Теорема на Вайерщрас

Ако една ф-я е дефинирана и непрекъсната в краен затворен интервал, то тя е ограничена и има най-голяма и най-малка стойности.

Д-во: Нека $f:[a,b]\to R$ е непрекъсната. Ще докажем, че тя е ограничена.

Допускаме противното: Тогава за $\forall n$ $\exists$ т. $x_n\in[a,b]$, че $|f(x_n)|\geq n$

Разгл. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тъй като тя е ограничена $\Rightarrow$ Т. Болцано-Вайерщрас можем да изберем сходяща подредица $x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$

Но поради непрекъснатостта на f имаме $f(x_{n_k})\to f(x_0)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ редицата $f(x_{n_k})$ - трябва да бъде ограничена

От друга страна, по построение имаме $|f(x_{n_k})|\geq n_k\to+\infty$

т.е. стигаме до противоречие.

Полагаме $M=\sup\{f(x): x\in[a,b]\}$. M - функционална стойност на f?

Допускаме противното: $f(x)<M$. Тогава $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ е деф. и непр. в интервала $[a,b]$, понеже $M-f(x)\neq 0$

$\Rightarrow g(x)$ - ограничена, т.е. $\exists C=const>0$, такава че

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}<C \quad \text{за } \forall x\in[a,b] \Rightarrow f(x)<M-\frac{1}{C}\to \text{противоречие}$$

$\Rightarrow$ Полученото противоречие доказва съществуването на $x'\in[a,b]$ такова, че $M=f(x')\Rightarrow f$ има най-голяма стойност

Полагаме: $m=\inf\{f(x): x\in[a,b]\}$

Ако допуснем, че за $\forall x\in[a,b]$ имаме $f(x)>m$, то ф-ята $h(x)=\frac{1}{f(x)-m}$ ще бъде добре дефинирана и непрекъсната в $[a,b]\Rightarrow$ ограничена.

Оттук получаваме противоречие.

Ако C е горна граница на h, то за $\forall x\in[a,b]$ имаме

$$h(x)=\frac{1}{f(x)-m}\leq C\to f(x)\geq m+\frac{1}{C}\quad\to \text{противоречие}$$

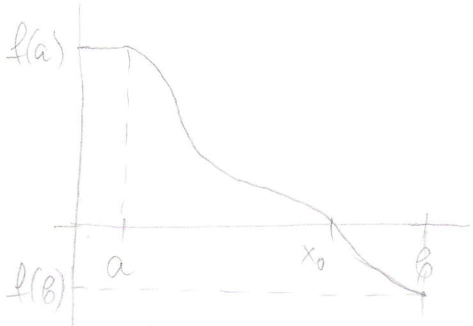
$\Rightarrow\exists\, x''\in[a,b]$, че $f(x'')=m$.

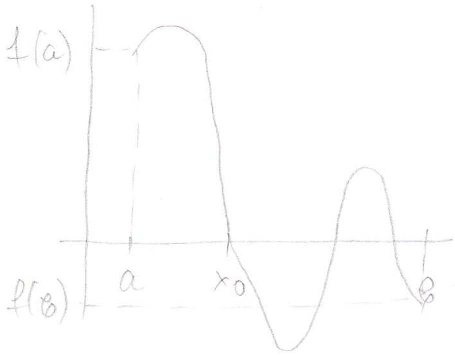
Следствие: Ако Δ е краен затворен интервал и $f:\Delta - R$ е непрекъсната ф-я, то $f(\Delta)$ е краен и затворен интервал.

Def f - равномерно непрекъсната, ако $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, т.ч. щом $x', x''\in D$ и $|x'-x''|<\delta$, то $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

Непрекъснати ф-ии в компактен интервал

T| Нека $f(x)$ е непрекъсната и $f(a)f(b)<0$.
Тогава съществува точка x_0 такава, че $f(x_0)=0$





Д-во: Разгл. случая при $f(a)>0$, $f(b)<0$

Разгл. множ. $A=\{x\in[a,b];\ f(x)>0\}$

Полагаме $x_0=\sup A$. Ще покажем, че $f(x_0)=0$

Ако $f(x_0)>0$, то x_0 ще има околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, в която $f(x)>0$

От друга страна, съгласно опр. на множ. A, трябва за $\forall x>x_0$ да имаме $f(x)\leq 0 \Rightarrow$ противоречие.

Аналогично при $f(x)<0$ пак има противоречие $\Rightarrow f(x_0)=0$

Следствие 1 (Теорема за междинните стойности)

Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава всяко число C между $f(a)$ и $f(b)$ е функционална стойност на f, т.е. имаме $C=f(x_0)$ за някое $x_0\in[a,b]$

Геометричен смисъл: Ако C е число м/у $f(a)$ и $f(b)$, то правата с у-е $y=C$ пресича графиката на ф-ята f.

Следствие Ако Δ е интервал и $f:\Delta\to\mathbb{R}$ е непрекъсната ф-я, то множ. от нейните функционални стойности е интервал.