8. Абсолютно и условно сходящи редове. Критерий на Лайбниц.

Def. Даден ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако редът от абсолютните стойности на членовете му $\sum |a_n|$ е сходящ.

T. Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Д-во: Използваме критерия на Коши за сходимост. Абсолютна сходимост на дадения ред означава, че за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu$, т.с. при $n > \nu$ и всяко $p > 0$ имаме $\sum\limits_{k=n+1}^{p} |a_k| < \varepsilon$

От друга страна от неравенството на триъгълника имаме:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |a_k| < \varepsilon,$$ което доказва сходимостта на дадения ред

Съществуват редове, които са сходящи, но не абсолютно сходящи. Такива редове се наричат условно сходящи.

Def. Казваме, че редицата от комплексни числа $\{z_n\}$ е сходяща към комплексното число z, ако е изпълнено

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0$$

T. Редицата от комплексни числа $\{z_n\}$ с общ член $z_n = a_n + b_n . i$ клони към комплексното число $z = a + b.i$ тогава и само тогава, когато $a_n \to a$ и $b_n \to b$.

Д-во: Чрез граничен преход в равенството:

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n + b)^2}$$

се вижда, че ако $a_n \to a$ и $b_n \to b$, то $z_n \to z$.

Обратно, от това равенство следват неравенствата:

$|a_n - a| \leq |z_n - z|$ и $|b_n - b| \leq |z_n - z|$, ~~от~~ които показват, че ~~а~~ ако $z_n \to z$, то $a_n \to a$ и $b_n \to b$

T| ~~Def~~. Редът от комплексни числа $\sum z_n$, $z_n = a_n + b_n \cdot i$ е сходящ тогава и само тогава, когато са сходящи редовете от реални числа $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Def: Редът $\sum z_n$ ще наричаме сходящ, ако редицата $S_n = z_1 + \dots + z_n$ от частичните му суми е сходяща

T.| Нека $\sum z_n$ е абсолютно сходящ, т.е. $\sum |z_n|$ – сходящ. Тогава и самият ред $\sum z_n$ е сходящ.

1-во: Нека $z_n = a_n + b_n \cdot i$. От неравенствата $|a_n| \le |z_n|$ и $|b_n| \le |z_n|$ $\Rightarrow$ че $\sum a_n$ и $\sum b_n$ са абсолютно сходящи $\Rightarrow$ сходящи. $\Rightarrow$

от $\sum a_n$ и $\sum b_n$ – сходящи $\Rightarrow$ $\sum |z_n|$ – сходящ

Критерий на Лайбниц: Да предположим, че редицата от положителни числа $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща и клони към нула. Тогава редът $\sum (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ.

1-во: Разгл. поотделно частичните суми с четни и нечетни номера.

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n-2} \ge S_{2n}$ $\Rightarrow$ четните – мон. растящи

$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \le S_{2n-1}$ $\Rightarrow$ нечетни – мон. намалят

От друга страна $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} > 0$

С други думи, имаме неравенствата:

$S_2 \le S_4 \le \dots \le S_{2n} \le \dots \le S_{2n+1} \le S_{2n-1} \le \dots \le S_3 \le S_1$

Поотделно четните и нечетните частични суми образуват монотонни и ограничени редици $\Rightarrow$ ред. са сходящи и можем да положим

$S' = \lim S_{2n+1}$; $S'' = \lim S_{2n}$

Тъй като $a_n \to 0$, то $\lim (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$, т.е. $S' = S''$

$\Rightarrow$ Ред. от частичните суми S_n – сходяща, т.е.

$\sum (-1)^{n-1} a_n$ – сходящ.