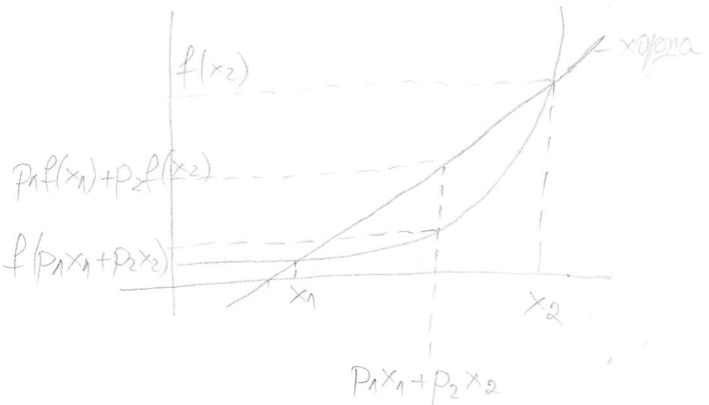
23. Изпъкнали ф-ции.

Def Ф-ята f се нарича изпъкнала в интервала Δ, ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in \Delta$ и за всеки две числа p_1, p_2, удовлетворяващи $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ и $p_1 + p_2 = 1$,
е изпълнено неравенството

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \le p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$$

Ако винаги е налице строго неравенство $\Rightarrow$ f строго изпъкнала
Коеф. на p_1, p_2 се определят от ф-лите:

$$p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



У-ето на хордата добива вида:

$$y = l(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Ако за $f(x)$ е изпълнено обратното неравенство, т.е.
$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \le f(p_1 x_1 + p_2 x_2)$, то ф-ята е вдлъбната.

T Всяка изпъкнала ф-я дефинирана в отворен интервал е непрекъсната

Д-во: Нека x_0 - произв. т. и $x_1 < x_0 < x_2$. Означ. $y = l_1(x)$ - у-ето на хордата прекарана през точките от графиката, лежащи на x_1 и x_2,
$y = l_2(x)$ — –||– т. x_0 и x_2
Нека $x \in (x_1, x_0)$, тогава $f(x) \le l_1(x)$
Тъй като $x \notin (x_0, x_2) \Rightarrow f(x) \ge l_2(x)$
Тъй като $l_1(x_0) = l_2(x_0) = f(x_0)$, то от $l_2(x) \le f(x) \le l_1(x)$ и от лемата за полицаите $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $\Rightarrow$ f - непрекъсната отляво в x_0

Аналогично, ако $x \in (x_0, x_2)$, то $l_1(x) \le f(x) \le l_2(x)$ $\Rightarrow$ f - непрек. и отдясно

Критерий за изпъкналост

Т Диференцируема ф-я f е изпъкнала ~~стъка~~ $\Leftrightarrow$ f' – монотонно растяща

Д-во: Тъй като $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1$, то ако $x = p_1 x_1 + p_2 x_2$

У-вието за изпъкналост $f(x) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$ може да се запише:

$$p_1\big(f(x_1) - f(x)\big) + p_2\big(f(x_2) - f(x)\big) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \text{за } \forall x \in (x_1, x_2)$$

Необходимост: Правим граничен преход при $x \to x_1$ и получаваме:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ а при } x \to x_2: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2) \Rightarrow f' \text{ – монотонно растяща}$$

Достатъчност: Да допуснем, че f' е монотонно растяща

От Т за крайните нараствания имаме

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \text{ и } \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

$\Rightarrow \xi_1 < \xi_2$ и поради монотонноста на f получаваме:

$$f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$$

Т. Една диференцируема ф-я е изпъкнала $\Leftrightarrow$ графиката и лежи над всяка своя допирателна, т.е. при всеки избор на x и x_0 имаме: $f(x) \geq l_{x_0}(x)$

Т Двукратно диференцируемата ф-я е изпъкнала $\Leftrightarrow$ навсякъде в дефиниционния интервал имаме $f''(x) \geq 0$