20. Формула на Тейлър с остатъчен член ~~във~~ във формата на Пеано.

Ф-ла на Тейлър за полиноми:

Нека $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

Диференцираме n-пъти и получаваме

$$p' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n.a_n x^{n-1}$$

$$p'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$p^{(n)} = 1.2.3.4 \dots n.a_n$$

Полагаме $x = 0 \Rightarrow a_k = \dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, \dots, n$

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Фиксираме a и нека заменим x с $x-a$. Полагаме $x - a = y$

Разгл. $q(y) = p(a+y)$

$$\Rightarrow q(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_n y^n \Rightarrow b_k = \frac{q^{(k)}(0)}{k!}$$

При всяко естествено k имаме:

$$q^{(k)}(y) = p^{(k)}(a+y), \text{ откъдето } b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

Нека в представянето на $q(y)$ заместим коеф. b_k и y с $x-a$

като имаме предвид $q(x-a) = p(x)$, имаме:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

или $p(x) = p(a) + \dfrac{p'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \dfrac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Получената ф-ла се нарича ф-ла на Тейлър

При $a = 0 \Rightarrow$ ф-ла на Маклорен за полиноми.

Ред на Тейлър

Нека f е n-кратно диференцируема в т. a
$\Rightarrow$ a - вътрешна т. от деф. област, нейните произв. до ред $n-1$ съществуват в някаква околност на a.

$\Rightarrow$ Дефинираме полинома:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$T_n(x)$ - полином на Тейлър от ред n за ф-ята $f(x)$ в т. a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \rightarrow \text{ред на Тейлър}$$

Лема: T_n е единственият полином от степен n, чиито производни в т. a от ред n включително, съвпадат със съответните производни на f в тази точка

За да оценим колко се отличават стойностите на полиномите на Тейлър в дадена точка x от стойността на ф-ята в тази точка, се въвежда величината $\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$ - остатъчен член.

Тогава можем да запишем: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$

Ф-ла на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано:

Нека $f(x)$ - ф-я, притежаваща производни до ред n включително в т. a. Тогава за остатъчния член е в сила оценката:

$$R_n(x) = o((x-a)^n)^*$$

откъдето ф-лата на Тейлър добива вида:

$$f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

За дадена ф-я $h(x)$ равенството $h(x) = o((x-a)^n)$ означава,

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = 0$$