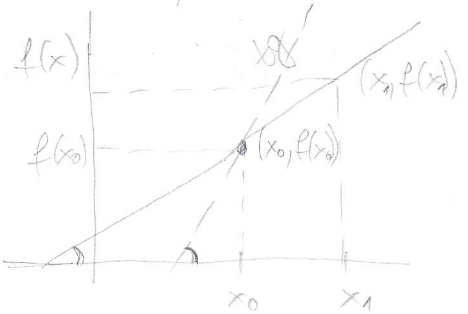
14. Производна – геометричен и физичен смисъл. Диференциране на аритметични действия.

Физичен смисъл

Нека $f(t)$ – физична величина, зависеща от времето t.
Средна скорост на изменение на $f(t)$ за интервала от време $[t, t_0]$ наричаме частното: $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

Геометричен смисъл

Разгл. графиката на ф-ята $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (крива линия в Oxy)



Фиксираме $x_0 \in (a,b)$ и нека $x_1 \neq x_0$
Правата наричаме секуща.
Нека x_1 да клони към x_0 и разгл. как се изменя положението на секущите.

Ако секущите се „приближават" до една фиксирана права в т. $(x_0, f(x_0))$ то тази права е допирателна в т. $(x_0, f(x_0))$

$y = f(x_0) - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$ → у-е на секущата през точките $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$

Ъгловия коефициент на правата е равен на тангенса на ъгъла, който правата сключва с оста Ox.
В случая ъгловия коефициент е равен на частното $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
Нека секущите клонят към някаква гранична права, когато $x_1 \to x_0$
Тя има у-е $y = f(x_0) - k(x-x_0)$; $k = tg\alpha$
Тогава ъгловите коефициенти на секущите трябва да се приближават към k, когато x_1 се приближава към x_0, т.е.

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = k$$

Опр. на производна: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на т. x_0
Изразът $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ се нарича диференчно частно на f в т. x_0

Def Казваме, че $f(x)$ е диференцируема в т. x_0, ако диференчното частно има граница при x клонящо към x_0.

Тази граница се нарича производна на f в т. x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Геометрически се тълкува като ъглов коефициент на допирателната към графиката на ф-ята f в т. $(x_0, f(x_0))$

Твърдение. Ако $f(x_0)$ е диференцируема в т. x_0, то тя е непрекъсната

Д-во: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

Def Казваме, че $f(x)$ има лява/дясна ~~граница~~ производна в т. x_0, ако съществуват границите

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Твърдение: ф-ята $f(x)$ е диференцируема в т. x_0 точно тогава, когато притежава лява и дясна производни в x_0 и те съвпадат

Def: Нека $f(x)$ е дефинирана в отворен интервал Δ.

Казваме, че f е диференцируема, ако тя е диф. във всяка точка от интервала Δ.

Ако $\Delta = [a, b]$ е затворен интервал, то f - дифер. в Δ, ако f - диференцируема в (a, b) и има дясна производна в т. a и лява производна в т. b

Производна - съпоставяйки на $\forall x \in \Delta$ произв. $f'(x)$ на ф-ята f в т. x

Диференциране - на една диференцируема ф-я съпоставяме нейната производна.

Правила за диференциране:

Нека $f(x)$ и $g(x)$ - дефинирани в отворения интервал Δ и диференцируеми в него.

Тогава $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ при $g \neq 0$ са диференцируеми и

1) $(f+g)' = f' + g'$

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)] - (f(x)+g(x))}{h} \to f'(x) + g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \to f' + g'$$

2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

2) $$(f \cdot g)' = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) g(x+h) + f(x) g(x+h) - f(x) g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x+h) = f' \cdot g + g \cdot f'$$

Следствие: Нека $f(x)$ е константа. Тогава:

$$(c f)' = c' f + c . f' = c . f' \quad , \text{ понеже } c' = 0$$