9. Неперово число – дефиниция и свойства.

Разглеждаме редицата: $a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$

Можем да докажем, че редицата е монотонно растяща и ограничена.

Имаме:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Аналогично:

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Сравнявайки изразите за a_n и a_{n+1}, виждаме, че k-тото събираемо в израза за a_n е по-малко от k-тото в израза за a_{n+1}.

Следователно $a_n < a_{n+1}$, т.е. редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща.

От получения по-горе израз за a_n получаваме оценката

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

$\Rightarrow$ редицата a_n е ограничена, защото $0 < a_n < 3$ за $\forall n$

$\Rightarrow$ Съгласно теоремата, че всяка ограничена монотонна редица е сходяща $\Rightarrow$ редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща.

Нейната граница се означава с **e** и се нарича неперово число.