5. Принцип на Коши за сходимост на редици и редове

T| Една редица от реални числа е сходяща тогава и само тогава, когато е ограничена и има само една точка на сгъстяване.

Def. Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условието на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν, че при $n > \nu$ и $m > \nu$ имаме $|a_n - a_m| < \varepsilon$

T| Една редица от реални числа е сходяща тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши.

1-во: а) Необходимост.

Нека $\{a_n\}$ е сходяща редица и $a_n \to a$. Взимаме $\varepsilon > 0$ и избираме такова число ν, че при $n > \nu$ имаме $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогава при $n > \nu$ и $m > \nu$ имаме

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Редицата $\{a_n\}$ удовлетворява условието на Коши

б) Достатъчност.

Нека $\{a_n\}$ удовлетворява условието на Коши. Ще покажем, че тя е ограничена. Взимаме $\varepsilon = 1$. Тогава съгласно условието на Коши $\exists \nu$, т.с. при $n > \nu$ и $m > \nu$ имаме:

$$|a_n - a_m| < 1 \Longleftrightarrow a_m - 1 < a_n < a_m + 1$$

$\Rightarrow$ Всички членове на редицата, чиито номера са по-големи от ν се намират в интервала $[a_m - 1, a_m + 1]$. Тъй като вън от този интервал има само краен брой членове, то тя е ограничена.

Условие на Коши за сходимост на редове.

Нека n и m са две естествени числа, така че $m > n$. Имаме

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

Редицата S_n е сходяща точно тогава, когато за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ номер ν, такъв че при $n, m > \nu$ имаме $|S_m - S_n| < \varepsilon$

Полагаме $m = n + p$, p - естествено. $\Rightarrow$

T| Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Longleftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ номер ν, така че при всяко естествено $p > 0$ да имаме

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$