18. Необходими и достатъчни условия за локален екстремум.

<u>Def</u>. Нека x_0 е вътрешна точка от деф. област на ф-ята f. Казваме, че f има локален максимум, ако $\exists$ околност $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, така че Δ се съдържа в деф. област на f и $f(x) \leq f(x_0)$ за $\forall x \in \Delta$

Аналогично, за $\forall x \in \Delta$ е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$, ще казваме, че f притежава локален минимум в т. x_0

T | Ферма | Да предположим, че f притежава локален екстремум в т. x_0 и е диференцируема. Тогава $f'(x_0) = 0$

Правило: Нека f - дефинирана и диференцируема в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Да изчислим стойностите $f(x)$ във всички точки, за които $f'(x) = 0$, и в граничните точки a и b. Тогава най-голямата от получените стойности е max, а най-малката е min

Правило: Нека f - дефинирана и диференцируема в интервала $(-\infty, +\infty)$ и нека f има граници в обобщен смисъл при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$. Тогава за точна горна граница $\sup f(x)$ на ф-ята:

1) $\sup f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

2) $\sup f(x)$ се достига в стационарна точка на $f(x)$

<u>Достатъчно условие I</u>

Нека в околност на x_0 ф-ята $f(x)$ притежава непрекъсната производна, която се анулира в x_0. Тогава:

1) ако $f'(x)$ сменя в x_0 от $+$ към $-$, то $f(x)$ има лок. max

2) ако $f'(x)$ сменя в x_0 от $-$ към $+$, то $f(x)$ има лок. min

3) ако $f'(x)$ запазва знака си в някаква околност на т. x_0 и не се нулира, то $f(x)$ няма лок. екстремум в x_0

Достатъчно условие II

Нека $f(x)$ притежава първа производна в околност на x_0 и втора производна в самата точка x_0. Тогава:

1) ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то в т. x_0 имаме min

2) ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то в т. x_0 имаме max

$\boxed{\text{Т.}}$ Да предположим, че f притежава в т. x_0 производни от ред n включително, $n > 1$. Нека имаме:

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad , f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Тогава:

1) ако n – нечетно $\Rightarrow f$ няма лок. екстремум

2) ако n – четно и $f^{(n)} > 0 \Rightarrow f^{(n)}$ има лок. min

3) ако n – четно и $f^{(n)} < 0 \Rightarrow f^{(n)}$ има лок. max