4. Точки на сгъстяване и подредици. Теорема на Болцано – Вайерщрас.

Def: Казваме, че числото a е точка на сгъстяване, на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако във всяка околност на a се събират безброй много членове на редицата.

Твърдение Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и a е нейната граница, то a е единствената точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}$

Ако $a_n \to a$, то вън от всяка конкретна околност на a ще има само краен брой членове на редицата, а в разглежданата околност ще се съберат всички останали членове, които са безброй много.
Сходящата редица не може да има две различни граници.

Подредица: Ако задраскаме част от членовете на редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, но така че да останат безброй много незадраскани членове, ще получим нова редица $\to$ подредица на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Твърдение Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към a, то всяка нейна подредица клони към същата граница.

Д-во: Нека $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ е произв. подред. на ред. $\{a_n\}$
Взимаме произв. число $\varepsilon > 0$. Тъй като $\{a_n\} \to a$, то $\exists \nu$, такова че при $n > \nu$ имаме $|a_n - a| < \varepsilon$. Избираме число k_0 така, че $n_{k_0} \geq \nu$ – такова има, тъй като $n_k \to +\infty$. Тогава при $k > k_0$ имаме $n_k > n_{k_0} \geq \nu \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon \Rightarrow a_{n_k} \to a$

T | Ако a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такава, че $a_{n_k} \to a$. Обратно, границата на всяка сходяща подредица на редицата $\{a_n\}$ е точка на сгъстяване на същата редица.

Д-во: Тъй като a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}$, то в нейна околност $(a-1, a+1)$ има безброй много членове. Избираме произволен номер n_1, така че $a_{n_1} \in (a-1, a+1)$. След това разгл. $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$. И в него има безброй много членове, и избираме номер n_2, такъв, че $a_{n_2} \in (a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ и $n_2 > n_1$. Продължаваме по индукция. Ако сме избрали $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{k-1}}$, то a_{n_k} избираме така, че $n_k > n_{k-1}$ и $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}) \Rightarrow$ Получената подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$ по построение удовлетворява

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow a_{n_k} \to a$$

Т' (Болцано – Вайерщрас)

Всяка ограничена редица има сходяща подредица

Д-во: Достатъчно е да покажем, че всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.
Нека $\{c_n\}$ е ограничена редица в интервала $[a_1, b_1]$. Разделяме интервала на две части $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Поне един от тези два интервала съдържа безброй много членове на редицата. Озн. с $[a_2, b_2]$ един от горните интервали, който има свойството да съдържа безброй много членове на редицата. След това разделяме $[a_2, b_2]$ на две части – $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ и означаваме с $[a_3, b_3]$ един от тези два интервала, който има с-вото да съдържа безброй много членове на редицата. По-нататък продължаваме по индукция. Ако сме построили интервала $[a_k, b_k]$, то поне една от двете му половини ще съдържа безброй много членове на редицата. Означаваме следния интервал с $[a_{k+1}, b_{k+1}]$

По построение имаме:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \dots = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$$

Имаме: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \dots$

$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k \geq b_{k+1} \geq \dots$

т.е. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно растяща, а $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно намаляваща

Тъй като тези редици са ограничени, то те са сходящи.
Нека $\{a_n\} \to a$ и $\{b_n\} \to b$. След граничен преход в равенството

$$a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1)$$

Получаваме, че $a - b = 0$, т.е. $a = b$
Ще покажем, че a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Разгл. произволна симетрична околност на a от вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
Тъй като $a_n \to a$ и $b_n \to b$, то за достатъчно големи k ще имаме $a_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $b_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, т.е. е изпълнено

$$[a_k, b_k] \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Оттук получаваме, че в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ се съдържат безброй много членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, понеже интервалът $[a_k, b_k]$ съдържа по построение безброй много членове на редицата
$\Rightarrow$ a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.