21. Ф-ли на Лагранж и Коши за остатъчния член. Развитие на някои елементарни ф-ии в ред на Тейлър

Ф-ла на Лагранж

Нека $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в някаква околност на a и x е точка от тази околност. Тогава в интервала $((a,x),(x,a))$ $\exists$ т. ξ, за която е в сила равенството:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

При тази ф-ла на остатъчния член, реда на Тейлър добива вида:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

В частност при $n=0$: $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$

Ф-ла на Коши

При направените по-горе предположения съществува $\theta \in (0,1)$, така че

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}$$

Развитие на някои елементарни ф-ии.

1. Нека $f(x) = e^x$.

В този случай за $\forall n$ имаме $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

По ф-лата на Лагранж: $R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$, при $n \to \infty$ $R_n \to 0$

2) Нека $f(x)=\sin x$

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0)=0$ при n-четно

$f^{(n)}(x)=(-1)^{k-1}$ при n-нечетно, $n=2k-1$

Тогава в реда на Маклорен участват само <u>нечетни степени</u> на x.

Ф-ла на Тейлър от ред $2n$ има вида:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2n}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x)$$

Отново използваме ф-лата на Лагранж за R_n:

$$R_{2n}(x)=\sin\left(\xi+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и отново при $n\to\infty$ $R_n\to 0$ за $\forall x$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

3) Нека $f(x)=\cos x$

$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0)=0$ при n-нечетно

$f^{(n)}(x)=(-1)^k$ при n-четно, $n=2k$.

В реда на Маклорен участват само <u>четни степени</u> на x:

$$\boxed{\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

при $n\to\infty$ $R_n\to 0$ за $\forall x$

4) Нека $f(x)=(1+x)^\alpha$

5) Нека $f(x)=\ln(1+x)$

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, откъдето имаме $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ при $n>0$ и $f^{(0)}(0)=0$

Отново при $n\to\infty$, остатъчния член клони към 0.

При $|x|<1$ получаваме:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$