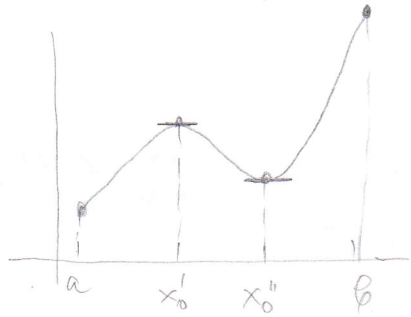
16. Теореми на Рол, Лагранж и Коши

Def. f има локален max(min) в т. x_0, ако дефин. област на f съдържа такъв отворен интервал $\Delta \ni x_0$, че $f(x) \le f(x_0)$
Функционалната стойност на $f(x_0)$ наричаме локален max (min)

T. Ферма Ако f има локален екстремум в т. x_0 и е диференцируема в x_0, то $f'(x_0)=0$

Д-во: Ако f има лок. екстр. в т. x_0, $\exists$ такава околност на x_0 от вида $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в която стойностите на f са по-малки от $f(x_0)$



Тогава за $0<h<\delta$, имаме

$$0 \ge \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ при } h \to 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \le 0$$

За $0<h<-\delta$, имаме

$$0 \le \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ при } h \to 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \ge 0$$

$\Rightarrow$ При лок. ~~ш~~ max $f'(x_0)=0$

T. Рол Нека f е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и диференцируема в (a,b) и $f(a)=f(b)$
Тогава $\exists$ точка $\xi \in (a,b)$, че $f'(\xi)=0$

Д-во: Тъй като f - дефин. и непрекъсната в затворен интервал $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f има най-голяма и най-малка стойности (Вайерщрас)

1| f - приема max или min си стойности в т. ξ, вътрешна за интервала $[a,b]$. Тогава f има лок. екстремум в. ξ и $f'(\xi)=0$

2| f - приема max или min стойности в т. a и b. Тогава от условието $f(a)=f(b)$ получаваме, че най-голямата и най-малката стойност на f съвпадат $\Rightarrow f = const$ и $f'(x)=0$ за $\forall x \in (a,b)$.

Т. (за крайните нараствания, на Лагранж)

Нека f - непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b). Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Д-во: Разгл. ф-ята $h(x) = f(x) - kx$, където $k = const$, такава, че
$h(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = h(b)$, т.е. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Функцията $h(x)$ удовлетворява условията на Т. Рол. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ такава точка $\xi \in (a, b)$, че $h'(\xi) = f'(\xi) - k = 0$

Оттук получаваме $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Т. (Обобщена Т. на Коши)

Нека f и g са дефинирани и непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$. Предполагаме, че f и g са диференцируеми в отворения интервал (a, b) и $g'(x) \neq 0$ за $\forall x \in (a, b)$.
Тогава $\exists$ такава точка $\xi \in (a, b)$, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Д-во: Прилагаме Т. Рол за $f(x) = f(x) - k.g(x)$, където $k = const$ е избрана така, че $h(a) = f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$,
т.е. $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

По Т. Рол $\exists$ такава т. $\xi \in (a, b)$, че $h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

T] Нека f е дефинирана и диференцируема в (a, b). Ако $f'(x) = 0$ за $\forall x \in (a, b)$, то $f = const$ в (a, b)

Д-во: Фиксираме произв. т. $x_0 \in (a, b)$. По теоремата за крайните нараствания имаме

$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$ за $\forall x \in (a, b)$

T] Ако f е дефинирана и диференцируема в (a, b), то тя е монотонно растяща (намаляваща) в $(a, b) \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0$ (≤ 0) за $\forall x \in (a, b)$

Д-во: f - монотонно растяща диференцируема в $x \in (a, b)$

Тогава за произволно $x \in (a, b)$ при достатъчно малки $h > 0$ имаме $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow$ при $h \to 0$ получаваме $f'(x) \geq 0$