Лекция 7

§7. Дефиниция и свойства на определен интеграл

1. Суми на Дарбу. Определеният интеграл е фундаментално средство в математиката с разнообразни и съдържателни приложения. Той се използва за пресмятане на геометрични и физични величини.

Интегрално ***деление*** τ на интервала $[a,b]$, $a<b$, се нарича системата от точки $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{n}$, за която $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Диаметър на делението τ наричаме числото $d(\tau)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, където $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,n$. Ако диаметърът на делението намалява, то броят на точките на делението нараства. Когато $\tau_1\subseteq\tau_2$, се казва, че делението τ_2 следва делението τ_1. Да отбележим, че за всеки две деления τ_1 и τ_2, делението $\tau_3=\tau_1\cup\tau_2$ следва τ_1 и τ_2.

Нека функцията $f(x):[a,b]\to\mathrm{R}$ е ограничена и да положим $m=\inf\limits_{a\le x\le b}f(x)$ и $M=\sup\limits_{a\le x\le b}f(x)$. Имаме $m\le f(x)\le M$, за всяко $x\in[a,b]$, при което константите m и M са избрани по оптималния възможен начин. Да положим

$$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x) \text{ и } M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x).$$

Очевидно $m\le m_k\le M_k\le M$, $k=1,2,\ldots,n$. От всеки интервал $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$, да изберем по произволен начин някакво число ξ_k. Тогава сумите

$$s(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k \text{ и } S(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

се наричат съответно ***долна и горна сума на Дарбу*** за функцията $f(x)$, образувани по делението τ, а сумата

$$r(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

се нарича ***интегрална сума на Риман***. Интегралната сума на Риман зависи от избора на междинните точки ξ_k, $k=1,2,\ldots,n$, по начин, който не е съществен за нейното използване и затова тази зависимост не е отбелязана в означението.

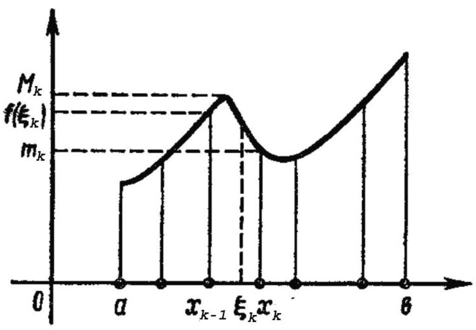

Рис. 7.1.

Твърдение 7.1. Интегралните суми имат следните свойства.

1) За всяко деление τ е изпълнено

$$m(b-a)\le s(f,\tau)\le r(f,\tau)\le S(f,\tau)\le M(b-a);$$

2) Ако $\tau_1\subseteq\tau_2$, то $S(f,\tau_2)\le S(f,\tau_1)$ и $s(f,\tau_1)\le s(f,\tau_2)$, т.е. с увеличаване броя на точките на деление горните суми намаляват (не нарастват), а долните суми се увеличават (не намаляват);

3) За всеки две деления τ_1 и τ_2 е в сила неравенството

$$s(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2),$$

което означава, че всяка долна сума не надвишава всяка горна сума.

Доказателство. **1**) За всяко $k = 1,2,\ldots,n$ имаме $m \le m_k \le \xi_k \le M_k \le M$, от което след умножаване с положителното число $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ получаваме

$$m\Delta x_k \le m_k \Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k \Delta x_k \le M\Delta x_k ,$$

откъдето след сумиране по всички $k = 1,2,\ldots,n$ получаваме

$$m\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \le M\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k ,$$

което доказва серията от неравенства, понеже $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$.

2) Ще докажем само неравенството $S(f,\tau_2) \le S(f,\tau_1)$, понеже другото неравенство $s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2)$ се доказва аналогично. Да предположим отначало, че делението τ_2 съдържа само една точка повече от делението τ_1 , $\tau_2 = \tau_2 \cup \{\xi\}$, и нека тази точка ξ е от интервала (x_{j-1}, x_j), за някой индекс j , $1 \le j \le n$. Нека $M'_j = \sup\limits_{x_{j-1} \le x \le \xi} f(x)$ и $M''_j = \sup\limits_{\xi \le x \le x_j} f(x)$. От друга страна сумите $S(f,\tau_1)$ и $S(f,\tau_2)$ се различават само над интервала $[x_{j-1}, x_j]$, следователно

$$S(f,\tau_1) - S(f,\tau_2) = M_j(x_j - x_{j-1}) - M'_j(\xi - x_{j-1}) - M''_j(x_j - \xi).$$

Сумата в дясната страна няма да нарасне, ако заменим $M'_j(\xi - x_{j-1})$ с $M_j(\xi - x_{j-1})$ и $M''_j(\xi - x_{j-1})$ с $M_j(x_j - \xi)$, понеже $M'_j \le M_j$ и $M''_j \le M_j$. По този начин намираме

$$\begin{aligned} S(f,\tau_1) - S(f,\tau_2) &\ge M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j(\xi - x_{j-1}) - M_j(x_j - \xi) = \\ &= M_j[(x_j - x_{j-1}) - (\xi - x_{j-1}) - (x_j - \xi)] = 0 \end{aligned}$$

т.е. $S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_2)$. Да предположим сега, че $\tau_2 = \tau_1 \cup \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$. Прилагайки последователно доказаното неравенство, когато деленията се различават само с една точка получаваме

$$S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_1 \cup \{\xi_1\}) \ge S(f,\tau_1 \cup \{\xi_1,\xi_2\}) \ge \cdots \ge S(f,\tau_1 \cup \{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p\}) = S(f,\tau_2).$$

3) Да образуваме делението $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогава $\tau_1 \subseteq \tau_3$ и $\tau_2 \subseteq \tau_3$, следователно според предишните точки имаме $s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_3) \le S(f,\tau_3) \le S(f,\tau_2)$. ■

На следващата рисунка 7.2 е дадена геометричната интерпретация на сумите на Дарбу при $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

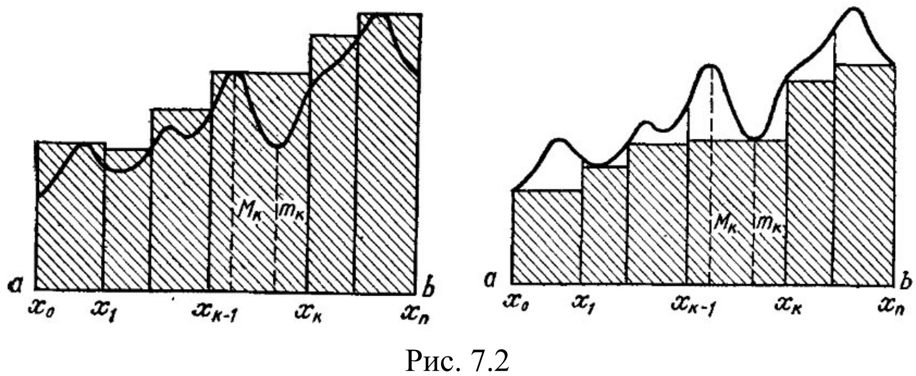

Рис. 7.2

Нека π_k и Π_k, $k = 1,2,\ldots,n$, са правоъгълниците с основа интервала $[x_{k-1}, x_k]$ и височини съответно m_k и M_k. От рис. 7.2 се вижда, че $s(f,\tau)$ е сборът от лицата на правоъгълниците π_k, а $S(f,\tau)$ е сборът от лицата на правоъгълниците Π_k, $k = 1,2,\ldots,n$. Нека A е криволинейният трапец, образуван от оста Ox, графиката на функцията $f(x)$ и вертикалните линии през точките $x = a$ и $x = b$. Да предположим, че фигурата A има лице и да означим това лице с $\mu(A)$ (мярка на A). Тогава за всяко деление τ е изпълнено неравенството $s(f,\tau) \le \mu(A) \le S(f,\tau)$ и по-общо, за всеки две деления τ_1 и τ_2 е изпълнено неравенството

(7.1) $\quad s(f,\tau_1) \le \mu(A) \le S(f,\tau_2)$,

което е в основата на геометричната интерпретация на определения интеграл, която ще дадем по-надолу в тази лекция.

Точната горна граница на всичките долни суми на Дарбу се нарича ***долен интеграл на Дарбу*** и се бележи с

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\tau} s(f,\tau),$$

а точната долна граница на всичките горни суми на Дарбу се нарича ***горен интеграл на Дарбу*** и се бележи с

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\tau} S(f,\tau).$$

От теоремата за отделимост и от точка 3) на твърдение 7.1 следва, че за всяка ограничена функция $f(x):[a,b] \to \mathrm{R}$ е изпълнено

(7.2) $$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

С други думи, долният и горният интеграл на Дарбу са винаги определени, при което между тях е валидно неравенството (7.2). Сега можем да препишем неравенството (7.1) във вида

(7.3) $$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \mu(A) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Неравенството (7.2) може да се изкаже и по следния начин: между всичките долни суми и всичките горни суми има поне едно число, което ги разделя. Това твърдение е геометрично очевидно съгласно (7.3), което не бива да се схваща като точно разсъждение, понеже в (7.3) не разполагаме с определение за лице на A. Можем обаче да кажем, че каквото и число $\mu(A)$ да наречем лице на криволинейния трапец A, за него трябва да бъде изпълнено неравенството (7.3).

Определение 7.1. Казва се, че ограничената функция $f(x):[a,b] \to \mathrm{R}$ е интегруема по Риман (в риманов смисъл) в интервала $[a,b]$, когато долният и горният интеграл на Дарбу са равни. В този случай тяхната обща стойност се нарича определен (Риманов) интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a,b]$ и се бележи с

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \left(\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx\right).$$

Например ако $f(x)$ е константа, $f(x) = C$, то всяка долна и всяка горна сума на Дарбу имат една и съща стойност $C(b-a)$. Последното означава, че долният и горният интеграл на Дарбу имат една и съща стойност

$$\underline{\int_a^b} Cdx = \overline{\int_a^b} Cdx = C(b-a),$$

следователно константата $f(x) = C$ е интегруема функция, при което

$$\int_a^b f(x)dx = C(b-a).$$

2. Необходими и достатъчни условия за интегруемост. Оказва се, че класът на интегруемите функции е достатъчно широк. Преди всичко ще формулираме

Теорема 7.1. Ограничената функция $f(x):[a,b] \to \mathrm{R}$ е интегруема в интервала $[a,b]$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може са се намери интегрално деление τ, за което $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$.

Доказателство. **1**) Нека $\varepsilon > 0$ и τ е деление, за което $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$. От определенията следва, че за всяко деление τ е в сила

$$s(f,\tau) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f,\tau). \tag{7.4}$$

Тогава

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon,$$

следователно

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

понеже ε можем да избираме произволно малко.

2) Да предположим сега, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$ и нека $\varepsilon > 0$. Съгласно определенията за долен и горен интеграл, понеже числото $\underline{\int_a^b} f(x) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ не е горна граница за долните суми на Дарбу и числото $\overline{\int_a^b} f(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница за горните суми на Дарбу, могат да се намерят деления τ_1 и τ_2 такива, че

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(f,\tau_2) \ge \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Нека $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогава съгласно свойствата на сумите на Дарбу и последните две съотношения имаме

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_3) \le \int_a^b f(x)dx \le S(f,\tau_3) \le S(f,\tau_2) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

следователно $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$. ■

С помощта на теорема 7.1 ще докажем следното

Твърдение 7.2. Всяка непрекъсната функция е интегруема и всяка монотонна функция е интегруема.

Доказателство. 1) Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ $(a < b)$. Тогава тя е ограничена и равномерно непрекъсната. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава от равномерната непрекъснатост следва съществуването на $\delta > 0$ такова, че

$|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, когато $|x_1-x_2|<\delta$. Нека делението τ е избрано с единственото изискване $d(\tau)<\delta$. Да разгледаме разликата

$$S(f,\tau)-s(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k . \tag{7.5}$$

Понеже $f(x)$ е непрекъсната, тя достига най-голямата и най-малката си стойности във всеки интервал $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$, следователно $M_k=f(\xi_k)$ и $m=f(\eta_k)$ за някои $\xi_k,\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$. Тогава

$$M_k-m_k=|f(\xi_k)-f(\eta_k)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

и от (7.5) следва, че при този избор на делението τ имаме

$$S(f,\tau)-s(f,\tau)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon ,$$

което съгласно теорема 7.1 доказва интегруемостта на непрекъснатата функция $f(x)$.

2) Нека функцията $f(x)$ е монотонна в интервала $[a,b]$. За определеност да предположим, че $f(x)$ е монотонно растяща и не е константа, $f(b)>f(a)$. Да изберем едно $\varepsilon>0$ и нека деленето τ е избрано с единственото изискване $d(\tau)<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Да разгледаме отново разликата (7.5). Тук имаме $M_k=f(x_k)$ и $m_k=f(x_{k-1})$, $k=1,2,\ldots,n$, и (7.5) приема вида

$$S(f,\tau)-s(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Delta x_k ,$$

откъдето оценяваме

$$S(f,\tau)-s(f,\tau)\le\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=\varepsilon ,$$

което доказва интегруемостта на $f(x)$. Случаят, когато $f(x)$ е монотонно намаляваща се разглежда аналогично. ■

Може да се докаже, че ако една ограничена функция $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната с изключение евентуално на краен брой точки, то тя е интегруема.

Следващият пример показва, че има функции, които не са интегруеми. Нека $f(x)$ е определена в интервала $[0,1]$ по следния начин: $f(x)=0$, ако x е рационално число и $f(x)=1$, ако x е ирационално число. Във всеки отворен интервал има както безбройно много рационални числа, така и безбройно много ирационални числа, следователно, за всяка долна и горна сума на Дарбу имаме

$$s(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}0\Delta x_k=0,\ S(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}1\Delta x_k=1 .$$

По тази причина

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx=0<1=\overline{\int_0^1} f(x)dx$$

и така определената функция не е интегруема.

Доказаното твърдение 7.2 съдържа нещо повече, понеже и в двата случая интегралът се получава като граница на интегралните суми, когато диаметърът на делението клони към нула, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ такова, че $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$, винаги когато $d(\tau) < \delta$, откъдето следва, че

$$\int_a^b f(x)dx \le S(f,\tau) < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon \text{ и } \int_a^b f(x)dx \ge s(f,\tau) > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon.$$

Последното може да запише по следния начин

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} s(f,\tau) = \int_a^b f(x)dx,$$

което по същество е частен случай на следната теорема на Дарбу.

Теорема 7.2. За всяка ограничена функция $f(x):[a,b]\to \mathbb{R}$ е изпълнено

$$\lim_{d(\tau)\to 0} s(f,\tau) = \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ и } \lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

т.е. долният и горният интеграл на Дарбу се явяват граници съответно на долните и горните суми на Дарбу, когато диаметърът на делението клони към нула. ■

От теоремата на Дарбу и от неравенството за интегралните суми

$$s(f,\tau) \le r(f,\tau) \le S(f,\tau)$$

следва верността на

Твърдение 7.3. Нека ограничената функция $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau), \tag{7.6}$$

т.е. интегралът се явява граница на римановите интегрални суми, когато диаметърът на делението клони към нула. ■

Да отбележим, че твърдение 7.3 е доказано строго, за случая когато функцията $f(x)$ е непрекъсната или монотонна. Съдържанието на това твърдение може да послужи за отправна точка за въвеждане на римановия интеграл. Функцията $f(x)$ се определя като интегруема в интервала $[a,b]$, когато съществува границата $\lim_{d(\tau)\to 0} r(f,\tau)$, която е и стойността на интеграла. Ние предпочетохме друг подход, който изяснява повече структурни връзки в схемата на въвеждане на интеграла.

Преминаването от интегрални суми на Риман към определен интеграл във формулата (7.6) ще наричаме ***интегрален граничен преход***. Този преход лежи в основата на получаване на различните приложения на определения интеграл. Формулата (7.6) открива възможност за доказване някои свойства на интеграла по следната схема. Свойството се доказва отначало за интегралните суми, след което се получава за интеграла, след интегрален граничен преход.

3. Геометрична интерпретация на определения интеграл. Нека $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$. Както вече отбелязахме, при разумно определение на лице $\mu(A)$ на криволинейния трапец A, образуван от оста Ox, графиката на $f(x)$ и двете вертикални прави през точките $x = a$ и $x = b$ (Рис. 7.3), ще бъде изпълнено неравенството (7.3). Следователно, ако $f(x)$ е интегруема в интрвала $[a,b]$, то (7.3) приема вида

$$\int_a^b f(x)dx \le \mu(A) \le \int_a^b f(x)dx,$$

което означава, че по необходимост лицето на криволинейния трапец A се определя от формулата

(7.7) $\mu(A)=\int_a^b f(x)dx$.

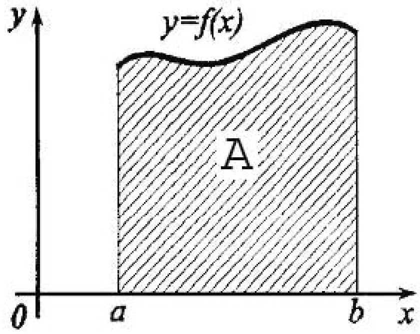

Рис. 7.3.

Когато функцията $f(x)$ си сменя знака в интервала $[a,b]$, лицата на участъците, където $f(x)$ е отрицателна се изваждат

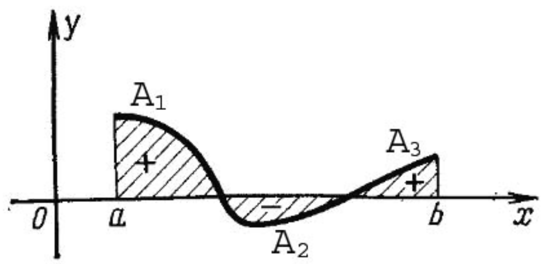

Рис. 7.4.

и например за изобразения на рисунка 7.4 случай имаме

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(A_1)-\mu(A_2)+\mu(A_3).$$