17. Теореми на Лопитал

Т1 Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в (a,b), като навсякъде в него $g'(x) \neq 0$.

Нека $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Нека освен това $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ съществува (т.е. $\frac{f'}{g'}$ има крайна граница или $\to\infty$)

$$\boxed{\text{Тогава: } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Д-во: Полагаме $f(a)=0$ и $g(a)=0$.

Така ф-иите са деф. и непрек. в $[a,b)$ и диференцируеми. Избираме т. $x \in (a,b)$ и прилагаме в затв. интервал $[a,x]$ Т за крайните нараствания:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad ; \ \xi \in (a,x)$$

Нека $\{x_n\}$ е произволна редица, клоняща към a и нека $\{\xi_n\}$ е ред. от съответните точки, получена от Т за крайните нараствания. Тъй като ξ_n лежи м/у a и x_n, то $\xi_n \to a$

Тогава $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Т.2 Нека f и g са дефинирани и притежават непрекъснати производни в (a,b), като $g'(x) \neq 0$ навсякъде в (a,b).

Нека $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

Нека $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ съществува в обобщен смисъл.

Тогава $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Т.3 Нека f и g са дефинирани и притежават непрекъснати производни в интервала $(c, +\infty)$, като $g'(x) \neq 0$ навсякъде.
Нека $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ и нека $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ съществува.

Тогава $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Т.4 Нека f и g са дефинирани и — " —
Нека $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ и нека $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'}{g'}$ същ.

Тогава $$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'}{g'}$$

~~Д-во: Нека $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$~~

~~Можем да считаме, че $c>0$. Тогава F и G са определени и диференцируеми в крайния интервал $(0, c^{-1})$~~