3. Граничен преход в аритметични операции и неравенства. Лема за милиционерите.

1) Граничен преход в неравенства:

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към a, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към b и $a_n \le b_n$ за $\forall n$, то $a \le b$

Д-во: Допускаме противното: $a > b$. Избираме число $\varepsilon > 0$ така, че $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$. Тогава интервалите $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ и $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ не се пресичат

Тъй като $a_n \to a$ и $b_n \to b$, то $\exists \nu_1, \nu_2$ такива, че при $n > \nu_1 \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а при $n > \nu_2 \Rightarrow b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$
Но тогава при $n > \max(\nu_1, \nu_2)$ имаме едновременно $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \Longrightarrow b_n < a_n \to$ противоречие.
Следователно $a \le b$.

2) Аритметични действия със сходящи редици.

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към a и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към b
Тогава:
а) $a_n + b_n \to a + b$
б) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

Ако $b \neq 0$, то $b_n \neq 0$ за големи n (при $n \ge n_0$) и
в) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Д-во: а) Нека $\varepsilon > 0$. Тъй като $a_n \to a$ и $b_n \to b$, то $\exists \nu_1, \nu_2$ такива, че при $n > \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2$, а при $n > \nu_2 : |b_n - b| < \varepsilon/2$
$\Rightarrow$ При $n > \max(\nu_1, \nu_2)$ е изпълнено

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon \Rightarrow |(a_n-a)+(b_n-b)| < \varepsilon \Rightarrow |a_n-a| + |b_n-b| < \varepsilon$$

$\Rightarrow a_n + b_n \to a+b$

б) Трябва да проверим, че разликата $a_nb_n - ab$ е „малка" за големи номера n. Имаме

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| = |(a_n-a)b_n + (b_n-b)a| \le$$
$$\le |a_n-a||b_n| + |b_n-b||a|$$

Тъй като $|a_n - a| \to 0$ и $|b_n - b| \to 0$, а $\{b_n\}$ - ограничена $\Rightarrow$
$\Rightarrow |a_n - a||b_n| \to 0$, а $|a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \to 0$ (от а)).
$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \to 0$, т.е. $a_n b_n \to ab$

(30) Def: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към $+\infty$, ако за всяко число $C > 0$ съществува такова ν, че при $n > \nu$ е изпълнено неравенството $a_n > C$

Твърдение Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от положителни числа, т.е. $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ Тогава

1) ако $a_n \to 0$, то $\frac{1}{a_n} \to +\infty$

2) ако $a_n \to +\infty$, то $\frac{1}{a_n} \to 0$

Д-во: 1) Нека $a_n \to 0$. Взимаме произволно число $C > 0$.
$\frac{1}{a_n} > C > 0 \iff 0 < a_n < \frac{1}{C}$. Тъй като $a_n \to 0$, то $\forall \nu$, такова че при $n > \nu$ имаме $0 < a_n < \frac{1}{C}$, т.е. $\frac{1}{a_n} > C$

2) Нека $a_n \to +\infty$. Взимаме произв. число $\varepsilon > 0$.
Тъй като $a_n \to +\infty$, то $\exists \nu$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

Def. Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към $-\infty$, ако за всяко число $C < 0$ $\exists \nu$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено $a_n < C$.

Твърдение Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от отрицателни числа, т.е. $a_n < 0$ за $\forall n$.

1) Ако $a_n \to 0$, то $\frac{1}{a_n} \to -\infty$

2) Ако $a_n \to -\infty$, то $\frac{1}{a_n} \to 0$

Лема за двамата полицаи

Нека са дадени три редици от реални числа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяващи неравенствата $a_n \le b_n \le c_n$ за $\forall n$. Тогава, ако $a_n \to l$ и $c_n \to l$, то $b_n \to l$

Д-во: Избираме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $a_n \to l$ и $c_n \to l$, то $\exists \nu_1$ и ν_2, такива, че при $n > \nu_1$ е изпълнено $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ и при $n > \nu_2 \Rightarrow l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. Тогава при $n > \max(\nu_1, \nu_2)$ имаме

$l - \varepsilon < a_n \le c_n < l + \varepsilon$. Но $a_n \le b_n \le c_n \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow b_n \to l$

Следствие: Ако имаме $0 \le b_n \le c_n$ и $c_n \to 0$, то $b_n \to 0$

Следствие: Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към 0, а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица, то $a_n b_n \to 0$