29. Интегриране на ирационални ф-ии. Биномен диференциал. Субституции на Ойлер.

1) Ф-ии от вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$. Търсим такава смяна на променливата $x=\varphi(t)$, чрез което да сведем пресмятането до интеграл от рационална ф-я

Полагаме:

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \iff t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \iff x=\varphi(t) = \frac{b-dt^m}{ct^m-a}$$

Тогава:

$$\int R\,dx = \int R(\varphi(t), t)\,\varphi'(t)\,dt$$

2) Интеграли от диференциален бином.

Израз от вида: $x^m(a+bx^n)^p\,dx$; m, n, p - рационални числа

При какви стойности на m, n, p - интегралът от ф-ята се пресмята с явни ф-ии

<u>I случай:</u> Ако p - цяло число $\Rightarrow \int R(x^m, x^n)\,dx$.

Полагаме $x = t^k$ (k - НОК на знаменателите на дробите m и n)

<u>II случай:</u> Нека $\frac{m+1}{n}$ - цяло. Полагаме $z=x^n \iff x = z^{\frac{1}{n}}$.

Тогава $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p\, z^{\left(\frac{m+1}{n}-1\right)}\,dz$

<u>III случай:</u> $\frac{m+1}{n}+p$ е цяло. Тогава след смяната $x = z^{\frac{1}{n}}$ получаваме

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{\left(\frac{m+1}{n}+p-1\right)}\,dz$$

3. Интеграли от вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

I Субституция на Ойлер:

Нека $a>0$. Полагаме $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$

Тогава $ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2 \Rightarrow bx+c = 2\sqrt{a}\,xt + t^2$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}, \quad dx = \frac{2t(b-2\sqrt{a}\,t)+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt$$

Така свеждаме пресмятането на интеграла до интеграл от рационална ф-я на t

II Субституция на Ойлер:

Нека $c>0$. Полагаме $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$

Тогава $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$, откъдето

$$\Rightarrow x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \quad dx = \frac{2\sqrt{c}(a-t^2)+2t(2t\sqrt{c}-b)}{(a-t^2)^2}\,dt$$

III Субституция на Ойлер:

Нека ax^2+bx+c има реални нули x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$.

Тогава $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Полагаме $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

Тогава $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2x_1t(t^2-a)-2t(x_1t^2-ax_2)}{(t^2-a)^2}\,dt$$

$$dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}\,dt$$