разлага като $c_0.(x - a_1)^{k_1}.(x - a_2)^{k_2}. \dots(x^2 + p_1.x + q_1)^{m_1}.(x^2 + p_2.x + q_2)^{m_2}\dots$,
тогава f (x) = P (x) /Q (x) се представя по следния начин:

$P(x) / Q(x) = 1/c_0.(A_1/(x - a_1) + A_2/(x - a_1)^2 + \ldots + A_{k1}/(x - a_1)^{k1} +$
$+ B_1/(x - a_2) + B_2/(x - a_2)^2 + \ldots + B_{k2}/(x - a_2)^{k2} + \ldots +$
$(M_1.x + N_1)/(x^2 + p_1.x + q_1) + (M_2.x + N_2)/(x^2 + p_1.x + q_1)^2 + \ldots +$
$+ (M_{m1}.x + N_{m1})/(x^2 + p_1.x + q_1)^{m1} + (E_1.x + F_1)/(x^2 + p_2.x + q_2) +$
$(E_2.x + F_2)/(x^2 + p_2.x + q_2)^2 + \ldots + (E_{m2}.x + F_{m2})/(x^2 + p_2.x + q_2)^{m2} + \ldots)$
Твърдението привеждаме без доказателство;

Пример: Нека $f(x) = 1/(x^2 - 3.x + 2)$; тогава $f(x) = 1/ (x-1).(x-2)$; твърдението е, че съществуват $A, B \in \mathbf{R}$, такива че
$f(x) = A/(x-1) + B/(x-2)$; след като се освободим от знаменателя получаваме: $1 = A.(x - 2) + B.(x - 1)$, откъдето получаваме
$A = -1$, $B = 1$, т.е. $f(x) = -1/(x-1) + 1/(x-2)$;

Пресмятане на коефициентите в разлагането

След привеждане под общ знаменател получаваме равенство на два полинома;

Първи начин за определяне на коефициентите: тъй като двата полинома съвпадат, можем да приравним коефициентите пред степените на x; тогава ще получим линейна система за коефициентите на разлагането, която ще има единствено решение;

Втори начин за определяне на коефициентите: тъй като двата полинома съвпадат за всяко $x \in \mathbf{R}$, можем да даваме произволни стойности на x (дори комплексни) и по този начин отново да получаваме условия за коефициентите на разлагането;

Трети начин за определяне на коефициентите: тъй като двата полинома съвпадат, то съвпадат и техните производни; можем да диференцираме двете страни на равенството и след това да използваме един от горните два начина;

Ако на дадена стъпка сме определили някои коефициенти, тогава можем да ги заместим и да опростим началното равенство, като останалите коефициенти ги търсим в новополученото равенство;

Интегриране на елементарни дроби

Елементарните дроби от първи род се интегрират непосредствено:
$\int A/ (x - a)^k\, dx = A. \int d(x-a)/(x-a)^k = A. (x-a)^{-k+1}/(-k+1) + C$ при $k > 1$ или
$A.\ln|x-a| + C$ при $k = 1$;

Нека имаме интеграл от елементарна дроб от втори род:
$\int (M.x+N)/(x^2 + p.x + q)^n\, dx$; полагаме $x = u - p/2$; тогава

$x^2 + p.x + q = u^2 + q – p^2/4$; при това $q – p^2/4 > 0$, тъй като $x^2 + p.x + q$ няма реални корени; полагаме $q – p^2/4 = a^2$; получаваме:
$\int (M.x+N)/(x^2 + p.x + q)^n\, dx = \int (M.u + N – p.M/2)/(u^2 + a^2)^n\, du =$
$= M.\int u\, du /(u^2 + a^2)^n + (N – p.M/2). \int du/(u^2 + a^2)^n$;
първият интеграл се решава непосредствено:
$\int u\, du /(u^2 + a^2)^n = 1/2 . \int d(u^2 + a^2)/ (u^2 + a^2)^n = (u^2+a^2)^{-n+1}/(2.(-n+1))$ при $n > 1$ или $\ln (u^2 + a^2)/2$ при $n = 1$;
остава вторият интеграл:
$I_n = \int du/(u^2 + a^2)^n = 1/a^2. \int (u^2 + a^2)/(u^2 + a^2)^n\, du –$
$1/a^2. \int u^2/(u^2 + a^2)^n\, du = 1/a^2.I_{n-1} – 1/2a^2.\int u\, d(u^2+a^2)/ (u^2 + a^2)^n =$
$1/a^2.I_{n-1} + 1/(2a^2.(n-1)). \int u\, d(u^2 + a^2)^{-n+1} = 1/a^2.I_{n-1} + u.(u^2 + a^2)^{-n+1} /$
$/(2a^2.(n-1)) – 1/ (2a^2.(n-1)). \int (u^2 + a^2)^{-n+1}\, du = (2n – 3)/(2a^2.(n-1)).I_{n-1} +$
$+ u/(2a^2.(n-1).(u^2 + a^2)^{n-1})$;
освен това имаме: $I_1 = \int du/(u^2+a^2) = 1/a.\mathrm{arctg}(u/a) + C$, така че след краен брой прилагания на рекурентната зависимост ще достигнем до I_1, т.е. ще пресметнем интеграла;

Алгоритъм за пресмятане на интеграл от рационална функция

Нека $f (x) = P (x)/ Q (x)$ е рационална функция;
искаме да пресметнем $\int f (x)\, dx$;

1. Ако $\deg P (x) \geq \deg Q (x)$ делим $P (x)$ на $Q (x)$ и получаваме $f (x) = S (x) + R (x)/Q (x)$; $S (x)$ се интегрира непосредствено;
2. Разлагаме $Q (x)$ на линейни множители и квадратни множители с отрицателна дискриминанта;
3. Пресмятаме коефициентите в разлагането на $f (x)$ като сбор от елементарни дроби;
4. Интегрираме поотделно всяка елементарна дроб;

23. Смяна на променливите при неопределени интеграли. Интеграли от вида $\int R (x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$ и $\int R (\sin x, \cos x)\, dx$.

Твърдение: Нека функцията $f (x)$ е дефинирана в интервал Δ; нека функцията $\varphi (t)$ е дефинирана и диференцируема в някой интервал Δ' и приемат стойности в интервал Δ'', където $\Delta'' \subseteq \Delta$; нека освен това функцията $\varphi (t)$ притежава диференцируема обратна функция $\psi (x)$ и функцията $f (\varphi (t)).\varphi '(t)$ притежава неопределен интеграл в интервала Δ'; тогава ако $g (t) = \int f (\varphi (t)).\varphi '(t)\, dt$, функцията $f (x)$ притежава неопределен интеграл поне в интервала Δ'' и е изпълнено:
$\int f (x)\, dx = g (\psi (x)) + C$;

Доказателство: функцията $g(\psi(x))$ е добре дефинирана в интервала Δ'', тъй като $\psi(x)$ приема стойности в Δ'; наистина $g(\psi(x))$ е един неопределен интеграл на $f(x)$, тъй като $(g(\psi(x)))' = g'(\psi(x)).\ \psi'(x) = f(\varphi(\psi(x))).\ \varphi'(\psi(x)).\ \psi'(x)$; като използваме теоремата за диференциране на обратни функции получаваме, че
$\varphi'(\psi(x)).\ \psi'(x) = 1$, т.е. $f(\varphi(\psi(x))).\ \varphi'(\psi(x)).\ \psi'(x) = f(x)$;

Примери:
$\int x^2.\ \sqrt{x+1}\ dx$ при $x \geq -1$; правим смяна $x = t^2 - 1$, $t > 0$; очевидно условията за смяна на променливата са изпълнени: $\varphi(t) = t^2 - 1$,
$\psi(x) = \sqrt{x+1}$, $\varphi(\psi(x)) = x$ за всяко $x \geq -1$;
функцията $g(t) = \int (t^2 - 1)^2.t\ d(t^2-1) = \int 2.t^6 - 4.t^4 + 2.t^2\ dt = 2.t^7/7 - 4.t^5/5 + 2.t^3/3 + C$ ➔ $\int x^2.\ \sqrt{x+1}\ dx = 2.(x+1)^3.\sqrt{x+1}/7 - 4.(x+1)^2.\sqrt{x+1}/5 + 2.(x+1).\ \sqrt{x+1}/3 + C$;

Интеграли от вида $\int R(\sin x, \cos)\ dx$

Такива интеграли могат да се преобразуват в интеграли от рационални функции чрез следното полагане:
$\mathrm{tg}\ x/2 = t$; това е позволено във всеки интервал Δ, в който
$\mathrm{tg}\ x/2$ е дефинирано; например ако $x \in (-\pi, \pi)$ можем да направим следната смяна: $x = \varphi(t) = 2.\mathrm{arctg}\ t$, $t = \psi(x) = \mathrm{tg}\ x/2$ и t ще се мени върху цялата реална права;
при тази субституция получаваме:
$\sin x = 2.t/(1 + t^2)$, $\cos x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$, $dx = 2/(1 + t^2)\ dt$;

Пример:
$\int dx/(1 + \sin x + \cos x)$ при $x \in (-\pi, \pi)$;
правим смяна $x = \varphi(t) = 2.\mathrm{arctg}\ t$, $t = \psi(x) = \mathrm{tg}\ x/2$, $dx = 2/(1 + t^2)\ dt$;
получаваме:
$g(t) = 2.\int dt/((1 + t^2).(1 + 2.t/(1 + t^2) + (1 - t^2)/(1 + t^2)) =$
$= 2.\int dt/(t^2 + 1 + 2.t + 1 - t^2) = \int d(t+1)/(t+1) = \ln|t+1| + C$
➔ $\int dx/(1 + \sin x + \cos x) = \ln|1 + \mathrm{tg}\ x/2| + C$;

Интеграли от вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\ dx$, $a \neq 0$

Този интеграл се нарича още **ойлеров интеграл**; ще отбележим следното: за да има смисъл този интеграл, квадратният тричлен $ax^2 + bx + c$ трябва да приема положителни стойности в интервала в който пресмятаме интеграла; това означава, че ако квадратният тричлен няма реални корени, то със сигурност $a > 0$, тъй като в противен случай във всеки интервал $a.x^2 + b.x + c < 0$;
тези интеграли се решават с помощта на субституциите на Ойлер;

Първа субституция на Ойлер

Да предположим, че $a > 0$;
Правим следното полагане: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x.\sqrt{a} + t$; тогава смяната е следната: $x = (t^2 – c)/(b – 2.\sqrt{a}.t)$, $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} – x.\sqrt{a}$;
по този начин преобразуваме ойлеровия интеграл в интеграл от рационална функция;
Пример:
$\int dx/\sqrt{x^2 + x + 1}$ за $x \in \mathbf{R}$; полагаме $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$; тогава смяната е: $x = (t^2 – 1)/(1 – 2.t)$; $dx = 2\ (t – t^2 – t)/(1 – 2.t)^2\ dt$;
тогава $g\ (t) = \int 2.(t – t^2 – t).(2.t – 1)/(t – t^2 – t).(2.t – 1)^2\ dt =$
$= - \int d\ (1 – 2.t)/(1 – 2.t) = - \ln|1 – 2.t| + C$ ➔
$\int dx/\sqrt{x^2 + x + 1} = - \ln\ |1 – 2.\sqrt{x^2 + x + 1} + 2.x| + C$;

Втора субституция на Ойлер

Да предположим, че корените на $ax^2 + bx + c$ са реални; да отбележим, че ако те са равни, интегралът не е ойлеров, а интеграл от рационална функция; нека α и β са двата корена на квадратния тричлен;
Правим следното полагане: $\sqrt{a.(x - \alpha).(x - \beta)} = t.(x - \alpha)$; тогава смяната е следната: $x = (\alpha.t^2 - \beta.a)/(t^2 – a)$; $t = \sqrt{a.(x - \beta)/(x - \alpha)}$;
по този начин отново преобразуваме ойлеровия интеграл в интеграл от рационална функция;
Пример:
$\int dx/(\ (x + 4).\ \sqrt{x^2 + 3.x – 4})$ за $x > 1$; полагаме $\sqrt{x^2 + 3.x – 4} = t.(x - 1)$;
тогава смяната е: $x = (t^2 + 4)/(t^2 – 1)$, $t = \sqrt{(x + 4)/(x – 1)}$;
$dx = -10.t\ /\ (t^2 - 1)^2\ dt$
тогава $g\ (t) = \int - 10.t\ dt\ /\ (\ (t^2 - 1)^2.(5t^2/(t^2 – 1)\ .\ 5.t/(t^2 – 1)\ ) =$
$= -2/5.\int dt/t^2 = 2/(5.t) + C$ ➔
$\int dx/(\ (x + 4).\ \sqrt{x^2 + 3.x – 4}) = 2/5\ .\ \sqrt{(x – 1)/(x + 4)} + C$

Да отбележим, че тези две субституции изчерпват всички ойлерови интеграли, тъй като ако $ax^2 + bx + c$ няма реални корени, то със сигурност $a > 0$;
Понякога се оказва удобна следната

Трета субституция на Ойлер

Да предположим, че $c > 0$;
Правим следното полагане: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x.t + \sqrt{c}$; тогава смяната е следната: $x = (b – 2.t.\sqrt{c})/(t^2 – a)$, $t = (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}\ )\ /\ x$;
По този начин ойлеровият интеграл отново се преобразува в интеграл от рационална функция;
Пример:

$\int dx/\sqrt{x^2 - 5.x + 4}$ за $x > 4$; ясно е, че към този интеграл могат да се приложат и трите субституции; ще приложим третата;
полагаме $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} = x.t + 2$; тогава смяната е: $x = (5 + 4.t)/(1 - t^2)$,
$t = (\sqrt{x^2 - 5.x + 4} - 2)/x$, $dx = (4.t^2 + 10.t + 4)/(1 - t^2)^2\ dt$;
тогава $g(t) = \int (4.t^2 + 10.t + 4)/ ((1 - t^2)^2.(2 + 5.t + 4.t^2)/(1 - t^2))\ dt =$
$2. \int dt\ /\ (1 - t^2) = - \int d(1 - t)/(1 - t) + \int d(1 + t)/(1 + t) =$
$= \ln\ |(1 + t)/(1 - t)| + C$ ➔
$\int dx/\sqrt{x^2 - 5.x + 4} = \ln\ |(x - 2 + \sqrt{x^2 - 5.x + 4})/(x + 2 - \sqrt{x^2 - 5.x + 4})| + C$

24. Определени интеграли – еквивалентност на определенията чрез суми на Дарбу и риманови интегрални суми. Условия за интегруемост.

Площ на равнинна фигура

Нека е дадена една ограничена равнинна фигура А (точково множество); ако тя е достатъчно проста (например многоъгълник) ние лесно можем да изчислим нейното лице; например правоъгълника има лице произведение от дължините на двете му страни; по този начин ние дефинираме **мярка** (лице) на правоъгълник ;
ние можем да пресмятаме лица на фигури, които са изцяло съставени от правоъгълници, като съберем лицата на отделните правоъгълници; ще наречем тези фигури прости многоъгълници;
дефинираме **мярка** на прост многоъгълник, като сума от лицата на правоъгълниците, които го съставят;
разглеждаме множеството от мярките на всички прости многоъгълници, вписани във фигурата А; това множество е ограничено отгоре, тъй като фигурата А е ограничена; в такъв случай то има точна горна граница, която ще наричаме **долна мярка** на фигурата А;
разглеждаме множеството от мярките на всички прости многоъгълници, описани около фигурата А; това множество е ограничено отдолу; в такъв случай то има точна долна граница, която ще наричаме **горна мярка** на фигурата А;
Казваме, че фигурата А е **измерима**, ако горната и долната мярка са равни; в такъв случай това число наричаме **площ** на фигурата А;

Интуитивен смисъл

Нека е дадена функцията $f(x)$: $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^+$; определеният интеграл от a до b е площта на фигурата, която е затворена от графиката на функцията $f(x)$ и от правите $y = a$, $y = b$; тази фигура се нарича **криволинеен трапец**, определен от графиката на $f(x)$ и абсцисната ос;

ако функцията f (x) приема и отрицателни стойности, тогава определеният интеграл е равен на сумата от лицата разположени над абцисната ос минус сумата от лицата под абцисната ос;

означаваме $\int_a^b f(x)dx$

Изпълнени са свойствата:

Ако f (x) = C, то $\int_a^b f(x)dx$ = C. (b – a), тъй като в този случай фигурата е правоъгълник;

Ако a < c < b, то

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, тъй като ако разделим една фигура на две, то нейното лице е сбор от лицата на двете парчета;

Риманови суми

Нека е дадена функцията f (x) : [a, b] → **R**;
под **разделяне** на интервала [a, b] разбираме редица от точки $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, където $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$; под **диаметър** d ({ x_i}) на разделянето разбираме max $(x_i - x_{i-1})$ за i =1, 2, …, n;

Дефиниция: Сумата σ ({ x_i}, t_i) = $\sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1})$, където { x_i} е някакво разделяне на интервала [a, b], а t_i са междинни точки, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ се нарича **Риманова интегрална сума**;

Ясно е, че Римановата интегрална сума представлява сума от лица на правоъгълници и тази сума апроксимира лицето под графиката на функцията; освен това ако увеличаваме броя на разделящите точки ние все повече и повече ще се приближаваме към лицето на фигурата;

Дефиниция: Казваме, че функцията f е **интегруема в Риманов смисъл** в интервала [a, b], ако съществува число I, такова че Римановите интегрални суми клонят към I, при условие че диаметърът на използваните разделяния клони към 0, т.е.
за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, такова че ако d ({ x_i}) < δ, то $|\sigma$ ({ x_i}, t_i) – I$|$ < ε при всеки избор на междинните точки t_i;
числото I наричаме **Риманов**(определен) **интеграл** на f от a до b;

означаваме: I = $\int_a^b f(x)dx$

Суми на Дарбу

Предполагаме, че $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е ограничена функция;
Нека сме направили разделяне $\{x_i\}$;
полагаме $m_i = \inf f(x)$ за $x_{i-1} \le x \le x_i$;
полагаме $M_i = \sup f(x)$ за $x_{i-1} \le x \le x_i$;

Дефиниция: Сумата $s = \sum_{i=1}^{n} f(m_i).(x_{i-1} - x_i)$ наричаме **малка сума на Дарбу**, определена от разделянето $\{x_i\}$;

Дефиниция: Сумата $s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i).(x_{i-1} - x_i)$ наричаме **голяма сума на Дарбу**, определена от разделянето $\{x_i\}$;

Очевидно е следното неравенство:
$s(\{x_i\}) \le \sigma(\{x_i\}, t_i) \le S(\{x_i\})$, което следва от $f(m_i) \le f(t_i) \le f(M_i)$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$;

Ясно е, че голямата сума на Дарбу представлява лице на фигура съставена от правоъгълници, която е описана около криволинейния трапец, определен от $f(x)$, а малката сума на Дарбу представлява лице на фигура съставена правоъгълници, която е вписана в криволинейния трапец, определен от $f(x)$; оттук можем да заключим, че $s(\{x_i\}) \le S(\{y_j\})$ за всеки две разделяния $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$;

тогава ако фиксираме разделянето $\{x_i\}$, ще заключим, че множеството от големите суми на Дарбу при всевъзможните разделяния на интервала $[a, b]$ е ограничено отдолу; тогава то притежава точна долна граница; ако фиксираме разделянето $\{y_i\}$, ще заключим, че множеството от малките суми на Дарбу при всевъзможните разделяния на интервала $[a, b]$ е ограничено отгоре; тогава то притежава точна горна граница;

Дефиниция: Точната долна граница $\overline{I}$ на големите суми на Дарбу се нарича **горен интеграл** на функцията f в интервала $[a, b]$;
Дефиниция: Точната горна граница $\underline{I}$ на малките суми на Дарбу се нарича **долен интеграл** на функцията f в интервала $[a, b]$;
Дефиниция: Казваме, че f е **интегруема в смисъл на Дарбу**, ако горният интеграл е равен на долния, т.е. $\overline{I} = \underline{I}$

Твърдение: Нека функцията f е ограничена в интервала $[a, b]$;
Нека τ е разделяне, определено от точките $\{x_i\}$ и
x' е точка $\ne x_i$ за $i = 1, 2, \ldots, n$; тогава ако $\tau^* = \tau \cup x'$,
1. $s(\tau^*) \ge s(\tau)$;
2. $S(\tau^*) \le S(\tau)$;

3. Ако $M = \sup |f(x)|$, $a \le x \le b$, то $S(\tau) - S(\tau^*) \le 2.M.d(\tau)$,
$s(\tau^*) - s(\tau) \le 2.M.d(\tau)$;
Доказателство:
Нека $x' \in (x_{i-1}, x_i)$; нека $m' = \inf f(x)$, $x_{i-1} \le x \le x'$,
$m'' = \inf f(x)$, $x' \le x \le x_i$; ясно е, че $m' \ge m_i$, $m'' \ge m_i$; получаваме:
$s(\tau^*) - s(\tau) = m'.(x' - x_{i-1}) + m''.(x_i - x') - m_i.(x_i - x_{i-1}) =$
$= (m' - m_i).(x' - x_{i-1}) + (m'' - m_i).(x_i - x') \ge 0$;
тъй като $m' - m_i \le 2.M$, $m'' - m_i \le 2.M$, $x' - x_{i-1} < x_i - x_{i-1} \le d(\tau)$,
$x_i - x' < x_i - x_{i-1} \le d(\tau) \Rightarrow s(\tau^*) - s(\tau) \le 2.M.d(\tau)$;
аналогично нека $M' = \sup f(x)$, $x_{i-1} \le x \le x'$,
$M'' = \sup f(x)$, $x' \le x \le x_i$; ясно е, че $M' \le M_i$, $M'' \le M_i$; получаваме:
$S(\tau^*) - S(\tau) = M'.(x' - x_{i-1}) + M''.(x_i - x') - M_i.(x_i - x_{i-1}) =$
$= (M' - M_i).(x' - x_{i-1}) + (M'' - M_i).(x_i - x') \le 0$;
тъй като $M_i - M' \le 2.M$, $M_i - M'' \le 2.M$, $x' - x_{i-1} < x_i - x_{i-1} \le d(\tau)$,
$x_i - x' < x_i - x_{i-1} \le d(\tau) \Rightarrow S(\tau) - S(\tau^*) \le 2.M.d(\tau)$;

Твърдение: Нека f е ограничена функция, дефинирана в интервала $[a, b]$; тогава горният интеграл $\overline{I}$ на f в интервала $[a, b]$ е равен на границата на големите суми на Дарбу, когато диаметърът на разделянето на интервала $[a, b]$ клони към 0, т.е.
за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, такова че ако $d(\tau) < \delta$, то
$S(\tau) - \overline{I} < \varepsilon$;
Доказателство: Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $\overline{I} + \varepsilon/2$ вече не е точна долна граница на големите суми на Дарбу $\Rightarrow$ съществува разделяне τ_0, такова че $S(\tau_0) > \overline{I} + \varepsilon/2$; нека τ_0 има l делящи точки;
нека τ е разделяне, такова че $d(\tau) < \delta$; като използваме горното твърдение (приложено l пъти) получаваме:
$S(\tau) - S(\tau \cup \tau_0) \le 2.M.l.\delta$, където $M = \sup |f(x)|$, $a \le x \le b$;
освен това $S(\tau \cup \tau_0) \le S(\tau_0) < \overline{I} + \varepsilon/2 \Rightarrow S(\tau \cup \tau_0) - \overline{I} < \varepsilon/2$;
като съберем двете неравенства получаваме:
$S(\tau) - \overline{I} < 2.M.l.\delta + \varepsilon/2$; ясно е, че ако изберем $\delta < \varepsilon/(4.M.l)$, ще получим, че от $d(\tau) < \delta \Rightarrow S(\tau) - \overline{I} < \varepsilon$;

Твърдение: Нека f е ограничена функция, дефинирана в интервала $[a, b]$; тогава долният интеграл $\underline{I}$ на f в интервала $[a, b]$ е равен на границата на малките суми на Дарбу, когато диаметърът на разделянето на интервала $[a, b]$ клони към 0, т.е.
за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, такова че ако $d(\tau) < \delta$, то
$\underline{I} - s(\tau) < \varepsilon$;
Доказателство: Аналогично на горното твърдение;

Твърдение: Нека f е ограничена функция; тогава f е интегруема в смисъл на Дарбу $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разделяне τ, такова че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$;

Доказателство:
Нека f е интегруема в смисъл на Дарбу; нека $I = \overline{I} = \underline{I}$;
Избираме $\varepsilon > 0$;
от горните две твърдения получаваме, че съществува разделяне τ', такова че $S(\tau') - I < \varepsilon/2$ и разделяне τ'', такова че $I - s(\tau'') < \varepsilon/2$; нека $\tau = \tau' \cup \tau''$; тогава:
$S(\tau) \leq S(\tau') \Rightarrow S(\tau) - I < \varepsilon/2$;
$s(\tau) \geq s(\tau'') \Rightarrow I - s(\tau) < \varepsilon/2 \Rightarrow S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$;
Нека е изпълнено, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разделяне τ, такова че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$;
за всяко разделяне τ са изпълнени неравенствата:
$s(\tau) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S(\tau) \Rightarrow \overline{I} - \underline{I} \leq S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$; последното неравенство е изпълнено за всяко $\varepsilon > 0 \Rightarrow I = I \Rightarrow$ f е интегруема в смисъл на Дарбу;

Теорема: Нека f е ограничена функция; тогава f е интегруема в Риманов смисъл $\Leftrightarrow$ f е интегруема в смисъл на Дарбу;
Доказателство:
Нека f е интегруема в смисъл на Дарбу;
нека $I = \overline{I} = \underline{I}$;
в сила е неравенството:
$s(\{x_i\}) \leq \sigma(\{x_i\}, t_i) \leq S(\{x_i\})$; в това неравенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \to 0$ и получаваме, че
$s(\{x_i\}) \to I$, $S(\{x_i\}) \to I \Rightarrow \sigma(\{x_i\}, t_i) \to I \Rightarrow$ f е интегруема по Риман;
Нека f е интегруема в Риманов смисъл;
Фиксираме $\varepsilon > 0$; избираме $\delta > 0$, такова че от $d(\{x_i\}) < \delta$ да следва $|\sigma(\{x_i\}, t_i) - I| < \varepsilon/6 \Leftrightarrow I - \varepsilon/6 < \sigma(\{x_i\}, t_i) < I + \varepsilon/6$ независимо от избора на междинните точки t_i;
Нека $\alpha = \varepsilon/(3.(b-a))$; тъй като M_i е супремумът на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, тогава $M_i - \alpha$ не е супремум $\Rightarrow$ съществуват междинни точки t_i', такива че $f(t_i) > M_i - \alpha$ за всяко i;
образуваме съответната риманова сума със същото разделяне $\{x_i\}$ и междинните точки t_i';
имаме: $\sigma(\{x_i\}, t_i') = S(\{x_i\}) - \alpha.(b-a) = S(\{x_i\}) - \varepsilon/3$;
аналогично можем да изберем междинни точки t_i'', такива че
$\sigma(\{x_i\}, t_i'') = s(\{x_i\}) + \alpha.(b-a) = s(\{x_i\}) + \varepsilon/3$;
получаваме: $I + \varepsilon/6 < S(\{x_i\}) < I + \varepsilon/2$; $I - \varepsilon/2 < s(\{x_i\}) < I + \varepsilon/6$;
в такъв случай $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < I + \varepsilon/2 - I + \varepsilon/2 = \varepsilon$; от горното твърдение $\Rightarrow$ f е интегруема в смисъл на Дарбу;

Междувременно показахме, че ако f е интегруема в интервала [a, b],
$\overline{I} = \underline{I} = \int_b^a f(x)dx$

25. Елементарни свойства на определените интеграли. Теорема за средните стойности.

Свойство 1: $\int_a^b C dx$ = C.(b – a);

Доказателство: Разглеждаме римановата интегрална сума на функцията f (x) = C - $\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1}) = C.\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} =$
= C.(b – a), независимо от $\{x_i\}$;

Свойство 2: Ако $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^c f(x)dx$ съществуват, то съществува $\int_a^c f(x)dx$ и е изпълнено: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$;

Доказателство: Разглеждаме римановата сума на функцията f (x) в интервала [a, b]; без ограничение можем да считаме, че c винаги е деляща точка; нека $c = x_k$;

$$\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i).(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} f(t_i).(x_j - x_{j-1});$$

в последното равенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \to 0$ и получаваме исканото равенството;

Свойство 3: Ако $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ съществуват, то съществува $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ и е изпълнено: $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

Доказателство:
Разглеждаме римановата интегрална сума на функцията f (x) + g (x) –

$$\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + g(t_i)).(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(t_i).(x_i - x_{i-1});$$

в последното равенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \to 0$ и получаваме исканото равенството;

Свойство 4: Ако $\int_a^b f(x)dx$ съществува, то съществува $\int_a^b \lambda.f(x)dx$ и е изпълнено: $\int_a^b \lambda.f(x)dx = \lambda.\int_a^b f(x)dx$;

Доказателство:
Разглеждаме римановата интегрална сума на функцията λ.f (x) –

$\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda.f(t_i).(x_i - x_{i-1}) = \lambda . \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1})$;

в последното равенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \to 0$ и получаваме исканото равенството;

Свойство 5: Нека f и g са интегруеми функции; ако $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то е изпълнено: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

Доказателство: В сила е неравенството:

$\sum f(t_i).(x_i - x_{i-1}) \leq \sum g(t_i).(x_i - x_{i-1})$;

в това неравенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \to 0$ и получаваме исканото неравенство;

Теорема (за средните стойности): Нека f е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]; тогава съществува $t \in [a, b]$, такова че $\int_a^b f(x)dx = f(t).(b - a)$;

Доказателство: По теорема на Вайерщрас ➔ f е ограничена; нека $m = \inf f(x)$, $a \leq x \leq b$; $M = \sup f(x)$, $a \leq x \leq b$;
за всяко $x \in [a, b]$ имаме:

$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \Rightarrow$

$m.(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b - a) \Rightarrow m \leq \int_a^b f(x)dx \,/ (b - a) \leq M$;

по теорема на Вайерщрас $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$ и по теоремата за междинните стойности съществува $t \in [x_1, x_2]$, такова че

$f(t) = \int_a^b f(x)dx \,/ (b - a) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(t).(b - a)$;

26. Интегруемост на непрекъснати функции. Интегруемост на ограничени функции с краен брой точки на прекъсване.

Теорема: Нека f (x) е дефинирана и непрекъсната в краен затворен интервал [a, b]; тогава f (x) е интегруема в Риманов смисъл;
Доказателство:

ясно е, че $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл $\Leftrightarrow$ $f(x)$ е интегруема в смисъл на Дарбу $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разделяне $\{x_i\}$ на интервала $[a, b]$, такова че $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < \varepsilon$;
по теорема на Кантор ➔ $f(x)$ е равномерно непрекъсната;
Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че
от $|x' - x''| < \delta$ ➔ $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b - a)$;
разделяме интервала $[a, b]$ с делящи точки $\{x_i\}$, така че $d(\{x_i\}) < \delta$;
разглеждаме интервала $[x_{i-1}, x_i]$; по теоремата на Вайерщрас,
$M_i = f(x')$, $m_i = f(x'')$, където $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$; тъй като $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$,
$|x' - x''| < \delta$ ➔ $f(x') - f(x'') < \varepsilon/(b-a)$ ➔ $M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$;

в такъв случай: $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i).(x_i - x_{i-1}) <$

$< \varepsilon/(b-a).\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = \varepsilon$ ➔ f е интегруема в Риманов смисъл;

Теорема: Ако f е ограничена в интервала $[a, b]$ и има краен брой точки на прекъсване, то f е интегруема в Риманов смисъл;
Доказателство: нека $M > 0$ и $|f(x)| < M$;
Нека $c_1, c_2, \ldots, c_k$ са точките на прекъсване за $f(x)$;
фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме отворени интервали $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, такива че $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k < \varepsilon/(2.M + b - a)$ и $c_j \in \Delta_j$ за всяко $j = 1, 2, \ldots, k$;
по теоремата на Кантор, f е равномерно непрекъсната в интервалите $[a, b] \setminus \cup\Delta_j$;
избираме $\delta > 0$, такова че от $|x' - x''| < \delta$ ➔
$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(2.M + b - a)$;
избираме разделяне $\{x_i\}$, такова че Δ_j (допълнени до затворени) са подинтервали на разделянето и $d(\{x_i\}) < \delta$; аналогично на горната теорема имаме, че
$|M_i - m_i| < \varepsilon/(2.M + b - a)$ за всяко i, такова че $[x_{i-1}, x_i] \neq \Delta_j$;

в такъв случай: $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) = \sum_{1} (M_i - m_i).(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{k} (M_{i_j} - m_{i_j}).|\Delta_j|$,

където първата сума е по всички i, такива че $[x_{i-1}, x_i] \neq \Delta_j$,
а $i_1, i_2, \ldots, i_k$ са поредните номера на интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ в разделянето;
окончателно: $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < \varepsilon.(b - a)/(2.M + b - a) + 2.M.\varepsilon/(2.M + b - a) = \varepsilon$ ➔ f е интегруема в Риманов смисъл;

Дефиниция: Казваме, че едно множество A има **лебегова мярка** 0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват интервали $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$които са такива, че $A \subset \Delta_j$ и $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_j + \ldots < \varepsilon$;

Теорема: Функцията f е интегруема по Риман $\Leftrightarrow$ f е ограничена и множеството от точките и на прекъсване има лебегова мярка 0;

27. Теорема на Лайбниц – Нютон и формула на Лайбниц – Нютон за пресмятане на определени интеграли.

Теорема (на Лайбниц – Нютон): Нека f : [a, b] → **R** е непрекъсната функция; тогава функцията F (x) = $\int_a^x f(t)dt$ е диференцируема и нейната производна е f (x) за всяко x ∈ (a, b);

Доказателство: нека x ∈ (a, b);
записваме диференчното частно на F (x);

(F (x + h) – F (x))/ h = ($\int_a^{x+h} f(x)dx$ - $\int_a^{x} f(x)dx$)/h = ($\int_x^{x+h} f(x)dx$)/h

съгласно теоремата за средните стойности съществува точка u_h ∈ (x, x+h), такава че ($\int_x^{x+h} f(x)dx$)/h = f (u_h);

сега като извършим граничен преход при h → 0, получаваме че
u_h → x ➔ f (u_h) → f (x), тъй като функцията f е непрекъсната;
➔ (F (x + h) – F (x))/h → f (x) ➔ F ′(x) = f (x) за всяко x ∈ (a, b);

Теорема (формула на Лайбниц – Нютон): Нека F (x) е дефинирана и непрекъсната в [a, b] и диференцируема поне в (a, b); тогава ако f (x) = F ′(x) е интегруема в Риманов смисъл в [a, b], то

$\int_a^b f(x)dx$ = F (b) – F (a);

Доказателство: Правим произволно разделяне { x_i} на интервала [a, b];
имаме: F (b) – F (a) = F (b) – F (x_{n-1}) + F (x_{n-1}) – F (x_{n-2}) + … + F (x_1) – F (a);
прилагаме теоремата на Лагранж и получаваме:
F (b) – F (a) = f (t_n).(b – x_{n-1}) + f (t_{n-1}).(x_{n-1} – x_{n-2}) + … + f (t_1).(x_1 – a);
в дясната страна на равенството стои Риманова сума на фукнцията f (x) за интервала [a, b]; в последното равенство правим граничен преход при d ({ x_i}) → 0; в лявата страна нищо се променя (тя е константа), а в дясната страна Римановата сума клони към $\int_a^b f(x)dx$;

да отбележим, че междинните точки при всяко едно разделяне могат да се изберат, така че равенството да е изпълнено, но резултатът не зависи от междинните точки ➔ формулата е доказана;

Означение: Ще означаваме F (b) – F (a) по следния начин: $F(x)\Big|_a^b$

Пример: $\int_0^{\pi} \sin x dx$ = - $\cos x\Big|_0^{\pi}$ = - cosπ + cos0 = 2

$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$; първо ще пресметнем неопределения интеграл;

правим субституция x = R.cost ➔ t = arccosx/R;

F (t) = $\int\sqrt{R^2-(R.\cos t)^2}dR.\cos t$ = $-\int R^2.\sqrt{1-\cos^2 t}.\sin tdt$ =

= $-R^2\int\sin^2 tdt$ = $-\frac{R^2}{2}\int 1-\cos 2tdt$ = $-\frac{R^2}{2}\int dt$ + $-\frac{R^2}{2}\int\cos 2tdt$ =

= - $R^2/2$. arccos (x/R) – $R^2/4$. sin(2.arccos(x/R)) + C;

тогава F (R) = C, F (-R) = - $\pi.R^2/2$ + C ➔ $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$ = $\pi.R^2/2$;

по този начин намерихме лицето на полукръга с радиус R; както ще видим по-нататък има и по-кратки начини за пресмятане на определени интеграли;

28. Интегриране по части и смяна на променливата при определени интеграли.

Дефиниция: Нека a > b; дефинираме $\int_a^b f(x)dx$ = - $\int_b^a f(x)dx$;

Това се прави с цел удобство на пресмятането;
действително, следвайки дефиницията, ако F е примитивна функция на f в интервала [a, b], то първият интеграл е F (b) – F (a) при a < b или - (F (a) – F (b)) при a > b, т.е. няма значение коя граница е по-голяма;

Твърдение (интегриране по части): Нека функциите f (x) и g (x) са дефинирани и диференцируеми в интервала [a, b] и производните им са непрекъснати; тогава е изпълнено равенството:

$\int_a^b f(x)dg(x)$ = f (x).g (x) $|_a^b$ - $\int_a^b g(x)df(x)$;

Доказателство: Като вземем предвид, че функцията f (x).g (x) е един неопределен интеграл на функцията f ′(x).g (x) + f (x).g ′(x) получаваме:

$\int_a^b (f'(x)g(x)+f(x).g'(x))dx$ = f (x).g (x) $|_a^b$ ➔

$\int_a^b f(x)dg(x)$ + $\int_a^b g(x)df(x)$ = f (x).g (x) $|_a^b$, което е точно исканото равенство;

Пример: $\int\limits_0^{\pi} x.\cos x dx$ = $\int\limits_0^{\pi} x.d\sin x$ = x.sinx$|_0^{\pi}$ - $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$ = 2;

Твърдение (смяна на променливата): Нека функцията f (x) е непрекъсната в интервала [a, b] и нека функцията g : [p, q] → [a, b] ([q, p] → [a, b]) притежава непрекъсната първа производна, освен това g (p) = a, g (q) = b; тогава $\int\limits_a^b f(x)dx$ = $\int\limits_p^q f(g(t)).g^{|}(t)dt$;

Доказателство: Разглеждаме функцията F (x) = $\int\limits_a^x f(u)du$;

= по теоремата на Лайбниц – Нютон ➔ F ′(x) = f (x) за всяко x ∈ (a, b); тогава (F (g (t)))′ = f (g (t)).g ′(t) ➔ функцията F (g (t)) е примитивна функция на f (g (t)).g ′(t) в интервала (p, q) ➔

$\int\limits_p^q f(g(t)).g^{|}(t)dt$ = F (g (t))$|_p^q$ = F (g (q)) – F (g (p)) = F (b) – F (a), но

$\int\limits_a^b f(x)dx$ = F (b) – F (a) ➔ твърдението е доказано;

Пример: $\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$; правим субституция x = R.cost, t = arccos(x/R), където t ∈ [0, π]; новите граници са π и 0;

$\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$ = $\int\limits_{\pi}^{0} \sqrt{R^2 - R^2.\cos t^2}dR.\cos t$ = $-R^2\int\limits_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$ = $-\frac{R^2}{2}\int\limits_{\pi}^{0} dt$ +

$-\frac{R^2}{4}\int\limits_{\pi}^{0} \cos 2t d2t$ = π.R²/2;

29. Приложения на определените интеграли – пресмятане на лица, формули за дължина на крива и обем на ротационно тяло.

Дефиниция: Криволинеен трапец е фигура, дефинирана като всички точки в равнината (x, y), за които: a ≤ x ≤ b, y_1 (x) ≤ y ≤ y_2 (x);

Твърдение: Лицето на един криволинеен трапец е равно на

$\int\limits_a^b y_2(x) - y_1(x)dx$;

Доказателство: Прибавяме достатъчно голяма константа към двете функции, така че те да станат положителни, по този начин не променяме лицето на криволинейния трапец; нека лицето под графиката на функцията y_1 (x) е A_1, а лицето под графиката на функцията $y_2(x)$ е A_2; тогава е ясно, че лицето на криволинейния трапец е точно $A_2 - A_1$, откъдето следва формулата;

Намиране на граници

Нека $a_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \ldots + 1/(n+n)$;
търсим границата на a_n при $n \to \infty$;
записваме: $a_n = 1/n \,.\, (1/(1 + 1/n) + 1/(1 + 2/n) + \ldots + 1/(1 + n/n))$;
последното равенство ще разгледаме като Риманова сума;
действително нека имаме разделяне на интервала [0, 1] на n равни части и междинните точки са избрани в краищата на подинтервалите на разделяне; тогава a_n е Риманова интегрална сума на функцията $f(x) = 1 / (1 + x)$; когато $n \to \infty$, диаметърът на разделянето (= 1/n) клони към 0 ➔ Римановата сума клони към
$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2$;

Дефиниция: В равнината е зададена крива $y = f(x)$, $a \le x \le b$; нека по кривата нанесем точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$, където M_0 има координати $(a, f(a))$ и M_n има координати $(b, f(b))$; казваме, че $M_0M_1\ldots M_n$ е начупена линия вписана в кривата; ясно е, че нейната дължина е сума от дължината на отсечките $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$; точната горна граница на всевъзможните дължини на начупените линии вписани в кривата се нарича **дължина** на кривата;

Нека функцията f има непрекъсната първа производна;
нека имаме разделяне $\{x_i\}$ на интервала [a, b] и M_i са съответните точки върху графиката на функцията; тогава дължината на начупената крива е : $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$; като използваме теоремата на Лагранж, получаваме че $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i).(x_i - x_{i-1})$;
и така дължината на кривата е: $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + f'(x_i)^2}.(x_i - x_{i-1})$, но това е точно Риманова интегрална сума на функцията $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$;
колкото по-малък е диаметърът на разделянето, толкова е по-добра апроксимацията за дължината на кривата; когато $d(\{x_i\}) \to 0$,
Римановата сума $\to \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ и това е дължината на кривата;

Пример: Нека f (x) = $\sqrt{1 - x^2}$;

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 + f^{|}(x)^2}dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\frac{-1}{\sqrt{2}} = \pi / 2$$

това пресмятане показва, че дължината на една четвърт от кръга е $\pi/2$;

Изчисляване на обем на ротационни тела

Нека в равнината O_{xy} е дадена крива y = f (x), a ≤ x ≤ b; ако завъртим тази крива около O_x ще получим ротационно тяло; **обемът** на тялото ще намерим по следния начин:
разделяме интервала [a, b] с делящи точки { x_i}; във всеки един от подинтервалите фиксираме междинна точка t_i и изчисляваме сумата от обемите на цилиндрите с основа кръговете, описани от t_i при въртенето и височина $x_i - x_{i-1}$; ясно е, че по този начин се получава приближена стойност на обема; тя е:

$\pi.\sum_{i=1}^{n} f(t_i)^2.(x_i - x_{i-1})$; когато избираме разделяне с по-малък диаметър ще получаваме по-точна апроксимация за обема на ротационното тяло; и така обемът на ротационното тяло получаваме, когато диаметърът на разделяне клони към 0 и тогава неговата стойност е:

$\pi.\int_a^b f(x)^2 dx$;

Пример: нека f (x) = $\sqrt{R^2 - x^2}$; тогава

$\pi.\int_{-R}^{R} R^2 - x^2 dx = \pi.(R^2.x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}.\pi.R^3$; получихме формулата за обема на сфера с радиус R;

30. Несобствени интеграли.

Дефиниция: Нека функцията f (x) е дефинирана за x ≥ a и интегруема в интервалите от вида [a, p], където p > a; казваме, че **несобственият** интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата $\int_a^p f(x)dx$ при p → ∞ и тогава той има стойност тази граница; в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Нека функцията f (x) е дефинирана за x ≤ a и интегруема в интервалите от вида [q, a] където q < a; казваме, че

несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата $\int_{q}^{a} f(x)dx$ при q → -∞ и тогава той има стойност тази граница; в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Нека функцията f (x) е интегруема в интервалите от вида [a + ε, b], където 0 < ε < b – a; казваме, че **несобственият** интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при ε → 0+0 и тогава той има стойност тази граница; в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Нека функцията f (x) е интегруема в интервалите от вида [a, b - ε], където 0 < ε < b – a; казваме, че **несобственият** интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата $\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при ε → 0+0 и тогава той има стойност тази граница; в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ се дефинира за функции, които са непрекъснати за всяко x и по дефиниция:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, където c е междинна точка;

междинни точки също може да се използват ако функцията има особености и в двете граници; например:

$$\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt{x.(x-5)}} = \int_{0}^{c} \frac{1}{\sqrt{x.(x-5)}} + \int_{c}^{5} \frac{1}{\sqrt{x.(x-5)}};$$

Примери:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p\to\infty} \int_{0}^{p} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p\to\infty} arctgx\Big|_{0}^{p} = \lim_{p\to\infty} arctgp = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{0}^{1} \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{\varepsilon}^{1} \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} x.\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} + \int_{\varepsilon}^{1} x.\frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} -\varepsilon.\ln\varepsilon + \varepsilon - 1 = -1;$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+0} -\ln\varepsilon$, но тази граница не съществува ➔ интегралът е разходящ;

Дефиниция: Казваме, че интегралът $\int_a^\infty f(x)dx$ е **абсолютно сходящ**, ако е сходящ интеграла $\int_a^\infty |f(x)|dx$;

Твърдение: Нека функциите f (x) и g (x) са дефинирани за x ≥ a и интегруеми във всеки интервал от вида [a, p], kъдето p > a; ако е изпълнено: 0 ≤ f (x) ≤ g (x) за всяко x ≥ a и $\int_a^\infty g(x)dx$ е сходящ, то $\int_a^\infty f(x)dx$ също е сходящ;

Доказателство: по свойствата на определените интеграли,
за всяко p > a е изпълнено:
$\int_a^p f(x)dx \le \int_a^p g(x)dx < \int_a^\infty g(x)dx$ = C; нека F (p) = $\int_a^p f(x)dx$; от последното неравенсто ➔ F (p) е ограничена; освен това f (x) ≥ 0 за всяко x ≥ a ➔ F (p) е монотонно растяща; нека M = sup F (p), p ≥ a;
ще покажем, че F (p) има граница при p → ∞ и тя е равна на M ;
фиксираме ε > 0; тогава M - ε не е горна граница на F (p) ➔ съществува p_0, такова че F (p_0) > M - ε; тъй като F (p) е монотонно растяща, тогава за всяко p > p_0 ще имаме: F (p) > M - ε; и така получаваме неравенствата: M - ε < F (p) ≤ M ➔ 0 ≤ M – F (p) < ε за всяко p > p_0 ➔ F (p) притежава граница при p → ∞ и тя е равна на M;

Следствие: Ако $\int_a^\infty f(x)dx$ е разходящ, то $\int_a^\infty g(x)dx$ също е разходящ;

Твърдение: Ако несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ;
Доказателство: Да отбележим, че обратното не е вярно;
Разглеждаме функциите:
f_1 (x) = (|f (x)| + f (x))/2; f_2 (x) = (|f (x)| - f (x))/2;
ясно е че 0 ≤ f_1 (x) ≤ |f (x)|, 0 ≤ f_2 (x) ≤ |f (x)|;

по горното твърдение получаваме, че $\int_a^\infty f_1(x)dx$ и $\int_a^\infty f_2(x)dx$ са сходящи

➔ $\int_a^\infty f_1(x) - f_2(x)dx$ е сходящ и тъй като f_1 (x) – f_2 (x) = f (x) ➔ $\int_a^\infty f(x)dx$ е сходящ;

Сравняване на несобствени интеграли

Да разгледаме следният интеграл:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{p\to\infty}\int_a^p \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{1}{(1-\alpha).x^{\alpha-1}}\right|_a^p = \frac{1}{(1-\alpha).p^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha).a^{\alpha-1}};$$

този интеграл очевидно е сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \le 1$ (при $\alpha = 1$ той е равен на lnp – lna за p → ∞);
и така, ако функцията f (x) е такава, че $|f(x)| \le 1/x^\alpha$, $\alpha > 1$ то интегралът $\int_a^\infty f(x)dx$ е сходящ; ако пък $|f(x)| \ge 1/x^\alpha$, $\alpha \le 1$ интегралът е разходящ;

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\beta} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\beta} = \left.\frac{1}{(1-\beta).(x-a)^{\beta-1}}\right|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{(1-\beta).(b-a)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta).\varepsilon^{\beta-1}}$$

този интеграл очевидно е сходящ при $\beta < 1$; при $\beta \ge 1$ той е разходящ (при $\beta = 1$, получаваме $\ln|b-a| - \ln\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0+0$);
и така, ако функцията f (x) е такава, че $|f(x)| \le 1/(x-a)^\beta$, $\beta < 1$ то интегралът

$\int_a^b f(x)dx$ е сходящ; ако пък $|f(x)| \ge 1/x^\beta$, $\beta \ge 1$ интегралът е разходящ;

Примери:

$$\int_1^\infty \frac{x^2+3}{2.x^4+x^2+1} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}.\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} \le \int_1^\infty \frac{C}{x^2};$$ това е така, тъй като

втората функция има граница при x → ∞ (тя е 1/2) ➔ тя е ограничена за достатъчно големи x; интегралът е сходящ, защото 2 > 1;

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \int_0^1 \frac{C}{x^{\frac{1}{2}}};$$ това е така, тъй като sinx/x има

граница при x → 0 (тя е 1) ➔ тя е ограничена в достатъчно малка околност на нулата; интегралът е сходящ, защото 1/2 < 1;

Край **24.01.2002**