7. Критерий на Коши, Даламбер, Раабе-Дюамел.

1) Критерий на Коши

Нека $\sum a_n$ е ред с неотрицателни членове. Да допуснем, че съществува число $q < 1$ такова, че от известно място нататък $\sqrt[n]{a_n} \le q$. Тогава редът е сходящ.

Ако за безкрайно много индекси n има $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то редът е разходящ.

Д-во: Тъй като добавянето или премахването на краен бр. членове не влияе на сходимостта, можем да считаме, че условието на критерия е изпълнено за $\forall n$. Тогава $a_n \le q^n$ и тъй като $\sum q^n$ е сходящ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ - сходящ

2) Критерий на Даламбер

Нека $\sum a_n$ е ред със строго положителни членове. Да допуснем, че съществува число $q < 1$ такова, че от известно място нататък $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$. Тогава редът е сходящ

Ако от известно място нататък имаме $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, то редът е разходящ.

Д-во: Използваме втората ф-ма на принципа за сравнение. Условието може да се напише във вида

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{q^{n+1}}{q^n}$$ и според втората ф-ма $\rightarrow \sum a_n$ - сходящ

Гранична форма на Критериите на Коши и Даламбер.

Нека $\sum a_n$ е ред със строго положителни членове, и да предположим, че съществува някоя от границите:

$$l = \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \text{или} \quad l = \lim_{x \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Тогава при $l < 1$ даденият ред е сходящ, а при $l > 1$ - разходящ

3) Критерий на Раабе-Дюамел.

Нека $\sum a_n$ е ред със строго положителни членове. Да означим

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Тогава: 1) Ако съществува число $\alpha > 1$ такова, че $R_n \geq \alpha$ от известно място нататък, то редът е сходящ.

2) Ако от известно място нататък е изпълнено $R_n \leq 1$, то редът е разходящ.

Гранична форма на критерия на Раабе-Дюамел.

Нека редицата $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ е сходяща и клони към числото ℓ. Тогава при $\ell > 1$ редът $\sum a_n$ е сходящ, а при $\ell < 1$ - разходящ.