10. Граници на ф-ии и непрекъснатост – дефиниции на Хайне и Коши. Принцип на Коши за ф-ии.

Def (Хайне) Казваме, че ф-ята $f: D \to R$ клони към числото A при $x \to x_0$, ако за всяка редица $\{x_n\} \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, имаме $f(x_n) \to A$

С-ва на границите на ф-ии

Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат обща дефиниционна област D и нека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогава имаме:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim g(x)$

3) ако $B \neq 0$, то $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

4) ако $f(x) \leq g(x)$ за $\forall x \in D$, то $A \leq B$

Д-во: Нека $\{x_n\} \to x_0$. По условие $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ и $g(x) \to B$, то $\{f(x)\} \to A$ и $\{g(x)\} \to B$

1) $f(x_n) + g(x_n) \to A + B \Rightarrow f(x) + g(x) \to A + B$ при $x \to x_0$

- - - - -

4) тъй като $f(x_n) \leq g(x_n)$, то $A \leq B$.

Лема за двамата полицаи

Нека $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ за $\forall x \in D$.

Ако ~~f(x)~~ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = C$, то $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = C$

Ако $\{f(x)\} \to C$ и $\{h(x)\} \to C$ за $\forall n$ имаме $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$

$\Rightarrow \{g(x)\} \to C$

Граница на съставна ф-я

Нека са дадени ф-ите $f(x): D \to D_1$ и $g(y): D_1 \to R$. Предполагаме още, че $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ и $f(x) \neq A$ за $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$. Тогава, ако $\exists \lim_{y \to A} g(y)$, то:

$$\lim_{y \to a} g(y) = \lim_{x \to x_0} g(f(x))$$

Д-во: Ако $x_n \to x_0$, то $\{f(x)\} \to A$ или $f(x_n) \to A$ и $f(x_n) \neq A$

$$f(x_n) \in D_1 \Rightarrow g(f(x_n)) \to \lim_{y \to A} g(y)$$

Def (Коши). Казваме, че числото A е граница на ф-ята $f: D \to R$ при $x \to x_0$, ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че щом $0 < |x - x_0| < \delta$ и $x \in D$, то $|f(x) - a| < \varepsilon$

T Определенията на Коши и Хайне за граница на ф-я са еквивалентни.

Д-во: Допускаме, че за някоя ф-я $f: D \to R$ числото A е граница при $x \to x_0$ в смисъл на Хайне, но условието в определението на Коши не е изпълнено. Тогава $\exists \varepsilon_0 > 0$, че за $\forall \delta > 0$ $\exists$ т. $x \in D$, удовлетворяваща $0 < |x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$

Даваме на δ последователни стойности $\frac{1}{n}$ и получава x_n такива, че $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

$\{x_n\} \to x_0$ понеже $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. От друга страна $\{f(x_n)\} \not\to A$ понеже $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ за $\forall n$. Това противоречи на предположението, че $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ по определението на Хайне.

$\Rightarrow$ Ако ф-ята f има граница A съгласно опр. на Хайне, то тя има същата граница по опр. на Коши.

Твърдение: Ако $\lim_{x \to x_0} f(x) = A > 0$, то $\exists \delta > 0$, че щом $0 < |x - x_0| < \delta$ и $x \in D$ имаме $f(x) > \frac{1}{2} A$

T | Ф-ята $f: D \to R$ има граница при $x \to x_0 \iff$ е изпълнено следното условие на Коши:

За $\forall \varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че щом $x', x'' \in D$ и $0 < |x' - x_0| < \delta$, $0 < |x'' - x_0| < \delta$, имаме:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Нео: Да предположим, че $f(x) \to A$ при $x \to x_0$

Взимаме произволно $\varepsilon > 0$ и избираме $\delta > 0$ така, че щом $x \in D$ и $0 < |x - x_0| < \delta$ имаме $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогава, ако $x', x'' \in D$ и $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, то

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \le$$

$$\le |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Което доказва необходимостта от условието на Коши.