6. Сходящи редове. Принцип за сравняване на редове с положителни членове

Нека е дадена числовата редица $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Ще казваме, че тя определя числов ред:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{или} \quad \sum_1^\infty a_n$$

Числата

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^\infty a_n$$

се наричат частни суми на реда $\sum_1^\infty a_n$

Def Редът $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ще наричаме сходящ, ако редицата $\{S_n\}$ от частичните му суми е сходяща. Границата S на тази редица се нарича сума на реда. $\sum a_n = S$

Редът е разходящ, ако редицата $\{S_n\}$ не притежава граница.

Необходимо условие за сходимост.

Да предположим, че редът с общ член a_n е сходящ, т.е. че редицата $\{S_n\}$ притежава граница S. Тогава имаме:

$$a_n = S_{n+1} - S_n$$

Като извършим в равенството граничен преход при $n \to \infty$, получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} + \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0, \text{ т. е.}$$

T| Ако един числов ред е сходящ, то общия му член, клони към нула

Редове с неотрицателни членове. Принцип за сравняване.

Лема| Ако $\sum a_n$ е ред с неотрицателни членове, то редицата от частичните му суми е монотонно растяща.

Следствие| Ако е даден ред с неотрицателни членове $\sum a_n$ и редицата от частичните му суми е ограничена, то редът е сходящ.

T. Нека $\sum a_n$ и $\sum b_n$ са редове с неотрицателни членове, като $a_n \leq b_n$ за $\forall n$. Тогава

1) Ако $\sum b_n$ е сходящ, то $\sum a_n$ е също сходящ

Нека $S_n = a_1 + \dots + a_n$, $\tilde{S}_n = b_1 + \dots + b_n$. Тогава $S_n \leq \tilde{S}_n$ за $\forall n$.
От $\sum b_n$ - сходящ $\Rightarrow \tilde{S}_n$ е сходяща $\Rightarrow$ ограничена.
Оттук следва, че редицата S_n е ограничена.
Тъй като тя е монотонна $\Rightarrow$ следва нейната сходимост.

2) Ако $\sum a_n$ е разходящ, то $\sum b_n$ е също разходящ

T. (Втора форма на принципа за сравняване)
Нека $\sum a_n$ и $\sum b_n$ са редове с неотрицателни членове, като

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{за } \forall n.$$

Тогава:

1) Ако $\sum b_n$ е сходящ, то $\sum a_n$ е също сходящ
2) Ако $\sum a_n$ е разходящ, то $\sum b_n$ е също разходящ

1-во: Имаме:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \frac{b_2}{b_1} \dots \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$$

Тъй като умножението с const не променя сходимостта — Сходимостта на реда $\sum b_n$ влече сходимостта на $\sum a_n$.