# 2. Сходящи редици – дефиниция и основни свойства. Сходимост на монотонни редици.

**Def.** Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\nu$, че при $n > \nu$ имаме $|a_n - a| < \varepsilon$. Редицата, която има граница, наричаме сходяща.


Геометричен смисъл: Разгл. произволен интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Ако $a_n \to a$, то всички членове на редицата, чиито номера са по-големи от някакво число $\nu$ се намират в този интервал, т.е. при $n > \nu$ е изпълнено $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Longleftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Или: ~~Ако~~ $a_n \to a$ тогава и само тогава, когато извън произволна симетрична околност $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ на $a$ има само краен брой членове.

## С-ва на сходящите редици

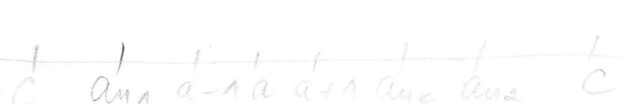
1) Ако към една сходяща редица добавим (или махнем) краен брой нови членове, то ще получим пак сходяща редица със същата граница.

Д-вото следва от геометричния смисъл на определението за сходимост.

Ако $a_n \to a$, то за $\forall \varepsilon > 0$ вън от $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ имаме само краен бр. членове на редицата $\{a_n\}$. Добавянето или махането на краен бр. членове няма да измени нищо – пак вън от всеки интервал от вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ще има краен бр. членове на новата редица

2) Всяка сходяща редица е ограничена.

Д-во: Ако $a_n \to a$, то извън интервала $(a-1, a+1)$ има само краен брой членове – нека те са $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$. Означаваме с $C$ най-голямото измежду ~~тези~~ числата $|a_{n_1}|, \dots, |a_{n_k}|, |a-1|, |a+1|$ и получаваме, че $|a_n| \le C$ за $\forall n$



Сходимост на монотонни редици

<u>Def</u> Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща, ако $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$, т.е. ако $a_n \leq a_{n+1}$ за всяко $n$.

Казваме, че редицата е монотонно намаляваща, ако $a_n \geq a_{n+1}$, за $\forall n$.

$\Longrightarrow$ Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна, ако тя е монотонно растяща или монотонно намаляваща.

<u>Т1</u> Всяка ограничена монотонна редица е сходяща.

<u>1-во:</u> Разгл. монотонно растяща редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Полагаме $a = \sup\{a_n\}$. Ще покажем, че $a_n \to a$.
Взимаме произв. число $\varepsilon > 0$. Тъй като $a$ е най-малката от горните граници, то $a - \varepsilon$ не е горна граница на редицата. $\Rightarrow \exists \nu$, такова че $a - \varepsilon < a_\nu$. Но тогава при $n > \nu$ имаме $a - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq a$, т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$, което доказва твърдението.